

Problema da Designação

O problema da designação ocorre quando necessitamos minimizar os custos suprindo um centro de demanda com apenas uma origem como por exemplo:

- Várias fábricas e vários destinos sendo que uma fábrica abastecerá apenas um destino;
- Vários funcionários e várias tarefas, designar um funcionário para cada tarefa;
- Várias obras e várias firmas, uma obra para cada firma.

Modelo Matemático

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \text{ e para } j = 1, 2, \dots, n$$

Note que x_{ij} só pode ter valores zero ou um.

O cálculo da solução ótima é tão simples que será mostrado com exemplos.

Exemplo 1

Uma firma precisa designar quatro funcionários: A, B, C e D para quatro tarefas: I, II, III e IV. Cada funcionário tem um custo diferente em homem-hora para cada tarefa. Calcular a designação ótima.

$$\text{Min } Z = 5x_{11} + 24x_{12} + 13x_{13} + 7x_{14} + 10x_{21} + 25x_{22} + 3x_{23} + 23x_{24} + \\ + 28x_{31} + 9x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34} + 10x_{41} + 17x_{42} + 15x_{43} + 3x_{44}$$

s.a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \text{ e para } j = 1, 2, 3 \text{ e } 4$$

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	5	24	13	7
B	10	25	3	23
C	28	9	8	5
D	10	17	15	3

Passo 1

Verifica-se o menor custo de cada linha e subtrai-se da linha toda.

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	0	19	8	2
B	7	22	0	20
C	23	4	3	0
D	7	14	12	0

Verifica-se a existência de um zero para cada linha e colunas diferentes, neste caso não existem zeros na coluna II apesar de existir zeros em todas as linhas, não é possível ainda designar.

Passo 2

Repete-se o mesmo procedimento para as colunas.

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	0	15	8	2
B	7	18	0	20
C	23	0	3	0
D	7	10	12	0

Neste caso já é possível designar um funcionário para cada tarefa olhando apenas os zeros.

A → I

B → III

C → II

D → IV

$$Z = 5 + 3 + 9 + 3 = 20 \text{ horas}$$

Exemplo 2

Uma firma precisa designar quatro Diretores: A, B, C e D para quatro locais: I, II, III e IV . Os respectivos custos de instalação estão no quadro abaixo. Calcular a designação ótima

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	2	1	4	2
B	3	4	1	6
C	1	2	6	5
D	1	3	3	7

Passo 1 linhas

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	1	0	3	1
B	2	3	0	5
C	0	1	5	4
D	0	2	2	6

Não é possível designar

Passo 2 colunas

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	1	0	3	0
B	2	3	0	4
C	0	1	5	3
D	0	2	2	5

Não é possível designar pois C e D só poderiam ir para I e A para II ou IV

Passo 3

Cobre-se todos os zeros com o menor número de retas possível

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	1	0	3	0
B	2	3	0	4
C	0	1	5	3
D	0	2	2	5

Na matriz que sobra subtrai-se de todos o menor custo atual, no caso 1, e nas interseções das retas soma este custo que foi subtraído.

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	2	0	3	0
B	3	3	0	4
C	0	0	4	2
D	0	1	1	4

Agora posso designar

A → IV

B → III

C → II

D → I

$$Z = 1+2+1+2 = 6 \text{ horas}$$

Quando o número de destinos é diferente do de origens coloca-se uma linha ou coluna fantasma para igualar os dois com custos zero como no problema de transporte.

Quando alguém não pode ser designado para uma tarefa coloca-se um M grande na célula de custos correspondente.

Exemplo 3

Designar 3 máquinas para 4 locais diferentes

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	5	1	3	M
B	3	1	4	3
C	3	3	4	2

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	5	1	3	M
B	3	1	4	3
C	3	3	4	2
F	0	0	0	0

Linhas

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	4	0	2	M
B	2	0	3	2
C	1	1	2	0
F	0	0	0	0

Não posso designar e não precisa da operação das colunas pois já tenho zeros em todas.

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	4	0	2	M
B	2	0	3	2
C	1	1	2	0
F	0	0	0	0

Obs: existe outra possibilidade de linhas.

Quadro de Custos

	I	II	III	IV
A	2	0	0	M
B	0	0	1	0
C	1	3	2	0
F	0	0	0	0

Respostas

A → II
 B → I
 C → IV
 $Z = 1+3+2 = 6$

A → III
 B → II
 C → IV
 $Z = 3+1+2 = 6$

A terceira designação possível não é ótima, então não serve

A → III, B → I e C → IV $Z = 3+3+2 = 8$

