5 FUNÇÕES UTILIDADE

5.1 Introdução: equilíbrio entre risco e ganho

Riscos estão normalmente associados a possíveis perdas financeiras ou a possibilidade de não se atingir um nível de remuneração compatível com o investimento [8]. A eliminação total de riscos pode ser economicamente inviável ou mesmo impossível. Por outro lado, situações de risco podem oferecer grandes oportunidades de ganho. Na área financeira decisões referentes à alocação de recursos são encaradas em um contexto de risco-retorno, ou seja, decisões que envolvem um maior nível de risco só são aceitáveis se proporcionarem maiores retornos.

Não existe um modo universalmente aceito de representar o equilíbrio entre ganho e risco [47]. Existem diversas abordagens de avaliação de risco universalmente utilizadas, como:

a) Variância dos retornos: a base da teoria moderna de gerenciamento de portfolios, que tem Harry Markowitz [17] como um dos seus precursores, é que os investidores podem reduzir seus riscos através da diversificação ou balanceamento de carteiras. Como medida de risco Markowitz adotou, no seu trabalho original, o desvio padrão dos retornos e seu modelo busca construir uma "fronteira eficiente", que indica o "portfolio" de máximo retorno para cada nível de risco, ou o de mínimo risco para cada valor de retorno;

b) "Downside risk" [60]: uma importante limitação da medida desvio padrão dos retornos é a igual penalização de flutuações negativas e positivas em torno do valor esperado, o que pode conduzir a uma distorção quando a distribuição dos retornos é assimétrica. O "downside risk" penaliza somente os retornos inferiores a um determinado valor (retorno de referência) especificado pelo investidor. Este tipo de abordagem é bastante interessante, pois com ela o investidor se neutraliza contra baixos retornos sem abrir mão de possíveis ganhos elevados.

c) Arrependimento [27]: o "arrependimento" é relativo a cada combinação de decisão e cenário. É a diferença entre o custo real (sob incerteza) e o custo incorrido se houvesse conhecimento prévio de que determinado cenário ocorreria (conhecido como custo de referência). O critério de arrependimento *minimax*, que serve para minimizar o arrependimento máximo relativo a cada cenário [27], tem sido utilizado com métrica de risco (sobretudo para problemas de expansão da geração sob incerteza). Sua desvantagem é preparar de maneira "conservadora" o portfólio para perdas muito severas mas de baixa probabilidade, conforme observado em [20].

d) "Value at risk" [38][40]: Na abordagem VaR, tentamos quantificar o risco analisando a máxima perda ou *pior* ocorrência a um dado nível de probabilidade .

Como os critérios (c) e (d) se concentram nos cenários "ruins", não levam em conta as receitas dos *x%* cenários restantes (onde *x%* é a confiabilidade desejada).

Uma abordagem alternativa é u uso de funções de utilidade (FU) [9], que levam em consideração toda a gama de cenários simulados, "traduzindo" receitas financeiras em "unidades de utilidade". Teoricamente, nesta "unidade", os valores são "graus de satisfação", que já expressam o perfil de risco do agente tomador de decisão, traduzindo assim toda a sua preferência entre variações positivas e negativas para cada ponto da renda. Desta forma, a decisão neste espaço de utilidades é neutra em relação ao risco. Isto permite que diferentes portfolios (por exemplo, alternativas de contratação, que tenham diferentes distribuições de probabilidade de remuneração líquida) possam ser comparadas em termos de uma única métrica de risco, o valor esperado da utilidade da renda.

Esta é a abordagem utilizada nesta tese e será discutida a seguir.

5.2 Funções de Utilidade (FU)

O princípio da "utilidade esperada", estabelecido por John von Neuman e Oskar Morgenstern em [59], permite valorar a distribuição de probabilidade dos possíveis resultados de uma decisão e, portanto, estabelecer a **preferência** entre as decisões associadas a estas distribuições de probabilidade de resultados.

Como mencionado anteriormente, ao contrário de algumas métricas de risco, que só levam em conta no processo decisório as perda que podem ocorrer, analisando, por exemplo, apenas um dado percentil da distribuição da variável em questão, a função de utilidade (FU) leva em consideração toda a gama de cenários, "traduzindo" receitas financeiras em "unidades de utilidade". O objetivo passa a ser maximizar a **utilidade esperada**, onde a função utilidade do agente passa a descrever sua atitude frente ao risco (seu "perfil de risco"), que pode ser de aversão, neutralidade ou propensão a risco.

Por exemplo, um investidor avesso a risco apresentaria uma FU côncava, como se vê na Figura 5-1a. Neste caso, a perda devida a um "mau" resultado não é "compensada" pelo ganho advindo de um "bom" resultado de mesma magnitude. Já um investidor indiferente a riscos apresentaria uma FU linear, como na Figura 5-1b. Isto significa que um aumento de receita tem o mesmo impacto que uma redução. Finalmente, um investidor que arrisca (propenso a risco) teria uma função de utilidade convexa, conforme se vê na Figura 5-1c.

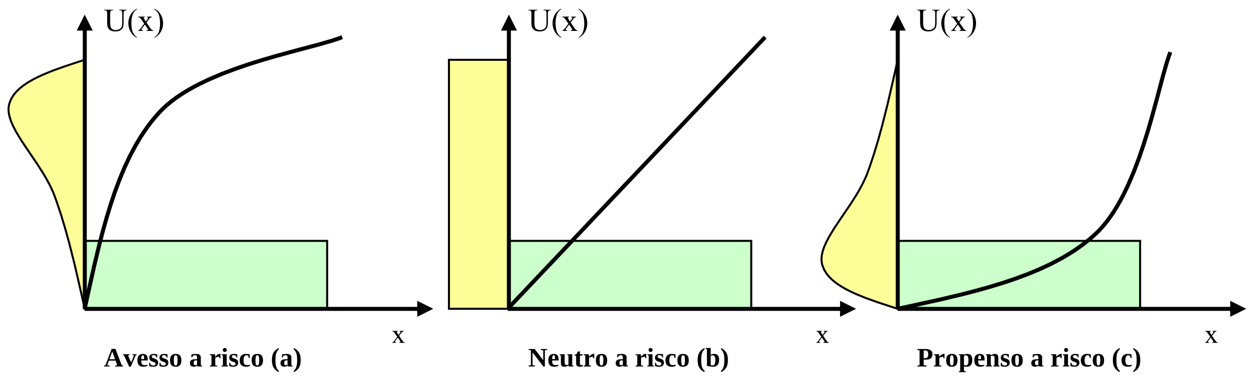

Figura 5-1 – Tipos de Função de Utilidade

Na seqüência abaixo (Figura 5-2, Figura 5-3 e Figura 5-4) são ilustrados os conceitos de aversão, neutralidade e propensão a risco apresentados para três indivíduos (indivíduos “k”, “y” e “z” – respectivamente avessos, neutro e propenso a risco) cujas funções utilidades são as mesmas da figura anterior:

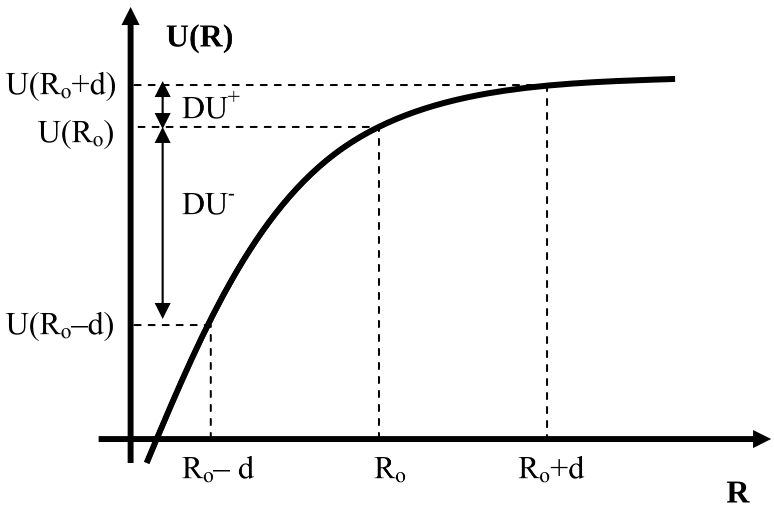

Figura 5-2 – Características do perfil de aversão a risco.

A principal característica do agente “k” (avesso a risco ou dito “conservador”) é que este é muito mais sensível a perdas do que a lucros. Por exemplo, para uma mesma variação de +*d* em torno do ponto R_o (representando um aumento da renda), o “ganho” da utilidade do indivíduo é menor, em módulo, que o decréscimo de utilidade resultante da mesma variação negativa (–*d*) em torno de R_o, ou seja, $DU^+ \leq DU^-$. Matematicamente isso pode ser explicado através da definição de função côncava, na qual a segunda derivada é negativa, ou seja, decresce a primeira derivada ao longo do domínio da função. Assim, à medida que se avance no sentido positivo de R, o beneficio marginal da utilidade (primeira derivada) é decrescida de forma monótona.

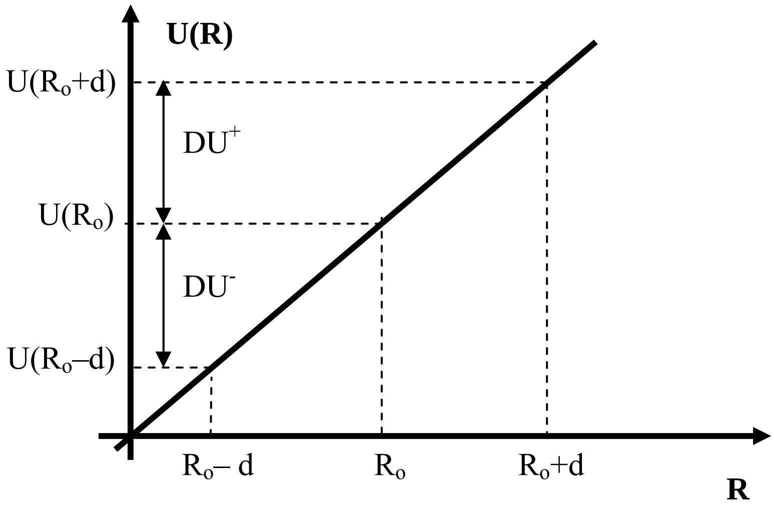

Figura 5-3 – Características do perfil de neutralidade a risco.

Para o perfil do agente “y” (neutro a risco), como a utilidade apresenta primeira derivada constante ao longo de todo o domínio, variações positivas e negativas de mesmo módulo, em torno de um mesmo ponto, proporcionam variações idênticas (em módulo) de utilidade, ou seja, $DU^{+} = DU^{-}$.

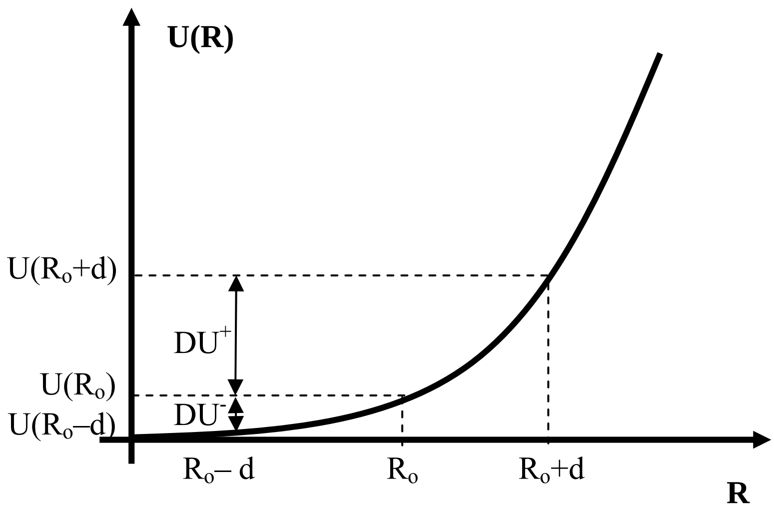

Figura 5-4 – Características do perfil de propensão ao risco.

No perfil do agente “z” (propenso ao risco), ocorre o oposto do caso de aversão. O agente dá muito mais “valor” a variações positivas do que às variações negativas de mesma magnitude, em torno de um mesmo ponto. Por isso a utilidade deste tipo de perfil é convexa, ou seja, a primeira derivada aumenta à medida que a renda cresce.

5.3 O Equivalente a Certeza

Seja R a variável aleatória que representa a receita da usina (em \$) e U(R) a função de utilidade associada (em unidades de utilidade). Então, se calcularmos o valor esperado da utilidade da renda e por fim aplicarmos a inversa da utilidade a esse montante, com a finalidade de trazê-lo para o domínio das receitas novamente, este último valor, conhecido como "equivalente a certeza", pode ser interpretado como o "valor monetário" do ativo. Em outras palavras, o proprietário da usina seria indiferente (isto é, teria a mesma utilidade esperada) entre receber um pagamento fixo de $\$U^{-1}\{E[U(R)]\}$ ou receber as receitas estocásticas da venda de energia. Pode-se ver este procedimento sendo aplicado na figura abaixo, à receita estocástica de um gerador vendendo sua geração G_t no mercado de curto prazo, ao preço spot π_t.

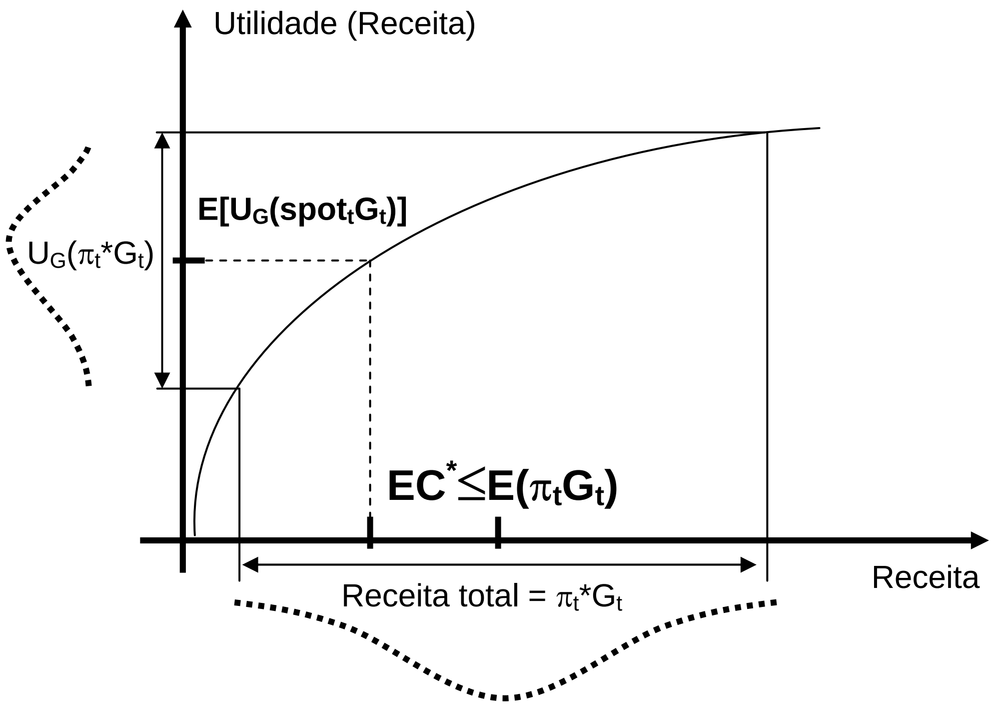

Figura 5-5 – Calculo do Equivalente a Certeza (gerador avesso a risco)

Por exemplo, se o investidor é indiferente a risco, sua função utilidade é linear e então EU = E[U(R)] = U[E(R)] ou $U^{-1}(EU) = E(R)$. Neste caso o equivalente a certeza é igual ao valor esperado das receitas. Se o investidor é averso a risco, sua função utilidade é côncava e pela desigualdade de Jansen [9], EU = E[U(R)] ≤ U[E(R)] ou U^{-1}(EU) ≤ E(R). Neste caso o equivalente a certeza é inferior ao valor esperado das receitas. Se o investidor é propenso a risco, sua função utilidade é convexa e pela desigualdade de Jansen [9], EU = E[U(R)] ≥ U[E(R)] ou U^{-1}(EU) ≥ E(R). Neste caso o equivalente a certeza é superior ao valor esperado das receitas.

5.3.1 Exemplo

A Figura 5-6 mostra uma possível função de utilidade (linear por partes, que será apresentada no final deste capítulo) que possui dois segmentos separados pelo ponto P, dado por uma renda de $ 30.

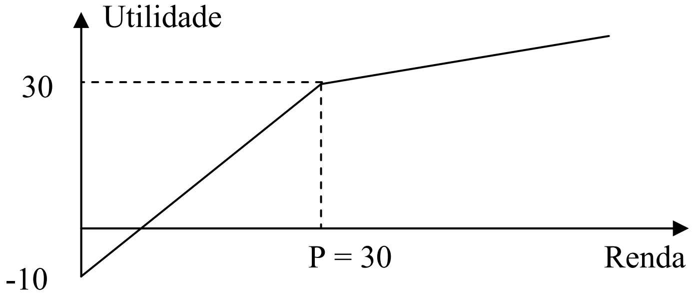

Figura 5-6 – Possível Função Utilidade

Vamos supor que existam quatro cenários para renda com igual probabilidade: R1 = $ 0, R2 = $ 25, R3 = $ 30 R4 = $ 45. Então, o valor esperado da renda é:

E(R) = 0.25 *(0) + 0.25 * (25) + 0.25 * (30) + 0.25 *(45) = $ 25

e da função utilidade:

E[U(R)] = 0.25 *(-10) + 0.25 * (22.5) + 0.25 * (30) + 0.25 *(45) = 20.6

O equivalente à certeza deste fluxo de renda é igual a U^{-1}(20.6) = $ 23.7 o que corresponde a um desconto de 5 % com relação ao valor esperado da renda.

5.4 O coeficiente de aversão a risco (CAR)

O coeficiente de aversão a risco, ou grau de aversão a risco, tem por objetivo caracterizar o comportamento frente ao risco, que o agente expressa para cada ponto do espaço das possíveis realizações da variável aleatória. Esse comportamento é modificado à medida que a concavidade da função utilidade varia em seu domínio.

Assim, seja uma v.a. *x* e uma função utilidade U(.), então o CAR pode ser definido por:

$$CAR_U(x) = -U''(x)/U'(x) \qquad (5\text{-}1)$$

Onde

$U'(x)$ Primeira derivada de U(x) com relação a x.

$U''(x)$ Segunda derivada de U(x) com relação a x.

A primeira derivada aparece no denominador para padronizar o CAR de utilidades equivalentes, ou seja, se U(x) e V(x) são equivalentes, ou seja, $V(x)=aU(x)+b$, para $a > 0$ e $b \geq 0$ terão o mesmo CAR(x).

5.5 Função Utilidade Quadrática

Este tipo de função é bastante utilizada por proporcionar um resultado analítico, que é o critério média-variância. A função de utilidade quadrática pode ser definida como um polinômio de segundo grau conforme a equação abaixo:

$$U(x) = ax - \tfrac{1}{2}bx^2 \qquad \text{para } a > 0 \text{ e } b \geq 0 \qquad (5\text{-}2)$$

Esta função é significativa apenas para o domínio de $x \leq a/b$, onde ela é crescente. Outra observação importante é que para $b > 0$, esta função é estritamente côncava, caracterizando um perfil de aversão a risco.

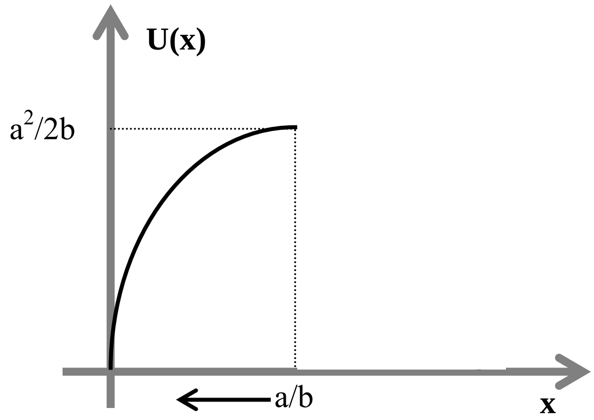

Figura 5-7 – Função de utilidade quadrática

Para demonstrar como a utilidade quadrática reflete o critério de média-variância através de seu valor esperado, vamos assumir que *x* seja uma v.a. limitada superiormente por a/b, ou seja, $\text{Prob}(x \leq a/b) = 1$. Então o valor esperado da utilidade de *x* pode ser expresso por:

$$E[U(x)] = aE(x) - \tfrac{1}{2}bE(x^2) \qquad (5\text{-}3)$$

$$E[U(x)] = aE(x) - \tfrac{1}{2}bE(x)^2 - \tfrac{1}{2}b\text{Var}(x) \qquad (5\text{-}4)$$

A expressão acima, que só depende da média de *x* e de sua variância, nos mostra que, se *b* e *a* forem maiores que zero e de $x \leq a/b$, o valor esperado da utilidade de *x* cresce à medida que o valor esperado de *x* cresce, e em contrapartida, decresce conforme a variância de *x* aumenta. Essa propriedade é bastante intuitiva e promove uma expressão analítica que simplifica muito o desenvolvimento de diversos problemas.

$$CAR_U(x) = -U''(x)/U'(x) \qquad (5\text{-}5)$$

$$CAR_U(x) = b/(a-bx) \qquad (5\text{-}6)$$

Porém, essa forma quadrática apresenta uma "inconsistência" de comportamento, pois como pode ser visto na expressão (5-6), o grau de aversão a risco, expresso pelo coeficiente de aversão a risco, CAR, aumenta à medida que x cresce, o que não é muito intuitivo. Esse fato nos motiva a explorar outras formas de utilidade.

5.6 Função Utilidade Exponencial (EXP)

A função de utilidade exponencial consiste em uma exponencial amortecida negativa. Esta não apresenta o inconveniente de domínio restrito e pode ser encontrada, à medida que se imponha um comportamento onde o CAR seja constante, ou seja, o grau de aversão a risco não se altere ao longo da renda. Dessa maneira, pode-se encontrar a expressão de U(x) através da resolução da equação diferencial a seguir.

$$CAR_U(x) = U''(x)/U'(x) = -a \quad (5\text{-}7)$$

Que resulta em:

$$U(x) = -e^{-ax} \quad (5\text{-}8)$$

Outra vantagem desta forma pode ser visto no caso em que a distribuição de probabilidade da variável avaliada é normal. Essa apresenta uma propriedade similar à da função quadrática, onde o valor esperado da utilidade proporciona uma expressão analítica em função dos parâmetros da v.a. (média e variância). Na figura a seguir, pode-se visualizar a forma que esta função adquire.

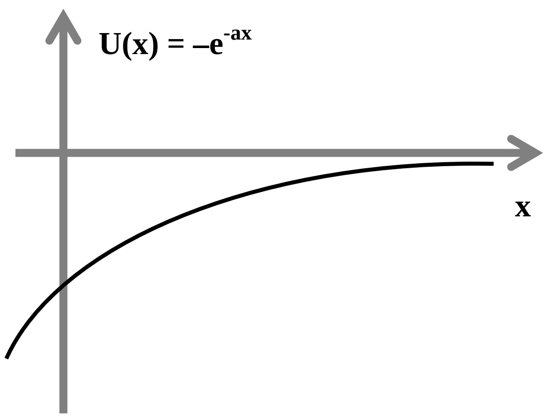

Figura 5-8 – Função de utilidade exponencial negativa

Se x for uma v.a. normal com média μ e variância σ^2, então o valor esperado da utilidade de x pode ser escrito como:

$$E[U(x)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-aX}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dX \quad (5\text{-}9)$$

$$E[U(x)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(X^2-\left(2a\sigma^2-2\mu\right)X+\mu^2\right)^2} dX \qquad (5\text{-}10)$$

Ao completarmos o quadrado do expoente do integrando, em busca da forma padrão de uma distribuição normal, encontra-se a seguinte expressão:

$$E[U(x)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-a\left(\mu-\frac{a}{2}\sigma^2\right)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[X-\left(2a\sigma^2-2\mu\right)\right]^2} dX \qquad (5\text{-}11)$$

Como o integrando da expressão acima, a menos de uma exponencial constante com relação à variável de integração, é a distribuição de uma v.a. normal, a expressão (5-11) pode ser reescrita como:

$E[U(x)] = -e^{-a\left(\mu-\frac{a}{2}\sigma^2\right)}$, que só depende da média e variância de x. (5-12)

Nesta expressão final, nota-se que:

(i) à medida que a média aumenta o valor esperado da utilidade cresce.

(ii) conforme a variância aumenta, o mesmo valor esperado decresce.

Esse resultado, porém, não pode ser generalizado para qualquer distribuição que a v.a. *x* assuma, como no caso da quadrática.

5.7 Função Utilidade Logarítmica (LN)

A função de utilidade LN pode ser obtida através da imposição de um perfil de aversão a risco, onde o CAR "decaia" com a renda (*x*), segundo uma hipérbole. Esta hipótese é razoável, visto que se a renda de uma agente aumenta, espera-se que este seja menos avesso ao risco. Assim, se fizermos:

$CAR_U(x) = (x+a)^{-1}$ (5-13)

Onde o parâmetro a controla a translação da função, de forma que se permita modificar o CAR da maneira que expresse o perfil de cada agente.

Então,

$U''(x)/U'(x) = -1/(x+a)$ (5-14)

que resulta na função:

$U(x) = \ln(x+a)$ (5-15)

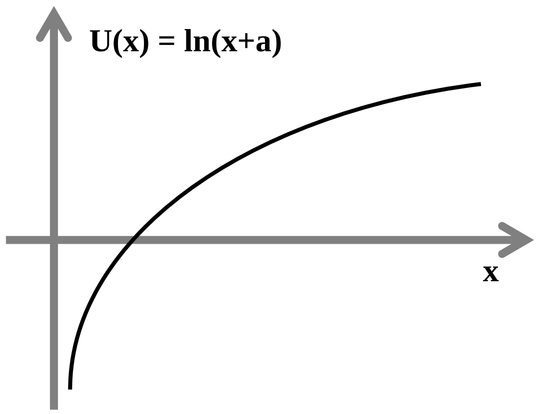

Figura 5-9 – Função de utilidade logarítmica

5.8 Função Utilidade Linear por Partes (FULP)

A função de utilidade, como visto nos itens anteriores, visa caracterizar o perfil de risco de um agente, atribuindo assim um grau de "satisfação" a cada possível resultado que se esteja analisando. Foi visto também, que para expressar um perfil de aversão a risco, é necessário que esta função seja côncava, por tanto não linear. Desta forma, podemos definir uma função de utilidade linear por partes (FULP), que pode se aproximar de qualquer outra função côncava, o quanto se queira, traçando retas tangentes a esta curva. Assim, esta função pode ser expressa através de um problema de programação linear estocástico (PLE) de maximização, para o caso de um agente avesso a risco (função côncava) e um PLE de minimização para um agente propenso ao risco (função de utilidade convexa). Assim sendo, para o caso de aversão a risco, a FULP pode ser expressa por:

$U(x) = \text{Max } \delta$ (5-16)

Sujeito a:

$\delta \leq a_k x + b_k \quad k = 1, ..., K$ (1)

Onde

K Número de segmentos lineares

a_k Coeficiente angular k-ésimo segmento.

b_k Coeficiente linear do k-ésimo segmento.

δ Variável que é sempre menor que todos os segmentos.

Como U(.) é crescente, $a_k \geq 0$, k =1,..., K

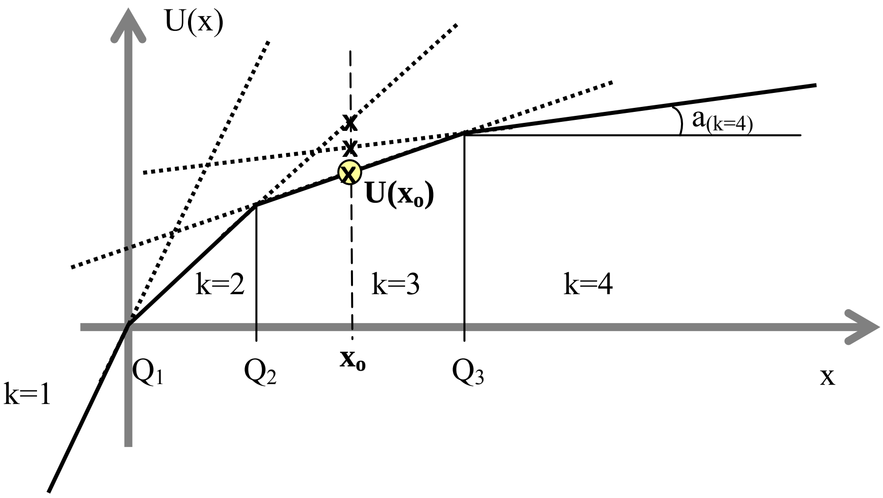

Figura 5-10 – Função de utilidade linear por partes com 4 segmentos.

A figura acima ilustra uma FULP com quatro segmentos, onde cada ponto Q_k representa uma "quebra", ou seja, uma mudança de inclinação e, portanto, uma mudança na taxa de crescimento de "satisfação" com a renda do agente. Pode-se notar que o PLE, que define esta curva, seleciona para um dado ponto x_o o segmento que proporciona o menor valor no contradomínio. A figura anterior ilustra este fato, para um caso onde o ponto está localizado no terceiro segmento.

Esse tipo de função apresenta a propriedade do agente ser localmente neutro ao risco, porém, globalmente avesso. A grande vantagem desta forma é que se pode escolher os pontos de "quebra" onde os coeficientes angulares mudarão, utilizando como base parâmetros financeiros da empresa. Em outras palavras, o agente tem a "liberdade" de selecionar a taxa de crescimento da sua "satisfação" (utilidade) para alguns intervalos conhecidos de sua renda, e assim não ficar "preso" a uma só forma, definida por um único parâmetro. Outro aspecto importante para este tipo de função é que o CAR "convencional" não pode ser definido, pois existem pontos onde a função é não diferenciável e na verdade, o grau de aversão a risco da FULP se dá na mudança de coeficiente angular, assim pode-se definir o coeficiente de aversão a risco por partes (CARP) onde o que se expressa não é a aversão a risco local, mas entre segmentos.

$$CARP_k = -(a_k - a_{k-1})/a_{k-1} \qquad (5\text{-}17)$$

Este coeficiente, através da razão entre a diferença das primeiras derivadas de dois segmentos adjacentes e a derivada do primeiro deles, expressa uma medida da taxa de variação da primeira derivada, que é a própria definição de segunda derivada, no caso de variações infinitesimais.

Assim, com base neste resultado, pode-se especificar a função utilidade através de um perfil de risco desejado, por exemplo, encontrando os coeficientes a_k que satisfaçam um conjunto de $CARP_{k=2,...,K}$, segundo a expressão abaixo.

$$a_k = (1 - CARP_k)a_{k-1} \qquad (5\text{-}18)$$

Essa será a forma de função de utilidade adotada neste trabalho, onde a maior parte da metodologia será baseada em programação linear.

5.8.1 Construção da Função Utilidade

Um aspecto interessante consiste em "como" construir uma função utilidade de um agente. Uma abordagem é construí-la a partir do coeficiente de aversão a risco do mesmo.

Assim sendo, podemos exemplificar a construção de uma FULP onde desejamos impor um comportamento parecido com o de um agente que utiliza uma FU exponencial, com perfil de risco se mantendo constante ao longo do domínio da receita (CAR constante), porém introduzindo uma maior aversão a risco para rendas muito baixas (por exemplo, receitas que não permitam a sobrevivência da empresa) e uma aversão a risco menor para rendas muito altas (por exemplo, rendas acima das expectativas da empresa).

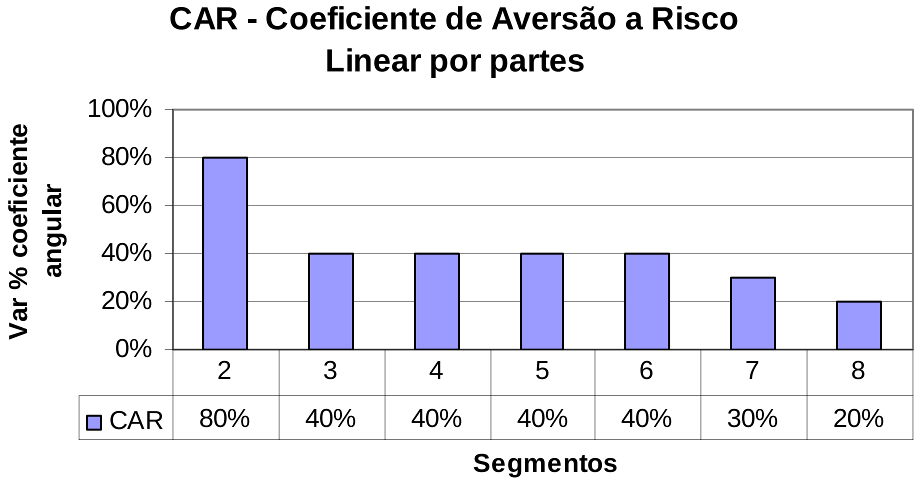

Figura 5-11 – CARP para 8 segmentos (intervalos) de renda líquida

Assim, iniciando a seqüência de oito (por exemplo) coeficientes angulares com o valor de 100, pode-se definir os demais coeficientes, $a_{k=2,...,8}$ através da expressão recursiva (5-18). De posse desses segmentos e dos pontos de separação entre os segmentos de renda líquida, define-se a FULP, que pode ser vista na Figura 5-12 abaixo.

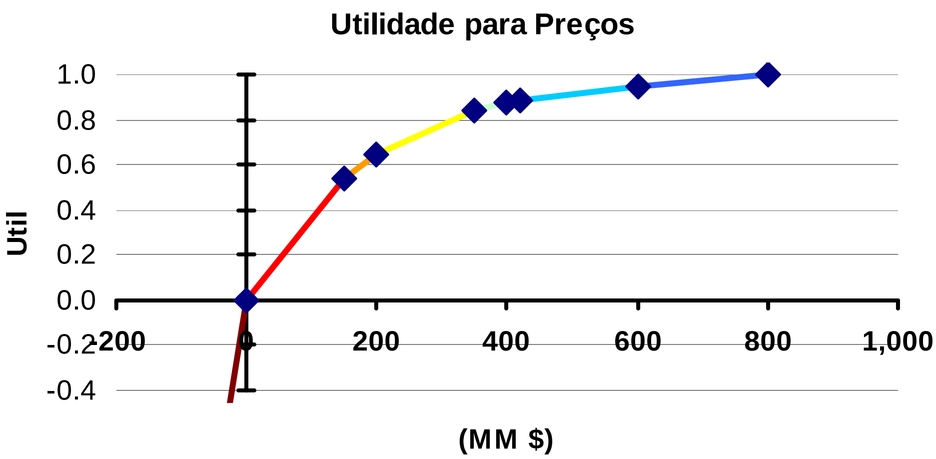

Figura 5-12 – FULP com 8 segmentos (intervalos) de renda líquida

Uma interpretação interessante que pode ser dada à função utilidade é: uma função cuja derivada traduza o benefício marginal da renda em função da taxa de juros que uma instituição financeira cobraria por emprestar dinheiro à empresa ou remuneraria os seus investimentos, ou seja, os coeficientes angulares da FULP podem ser associados aos benefícios marginais em taxa de juros com o acréscimo da renda. Assim, a empresa deve definir pontos de sua receita, onde por exemplo:

R_1 Renda a partir da qual a empresa “não sobrevive” um ano.
R_2 Renda a partir da qual a empresa obtém seu “*breakeven*” anual.
R_3 Renda anual projetada.

Os coeficientes angulares (derivadas em cada segmento) podem ser especificados da seguinte forma:

a_1 Taxa de juros cobrada por empréstimo a uma empresa que oferece um alto risco (16% a.a. por exemplo).
a_2 Taxa de cobrada por um empréstimo a uma empresa que oferece um risco médio (por exemplo 12% a.a.).
a_3 Taxa de cobrada por uma empresa que não oferece pouco risco, (por exemplo 10% a.a.)

Esses pontos devem ser definidos pela empresa segundo a sua percepção do mercado e de distinção de taxas que serão cobradas ou obtidas em investimentos. Com eles, a função utilidade é então construída (pontos de receita R_i são conhecidos e inclinações ai - taxas de juros – são determinadas pela empresa).

A referência [57] discute outros métodos para determinar a função utilidade de um agente.

O capítulo 7 apresenta o tema central do trabalho, que é a definição da curva de disposição a contratar – CDC – que tem como base a aplicação de um modelo de otimização que fornece através do perfil de risco de um agente gerador, traduzido pela sua FU, o montante a contratar Ec em função do preço ofertado, P. Como será visto, o objetivo do modelo estocástico é a maximização da utilidade esperada da empresa.

O capítulo a seguir apresenta a visão geral da metodologia adotada neste trabalho para o cálculo das CDCs.