3
Contando ASM

Como foi visto no capítulo anterior, queremos calcular a função de partição

$$Z_n = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} \prod_{v \in B} peso(v).$$

Teorema 3.0.1

$$Z_n(\vec{x}, \vec{y}, a) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} \prod_{1 \leq i,j \leq n} \left[\frac{x_i}{y_j}\right] \left[\frac{ax_i}{y_j}\right]}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left[\frac{x_i}{x_j}\right] \left[\frac{y_j}{y_i}\right]} \quad detM \quad ,$$

onde M é a matriz $n \times n$ com entradas

$$M_{ij} = \frac{1}{\left[\frac{x_i}{y_j}\right] \left[\frac{ax_i}{y_j}\right]} \quad .$$

Para provar este teorema, primeiro veremos que é verdade para os casos $n = 1$ e $n = 2$. Depois, vamos ver que $F_n(\vec{x}, \vec{y}, a)$, o lado direito da equação, é uma função simétrica nas coordenadas x_i e y_j separadamente, que é quase polinomial nessas variáveis. Como já vimos que $Z_n(\vec{x}, \vec{y}, a)$, a função de partição, também é simétrica, a demonstração se completa mostrando que as duas funções coincidem num número suficiente de valores. Em seguida o teorema será usado para demonstrar a fórmula para o número de ASM de tamanho n.

3.1
O teorema vale para $n = 1$ e $n = 2$

$$\begin{aligned} Z_1(\vec{x}, \vec{y}, a) &= \frac{x_1}{y_1} \left[\frac{x_1}{y_1}\right] \left[\frac{ax_1}{y_1}\right] \frac{1}{\left[\frac{x_1}{y_1}\right] \left[\frac{ax_1}{y_1}\right]} \\ &= \frac{x_1}{y_1} \quad , \end{aligned}$$

que é o peso da única ASM de tamanho 1.

Vamos verificar também para $n = 2$:

$$Z_2(\vec{x},\vec{y},a) = \frac{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}\left[\frac{x_1}{y_1}\right]\left[\frac{ax_1}{y_1}\right]\left[\frac{x_1}{y_2}\right]\left[\frac{ax_1}{y_2}\right]\left[\frac{x_2}{y_1}\right]\left[\frac{ax_2}{y_1}\right]\left[\frac{x_2}{y_2}\right]\left[\frac{ax_2}{y_2}\right]}{\left[\frac{x_1}{x_2}\right]\left[\frac{y_2}{y_1}\right]} \times det \begin{pmatrix} \frac{1}{\left[\frac{x_1}{y_1}\right]\left[\frac{ax_1}{y_1}\right]} & \frac{1}{\left[\frac{x_1}{y_2}\right]\left[\frac{ax_1}{y_2}\right]} \\ \frac{1}{\left[\frac{x_2}{y_1}\right]\left[\frac{ax_2}{y_1}\right]} & \frac{1}{\left[\frac{x_2}{y_2}\right]\left[\frac{ax_2}{y_2}\right]} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}\left[\frac{x_1}{y_1}\right]\left[\frac{ax_1}{y_1}\right]\left[\frac{x_1}{y_2}\right]\left[\frac{ax_1}{y_2}\right]\left[\frac{x_2}{y_1}\right]\left[\frac{ax_2}{y_1}\right]\left[\frac{x_2}{y_2}\right]\left[\frac{ax_2}{y_2}\right]}{\left[\frac{x_1}{x_2}\right]\left[\frac{y_2}{y_1}\right]} \times \left(\frac{1}{\left[\frac{x_1}{y_1}\right]\left[\frac{ax_1}{y_1}\right]\left[\frac{x_2}{y_2}\right]\left[\frac{ax_2}{y_2}\right]} - \frac{1}{\left[\frac{x_1}{y_2}\right]\left[\frac{ax_1}{y_2}\right]\left[\frac{x_2}{y_1}\right]\left[\frac{ax_2}{y_1}\right]}\right)$$

$$= \frac{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}\left[\frac{x_1}{y_1}\right]\left[\frac{ax_1}{y_1}\right]\left[\frac{x_1}{y_2}\right]\left[\frac{ax_1}{y_2}\right]\left[\frac{x_2}{y_1}\right]\left[\frac{ax_2}{y_1}\right]\left[\frac{x_2}{y_2}\right]\left[\frac{ax_2}{y_2}\right]}{\left[\frac{x_1}{x_2}\right]\left[\frac{y_2}{y_1}\right]\left[\frac{x_1}{y_1}\right]\left[\frac{ax_1}{y_1}\right]\left[\frac{x_2}{y_2}\right]\left[\frac{ax_2}{y_2}\right]\left[\frac{x_1}{y_2}\right]\left[\frac{ax_1}{y_2}\right]\left[\frac{x_2}{y_1}\right]\left[\frac{ax_2}{y_1}\right]} \times \left(\left[\frac{x_1}{y_2}\right]\left[\frac{ax_1}{y_2}\right]\left[\frac{x_2}{y_1}\right]\left[\frac{ax_2}{y_1}\right] - \left[\frac{x_1}{y_1}\right]\left[\frac{ax_1}{y_1}\right]\left[\frac{x_2}{y_2}\right]\left[\frac{ax_2}{y_2}\right]\right)$$

$$= \frac{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}}{\left[\frac{x_1}{x_2}\right]\left[\frac{y_2}{y_1}\right]} \times \left(\left[\frac{x_1}{y_2}\right]\left[\frac{ax_1}{y_2}\right]\left[\frac{x_2}{y_1}\right]\left[\frac{ax_2}{y_1}\right] - \left[\frac{x_1}{y_1}\right]\left[\frac{ax_1}{y_1}\right]\left[\frac{x_2}{y_2}\right]\left[\frac{ax_2}{y_2}\right]\right)$$

$$= \frac{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}}{\left[\frac{x_1}{x_2}\right]\left[\frac{y_2}{y_1}\right]} \left(\frac{\left(\frac{x_1}{y_2} - \frac{y_2}{x_1}\right)\left(\frac{ax_1}{y_2} - \frac{y_2}{ax_1}\right)\left(\frac{x_2}{y_1} - \frac{y_1}{x_2}\right)\left(\frac{ax_2}{y_1} - \frac{y_1}{ax_2}\right)}{(a-\frac{1}{a})^4} - \frac{\left(\frac{x_1}{y_1} - \frac{y_1}{x_1}\right)\left(\frac{ax_1}{y_1} - \frac{y_1}{ax_1}\right)\left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{y_2}{x_2}\right)\left(\frac{ax_2}{y_2} - \frac{y_2}{ax_2}\right)}{(a-\frac{1}{a})^4}\right)$$

$$Z_2(\vec{x},\vec{y},a) = \frac{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}}{(a-\frac{1}{a})^2} \left(\frac{\left(\frac{x_1}{y_2}-\frac{y_2}{x_1}\right)\left(\frac{ax_1}{y_2}-\frac{y_2}{ax_1}\right)\left(\frac{x_2}{y_1}-\frac{y_1}{x_2}\right)\left(\frac{ax_2}{y_1}-\frac{y_1}{ax_2}\right)}{\left(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{y_2}{y_1}-\frac{y_1}{y_2}\right)} - \frac{\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{y_1}{x_1}\right)\left(\frac{ax_1}{y_1}-\frac{y_1}{ax_1}\right)\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{y_2}{x_2}\right)\left(\frac{ax_2}{y_2}-\frac{y_2}{ax_2}\right)}{\left(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{y_2}{y_1}-\frac{y_1}{y_2}\right)} \right)$$

$$= \frac{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}}{(a-\frac{1}{a})^2} \left(\frac{\left(\frac{x_1^2-y_2^2}{x_1y_2}\right)\left(\frac{ax_1^2-y_2^2}{ax_1y_2}\right)\left(\frac{x_2^2-y_1^2}{x_2y_1}\right)\left(\frac{ax_2^2-y_1^2}{ax_2y_1}\right)}{\left(\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}\right)\left(\frac{y_2^2-y_1^2}{y_2y_1}\right)} - \frac{\left(\frac{x_1^2-y_1^2}{x_1y_1}\right)\left(\frac{ax_1^2-y_1^2}{ax_1y_1}\right)\left(\frac{x_2^2-y_2^2}{x_2y_2}\right)\left(\frac{ax_2^2-y_2^2}{ax_2y_2}\right)}{\left(\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}\right)\left(\frac{y_2^2-y_1^2}{y_2y_1}\right)} \right)$$

$$= \frac{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}}{(a-\frac{1}{a})^2a^2x_1x_2y_1y_2} \times \left(\frac{(x_1^2-y_2^2)(a^2x_1^2-y_2^2)(x_2^2-y_1^2)(a^2x_2^2-y_1^2)}{(x_1^2-x_2^2)(y_2^2-y_1^2)} - \frac{(x_1^2-y_1^2)(a^2x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)(a^2x_2^2-y_2^2)}{(x_1^2-x_2^2)(y_2^2-y_1^2)} \right)$$

$$= \frac{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}}{(a-\frac{1}{a})^2a^2x_1x_2y_1y_2} \times \left(a^2{x_1}^2{x_2}^2 + a^2{y_2}^2{y_1}^2 - a^2{x_2}^2{y_2}^2 - a^2{y_1}^2{x_1}^2 + a^4{x_1}^2{x_2}^2 + {y_2}^2{y_1}^2 - a^2{y_2}^2{x_1}^2 - a^2{x_2}^2{y_1}^2\right)$$

$$= \frac{\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}}{(a-\frac{1}{a})^2} \left(\left(\frac{x_1^2-y_2^2}{x_1y_2}\right)\left(\frac{x_2^2-y_1^2}{x_2y_1}\right) + \left(\frac{(ax_1)^2-y_1^2}{ax_1y_1}\right)\left(\frac{(ax_2)^2-y_2^2}{ax_2y_2}\right) \right)$$

$$= \frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2} \left(\left[\frac{x_1}{y_2}\right]\left[\frac{x_2}{y_1}\right] + \left[\frac{ax_1}{y_1}\right]\left[\frac{ax_2}{y_2}\right] \right)$$

$$= \frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}\left[\frac{x_1}{y_2}\right]\left[\frac{x_2}{y_1}\right] + \frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2}\left[\frac{ax_1}{y_1}\right]\left[\frac{ax_2}{y_2}\right]$$

que são os pesos das duas ASM de tamanho 2. Note que $Z_n(\vec{x},\vec{y},a)$ é um polinômio nos x_i, e, a menos de um denominador $y_1^2y_2^2$, também é um polinômio nos y_j.

3.2
As simetrias de $F_n(x, y, a)$

Agora que já vimos os casos $n = 1$ e $n = 2$, vamos começar a demonstração do teorema provando que $F_n(\vec{x}, \vec{y}, a)$ é uma função simétrica nos x_i e nos y_j. Vamos começar com uma proposição.

Proposição 3.2.1 *Se $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é um polinômio alternado de grau d, então*

$$\frac{f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)}$$

é um polinômio simétrico de grau $d - n(n-1)/2$.

Basta provar que $\frac{f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)}$ é um polinômio, e o resto segue facilmente: Tanto o numerador quanto o denominador são alternados, trocar x_i com x_j troca o sinal dos dois, logo o quociente é simétrico. Quanto ao grau, o numerador tem grau d e o denominador $n(n-1)/2$, assim o grau do polinômio que é o resultado da divisão tem que ser $d - n(n-1)/2$. Vamos então ver que é um polinômio.

Como o sinal de f troca quanto trocamos duas variáveis de lugar, temos que $f = 0$ quando duas variáveis são iguais: $f(x_2, x_2, x_3, \dots, x_n) = -f(x_2, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$. Considerando f como um polinômio em x_1 com coeficientes em $\mathbb{K}[x_2, \dots, x_n]$, temos então $n-1$ raízes.

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \prod_{j=2}^{n} (x_1 - x_j).$$

g é um polinômio em n variáveis, que pode ser considerado como um polinômio em $n-1$ variáveis, com coeficientes em $\mathbb{K}[x_1]$. Ele é um polinômio alternado nestas $n-1$ variáveis, pois f é alternado e o produtório é simétrico nos $x_2, \dots, x_n$. Se $n = 2$, temos $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)/(x_1 - x_2)$, que é um polinômio porque x_2 é raiz de f como polinômio em x_1. Por indução,

$$\frac{g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\prod_{2 \le i < j \le n}(x_i - x_j)}$$

é um polinômio em $x_2, \dots, x_n$. Como o denominador não envolve x_1, ele também é um polinômio em x_1. Mas

$$\frac{f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)} = \frac{g(x_1, x_2, ..., x_n)}{\prod_{2 \le i < j \le n}(x_i - x_j)}.$$

Agora vamos reescrever $F_n(\vec{x}, \vec{y}, a)$ sem a notação de colchetes:

$$F_n(\vec{x},\vec{y},a) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} \prod_{1\le i,j\le n} \left(\frac{x_i}{y_j} - \frac{y_j}{x_i}\right)\left(\frac{ax_i}{y_j} - \frac{y_j}{ax_i}\right)}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^{n(n+1)} \prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{x_i}{x_j} - \frac{x_j}{x_i}\right)\left(\frac{y_j}{y_i} - \frac{y_i}{y_j}\right)} \times det\left(\frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{x_i}{y_j} - \frac{y_j}{x_i}\right)\left(\frac{ax_i}{y_j} - \frac{y_j}{ax_i}\right)}\right)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} \prod_{1\le i,j\le n} \left(\frac{x_i}{y_j} - \frac{y_j}{x_i}\right)\left(\frac{ax_i}{y_j} - \frac{y_j}{ax_i}\right)}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^{n(n-1)} \prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{x_i}{x_j} - \frac{x_j}{x_i}\right)\left(\frac{y_j}{y_i} - \frac{y_i}{y_j}\right)} \times det\left(\frac{1}{\left(\frac{x_i}{y_j} - \frac{y_j}{x_i}\right)\left(\frac{ax_i}{y_j} - \frac{y_j}{ax_i}\right)}\right)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i y_i^{-1} \prod_{1\le i,j\le n} \frac{(x_i^2-y_j^2)(a^2x_i^2-y_j^2)}{ax_i^2y_j^2}}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^{n(n-1)} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(x_i^2-x_j^2)(y_j^2-y_i^2)}{x_ix_jy_iy_j}}\ det\left(\frac{ax_i^2y_j^2}{(x_i^2-y_j^2)(a^2x_i^2-y_j^2)}\right)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i y_i^{-1} \frac{1}{a^{n^2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{2n}y_i^{2n}} \prod_{1\le i,j\le n}(x_i^2-y_j^2)(a^2x_i^2-y_j^2)}{\frac{(a^2-1)^{n(n-1)}}{a^{n(n-1)}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{n-1}y_i^{n-1}} \prod_{1\le i<j\le n}(x_i^2-x_j^2)(y_j^2-y_i^2)} \times a^n \prod_{i=1}^{n} x_i^2y_i^2 \quad det\left(\frac{1}{(x_i^2-y_j^2)(a^2x_i^2-y_j^2)}\right)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{2-n} y_i^{-n} \prod_{1\le i,j\le n}(x_i^2-y_j^2)(a^2x_i^2-y_j^2)}{(a^2-1)^{n(n-1)} \prod_{1\le i<j\le n}(x_i^2-x_j^2)(y_j^2-y_i^2)} \times det\left(\frac{1}{(x_i^2-y_j^2)(ax_i^2-y_j^2)}\right)$$

Observando

$$f(\vec{x},\vec{y},a) = \left[\prod_{1\le i,j\le n} (x_i^2-y_j^2)(a^2x_i^2-y_j^2)\right] det\left(\frac{1}{(x_i^2-y_j^2)(a^2x_i^2-y_j^2)}\right),$$

podemos ver primeiramente que é um polinômio, porque o produtório tem termos para cancelar todos os denominadores vindos do determinante. Além disso, é um polinômio alternado nos x_i^2, porque o produtório é simétrico, e o determinante é alternado. Vamos chamar o denominador

$$g(\vec{x},\vec{y},a)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i^2-x_j^2)(y_j^2-y_i^2).$$

Usando a proposição para f e g como polinômios nas variáveis $x_1^2,\ldots,x_n^2$ e coeficientes em $\mathbb{K}[y_1^2,\ldots,y_n^2]$, $\frac{f(\vec{x},\vec{y},a)}{g(\vec{x},\vec{y},a)}$ é um polinômio simétrico nos x_i. Olhando f e g como polinômios nas variáveis $y_1^2,\ldots,y_n^2$ e coeficientes em $\mathbb{K}[x_1^2,\ldots,x_n^2]$ e usando a proposição novamente, temos que $\frac{f(\vec{x},\vec{y},a)}{g(\vec{x},\vec{y},a)}$ é um polinômio simétrico nos y_i. Finalmente,

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{n-2}y_i^nF_n(\vec{x},\vec{y},a)=\frac{1}{(a^2-1)^{n(n-1)}}\frac{f(\vec{x},\vec{y},a)}{g(\vec{x},\vec{y},a)},$$

é um polinômio simétrico nos x_i, e nos y_j.

3.3 A demonstração de $Z_n = F_n$

Agora vamos olhar para $x_1^{n-2}F_n(\vec{x},\vec{y},a)$ como um polinômio de uma única variável, x_1.

$$x_1^{n-2}F_n(\vec{x},\vec{y},a)=x_1^{n-2}\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i^{2-n}y_i^{-n}\prod_{1\le i,j\le n}(x_i^2-y_j^2)(a^2x_i^2-y_j^2)}{(a^2-1)^{n(n-1)}\prod_{1\le i<j\le n}(x_i^2-x_j^2)(y_j^2-y_i^2)}\times\ det\left(\frac{1}{(x_i^2-y_j^2)(ax_i^2-y_j^2)}\right)$$

Para facilitar as contas, vamos separar esta expressão em três partes, e descobrir o grau de cada uma delas como polinômios de x_1. Em primeiro lugar,

$$\begin{aligned}x_1^{n-2}\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i^{2-n}y_i^{-n}}{(a^2-1)^{n(n-1)}}&=x_1^{n-2}\frac{x_1^{2-n}y_1^{-n}\prod_{i=2}^{n}x_i^{2-n}y_i^{-n}}{(a^2-1)^{n(n-1)}}\\&=\frac{y_1^{-n}\prod_{i=2}^{n}x_i^{2-n}y_i^{-n}}{(a^2-1)^{n(n-1)}},\end{aligned}$$

que não depende de x_1.

A segunda parte,

$$\begin{aligned}&\frac{\prod_{1\le i,j\le n}(x_i^2-y_j^2)(a^2x_i^2-y_j^2)}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_i^2-x_j^2)(y_j^2-y_i^2)}\\&=\frac{\prod_{1\le j\le n}(x_1^2-y_j^2)(a^2x_1^2-y_j^2)}{\prod_{1<j\le n}(x_1^2-x_j^2)(y_j^2-y_1^2)}\frac{\prod_{2\le i\le n,1\le j\le n}(x_i^2-y_j^2)(a^2x_i^2-y_j^2)}{\prod_{2\le i<j\le n}(x_i^2-x_j^2)(y_j^2-y_i^2)}.\end{aligned}$$

A parte de cima é um polinômio de grau $4n$ em x_1, e a parte de baixo tem grau $2(n-1)$.

O terceiro fator é

$$det\left(\frac{1}{(x_i^2-y_j^2)(ax_i^2-y_j^2)}\right).$$

Podemos avaliar este determinante pela linha de x_1, fica

$$\frac{1}{(x_1^2-y_1^2)(ax_1^2-y_1^2)}\,det(M_1)-\frac{1}{(x_1^2-y_2^2)(ax_1^2-y_2^2)}\,det(M_2)+...$$

onde M_n são matrizes que não dependem de x_1, pois este só aparece na primeira linha. Cada um desses termos tem no denominador um polinômio de grau 4 em x_1.

Como já vimos na seção anterior que $x_1^{n-2}F_n$ é um polinômio em x_1, já podemos dizer que seu grau é

$$4n-2(n-1)-4=2(n-1).$$

Podemos ver também que neste polinômio x_1 sempre aparece como x_1^2, pois na única parte em que poderia ser diferente foi cancelado pela multiplicação por x_1^{n-2}. Assim, podemos dizer que $x_1^{n-2}F_n(\vec{x},\vec{y},a)$ é um polinômio de grau no máximo $n-1$ na variável x_1^2.

Por outro lado, Z_n é a multiplicação dos pesos de todos os vértices. Os vértices que contribuem com x_1 são só aqueles da primeira linha. Em alguma posição existe um 1, cuja contribuição para a função de partição é x_1/y_j.

Os outros vértices da primeira linha são todos 0, alguns contribuindo com $[x_1/y_j]$ e outros com $[ax_1/y_j]$.

$$\left[\frac{x_1}{y_j}\right]=\frac{a}{a^2-1}\frac{x_1^2-y_j^2}{x_1y_j},$$

$$\left[\frac{ax_1}{y_j}\right]=\frac{1}{a^2-1}\frac{a^2x_1^2-y_j^2}{x_1y_j}.$$

Multiplicando todos os vértices 0, temos na parte de cima um polinômio de grau $2(n-1)$ em x_1, que também podemos ver como um polinômio de grau $n-1$ em x_1^2. Além disso, temos um x_1 em cima e $n-1$ embaixo, ou seja, x_1^{2-n}. Assim, $x_1^{n-2}Z_n(\vec{x},\vec{y},a)$ é um polinômio de grau $n-1$ em x_1^2. Para provar que essas duas coisas são iguais, basta provar que coincidem em no mínimo n valores de x_1^2.

Seja $x_1 = y_1/a$. Considere o primeiro vértice, o da primeira linha e primeira coluna. Se ele for 1, seu peso é $x_1/y_1 = a^{-1}$. Se for 0, seu peso é $[ax_1/y_1] = [1] = 0$.

Como o peso da configuração inteira é a multiplicação de todos os vértices, as únicas configurações que vão contribuir para a função de partição com este valor de x_1 são aquelas que tem o 1 da primeira linha na primeira coluna. Para estas configurações, os outros vértices da primeira linha são 0, e seu valor é $[x_1/y_j] = [y_1/ay_j]$. Os outros vértices na primeira coluna são 0, e seu valor é $[x_i/y_1]$.

Os outros vértices serão qualquer configuração de uma ASM de tamanho $n-1$.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Por isto, definindo $P_1(x_1) = x_1^{n-2} Z_n(\vec{x}, \vec{y}, a)$, temos

$$\begin{aligned} P_1(y_1/a) &= x_1^{n-2} a^{-1} \left(\prod_{i=2}^{n} \left[\frac{y_1}{ay_i} \right] \right) \left(\prod_{i=2}^{n} \left[\frac{x_i}{y_1} \right] \right) Z_{n-1}(x_2, ..., x_n; y_2, ..., y_n; a) \\ &= y_1^{n-2} a^{1-n} \left(\prod_{i=2}^{n} \left[\frac{y_1}{ay_i} \right] \right) \left(\prod_{i=2}^{n} \left[\frac{x_i}{y_1} \right] \right) Z_{n-1}(x_2, ..., x_n; y_2, ..., y_n; a). \end{aligned}$$

P_1 é função de x_1, mas os outros x_i, os y_i e a são parâmetros de P_1. P_1 é simétrico nos parâmetros y_i. Acima, substituímos x_1 por um dos y_i/a. A expressão resultante tem o x_1 e o y_i substituído, no caso y_1, excluídos dos produtórios e também de Z_{n-1}. Pela simetria, podemos fazer a substituição de x_1 por qualquer outro y_k/a, e encontramos a expressão

$$P_1(y_k/a) = y_k^{n-2} a^{1-n} \left(\prod_{i \neq k} \left[\frac{y_k}{ay_i} \right] \right) \left(\prod_{i \neq 1} \left[\frac{x_i}{y_k} \right] \right) Z_{n-1}(x_2, ..., x_n; \vec{y} - y_k; a),$$

onde $\vec{y} - y_k$ significa $\vec{y}$ sem o y_k, ou seja, $\vec{y} - y_k = (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)$. Neste caso o x_1 e o y_k foram excluídos.

Por outro lado, definindo

$$P_2(x_1) = x_1^{n-2} F_n(\vec{x}, \vec{y}, a),$$

vamos separar as partes de P_2 que usam x_1 e y_k.

$$P_2(x_1) = x_1^{n-2} \frac{\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \prod_{1\le i,j\le n} \left[\frac{x_i}{y_j}\right]\left[\frac{ax_i}{y_j}\right]}{\prod_{1\le i<j\le n}\left[\frac{x_i}{x_j}\right]\left[\frac{y_j}{y_i}\right]} \quad det\left(\frac{1}{\left[\frac{x_i}{y_j}\right]\left[\frac{ax_i}{y_j}\right]}\right)$$

No numerador temos

$$x_1^{n-2}\frac{x_1}{y_k}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{x_1}{y_j}\right]\left[\frac{ax_1}{y_j}\right]\prod_{i>1}\left[\frac{x_i}{y_k}\right]\left[\frac{ax_i}{y_k}\right],$$

e o resto são os termos que serão usados em $F_{n-1}(x_2,...,x_n;y_2,...,y_n;a)$.

No denominador temos

$$\prod_{j>1}\left[\frac{x_1}{x_j}\right]\prod_{j\neq k}\left[\frac{y_k}{y_j}\right] \quad (-1)^{n-k}$$

e o resto são os termos que serão usados em $F_{n-1}(x_2,...,x_n;y_2,...,y_n;a)$. Para chegar à expressão acima foi usado o fato de que $[z] = -[z^{-1}]$. Quando $j > k$, originalmente aparecia $[y_j/y_k]$, isto acontece para todos os $j > k$ que são $n-k$.

No determinante, vamos fazer a avaliação pela primeira linha.

$$\frac{(-1)^{k+1}}{\left[\frac{x_1}{y_k}\right]\left[\frac{ax_1}{y_k}\right]}\ det(M_k) + \sum_{j\neq k}\frac{(-1)^{1+j}}{\left[\frac{x_1}{y_j}\right]\left[\frac{ax_1}{y_j}\right]}\ det(M_j)$$

O primeiro termo irá cancelar o $\left[\frac{x_1}{y_k}\right]\left[\frac{ax_1}{y_k}\right]$ que aparece no numerador. O valor deste termo é 0 quando $x_1 = y_k/a$, porque $[ax_1/y_k] = [1] = 0$. Os outros termos do somatório não cancelam este zero, logo não contribuem para P_2.

Juntando tudo, fica

$$P_2(y_k/a) = y_k^{n-2}a^{1-n}\frac{\prod_{j\neq k}\left[\frac{y_k}{ay_j}\right]\left[\frac{y_k}{y_j}\right]\prod_{i\neq 1}\left[\frac{x_i}{y_k}\right]\left[\frac{ax_i}{y_k}\right]}{(-1)^{n-k}\prod_{j\neq 1}\left[\frac{y_k}{ax_j}\right]\prod_{j\neq k}\left[\frac{y_k}{y_j}\right]}$$
$$\times (-1)^{k+1}F_{n-1}(x_2,...,x_n;\vec{y}-y_k;a)$$

$$= y_k^{n-2}a^{1-n}\frac{\prod_{j\neq k}\left[\frac{y_k}{ay_j}\right]\prod_{i\neq 1}\left[\frac{x_i}{y_k}\right]\left[\frac{ax_i}{y_k}\right]}{(-1)^{n-k}\prod_{j\neq 1}\left[\frac{y_k}{ax_j}\right]}$$
$$\times (-1)^{k+1}F_{n-1}(x_2,...,x_n;\vec{y}-y_k;a)$$

$$P_2(y_k/a) = y_k^{n-2}a^{1-n}\frac{\prod_{j\neq k}\left[\frac{y_k}{ay_j}\right]\prod_{i\neq 1}\left[\frac{x_i}{y_k}\right]\left[\frac{ax_i}{y_k}\right]}{(-1)^{1-k}\prod_{j\neq 1}\left[\frac{ax_j}{y_k}\right]}$$
$$\times(-1)^{k+1}F_{n-1}(x_2,...,x_n;\vec{y}-y_k;a)$$

$$= y_k^{n-2}a^{1-n}\prod_{j\neq k}\left[\frac{y_k}{ay_j}\right]\prod_{i\neq 1}\left[\frac{x_i}{y_k}\right]\times F_{n-1}(x_2,...,x_n;\vec{y}-y_k;a).$$

Pela hipótese de indução,

$$F_{n-1}(x_2,...,x_n;\vec{y}-y_k;a) = Z_{n-1}(x_2,...,x_n;\vec{y}-y_k;a),$$

então acabamos de provar que também

$$F_n(\vec{x};\vec{y};a) = Z_n(\vec{x};\vec{y};a),$$

concluindo a demonstração do teorema.

3.4 Dois lemas técnicos

Lema 3.4.1

$$det\left(\frac{1-s^{i+j-1}}{1-t^{i+j-1}}\right) = t^{n^3/3-n^2/2+n/6}\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-t^{j-i})^2\prod_{i,j=1}^{n}\frac{1-st^{j-i}}{1-t^{i+j-1}}.$$

O lado esquerdo dessa igualdade pode ser visto como um polinômio na variável s e coeficientes em $\mathbb{R}(t)$. Cada termo do desenvolvimento do determinante tem um elemento de cada linha e cada coluna da matriz, então seu grau em s é

$$\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j - n = n(n-1) - n = n^2.$$

O lado direito também é um polinômio em s, e seu grau é obviamente n^2 porque só aparece um s dentro do segundo produtório.

Substituindo s por t^k, o lado esquerdo fica

$$det\left(\frac{1-t^{k(i+j-1)}}{1-t^{i+j-1}}\right) = det\left(1+t^{i+j-1}+...+t^{(k-1)(i+j-1)}\right).$$

Todas as linhas da matriz são combinações lineares dos seguintes vetores:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= (1, 1, 1, \ldots, 1) \\
b_1 &= \left(1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\right) \\
b_2 &= \left(1, t^2, t^4, \ldots, t^{2(n-1)}\right) \\
&\ldots \\
b_{k-1} &= \left(1, t^{k-1}, t^{2(k-1)}, \ldots, t^{(k-1)(n-1)}\right)
\end{aligned}
$$

Por exemplo, a linha i é

$$
\begin{aligned}
&(1 + t^i + \ldots + t^{(k-1)i} \ , \ 1 + t^{i+1} + \ldots + t^{(k-1)(i+1)} \ , \\
&\qquad \ldots \ , \ 1 + t^{i+n-1} + \ldots + t^{(k-1)(i+n-1)}\big) \\
&= b_0 + t^i b_1 + t^{2i} b_2 + \ldots + t^{(k-1)i} b_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Isso significa que, substituindo $s = t^k$, a matriz tem posto k, podendo ser escalonada a uma matriz com $(n-k)$ linhas com todas as entradas iguais a zero. Se substituirmos s por algo próximo de t^k, o determinante não será zero, mas cada termo do seu desenvolvimento irá para zero com grau no mínimo $(n-k)$ quando $s \to t^k$.

Para $s = t^{-k}$, acontece a mesma coisa com os seguintes vetores:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \left(1, t^{-1}, t^{-2}, ..., t^{-(n-1)}\right) \\
b_2 &= \left(1, t^{-2}, t^{-4}, ..., t^{-2(n-1)}\right) \\
&... \\
b_k &= \left(1, t^{-k}, t^{-2k}, ..., t^{-(n-1)k}\right)
\end{aligned}
$$

A linha i é $-t^{-i}b_1 - t^{-2i}b_2 - ... - t^{-ki}b_k$. $s = t^{-k}$ também é um zero de grau no mínimo $n-k$ do lado esquerdo.

Do lado direito, quando $s = t^k$ temos o termo do segundo produtório

$$1 - t^k t^{j-i} = 1 - t^{k+j-i}.$$

Isto é zero quando $i - j = k$ no produtório, o que acontece $n-k$ vezes, logo $s = t^k$ é um zero de grau no mínimo $n-k$. Do mesmo modo, quando $s = t^{-k}$,

$$1 - t^{-k} t^{j-i} = 1 - t^{-k+j-i}$$

é zero quando $j - i = k$ no produtório, o que acontece $n-k$ vezes, logo $s = t^{-k}$ é um zero de grau no mínimo $n-k$.

Quando $s = 1$, todas as entradas da matriz do lado esquerdo são zero, logo, isto é um zero de grau pelo menos n do polinômio. No lado direito, quando $s = 1$, o termo no produtório fica zero se $t^{j-i} = 1$, ou seja se $j = i$. Isso acontece n vezes, logo $s = 1$ também é um zero de grau pelo menos n no lado direito.

No total já contamos

$$\begin{aligned} n + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) &= n + 2n(n-1) - 2\sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= n + 2n(n-1) - n(n-1) \\ &= n + n(n-1) = n + n^2 - n = n^2 \end{aligned}$$

raízes, ou seja, todas.

Como os dois polinômios têm o mesmo grau e as mesmas raízes, para serem iguais só falta que o termo constante seja o mesmo. Para mostrar isso, vamos usar um outro lema.

Lema 3.4.2

$$det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right) = \prod_{1\le i<j\le n}[(x_i-x_j)(y_i-y_j)]\prod_{i,j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-1}.$$

Quando $n = 1$, temos os dois lados iguais a $\frac{1}{1-x_1y_1}$. Agora

$$det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) det\left(\frac{1}{z_i-y_j}\right),$$

onde $z_i = 1/x_i$. Agora, olhando para isto como uma função de z_n, temos que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) det\left(\frac{1}{z_i-y_j}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right)\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(z_n-z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z_n-y_j)}\ c,$$

onde c não depende de z_n. Os termos do numerador aparecem porque se z_n for igual a algum dos outros z_j, a matriz tem duas linhas iguais, logo o determinante é zero. Estas são as únicas raízes, pois pela expansão do determinante vemos que o numerador deve ser um polinômio de grau $n-1$.

Vamos observar o que acontece em um polo, $z_n = y_n$. O resíduo é

$$\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right)\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(y_n-z_j)}{\prod_{j=1}^{n-1}(y_n-y_j)}\ c.$$

Por outro lado, temos que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right)\ det\left(\frac{1}{z_i - y_j}\right) = \prod_{i=1}^{n} z_i\ \left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n}\frac{\alpha_j}{z_n - z_j}\right),$$

onde α_j é o determinante da matriz menor sem a linha n e a coluna j. No caso do pólo em $z_n = y_n$, o resíduo é $\prod_{i=1}^{n} z_i\ \alpha_n$. Assim, temos

$$c = det\left(\frac{1}{z_i - y_j}\right)_{i,j=1}^{n-1}\ \prod_{j=1}^{n-1}\frac{(y_n - y_j)}{(y_n - z_j)}.$$

Por indução, podemos dizer que

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} z_i\right)\ det\left(\frac{1}{z_i - y_j}\right)_{i,j=1}^{n-1} = \prod_{1\le i<j\le n-1}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)]\prod_{i,j=1}^{n-1}(1 - x_i y_j)^{-1},$$

então

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} z_i\ det\left(\frac{1}{z_i - y_j}\right) &= \prod_{i=1}^{n} z_i\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(z_n - z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z_n - y_j)}\ c \\
&= \prod_{i=1}^{n} z_i\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(z_n - z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z_n - y_j)}\ det\left(\frac{1}{z_i - y_j}\right)_{i,j=1}^{n-1}\ \prod_{j=1}^{n-1}\frac{(y_n - y_j)}{(y_n - z_j)} \\
&= z_n\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(z_n - z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z_n - y_j)}\ \prod_{j=1}^{n-1}\frac{(y_n - y_j)}{(y_n - z_j)} \\
&\qquad \times \prod_{1\le i<j\le n-1}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)]\prod_{i,j=1}^{n-1}(1 - x_i y_j)^{-1} \\
&= \frac{1}{x_n}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_j})}{\prod_{j=1}^{n}(\frac{1}{x_n} - y_j)}\ \prod_{j=1}^{n-1}\frac{(y_n - y_j)}{(y_n - \frac{1}{x_j})} \\
&\qquad \times \prod_{1\le i<j\le n-1}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)]\prod_{i,j=1}^{n-1}(1 - x_i y_j)^{-1} \\
&= \frac{1}{x_n}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(\frac{x_j - x_n}{x_j x_n})}{\frac{1}{(x_n)^n}\prod_{j=1}^{n}(1 - x_n y_j)}\ \prod_{j=1}^{n-1}\frac{(y_n - y_j)}{(x_j y_n - 1)\frac{1}{x_j}} \\
&\qquad \times \prod_{1\le i<j\le n-1}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)]\prod_{i,j=1}^{n-1}(1 - x_i y_j)^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(x_j - x_n)}{\prod_{j=1}^{n}(1 - x_n y_j)} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(y_j - y_n)}{(1 - x_j y_n)}$$
$$\times \prod_{1 \le i < j \le n-1} [(x_i - x_j)(y_i - y_j)] \prod_{i,j=1}^{n-1} (1 - x_i y_j)^{-1}$$
$$= \prod_{1 \le i < j \le n} [(x_i - x_j)(y_i - y_j)] \prod_{i,j=1}^{n} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Usando $x_i = t^i$ e $y_j = t^{j-1}$, temos

$$det\left(\frac{1}{1 - t^{i+j-1}}\right) = \prod_{1 \le i < j \le n} [(t^i - t^j)(t^{i-1} - t^{j-1})] \prod_{i,j=1}^{n} (1 - t^{i+j-1})^{-1}$$
$$= \prod_{1 \le i < j \le n} t^{i-1} \prod_{1 \le i < j \le n} [(t^i - t^j)(1 - t^{j-i})] \prod_{i,j=1}^{n} (1 - t^{i+j-1})^{-1}$$
$$= \prod_{1 \le i < j \le n} t^{i-1} t^i \prod_{1 \le i < j \le n} (1 - t^{j-i})^2 \prod_{i,j=1}^{n} (1 - t^{i+j-1})^{-1}$$
$$= \prod_{1 \le i < j \le n} t^{2i-1} \prod_{1 \le i < j \le n} (1 - t^{j-i})^2 \prod_{i,j=1}^{n} (1 - t^{i+j-1})^{-1}.$$

Mas

$$\sum_{1 \le i < j \le n} 2i - 1 = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)(n-i) = \sum_{i=1}^{n} 2in - n - 2i^2 + i$$
$$= 2n\frac{n(n+1)}{2} - n^2 - 2\frac{n(n+1)(n2+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= n^3 + n^2 - n^2 - \frac{(n^2+n)(2n+1)}{3} + \frac{n^2+n}{2}$$
$$= n^3 - \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{3} + \frac{n^2+n}{2}$$
$$= n^3 - \frac{2n^3}{3} - n^2 - \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

então

$$det\left(\frac{1}{1 - t^{i+j-1}}\right) = t^{n^3/3 - n^2/2 + n/6} \prod_{1 \le i < j \le n} (1 - t^{j-i})^2 \prod_{i,j=1}^{n} (1 - t^{i+j-1})^{-1},$$

o que termina a demonstração do primeiro lema, porque é o que acontece quando colocamos $s = 0$, ou seja, o termo constante dos dois polinômios também é o mesmo.

3.5 Contando as ASM de tamanho n

Seja $Z_n(z,a)$ a função de partição quando todos os vértices têm o mesmo valor, z. Vamos avaliar $Z_n(z,z^{-2})$. Seja $N(B)$ o número de -1 da ASM. Então o peso dos vértices 1 é z, e existem $n+N(B)$ vértices 1. O peso dos vértices -1 é z^{-1}, e existem $N(B)$ vértices -1. O peso dos vértices 0 sudeste e noroeste é:

$$[z] = \frac{z - z^{-1}}{z^{-2} - z^{2}} = \frac{-1}{z^{-1} + z}.$$

O peso dos vértices 0 sudoeste e nordeste é:

$$[z] = \frac{az - a^{-1}z^{-1}}{z^{-2} - z^{2}} = \frac{z^{-1} - z}{z^{-2} - z^{2}} = \frac{1}{z^{-1} + z}.$$

Existem $n^2 - n - 2N(B)$ vértices 0.

O peso de uma dada ASM B de tamanho n é a multiplicação dos pesos dos seus vértices de cada um dos tipos:

$$z^{n+N(B)} \frac{1}{z^{N(B)}} \left(\frac{-1}{z^{-1}+z} \right)^{\gamma} \left(\frac{1}{z^{-1}+z} \right)^{\delta},$$

onde γ é o número de zeros sudeste e noroeste e δ é o número de zeros sudoeste e nordeste. Como γ e δ são números pares (pelo que foi visto no capítulo anterior), então

$$\begin{aligned} Z_n(z, z^{-2}) &= \sum_{B \in \mathcal{A}_n} z^n \frac{1}{(z^{-1}+z)^{n^2-n-2N(B)}} \\ &= z^n \frac{1}{(z^{-1}+z)^{n^2-n}} \sum_{B \in \mathcal{A}_n} (z^{-1}+z)^{2N(B)}. \end{aligned}$$

$$\sum_{B \in \mathcal{A}_n} (z^{-1}+z)^{2N(B)} = Z_n(z, z^{-2}) \frac{(z^{-1}+z)^{n^2-n}}{z^n}.$$

$$\begin{aligned} (z - z^{-1})^{n^2-n} \sum_{B \in \mathcal{A}_n} (z^{-1}+z)^{2N(B)} &= Z_n(z, z^{-2}) \frac{(z - z^{-1})^{n^2-n} (z^{-1}+z)^{n^2-n}}{z^n} \\ &= Z_n(z, z^{-2}) \frac{((z - z^{-1})(z^{-1}+z))^{n^2-n}}{z^n} \\ &= Z_n(z, z^{-2}) \frac{(z^2 - z^{-2})^{n^2-n}}{z^n}. \end{aligned}$$

Usando agora a fórmula encontrada no teorema para $Z_n(\vec{x}, \vec{y}, a)$, vamos substituir os valores

$$x_i = z q^{\frac{i-1}{2}}$$

$$y_j = q^{\frac{-j}{2}}.$$

Note que

$$\lim_{q\to 1} \frac{x_i}{y_j} = z.$$

Como a fórmula foi feita para especializar $Z_n(z,a)$ quando o valor de cada vértice é x_i/y_j e não todos iguais a z, podemos dizer que

$$Z_n(z,a) = \lim_{q\to 1} Z_n(\vec{x},\vec{y},a)$$

para estes valores de x_i,y_j. Substituindo na equação anterior e chamando o lado esquerdo de $X = (z-z^{-1})^{n^2-n}\sum_{B\in\mathcal{A}_n}(z^{-1}+z)^{2N(B)}$, fica

$$\begin{aligned}
X &= \frac{(z^2-z^{-2})^{n^2-n}}{z^n}\lim_{q\to 1} Z_n(\vec{x},\vec{y},z^{-2}) \\
&= \frac{(z^2-z^{-2})^{n^2-n}}{z^n}\lim_{q\to 1}\frac{\prod_{i=1}^n zq^{i-1/2}\prod_{i,j=1}^n\left[zq^{\frac{i+j-1}{2}}\right]\left[\frac{1}{z}q^{\frac{i+j-1}{2}}\right]}{\prod_{1\le i<j\le n}\left[q^{\frac{i-j}{2}}\right]\left[q^{\frac{i-j}{2}}\right]} \\
&\qquad \times det\left(\frac{1}{\left[zq^{\frac{i+j-1}{2}}\right]\left[\frac{1}{z}q^{\frac{i+j-1}{2}}\right]}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (z^2-z^{-2})^{n^2-n}\lim_{q\to 1}\frac{\prod_{i=1}^n q^{i-1/2}\prod_{i,j=1}^n\left[zq^{\frac{i+j-1}{2}}\right]\left[\frac{1}{z}q^{\frac{i+j-1}{2}}\right]}{\prod_{1\le i<j\le n}\left[q^{\frac{i-j}{2}}\right]\left[q^{\frac{i-j}{2}}\right]} \\
&\qquad \times det\left(\frac{1}{\left[zq^{\frac{i+j-1}{2}}\right]\left[\frac{1}{z}q^{\frac{i+j-1}{2}}\right]}\right).
\end{aligned}$$

Note que

$$\left[zq^{\frac{i+j-1}{2}}\right]\left[\frac{1}{z}q^{\frac{i+j-1}{2}}\right] = \frac{(zq^{\frac{i+j-1}{2}} - z^{-1}q^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})(z^{-1}q^{\frac{i+j-1}{2}} - zq^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})}{(z^{-2}-z^2)^2}.$$

Vamos procurar os termos $(z^{-2}-z^2)$ no limite. Temos $2n^2$ no denominador por causa dos termos calculados acima, vindos do produtório. O determinante também tem estes termos, como é constante e aparece em todas as entradas da matriz podemos colocar para fora, são $2n$ termos $(z^{-2}-z^2)$ no numerador.

Agora vamos olhar para o termo no denominador,

$$\left[q^{\frac{i-j}{2}}\right]^2 = \left(\frac{q^{\frac{i-j}{2}} - q^{\frac{j-i}{2}}}{z^{-2} - z^2}\right)^2,$$

acrescentando $n^2 - n$ termos $(z^{-2} - z^2)$ no numerador. Juntando todos, com aqueles do lado esquerdo, ficam

$$(n^2 - n) + (2n) - (2n^2) + (n^2 - n) = 0,$$

todos cortam. Fica

$$X = \lim_{q\to 1} \frac{\prod_{i=1}^n q^{i-1/2} \prod_{i,j=1}^n (zq^{\frac{i+j-1}{2}} - z^{-1}q^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})(z^{-1}q^{\frac{i+j-1}{2}} - zq^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})}{\prod_{1\leq i<j\leq n}(q^{\frac{i-j}{2}} - q^{\frac{j-i}{2}})^2} \\ \times det\left(\frac{1}{(zq^{\frac{i+j-1}{2}} - z^{-1}q^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})(z^{-1}q^{\frac{i+j-1}{2}} - zq^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})}\right)$$

$$= \lim_{q\to 1} \frac{\prod_{i=1}^n q^{i-1/2} \prod_{i,j=1}^n (zq^{\frac{i+j-1}{2}} - z^{-1}q^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})(z^{-1}q^{\frac{i+j-1}{2}} - zq^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})}{\prod_{1\leq i<j\leq n} q^{i-j} \prod_{1\leq i<j\leq n}(1 - q^{j-i})^2} \\ \times det\left(\frac{1}{(zq^{\frac{i+j-1}{2}} - z^{-1}q^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})(z^{-1}q^{\frac{i+j-1}{2}} - zq^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})}\right).$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}
&(zq^{\frac{i+j-1}{2}} - z^{-1}q^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})(z^{-1}q^{\frac{i+j-1}{2}} - zq^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)}) \\
&= (q^{\frac{i+j-1}{2}} - z^{-2}q^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)})(q^{\frac{i+j-1}{2}} - z^{2}q^{-\left(\frac{i+j-1}{2}\right)}) \\
&= q^{i+j-1} - z^{-2} - z^2 + q^{-(i+j-1)} \\
&= q^{-(i+j-1)}(q^{2i+j-1} - z^{-2}q^{i+j-1} - z^2q^{i+j-1} + 1) \\
&= q^{-(i+j-1)}(1 - z^2q^{i+j-1})(1 - z^{-2}q^{i+j-1}),
\end{aligned}$$

então fica

$$X = \lim_{q\to 1} \frac{\prod_{i=1}^n q^{i-1/2} \prod_{i,j=1}^n q^{-(i+j-1)}(1 - z^2q^{i+j-1})(1 - z^{-2}q^{i+j-1})}{\prod_{1\leq i<j\leq n} q^{i-j} \prod_{1\leq i<j\leq n}(1 - q^{j-i})^2} \\ \times det\left(\frac{1}{q^{-(i+j-1)}(1 - z^2q^{i+j-1})(1 - z^{-2}q^{i+j-1})}\right).$$

Todos os termos que são q podem ser removidos porque queremos tomar o limite quando $q \to 1$, então temos finalmente

$$(z - z^{-1})^{n^2-n} \sum_{B \in \mathcal{A}_n} (z^{-1} + z)^{2N(B)} = \lim_{q \to 1} \frac{\prod_{i,j=1}^{n} (1 - z^2 q^{i+j-1})(1 - z^{-2} q^{i+j-1})}{\prod_{1 \le i < j \le n} (1 - q^{j-i})^2} \times det\left(\frac{1}{(1 - z^2 q^{i+j-1})(1 - z^{-2} q^{i+j-1})} \right).$$

Vamos substituir $z = e^{2\pi\sqrt{-1}/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, assim temos

$$(z - z^{-1}) = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}) - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}) = \sqrt{-3}$$

$$(z^{-1} + z) = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}) + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}) = -1$$

então a igualdade acima fica

$$\begin{aligned}
(\sqrt{-3})^{n^2-n} \sum_{B \in \mathcal{A}_n} (-1)^{2N(B)} &= (-3)^{\frac{n^2-n}{2}} \sum_{B \in \mathcal{A}_n} 1 \\
&= (-3)^{\frac{n^2-n}{2}} A_n \\
&= \lim_{q \to 1} \frac{\prod_{i,j=1}^{n} (1 - z^2 q^{i+j-1})(1 - z^{-2} q^{i+j-1})}{\prod_{1 \le i < j \le n} (1 - q^{j-i})^2} \\
&\times det\left(\frac{1}{(1 - z^2 q^{i+j-1})(1 - z^{-2} q^{i+j-1})} \right).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(1 - z^2 q^{i+j-1})(1 - z^{-2} q^{i+j-1}) &= (1 - q^{i+j-1} e^{-2\pi i/3})(1 - q^{i+j-1} e^{2\pi i/3}) \\
&= 1 - q^{i+j-1} e^{-2\pi i/3} - q^{i+j-1} e^{2\pi i/3} + q^{2(i+j-1)} \\
&= 1 + q^{i+j-1} + q^{2(i+j-1)} \\
&= \frac{1 - q^{3(i+j-1)}}{1 - q^{i+j-1}},
\end{aligned}$$

então

$$(-3)^{\frac{n^2-n}{2}} A_n = \lim_{q \to 1} \frac{\prod_{i,j=1}^{n} \frac{1 - q^{3(i+j-1)}}{1 - q^{i+j-1}}}{\prod_{1 \le i < j \le n} (1 - q^{j-i})^2} \, det\left(\frac{1 - q^{i+j-1}}{1 - q^{3(i+j-1)}} \right).$$

Agora vamos usar o primeiro lema da seção anterior com $s = q$, $t = q^3$.

$$
\begin{aligned}
(-3)^{\frac{n^2-n}{2}} A_n &= \lim_{q\to 1} \frac{\prod_{i,j=1}^{n} \dfrac{1-q^{3(i+j-1)}}{1-q^{i+j-1}}}{\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{j-i})^2} \\
&\quad \times q^{3(n^3/3-n^2/2+n/6)} \prod_{1\le i<j\le n} (1-q^{3(j-i)})^2 \prod_{i,j=1}^{n} \frac{1-q^{1+3(j-i)}}{1-q^{3(i+j-1)}} \\
&= \lim_{q\to 1} \prod_{i,j=1}^{n} \frac{1-q^{3(i+j-1)}}{1-q^{i+j-1}} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(1-q^{3(j-i)})^2}{(1-q^{j-i})^2} \prod_{i,j=1}^{n} \frac{1-q^{1+3(j-i)}}{1-q^{3(i+j-1)}} \\
&= \lim_{q\to 1} \prod_{i,j=1}^{n} \frac{1-q^{1+3(j-i)}}{1-q^{i+j-1}} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(1-q^{3(j-i)})^2}{(1-q^{j-i})^2}.
\end{aligned}
$$

Note que quando $q \to 1$, todos os termos dos produtórios, tanto no numerador quanto no denominador, são zero. Para resolver este problema vamos ter que cortar vários termos. Para qualquer inteiro $n > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
1-q^n &= (1-q)(1+q+q^2+...+q^n), \\
1-q^{-n} &= (1-q^{-1})(1+q^{-1}+q^{-2}+...+q^{-n}).
\end{aligned}
$$

Vamos chamar

$$
\begin{aligned}
[n] &= (1+q+q^2+...+q^n), \\
\{n\} &= (1+q^{-1}+q^{-2}+...+q^{-n}).
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
A_n &= (-3)^{-\frac{n^2-n}{2}} \times \\
&\lim_{q\to 1} \prod_{1\le i\le j\le n} \frac{1-q^{1+3(j-i)}}{1-q^{i+j-1}} \prod_{1\le j<i\le n} \frac{1-q^{-(3(i-j)-1)}}{1-q^{i+j-1}} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(1-q^{3(j-i)})^2}{(1-q^{j-i})^2}.
\end{aligned}
$$

O primeiro somatório foi separado em dois porque $1+3(j-i)$ é negativo quando $j < i$.

$$A_n = (-3)^{-\frac{n^2-n}{2}} \lim_{q\to 1} \prod_{1\le i\le j\le n} \frac{(1-q)[1+3(j-i)]}{(1-q)[i+j-1]}$$

$$\times \prod_{1\le j<i\le n} \frac{(1-q^{-1})\{3(i-j)-1\}}{(1-q)[i+j-1]} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{((1-q)[3(j-i)])^2}{((1-q)[j-i])^2}$$

$$= (-3)^{-\frac{n^2-n}{2}} \lim_{q\to 1} \prod_{1\le i\le j\le n} \frac{[1+3(j-i)]}{[i+j-1]} \prod_{1\le j<i\le n} \frac{(1-q^{-1})\{3(i-j)-1\}}{(1-q)[i+j-1]}$$

$$\times \prod_{1\le i<j\le n} \frac{[3(j-i)]^2}{[j-i]^2}.$$

Note que

$$\lim_{q\to 1} \frac{1-q^{-1}}{1-q} = \lim_{q\to 1} \frac{q^{-2}}{-1} = -1,$$

por L'Hôpital. Então

$$A_n = 3^{-\frac{n^2-n}{2}} (-1)^{-\frac{n^2-n}{2}} \lim_{q\to 1} \prod_{1\le i\le j\le n} \frac{[1+3(j-i)]}{[i+j-1]} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\times \prod_{1\le j<i\le n} \frac{\{3(i-j)-1\}}{[i+j-1]} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{[3(j-i)]^2}{[j-i]^2}$$

$$= 3^{-\frac{n^2-n}{2}} \lim_{q\to 1} \prod_{1\le i\le j\le n} \frac{[1+3(j-i)]}{[i+j-1]}$$

$$\times \prod_{1\le j<i\le n} \frac{\{3(i-j)-1\}}{[i+j-1]} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{[3(j-i)]^2}{[j-i]^2}.$$

Mas

$$\lim_{q\to 1} [n] = n,$$

$$\lim_{q\to 1} \{n\} = n,$$

então

$$\begin{aligned}
A_n &= 3^{-\frac{n^2-n}{2}} \prod_{1\le i\le j\le n} \frac{1+3(j-i)}{i+j-1} \prod_{1\le j<i\le n} \frac{3(i-j)-1}{i+j-1} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{3(j-i)^2}{(j-i)^2}\\
&= 3^{-\frac{n^2-n}{2}} \prod_{1\le i\le j\le n} \frac{1+3(j-i)}{i+j-1} \prod_{1\le j<i\le n} \frac{3(i-j)-1}{i+j-1} \prod_{1\le i<j\le n} 3^2\\
&= 3^{\frac{n^2-n}{2}} \prod_{1\le i\le j\le n} \frac{1+3(j-i)}{i+j-1} \prod_{1\le j<i\le n} \frac{3(i-j)-1}{i+j-1}\\
&= 3^{\frac{n^2-n}{2}} \frac{\prod_{1\le i\le j\le n} 1+3(j-i) \prod_{1\le j<i\le n} 3(i-j)-1}{\prod_{i,j=1}^{n} i+j-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j=1}^{n} i+j-1 &= \prod_{i=1}^{n} (i)(i+1)...(i+n-1)\\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!}.\\
\prod_{1\le i\le j\le n} 3(j-i)+1 &= \prod_{k=0}^{n-1} (3k+1)^{n-k},
\end{aligned}$$

onde foi feita a substituição $k = j-i$. Do mesmo modo

$$\prod_{1\le j<i\le n} 3(i-j)-1 = \prod_{k=1}^{n-1} (3k-1)^{n-k}.$$

Juntando tudo fica

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{3^{\frac{n^2-n}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \left[(3k+1)^{n-k}(3k-1)^{n-k}\right] \prod_{i=1}^{n} (i-1)!}{\prod_{i=1}^{n} (i+n-1)!}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \left[3^{n-k}(3k+1)^{n-k}(3k-1)^{n-k}\right] \prod_{i=0}^{n-1} (i)!}{\prod_{i=0}^{n-1} (n+i)!}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{n-1} (i)! &= \prod_{i=1}^{n-1} (i)!\\
&= (1)\ (1\ 2)\ (1\ 2\ 3)\ ...\ (1\ 2\ 3\ ...\ n-1)\\
&= \prod_{k=1}^{n-1} k^{n-k},
\end{aligned}$$

então

$$A_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}\left[(3k+1)^{n-k}(3k)^{n-k}(3k-1)^{n-k}\right]}{\prod_{i=0}^{n-1}(n+i)!}.$$

O produtório no numerador é

$$\begin{aligned}
&(2\ 3\ 4)^{n-1}(5\ 6\ 7)^{n-2}...\ ((3(n-1)-1)\ (3(n-1))\ (3(n-1)+1))\\
&= (3(n-1)+1)!\ ...\ 7!\ 4!\ 1!\\
&= \prod_{i=0}^{n-1}(3i+1)!,
\end{aligned}$$

então

$$A_n = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{(3i+1)!}{(n+i)!}.$$