1
Introdução

Tudo começa com uma definição muito inocente: Uma *ASM*, ou *Alternating Sign Matrix*, ou *Matriz de Sinais Alternados* é uma matriz quadrada $n \times n$ tal que

1. as entradas tomam apenas os valores 0, 1, e -1
2. a soma das entradas em cada linha e coluna é 1
3. os 1 e -1 em cada linha e coluna se alternam (daí o nome!).

Entre os 1 e -1, pode haver qualquer quantidade de zeros, a restrição da alternância só vale para as entradas diferentes de zero. Note que para valer as propriedades 2 e 3, cada linha e coluna precisa começar e terminar com 1. Em particular, a primeira linha só pode ter uma entrada 1, o resto zero, porque se fosse diferente teria uma coluna começando com -1. Por exemplo, as duas ASM de tamanho 2 estão a seguir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Existem 7 ASM de tamanho 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A seguir, um exemplo de uma ASM um pouquinho maior, de tamanho 5.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

É interessante observar de onde veio esta definição. As ASM são uma extensão de matrizes de permutação. No exemplo de tamanho 3, apenas uma ASM não é permutação, a que tem o -1 no meio. Matrizes de permutação são aquelas que, quando aplicadas a um vetor, trocam a ordem das entradas deste vetor. Para isso, elas precisam ter exatamente um 1 em cada linha e coluna, e mais nada. Comparando as definições, podemos dizer que uma matriz de permutação é uma ASM sem nenhum -1.

Robbins e Rumsey se interessaram nas ASM a partir de um método para calcular determinantes, o método de *condensação* [2]. Neste método, começando com uma matriz $n \times n$, construímos uma matriz $(n-1) \times (n-1)$, depois $(n-2) \times (n-2)$, até chegar a uma matriz com uma única entrada, que será o determinante da matriz original. A matriz $(k-1) \times (k-1)$ é construída da seguinte forma: a entrada (i, j) é o determinante da submatriz formada pelas entradas $(i, j), (i, j+1), (i+1, j), (i+1, j+1)$ da matriz $k \times k$, dividido pela entrada $(i+1, j+1)$ da matriz $(k+1) \times (k+1)$, exceto pela matriz $(n-1) \times (n-1)$ onde esta divisão não é feita. Por exemplo, para uma matriz 3×3 temos os seguintes passos.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ae - bd & bf - ce \\ dh - eg & ei - fh \end{pmatrix}$$

A expressão para o determinante fica

$$((ae - bd) * (ei - fh) - (bf - ce) * (dh - eg))/e$$

$$(1)aei + (-1)afh + (-1)bdi + (0)bde^{-1}fh + (1)bfg + (1)cdh + (-1)ceg.$$

Os termos que estão multiplicados por 1 ou -1 correspondem aos termos de permutação que usamos para calcular o determinante, com seus respectivos sinais, na definição

$$det(A) = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma i}.$$

Os termos que cancelam e aparecem na expressão multiplicados por zero, correspondem às ASM que têm entradas -1.

Dizer quantas matrizes de permutação com tamanho n existem é muito fácil: são $n!$. Agora, quantas ASM de tamanho n existem?

Observando os números para alguns valores pequenos de n, vemos que existem muito mais ASM do que matrizes de permutação. Seja A_n, a partir de agora, o número de ASM de tamanho n. Temos os seguintes valores:

$n!$	A_n
1	1
2	2
6	7
24	42
120	429
720	7436
5040	218348
40320	10850216
362880	911835460

Essa pergunta simples mostrou-se surpreendentemente difícil de responder. Mills, Robbins e Rumsey [5] fizeram a conjectura de que

$$A_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}.$$

A primeira demonstração desta fórmula foi dada por Doron Zeilberger [6], em 1995. O artigo tem 71 páginas e faz um caminho tortuoso de bijeções entre ASM e outros objetos.

Mais tarde, Greg Kuperberg [4] publicou uma outra demonstração totalmente diferente, que será exposta nesta dissertação em detalhes, seguindo o caminho apontado pelo livro de David Bressoud, *Proofs and Confirmations* [1].

A conjectura para A_n surgiu a partir da observação de subconjuntos das ASM, dividindo-as em grupos de acordo com a posição do 1 da primeira linha. Chamaremos $A_{n,k}$ o número de ASM de tamanho n com o 1 da primeira linha na k-ésima coluna. Estes são os chamados *ASM refinados*. Observando alguns valores de $A_{n,k}$ e dispondo-os em um triângulo, temos os seguintes números:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 3 & & 2 & & & \\
 & & 7 & & 14 & & 14 & & 7 & & \\
 & 42 & & 105 & & 135 & & 105 & & 42 & \\
429 & & 1287 & & 2002 & & 2002 & & 1287 & & 429
\end{array}
$$

A simetria é óbvia: Colocar o 1 na k-ésima coluna da esquerda para a direita dá o mesmo número de ASM do que colocá-lo na k-ésima coluna da direita para a esquerda, porque refletindo qualquer ASM por um eixo central vertical, obtemos outra ASM.

Observando a razão entre um número e o número à sua direita, ou seja, $\frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}}$, temos o seguinte:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2/2 & 1 & & & & \\
 & & & 2 & 2/3 & 3 & 3/2 & 2 & & & \\
 & & 7 & 2/4 & 14 & 5/5 & 14 & 4/2 & 7 & & \\
 & 42 & 2/5 & 105 & 7/9 & 135 & 9/7 & 105 & 5/2 & 42 & \\
429 & 2/6 & 1287 & 9/14 & 2002 & 16/16 & 2002 & 14/9 & 1287 & 6/2 & 429
\end{array}
$$

Mills, Robbins e Rumsey repararam que os numeradores destas razões estão formando um triângulo de pascal, e os denominadores estão formando outro triângulo de pascal. Supondo que isto seja verdade, chega-se facilmente à fórmula que tornou-se a conjectura para o número de ASM.

Mas por que é tão complicado contar ASM? Para contar o número de matrizes de permutação, contamos linha a linha. Na primeira linha, existem n possibilidades de onde colocar o número 1. Na segunda linha, existem $n-1$ possibilidades: todas as colunas, exceto aquela que foi escolhida no passo anterior. Na terceira linha, temos $n-2$ colunas que ainda podem ser escolhidas, e assim por diante.

Qualquer que seja a primeira posição escolhida, o número de possibilidades no segundo passo será o mesmo. As possibilidades serão outras, mas a quantidade é a mesma. Por isso, para chegar à resposta basta multiplicar todos estes números, $(n)(n-1)(n-2)...(2)(1) = n!$

A diferença para contar ASM é justamente esta. A primeira linha só pode ter um número 1, mas os $A_{n,k}$ não são iguais. Cada posição da primeira linha dá um número diferente de possibilidades para as próximas linhas de uma ASM. Esta dificuldade se estende para os passos seguintes da contagem. Cada escolha das entradas das duas primeiras linhas dá um número diferente de maneiras de completar a ASM.

Nesta dissertação, seguiremos a demonstração de Kuperberg para o número de ASM. Para isso, vamos primeiro considerar uma outra interpretação para as ASM, o *gelo quadrado*. Depois de terminar a demonstração, vamos descrever uma outra possível trilha para encontrar o número de ASM, baseando-se no *six-vertex model*[3].