2 Modelo

Considere uma economia com dois períodos na qual existe incerteza sobre o estado da natureza do segundo período. Os períodos são denotados por $t \in \{0,1\}$ e supomos que no primeiro período, $t=0$, não existe incerteza (i.e., existe apenas um estado da natureza denotado por $s=0$) No segundo período, $t=1$, um estado da natureza é revelado entre um número finito de possibilidades, $s \in S$. Por conveniência de notação, $S^* = \{0\} \cup S$ denota o conjunto de estados da natureza da economia.

Em cada estado da natureza $s \in S^*$ um número finito de bens perfeitamente divisíveis $l \in L$ são negociados em mercados a vista. Esses bens podem ser duráveis no primeiro período e, como em Geanakoplos [11] e Geanakoplos e Zame [12], eles podem sofrer depreciação contingente ao estado da natureza no segundo período. Essa estrutura, dada por transformações lineares que são representadas por matrizes $Y_s \in \mathbb{R}_+^{L\times L}$, garante que quando um agente escolhe uma cesta x em $t=0$, ele espera receber uma cesta $Y_s x$ se o estado da natureza $s \in S$ for realizado. [1] Note que essa estrutura é geral o suficiente para admitir bens perecíveis e perfeitamente duráveis como casos particulares.

Bens em L são negociados, em cada estado $s \in S^*$, a preços $p_s \in \mathbb{R}_+^L$. Denotaremos o processo de preços dos bens por $p = (p_s)_{s=0}^S$ e supomos que todos os bens têm oferta líquida positiva, isto é, existe dotações físicas $W_s \in \mathbb{R}_{++}^L$ para cada estado $s \in S^*$.

[1] Com mais notação poderíamos ter funções de depreciação personalizadas. Além disso, poderíamos ter uma estrutura de depreciação caracterizada por funções côncavas e ainda seria possível garantir a existência de equilíbrio. Entretanto, como permitimos a retenção do colateral depreciado como um meio de forçar o pagamento das promessas, não ficaria claro qual seria a cesta de colateral depreciado quando os agentes consumissem mais que o colateral requerido. Considere, por exemplo, o seguinte caso: Existe apenas um bem e sua depreciação é dada por $Y_s(x) = \sqrt{x}$ para todos os estados da natureza. Se um tomador de empréstimo é obrigado a constituir 1 unidade de colateral e decide consumir um total de 4 unidades do bem, teremos que sua cesta de bens depreciados será de 2 unidades do bem em cada estado da natureza. Neste caso, qual seria a sua cesta de colateral depreciado? $Y_s(1) = 1$, $\frac{Y_s(4)}{4} = \frac{1}{2}$ ou $Y_s(4) - Y_s(3) = 2 - \sqrt{3} \cong 0.27$. Todas as repostas são razoáveis, mas diferentes entre si. Por outro lado, com funções de depreciação lineares as três respostas acima seriam iguais.

Um número finito de agentes, $h \in H$, negocia bens em cada estado da natureza escolhendo alocações de consumo no espaço de bens $X_s = \mathbb{R}^L_+$. O espaço de consumo da economia é dado por $X = \Pi_{s \in S^*} X_s$. Além disso, como em Gale e Mas-Collel [9], em cada estado da natureza os agentes recebem um renda nominal inicial dada pelas funções $m^h_s(p_s) \geq 0$. Note que supondo que os agentes recebem, em cada estado $s \in S^*$, dotações reais $\omega^h_s \in \mathbb{R}^L_+$, o arcabouço usual de modelos de equilíbrio geral, $m^h_s(p_s) = p_s \omega^h_s$, é um caso particular da nossa estrutura de funções de renda. Usamos esta estrutura geral para contornar a hipótese forte de sobrevivência, i.e., $\omega^h = (\omega^h_s)_{s \in S} \gg 0$ para todo $h \in H$.[2]

Na nossa economia, consideramos um estrutura financeira em que os ativos estão sujeitos a risco de crédito. Permitimos que os tomadores de empréstimo negociem ativos reais, chamados ativos primitivos, que são sujeitos a default e protegidos por requerimentos físicos de colateral, que podem depender do nível de preços. Por outro lado, intermediários financeiros, que são limitados a fazer um pool das promessas individuais, fazem uma securitização desses contratos de dívida, vendendo derivativos para os emprestadores.

Para proteger os investidores do risco de crédito, é suficiente impor mecanismos na estrutura financeira dos empréstimos originais de forma a punir os devedores em caso de default. Nessa direção, supomos que mecanismos de punição, tais como a apreensão do colateral físico e a punição via penalidades extra-econômicas, são permitidos.

Os ativos primitivos são divididos em classes e, para uma dada classe desses contratos de dívida, existe um número finito de derivativos. Esses derivativos podem ser de dois tipos: (i) ativos *Pass-through* (i.e., os pagamentos feitos pelas promessas originais são distribuídos pro-rata entre os derivativos); e (ii) *Collateralized Loan Obligations* (CLO's), também chamados de *tranches*, (i.e., ativos que têm associados um estrutura de prioridades exógena, que garante que derivativos com um nível de prioridade maior tenham que receber o valor total de suas promessas antes que um derivativo com nível de prioridade mais baixo receba alguma coisa). Por simplicidade, apenas um tipo de derivativos está associado a uma determinada classe de primitivos. Em equilíbrio, analogamente a Araujo, Fajardo e Páscoa [2], o valor agregado das vendas a descoberto para cada classe de primitivos tem que ser igual ao valor das compras totais dos derivativos associados.

[2]Uma forma de ver isto é considerar um outro exemplo de função de renda: $m^h_s(p_s) = p_s \omega^h_s(p_s)$, onde permitimos que a dotação real seja uma função dos preços p_s. Nesse contexto, podemos substituir a hipótese $\omega^h_s \gg 0$ por $p_s \omega^h_s(p_s) > 0$ sempre que $p_s \neq 0$. Isto permite que, para cada preço p_s, $\omega^h_s(p_s)$ não tenha que ser interior.

OBSERVAÇÃO 1 *Apesar de nos mercados financeiros os* Collateralized Loan Obligations *terem um papel importante protegendo os investidores do* risco de prepagamento*, no nosso modelo o principal objetivo desta estrutura é proteger os emprestadores do risco de default. Isto ocorre pois estamos trabalhando em um modelo com apenas dois períodos.*

Em modelo com múltiplos períodos, o risco de prepagamento surge quando os devedores têm um incentivo a pagar suas promessas antes do prazo estabelecido quando eles pegaram o empréstimo. Entretanto, como as promessas dos derivativos são contingentes aos estados da natureza, o valor recebido na forma de um prepagamento tem que ser reinvestido pelo emissor dos derivativos de forma a pagar os seus compromissos futuros. Se os intermediários financeiros não tiverem outras oportunidades de investimento disponíveis que gerem o retorno necessário para honrar as promessas dos derivativos, os prepagamentos feitos pelos devedores vão gerar default para os investidores sem que tenha ocorrido default nos primitivos.

Formalmente, um número finito de ativos primitivos $k \in K$ pode ser vendido no primeiro período a um preço unitário $q_k \in \mathbb{R}_+$. Esses ativos fazem promessas reais $A_{s,k} \in \mathbb{R}^L_+$ em cada estado da natureza $s \in S$. Logo, quando um agente h vende φ^h_k unidades do primitivo k ele paga $q_k\varphi^h_k$ e é obrigado a constituir uma cesta de colateral $C_k(p_0, q_k)\varphi^h_k$. A função $C_k : \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^L_+$ denota a regra, que depende dos preços, dos requerimentos de colateral do ativo k, que todos os agentes são obrigados a constituir.[3]

Nossa abordagem inclui o caso considerado em Geanakoplos e Zame [12], $C_k(p_0, q_k) = \overline{C}_k$, no qual os requerimentos de colateral não dependem do nível de preço. Mais ainda, como em Araujo, Páscoa e Torres-Martínez [3] podemos considerar o caso no qual, com exceção de limites inferiores e superiores, o valor do colateral mantém uma margem fixa f sobre o preço do ativo, $\frac{p_0 C_k}{q_k}$,

$$C_k(p_0, q_k)_1 = \min\left\{\overline{f}, \max\left\{\frac{q_k f}{p_{o,1}}, \underline{f}\right\}\right\},$$

$$C_k(p_0, q_k)_l = 0, \;\; \forall\, l \neq 1.$$

[3]Embora no seu modelo de colateral exógeno, Geanakoplos e Zame [12] permitam que parte dos requerimentos de colateral seja guardada pelos emprestadores, no nosso caso não é clara qual regra deveria ser usada para distribuir as cestas de colateral entre os investidores, porque permitimos um pool de primitivos. Logo, supomos que as garantias físicas são constituídas e guardadas pelos devedores.

Além disso, supomos que, num estado $s \in S$, os agentes podem sofrer não apenas com a perda da cesta de colateral depreciado mas também com outros mecanismos não econômicos, que são incorporados às suas preferências. Esses mecanismos, analogamente as penalidades de utilidade em Dubey, Geanakoplos e Shubik [8], podem induzir os agentes a pagar mais que o valor do colateral em $t = 1$. Então, um agente h, que pega emprestado φ_k^h unidades de k, paga em cada estado $s \in S$ uma quantidade não-negativa $\delta_{s,k}^h$, que é escolhida juntamente com o portfolio, e alocações de consumo e satisfaz $\delta_{s,k}^h \geq \min\{p_s A_{s,k};\, p_s Y_s C_k(p_0, q_k)\}\, \varphi_k^h$.

Na prática, instituições financeiras usam tanto promessas primitivas como ativos *pass-through* como colateral para CLO's. Por simplicidade, supomos que CLO's são lastreados apenas nas promessas originais. Portanto, supomos que os primitivos em K são divididos em dois conjuntos disjuntos $\mathcal{A}_P$ e $\mathcal{A}_C$. Promessas em $\mathcal{A}_P$ irão lastrear ativos *pass-through*, enquanto promessas em $\mathcal{A}_C$ irão lastrear CLO's. Além disso, famílias de ativos são lastreados em classes de primitivos. Então, supomos que os conjuntos $\mathcal{A}_i$, $i \in \{P, C\}$ são divididos exogenamente em ζ_i classes disjuntas $\mathbb{A}_i^g \subset \mathcal{A}_i$, $i \in \{P, C\}$ e $g \in \{1, 2, \ldots, \zeta_i\}$. Por conveniência de notação, quando não existir possibilidade de confusão, nos referimos a uma classe genérica $\mathbb{A}_i^g$ como $\mathbb{A}_i$.

As promessas em uma classe $\mathbb{A}_i$, $i \in \{P, C\}$ são agrupadas em por um intermediário financeiro que emite uma coleção finita, $J(\mathbb{A}_i)$, de ativos reais denotados por $j \in J(\mathbb{A}_i)$. Por simplicidade de notação, denotamos por J a coleção de todos os ativos que podem ser negociados no mercado e por $n(\mathbb{A}_i) = \#J(\mathbb{A}_i)$ o número de derivativos associados a classe de primitivos $\mathbb{A}_i$.

Ativo Pass-through: Dada uma classe $\mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P$, cada derivativo $j \in J(\mathbb{A}_P)$ faz promessas reais $A_{s,j} \in \mathbb{R}_+^L$ em cada estado da natureza $s \in S$ e pode ser comprado pelo preço q_j no primeiro período. Não existe prioridade entre os diferentes ativos $j \in J(\mathbb{A}_P)$ e, portanto, cada *Pass-through* recebe uma parte proporcional ao valor de suas promessas do total de pagamentos feitos pelos ativos primitivos $k \in \mathbb{A}_P$.

Como os mercados são anônimos (i.e. os emprestadores não conhecem a identidade dos tomadores de empréstimo), os agentes esperam receber para cada unidade comprada do ativo $j \in J(\mathbb{A}_P)$ uma percentagem $r_{s,j}$ da promessa $A_{s,j}$. Entretanto, como os agentes sabem que os derivativos em $J(\mathbb{A}_P)$ são *pass-through*, eles esperam taxas de pagamento idênticas para todos eles, isto é, $r_{s,j} = r_{s,j'}$, para todo derivativo j e j' em $J(\mathbb{A}_P)$. Por simplicidade, denotamos a taxa de pagamento comum a todos os derivativos na família $J(\mathbb{A}_P)$ como $r_{s,\mathbb{A}_P}$. Então, se o agente h compra θ_j^h unidades de $j \in J(\mathbb{A}_P)$, com $\mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P$, ele paga um valor $q_j\,\theta_j^h$ e espera receber em cada estado da natureza $s \in S$ uma quantia $r_{s,\mathbb{A}_P}\,p_s A_{s,j}\,\theta_j^h$.

Collateralized Loan Obligation: Dada uma classe $\mathbb{A}_C \subset \mathcal{A}_C$, a família de derivativos $J(\mathbb{A}_C)$ é dada por $J(\mathbb{A}_C) := \{j^1(\mathbb{A}_C), j^2(\mathbb{A}_C), \ldots, j^{n(\mathbb{A}_C)}(\mathbb{A}_C)\}$, onde o CLO $j^m(\mathbb{A}_C)$ tem prioridade sobre os ativos $(j^r(\mathbb{A}_C))_{r>m}$ em relação ao pagamento de retornos. Analogamente aos *Pass-through*'s, cada tranche $j \in J(\mathbb{A}_C)$ faz promessas reais $A_{s,j} \in \mathbb{R}_+^L$ em cada estado da natureza $s \in S$ e pode ser comprado ao preço q_j no primeiro período.

Assim, como os emprestadores sabem a estrutura de securitização (i.e. eles sabem qual a ordem de prioridade entre os ativos em uma mesma família), mas os mercados são anônimos, eles esperam receber para cada unidade comprada do ativo $j \in J(\mathbb{A}_C)$ uma percentagem de suas promessas dada pela taxa de pagamento $r_{s,j}$. Desta forma, como tranches com menor prioridade recebem default antes daqueles com maior prioridade, se um tranche $j^m(\mathbb{A}_C)$ não dá default em um estado $s \in S$, $r_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = 1$, então todos derivativos $j^{m'}(\mathbb{A}_C)$, com $m' < m$, pagam integralmente suas promessas, $r_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = 1$. Mais ainda, se um ativo $j^m(\mathbb{A}_C)$ der default parcial, $r_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} \in (0,1)$, então todos os tranches com maior prioridade pagam integralmente (i.e. $r_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = 1$, para $m' < m$) e todos os derivativos que são subordinados a $j^m(\mathbb{A}_C)$ dão default total (i.e. $r_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = 0$, para $m' > m$). Portanto, podemos supor que as taxas de pagamento anônimas para os derivativos na classe $J(\mathbb{A}_C)$ pertencem em cada estado da natureza ao conjunto *não-convexo*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbb{A}_C) \;:=\; & \left\{r = (r_m) \in [0,1]^{n(\mathbb{A}_C)} \,:\, \exists m,\, 1 \le m \le n(\mathbb{A}_C)\right. \\ & \left.(r_{m'} = 1,\, \forall m' < m) \wedge (r_{m'} = 0,\, \forall m' > m)\right\}.\end{aligned}$$

É importante destacar que as taxas de pagamento anônimas, tanto para ativos *Pass-through* como CLO's, são tomadas como dadas pelos agentes, mas em equilíbrio elas são determinadas de tal maneira que, em cada nó, o valor total das entregas é igual aos pagamentos totais.

Como dito acima, cada agente $h \in H$ é caracterizado por preferências que podem depender do valor real do default. Formalmente, denotando o default real cometido por um agente em cada estado da natureza por $d = (d_{s,k})_{(s,k)\in S\times K} \in \mathbb{R}_+^{S\times K}$, supomos que para cada h existe uma correspondência $Q^h : X \times \mathbb{R}_+^{K\times S} \twoheadrightarrow X \times \mathbb{R}_+^{K\times S}$, que representa as preferências dos agentes sobre cestas de consumo e quantidade de default, no sentido que $Q^h(x,d)$ denota uma coleção de planos (x',d') que são *estritamente preferidos* a (x,d) pelo agente h. Note que com essa caracterização das preferências dos agentes não precisamos assumir completude, transitividade ou continuidade.

OBSERVAÇÃO 2 *Dentro deste arcabouço temos alguns casos particulares interessantes. Primeiro, dada uma função* $U^h : \mathbb{R}_+^{L\times S^*} \to \mathbb{R}_+$, *para uma dada coleção de números* $\lambda^h_{s,k} \in \mathbb{R}_+$, *podemos definir*

$$Q^h(x,d) \equiv \left\{ (x',d') \,:\, U^h(x') - \sum_{s\in S}\sum_{k\in K} \lambda^h_{s,k} d'_{s,k} > U^h(x) - \sum_{s\in S}\sum_{k\in K} \lambda^h_{s,k} d_{s,k} \right\},$$

de forma a recuperar a representação de preferências de Dubey, Geanakoplos e Shubik [8], na qual cada agente h tem o nível de utilidade dado pela função U^h *e é punido por penalidades proporcionais ao nível de default real. Além disso, dada uma correspondência estritamente monotônica* $\Omega^h : X \twoheadrightarrow X$ *podemos definir preferências individuais* $Q^h(x,d) := \Omega^h(x) \times \mathbb{R}_+^{K\times S}$, *de forma a representar preferências (possivelmente não-ordenadas) em um modelo no qual o único mecanismo para garantir o pagamento das promessas é a apreensão dos requerimentos de colateral. Obviamente, a representação tradicional analítica de preferências por funções utilidade, como em Geanakoplos e Zame [12], é um caso particular fazendo* $\Omega^h(x) := \left\{x' \in X \,:\, U^h(x') > U^h(x)\right\}$.

Finalmente, como os agentes são tomadores de preços, dado um processo de preços dos bens $p = (p_s)_{s\in S^*}$, um vetor de preços de ativos primitivos e derivativos $q = (q_k, q_j)_{k\in K, j\in J}$, e taxas de pagamento anônimas para os derivativos $r = (r_{s,j})_{(s,j)\in S\times J}$, um agente $h \in H$ pode escolher alocações de consumo e financeiras $\left[x_0^h, x_s^h, \varphi_k^h, \delta_{s,k}^h, \theta_j^h\right]_{(s,k)\in S\times K,\, j\in J}$ sujeito a,

- Restrição orçamentária do primeiro período,

$$p_0 x_0^h + \sum_{i\in\{P,C\}} \left[\sum_{\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i} \left(\sum_{j\in J(\mathbb{A}_i)} q_j \theta_j^h - \sum_{k\in\mathbb{A}_i} q_k \varphi_k^h \right) \right] \leq m_0^h(p_0), \quad (2\text{-}1)$$

- Restrição de requerimentos de colateral,

$$x_0^h \geq \sum_{k \in K} C_k(p_0, q_k)\varphi_k^h \, , \qquad (2\text{-}2)$$

- Restrição de pagamentos,

$$\delta_{s,k}^h \geq \min \{p_s A_{s,k}; p_s Y_s C_k(p_0, q_k)\} \, \varphi_k^h, \quad \forall (s,k) \in S \times K. \qquad (2\text{-}3)$$

- Restrição orçamentária do segundo período para cada estado da natureza,

$$\begin{aligned} p_s x_s^h \quad \leq \quad & m_s^h(p_s) + p_s Y_s x_o^h + \\ & \sum_{i \in \{P,C\}} \left[\sum_{\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i} \left(\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} r_{s,j} p_s A_{s,j} \theta_j^h - \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \delta_{s,k}^h \right) \right], \quad \forall s \in S. \end{aligned}$$

Quando os preços de bens e ativos são (p, q), e as taxas de pagamento são r, o conjunto orçamentário do agente $h \in H$, denotado por $B^h(p, q, r)$, é dado pelo conjunto de alocações $(x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h)$ que satisfazem as equações de (1) a (4).

Segue das considerações acima que nossa *Economia com Securitização de Ativos* $\mathcal{E}(S^*, \mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$, é caracterizada pelo conjunto de todos os estados da natureza $S^* = \{0\} \cup S$, o conjunto de características dos agentes $\mathcal{H} = (X, Q^h, m^h)_{h \in H}$, a estrutura do mercado físico $\mathcal{L} = (L, (Y_s)_{s \in S}, (W_s)_{s \in S^*})$, e a estrutura financeira $\mathcal{F} = \left[K, J, \mathbb{A}_P, \mathbb{A}_C, J(\mathbb{A}_P), J(\mathbb{A}_C), (A_{s,k}, A_{s,j})_{s \in S}, C_k\right]_{k \in K,\, \mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P,\, \mathbb{A}_C \subset \mathcal{A}_C,\, j \in J}$.