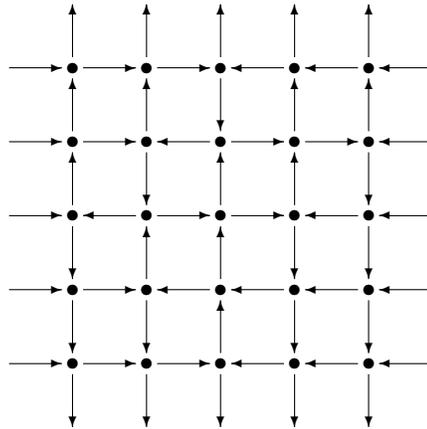
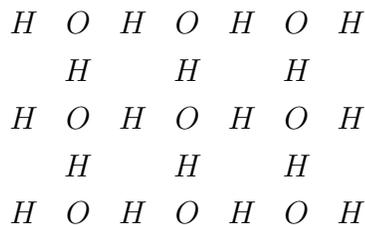


2 Gelo Quadrado

Vamos ver que as ASM estão em bijeção com configurações de gelo quadrado satisfazendo certas condições de fronteira. No modelo de gelo quadrado, cada entrada da matriz corresponde a um vértice de uma malha quadriculada quadrada, que se liga com seus quatro vértices vizinhos. Em cada vértice, duas das ligações devem *entrar* e duas *sair*. Uma configuração permitida encontra-se abaixo.

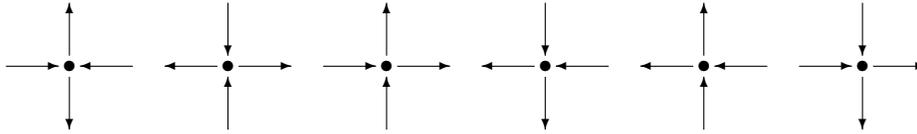


O nome "gelo quadrado" vem do fato de que podemos interpretar os vértices como átomos de oxigênio e as setas como átomos de hidrogênio. Um hidrogênio está ligado a um oxigênio se a seta aponta do hidrogênio para o oxigênio. Assim, numa configuração de átomos quadrada,



para formar água (ou gelo), cada oxigênio deve se ligar a dois hidrogênios próximos a ele, daí a condição de duas setas entrando em cada vértice.

Existem seis configurações de vértices que satisfazem as condições de entrada e saída:



O primeiro tipo vai ser associado aos 1 da ASM, o segundo tipo aos -1 , e os outros quatro tipos aos 0. Por exemplo, a ASM

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

corresponde à malha acima.

Podemos observar várias coisas interessantes sobre este monte de setas. Vamos imaginar que estamos “andando” de cima para baixo em uma coluna, começando do vértice na primeira linha. Note que todos os zeros gelados (isto é, os tipos de vértices associados a zeros) têm ou suas duas setas verticais para cima, ou as duas para baixo. Assim, ao passar de um vértice para o seguinte na coluna, a seta vertical continua apontando para o mesmo lado: se era para cima, ao passar por um zero continua para cima. Se era para baixo, continua para baixo. A mesma coisa acontece quando andamos por uma linha, começando da esquerda, observando a direção que aponta a seta horizontal.

Em cada linha de uma ASM, temos uma seqüência de $1, -1, 1, \dots, -1, 1$, podendo ter zeros no início, no fim, e no meio. Mas todos os zeros gelados mantêm a direção da seta horizontal, por isso esta direção será definida pelas entradas que não são zero.

A primeira entrada não nula da linha é 1, o que faz com que a seta da esquerda aponte para a direita. Qualquer zero que venha à esquerda deste 1, não vai mudar a direção desta seta. A mesma coisa acontece do lado direito, quando a última entrada diferente de zero é o 1, o que faz com que a seta da direita tenha que apontar para a esquerda. Ou seja: em cada linha, as setas horizontais externas apontam para dentro da configuração.

O mesmo argumento pode ser usado para cada coluna. A entrada diferente de zero que aparece mais em cima é um 1, logo, a seta de cima deve apontar para cima. Embaixo, a última coisa diferente de zero é 1, logo a seta de baixo aponta para baixo, fazendo com que as setas externas verticais

apontem para fora da configuração. Todo gelo quadrado que representa uma ASM sempre terá esta *condição de fronteira* (isto é, esta determinação das setas externas à configuração).

Acabamos de mostrar que cada gelo quadrado com esta condição de fronteira corresponde a uma ASM, pois em uma linha que começa com a seta horizontal apontando para a direita a primeira entrada diferente de zero que aparece precisa ser 1, e depois elas precisam se alternar, terminando com 1 para que a seta horizontal termine para a esquerda. Para deixar claro a bijeção mencionada no início do capítulo, falta mostrar como chegar de uma ASM ao seu gelo quadrado correspondente.

Inicialmente desenhamos as condições de fronteira e substituímos os 1 e -1 pelos vértices correspondentes. Para os zeros, como observado antes todos eles mantêm a direção da seta horizontal. Em cada linha, preenchemos as setas horizontais que faltam mantendo a direção das setas horizontais já preenchidas que estiverem à sua esquerda e direita. Fazemos a mesma coisa para as setas verticais em cada coluna, e o gelo quadrado está preenchido. Fizemos isso de forma única, daí a bijeção entre gelo quadrado e ASM.

Observe o que acontece na ASM da figura acima: *as setas verticais abaixo da k -ésima linha são k setas apontando para baixo e $n - k$ setas apontando para cima*. Isto também não é coincidência. Como os zeros gelados não mudam a direção das setas verticais, eles não mudam o número de setas que descem, ao passar de uma linha para a linha seguinte. Já o vértice correspondente às entradas 1 da matriz transforma uma seta para cima em uma seta para baixo. Por sua vez, o -1 transforma uma seta para baixo em uma seta para cima. Para que a soma de cada linha seja 1, temos r entradas -1 e $r + 1$ entradas 1. Ou seja, cada linha deve ter uma seta para baixo a mais do que a linha anterior.

Uma consequência disso é que, no total das setas verticais de uma configuração, metade é para cima e metade é para baixo: o total de setas para cima é $n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = n(n + 1)/2$, de um total de $n(n + 1)$ setas verticais. Como o mesmo argumento vale para as setas horizontais passando de uma coluna para a coluna seguinte, concluímos que metade das setas horizontais é para a direita e metade é para a esquerda.

Agora, vamos chamar de z_1, z_2, z_3 e z_4 , respectivamente, a quantidade de cada um dos quatro tipos de zero que aparece numa dada ASM. Cada 1 e -1 tem uma seta de cada tipo (para cima, para baixo, para a esquerda, para a direita). Então, como o número de setas para a esquerda é igual ao

número de setas para a direita, podemos dizer que

$$z_1 + z_4 = z_2 + z_3.$$

Além disso, o número de setas para cima é igual ao número de setas para baixo, então

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4.$$

Somando as duas equações,

$$2z_1 + z_3 + z_4 = 2z_2 + z_3 + z_4,$$

e assim

$$z_1 = z_2 \quad , \quad z_3 = z_4.$$

Acabamos de provar que *o número de zeros com as setas apontando para cima e direita (resp. cima e esquerda) é igual ao número de zeros com as setas apontando para baixo e esquerda (resp. baixo e direita).*

2.1 Pesos de Configurações e a Função de Partição

Para contar o número de gelos quadrados, vamos dar *pesos* diferentes para cada um dos seis tipos de vértices definidos na seção anterior. O peso de uma configuração inteira de gelo quadrado será definido como o produto dos pesos de todos os seus vértices. A *função de partição* é a soma dos pesos de todas as configurações possíveis de gelo quadrado com aquele tamanho.

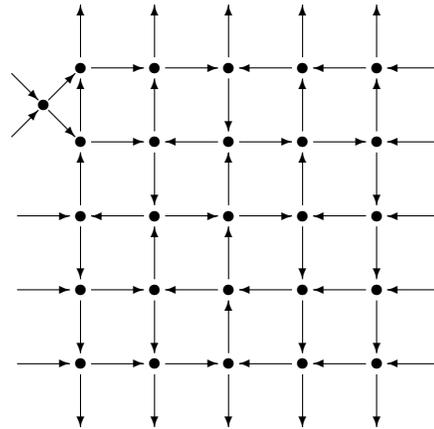
$$Z_n = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} \prod_{v \in B} \text{peso}(v).$$

A idéia será calcular a função de partição Z_n de algum jeito, e depois modificar os parâmetros dos quais os pesos dependem para que todas as configurações tenham peso 1. Assim, o valor da função de partição será o número de ASM que existem!

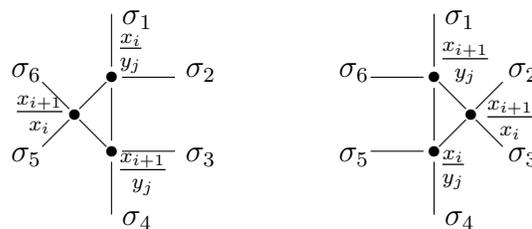
$$Z_n = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} 1 = A_n.$$

Estes pesos poderão depender de alguns parâmetros, inclusive poderão depender do vértice. Vamos dar um nome para cada vértice: o vértice na linha i e coluna j chama-se $\frac{x_i}{y_j}$. Este valor será usado nas expressões para os pesos dos diferentes tipos de vértices.

Para escolher os pesos, vamos observar o que queremos que eles satisfaçam. Alteramos uma configuração da seguinte maneira: inserindo do lado esquerdo, entre as linhas i e $i + 1$, um átomo extra, como na figura abaixo.



Este átomo chama-se $\frac{x_{i+1}}{x_i}$. Ele será passado para a direita, coluna por coluna. Cada vez que ele passar por cima da coluna j , os nomes dos átomos $\frac{x_i}{y_j}$ e $\frac{x_{i+1}}{y_j}$ serão trocados. Seu peso também deve ser multiplicado para calcular o valor da configuração onde foi adicionado. Para isto, devemos "girar" o átomo extra para a esquerda até que fique alinhado, e então ver de que tipo é. Por exemplo, na figura acima é um zero do primeiro tipo (nordeste). Depois de passar por todas as colunas, será um zero sudoeste, para manter a condição de contorno do lado direito.



As orientações das setas σ_i , $i = 1, \dots, 6$ são mantidas. O triângulo formado por $\frac{x_i}{y_j}$, $\frac{x_{i+1}}{y_j}$ e $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ após a passagem deve ser preenchido com as orientações de modo a manter a regra de que em cada átomo, duas setas apontam para dentro e duas para fora, inclusive no átomo do meio. Para saber o peso deste átomo, o giramos 45 graus para a esquerda. Por exemplo, o átomo na figura acima é um zero do primeiro tipo.

Isto sempre é possível, e em alguns casos há duas possibilidades. Em outros casos, duas configurações diferentes podem levar à mesma configuração. Esta operação de passar para a coluna seguinte, levando em

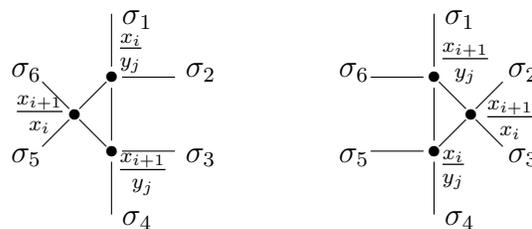
consideração todas as diferentes possibilidades, leva o conjunto de todas as configurações de tamanho n , com um átomo a mais entre as linhas i e $i + 1$ e as colunas j e $j + 1$ no conjunto de todas as configurações de tamanho n , com um átomo a mais entre as linhas i e $i + 1$ e as colunas $j + 1$ e $j + 2$.

Antes da primeira passagem, a soma de todas as configurações com o átomo extra é igual à soma de todas as ASM multiplicado pelo peso do átomo extra, ou seja, a função de partição multiplicada pelo peso de um zero do primeiro tipo. Queremos escolher os pesos de maneira que a soma dos pesos das possibilidades antes da passagem seja igual à soma dos pesos das possibilidades após a passagem, pois deste modo a soma das configurações não é alterada a cada passo.

Depois do último passo, a soma de todas as configurações com o átomo extra é igual à soma de todas as ASM multiplicado pelo peso do átomo extra, ou seja, a função de partição multiplicada pelo peso de um zero do segundo tipo. Por isso, queremos também que os zeros do primeiro e segundo tipo tenham o mesmo peso, pois assim a função de partição depois de todas as passagens não terá se modificado. Mas todos os x_i terão trocado de lugar com os x_{i+1} , ou seja, a função de partição será simétrica nos x_i . O mesmo argumento pode ser usado para os y_i , fazendo os zeros do terceiro e quarto tipos terem o mesmo peso.

As afirmações acima demonstram que Z_n é uma função simétrica nos x e nos y . Agora vamos provar as afirmações, e ver quais pesos serão necessários para que cada passo realmente não altere a soma dos pesos.

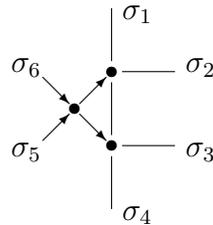
Considere uma configuração com uma partícula extra adicionada. Esta partícula e as duas à sua direita formam um triângulo. Considere as seis setas incidentes neste triângulo, antes e depois de passar a partícula extra para a direita:



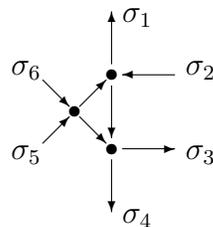
Em cada vértice deve entrar e sair o mesmo número de setas. Aqui consideramos um conjunto de três vértices. As setas do triângulo contribuem com três entradas e três saídas - saem de um vértice e entram no outro. Logo, as seis setas externas ao triângulo devem ser três entrando e três saindo, para completar a quantidade necessária.

Suponha que $\sigma_1 = \sigma_2$ ou $\sigma_3 = \sigma_4$ ou $\sigma_5 = \sigma_6$ estão entrando. Então existe um outro par de setas saindo, e o terceiro par tem uma entrando e a outra saindo.

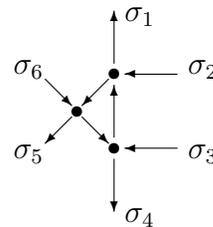
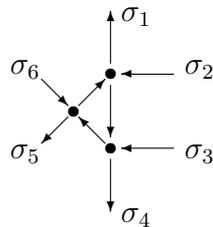
A orientação dos dois lados do triângulo que tocam o vértice com duas setas entrando, tem que ser saindo deste vértice.



A orientação do último lado do triângulo também está forçada, para manter o número certo de setas entrando e saindo nos outros dois vértices.



A outra possibilidade é que $\sigma_1 \neq \sigma_2$ e $\sigma_3 \neq \sigma_4$ e $\sigma_5 \neq \sigma_6$. Neste caso, cada vértice do triângulo tem uma seta entrando e uma saindo. Isso dá duas possibilidades para as orientações, pode ser rodando para a esquerda ou para a direita.



Isso mostra que é sempre possível preencher o triângulo antes da passagem de uma ou duas maneiras, para todas as configurações das setas σ_i .

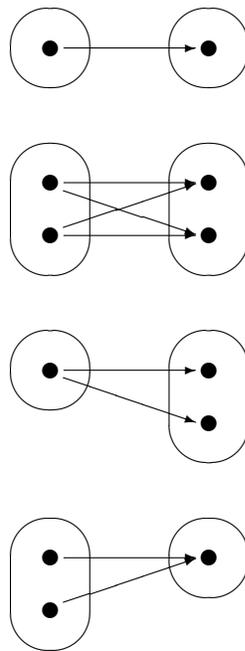
O mesmo argumento vale para o triângulo depois da passagem, mas neste caso os pares de setas incidentes a serem considerados são (σ_2, σ_3) , (σ_4, σ_5) , (σ_6, σ_1) .

Ou seja, para qualquer configuração de três setas entrando e três saindo, podemos ter 1 ou 2 possibilidades para o triângulo antes da passagem, e 1 ou 2 possibilidades para o triângulo depois da passagem.

Seja C_n o conjunto das configurações de gelo quadrado com a partícula extra antes da coluna n , entre a linha i e a linha $i + 1$.

Se $A \in C_n$, $B \in C_{n+1}$, e ao passar a partícula pela coluna n partindo da configuração A , B for uma das possibilidades para a configuração depois da passagem, dizemos que A vai para B .

Vamos representar esta passagem para a direita, como uma seta indo de um elemento de C_n para um elemento de C_{n+1} . Quatro coisas podem acontecer:

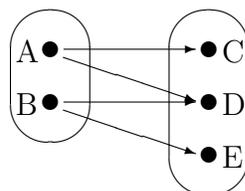


Estas são as únicas possibilidades.

Por exemplo, não acontece de passar a partícula para a direita (ou esquerda), e não ser possível preencher o triângulo, conforme vimos antes. Assim, sabemos que em cada C_n , todos os elementos são alcançados, tanto pela esquerda quanto pela direita. Dando vários passos para a esquerda, qualquer configuração chegará a uma ASM, e para a direita também. Ou seja: O conjunto das ASM (C_1) é levado novamente no conjunto das ASM (C_{n+1}).

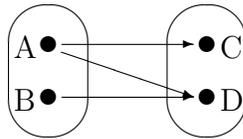
Outra coisa que não acontece é haver mais de duas possibilidades para preenchimento do triângulo, também como já vimos.

Podemos observar mais uma coisa que não acontece:



Se A vai para C e D , então C e D são iguais, exceto pelo triângulo, que tem uma orientação em C e outra em D . Da mesma forma, B vai para D e E , então D e E são iguais exceto pela orientação do triângulo. Logo, C e E são iguais. O mesmo argumento vale na passagem para a esquerda.

Assim, vemos que os pedacinhos dos quatro tipos apresentados não podem se misturar: Se acrescentarmos mais uma seta a um pedacinho do primeiro tipo, ele deixaria de ser deste tipo. No segundo tipo não há possibilidade de acrescentar setas pois cada elemento já tem duas. No tipo 3 (o 4 é simétrico), se colocar mais uma seta fica:



Claro que C e D diferem somente pela orientação do triângulo. Como D vai para a esquerda em A e B , C também tem que ir para as duas. Pelo argumento anterior, vemos que C tem que ir para A e B , fazendo com que este pedacinho passe a ser do tipo 2.

Concluindo, o conjunto das ASM é levado nele mesmo por sucessivos passos para a direita. Cada passo é formado por vários pedacinhos separados, dos quatro tipos.

Falta escolher os pesos para que a soma dos pesos de todas as ASM não mude quando fazemos isso. Vamos manter a soma constante a cada passo, de C_k para C_{k+1} . A soma de todos os elementos é a soma de todos os pedacinhos, então vamos estudar cada pedacinho separadamente, para que nele a soma não mude com a passagem. Para o tipo 1, isso significa que o elemento da esquerda tem o mesmo peso do da direita. Para o tipo 2, $E_1 + E_2 = D_1 + D_2$. Para o tipo 3, $E = D_1 + D_2$ e para o tipo 4, $E_1 + E_2 = D$.

Vamos chamar os pesos dos seis tipos, respectivamente, de $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$, $e(z)$, $f(z)$, onde $z = \frac{x_i}{y_j}$ é o nome do vértice. A escolha dos pesos deve tornar verdadeiro o resultado abaixo.

Teorema 2.1.1 (*Yang-Baxter*) *A soma de todas as possíveis configurações com o átomo extra entre as linhas i e $i + 1$ e as colunas j e $j + 1$, com um dado conjunto de orientações σ_i , é igual à soma de todas as possíveis configurações após passar este átomo para o lado direito.*

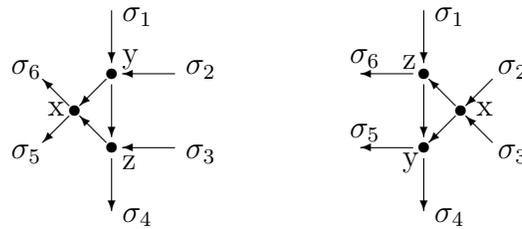
Precisamos verificar o teorema para cada uma das 20 configurações de orientações σ_i . Para diminuir este número, podemos fazer o seguinte: observe

que rodar um gelo quadrado 180° dá outro gelo quadrado. Se provamos para um conjunto de σ_i , podemos rodá-lo de cabeça para baixo e estará automaticamente provado para este novo conjunto de orientações (que é σ_{i+3} , desde que $c(z) = d(z)$ e $e(z) = f(z)$). Quando viramos um vértice a de cabeça para baixo ele continua sendo a , o b também não muda, mas o c vira d e o e vira f . Assim, precisamos agora só de 10 configurações σ_i .

Caso 1: 1 possibilidade na esquerda e 1 na direita

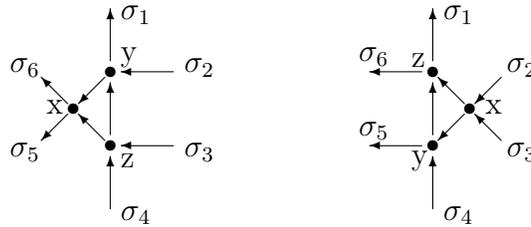
As setas entrando podem ser $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$, $(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$, $(\sigma_5, \sigma_6, \sigma_1)$, $(\sigma_6, \sigma_1, \sigma_2)$.

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$:



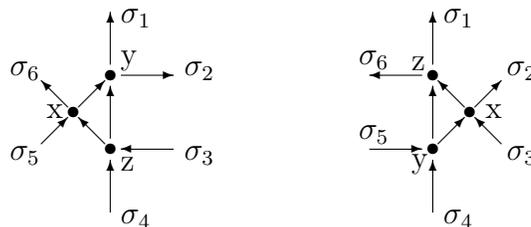
Calculando os pesos destes desenhos, temos que ter os pesos dos dois lados iguais, e de fato, os pesos dos dois lados são $c(x)c(y)c(z)$.

$(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$:



Os pesos dos dois lados são $c(x)e(y)e(z)$.

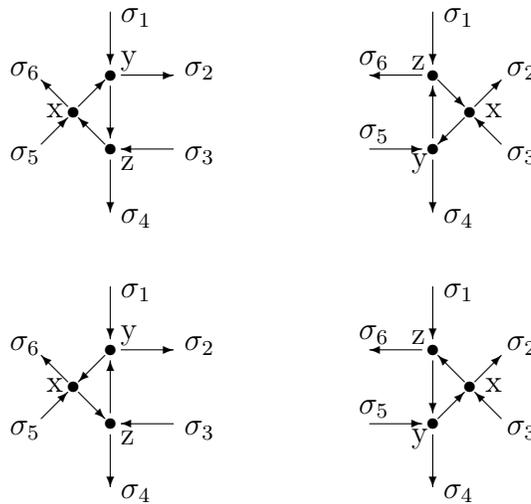
$(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$:



Os pesos dos dois lados são $e(x)c(y)e(z)$. Como as outras três configurações são rotações destas, concluímos que o caso 1 não influencia na escolha dos pesos, porque quaisquer pesos escolhidos vão ter suas somas mantidas nas passagens deste caso.

Caso 2: 2 possibilidades na esquerda e 2 na direita

Para este caso, precisamos que as setas que entram sejam $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5)$ ou $(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6)$, mas pela simetria de rotação de 180° , vamos provar apenas para $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5)$:



$$e(x)e(y)c(z) + b(x)b(y)a(z) = a(x)a(y)b(z) + e(x)e(y)c(z),$$

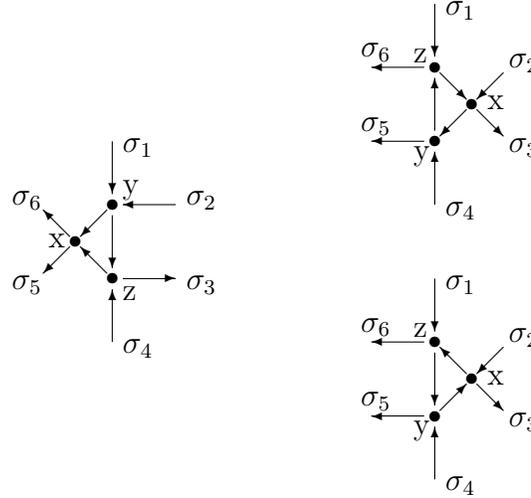
ou seja

$$b(x)b(y)a(z) = a(x)a(y)b(z).$$

Este é o primeiro pedido que estamos fazendo aos pesos.

Caso 3: 1 possibilidade na esquerda e 2 na direita

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4)$:



$$c(x)c(y)b(z) = e(x)e(y)b(z) + b(x)b(y)c(z).$$

Os outros conjuntos de orientações neste caso são $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_5)$, $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4)$, $(\sigma_2, \sigma_5, \sigma_6)$, $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_6)$, $(\sigma_3, \sigma_5, \sigma_6)$, e verificando os desenhos semelhantes ao exemplo acima temos também os outros pedidos,

$$b(x)c(y)e(z) = e(x)a(y)b(z) + b(x)e(y)c(z),$$

$$c(x)b(y)e(z) = a(x)e(y)b(z) + e(x)b(y)c(z),$$

$$c(x)a(y)e(z) = e(x)a(y)c(z) + b(x)e(y)a(z),$$

$$a(x)c(y)e(z) = a(x)e(y)c(z) + e(x)b(y)a(z),$$

$$c(x)c(y)a(z) = a(x)a(y)c(z) + e(x)e(y)a(z).$$

Caso 4: 2 possibilidades na esquerda e 1 na direita

Todos os conjuntos de orientações deste caso são rotações de 180° dos conjuntos do caso anterior, logo não precisam ser examinadas novamente.

Em todos os desenhos acima, os vértices que se chamam $\frac{x_{i+1}}{x_i}$, $\frac{x_i}{y_j}$ e $\frac{x_{i+1}}{y_j}$ foram chamados de x , y e z para simplificar os desenhos. Assim, os pedidos que fizemos dos pesos não precisam valer para todas as triplas x, y, z , mas só quando $z = xy$.

Juntando todos os pedidos que temos,

$$b(x)b(y)a(z) = a(x)a(y)b(z),$$

$$c(x)c(y)b(z) = e(x)e(y)b(z) + b(x)b(y)c(z),$$

$$b(x)c(y)e(z) = e(x)a(y)b(z) + b(x)e(y)c(z),$$

$$c(x)b(y)e(z) = a(x)e(y)b(z) + e(x)b(y)c(z),$$

$$c(x)a(y)e(z) = e(x)a(y)c(z) + b(x)e(y)a(z),$$

$$a(x)c(y)e(z) = a(x)e(y)c(z) + e(x)b(y)a(z),$$

$$c(x)c(y)a(z) = a(x)a(y)c(z) + e(x)e(y)a(z),$$

podemos simplificar bastante essas equações se fizermos $a(x) = x$ e $b(x) = \frac{1}{x}$.

Fica

$$1 = 1,$$

$$c(x)c(y) = e(x)e(y) + c(z),$$

$$c(y)e(z) = e(x) + e(y)c(z),$$

$$c(x)e(z) = e(y) + e(x)c(z),$$

$$c(x)e(z) = e(x)c(z) + e(y),$$

$$c(y)e(z) = e(y)c(z) + e(x),$$

$$c(x)c(y) = c(z) + e(x)e(y).$$

Note que temos equações repetidas, na verdade só precisamos

$$c(y)e(z) = e(x) + e(y)c(z),$$

$$c(x)e(z) = e(y) + e(x)c(z),$$

$$c(x)c(y) = c(z) + e(x)e(y),$$

e note ainda que as duas primeiras equações são iguais, basta trocar o valor de x com y . Vamos apresentar as escolhas de peso em [1]: cada autor, na verdade, faz escolhas um pouco diferentes. Os pesos dos seis tipos de vértices são

$$z \quad \frac{1}{z} \quad [az] \quad [az] \quad [z] \quad [z],$$

onde a é um parâmetro e

$$[z] = \frac{z - z^{-1}}{a - a^{-1}},$$

e desta forma as duas equações são satisfeitas:

$$\begin{aligned}
[ax][z] &= \frac{ax - a^{-1}x^{-1}}{a - a^{-1}} \frac{z - z^{-1}}{a - a^{-1}} \\
&= \frac{(ax - a^{-1}x^{-1})(z - z^{-1})}{(a - a^{-1})^2} \\
&= \frac{axz - axz^{-1} - a^{-1}x^{-1}z + a^{-1}x^{-1}z^{-1}}{(a - a^{-1})^2} \\
&= \frac{axz - ay^{-1} - a^{-1}y + a^{-1}x^{-1}z^{-1} + ay - ax^{-1}z + a^{-1}y^{-1} - a^{-1}xz^{-1}}{(a - a^{-1})^2} \\
&= \frac{ay - ay^{-1} - a^{-1}y + a^{-1}y^{-1} + axz - a^{-1}xz^{-1} - ax^{-1}z + a^{-1}x^{-1}z^{-1}}{(a - a^{-1})^2} \\
&= \frac{(y - y^{-1})(a - a^{-1}) + (x - x^{-1})(az - a^{-1}z^{-1})}{(a - a^{-1})^2} \\
&= \frac{y - y^{-1}}{a - a^{-1}} + \frac{x - x^{-1}}{a - a^{-1}} \frac{az - a^{-1}z^{-1}}{a - a^{-1}} \\
&= [y] + [x][az]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[ax][ay] &= \frac{ax - a^{-1}x^{-1}}{a - a^{-1}} \frac{ay - a^{-1}y^{-1}}{a - a^{-1}} \\
&= \frac{(ax - a^{-1}x^{-1})(ay - a^{-1}y^{-1})}{(a - a^{-1})^2} \\
&= \frac{a^2xy - xy^{-1} - x^{-1}y + a^{-2}x^{-1}y^{-1}}{(a - a^{-1})^2} \\
&= \frac{a^2xy - xy^{-1} - x^{-1}y + a^{-2}x^{-1}y^{-1} - z + xy - z^{-1} + x^{-1}y^{-1}}{(a - a^{-1})^2} \\
&= \frac{a^2z - z - z^{-1} + a^{-2}z^{-1} + xy - x^{-1}y - xy^{-1} + x^{-1}y^{-1}}{(a - a^{-1})^2} \\
&= \frac{(az - a^{-1}z^{-1})(a - a^{-1}) + (x - x^{-1})(y - y^{-1})}{(a - a^{-1})^2} \\
&= \frac{az - a^{-1}z^{-1}}{a - a^{-1}} + \frac{x - x^{-1}}{a - a^{-1}} \frac{y - y^{-1}}{a - a^{-1}} \\
&= [az] + [x][y].
\end{aligned}$$

Conforme já vimos, o conjunto de todas as ASM de tamanho n é levado, passando por todos os conjuntos intermediários, novamente no conjunto de todas as ASM de tamanho n . A diferença é que todos os x_i trocaram de lugar com os x_{i+1} , mas a soma dos pesos de todas as ASM continuou a mesma, pelo teorema anterior. Ou seja:

Teorema 2.1.2 *A função $Z_n(\vec{x}, \vec{y}, a)$ é simétrica nos x_i e nos y_i .*

A afirmação para \vec{y} pode ser demonstrada da mesma maneira, desta vez movimentando o átomo extra na vertical.

2.2
As transições em dimensão baixa

Nesta seção, mostraremos todas as transições entre os C_n para as ASM de tamanhos 2 e 3. Embora isto não seja necessário para a demonstração do número de ASM, o objetivo é visualizar como os quatro pedacinhos de transições se juntam em cada passo, e visualizar os vários passos como um todo. Vimos anteriormente que o conjunto de todas as ASM vai novamente no conjunto de todas as ASM, mas aqui poderemos sentir melhor como isso acontece: C_1 e C_{n+1} são iguais como conjuntos, mas ao passar o vértice extra através da linha inteira de uma ASM, não necessariamente chegamos na mesma ASM em C_{n+1} .

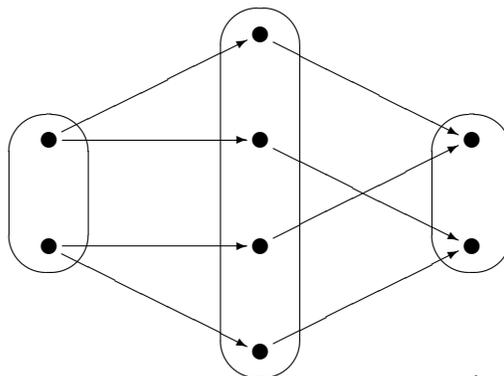
No caso $n = 2$, temos duas ASM:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jogando um átomo extra entre as duas linhas, quando ela passa por cima da primeira coluna passamos a ter quatro possibilidades,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde o número a mais no meio da matriz representa o átomo extra, que apesar de estar na diagonal, pode ser interpretado como 0, 1 ou -1 de acordo com suas setas que entram e saem. Os passos ocorrem da seguinte maneira:



onde o primeiro conjunto representa as ASM de tamanho 2, o segundo conjunto representa as ASM de tamanho 2 com um átomo extra no meio, e o terceiro conjunto representa novamente as ASM de tamanho 2. As setas representam que passando o átomo extra da esquerda para a direita, chega-se de uma configuração na outra. Neste caso, passar o vértice extra pode mudar a ASM.

No caso $n = 3$, temos, por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

O diagrama completo das passagens para todas as ASM de tamanho 3 está representado na figura a seguir. Note que é composto de três pedaços desconexos. Cada pedaço tem o 1 na última linha em uma coluna diferente. De um modo geral, para ASM de tamanho n , cada configuração fixa das $n - 2$ linhas inferiores será um pedaço desconexo do resto nesse diagrama, pois passar o átomo extra entre as duas primeiras linhas não mexe nas outras linhas.

