Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Opções: Estudo do mercado e Análise dos modelos de precificação

João Pedro Guimarães Soares

Projeto Final de Graduação

Centro Técnico Científico – CTC
Departamento de Informática
Curso de Graduação em Ciência da Computação

Rio de Janeiro, junho de 2023

João Pedro Guimarães Soares

Opções: Estudo do mercado e
Análise dos modelos de precificação

Projeto Final de Graduação

Relatório de Projeto Final, apresentado ao programa Ciência da Computação da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Rio de Janeiro, junho de 2023

“Without data, you're just another person with an opinion.”

(W. Edwards Deming)

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Hélio Lopes pela oportunidade para este projeto e ensinamentos com as matérias lecionadas ao longo da graduação.

Ao meu pai, João Carlos, e irmã, Marina, por todo o apoio e incentivo ao durante os anos, essencial para a realização deste trabalho e curso.

E aos meus amigos, colegas da PUC-Rio e da Atmos, pelos anos de convívio, troca de experiências e conhecimento, que contribuíram para a realização deste projeto.

Resumo

Guimarães Soares, João Pedro, Côrtes Vieira Lopes, Hélio. Opções: Estudo do mercado e Análise dos modelos de precificação. Rio de Janeiro, 2023. 35p. Relatório de Projeto Final de Graduação – Departamento de Informática. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este projeto tem como objetivo realizar um estudo sobre o mercado de opções, suas implicações, características, métodos de usos e análise dos modelos utilizados pelos agentes para a precificação dos contratos de opções, como os modelos Black-Scholes-Merton e por métodos de Monte Carlo.

Palavras-Chave

Opção; Finanças; Precificação; Risco; Modelagem.

Abstract

Guimarães Soares, João Pedro, Côrtes Vieira Lopes, Hélio. Options: Markets study and Analysis of pricing models. Rio de Janeiro, 2023. 35p. bachelor’s Final Project Report – Department of Informatics. Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.

This project has as objective to study about the options market, it’s implications, characteristics, methods of use and analysis of the models used by the agents for pricing options contracts, as the Black-Scholes-Merton model and Monte Carlo methods model.

Keywords

Option; Finance; Pricing; Risk; Modelling.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

Opções são uma classe de contratos derivativos presente no mercado financeiro, que podem possuir diferentes característica entre si, mas primariamente são divididas em dois grupos, as opções de compra (*call options*) e as opções de venda (*put options)*. Sendo derivativo, um instrumento financeiro que é, em sua essência, um contrato entre dois agentes do mercado, que tem o seu valor derivado de um ativo ou instrumento subjacente (*underlying* ou objeto), podendo um derivativo possuir um ou mais ativos *underlying*.

Desta forma, um contrato padrão de opção, chamado de *vanilla option* dá o direito ao titular (ou comprador) de exercer a compra ou venda, de um determinado ativo *underlying* a um determinado preço, chamado de preço de exercício (*strike*) e em ou até uma determinada data, que é o vencimento do contrato de opção. Quem lança (ou vende) a opção tem a obrigação de cumprir o contrato, dependendo somente do titular que pode exercer ou não o seu direto. Há diferentes estilos de opções, que se refere às características presentes nos contratos, como opções européias, que só podem ser exercidas na data de vencimento, americanas, que podem ser exercidas em qualquer data até o vencimento, dentre outras as quais iremos abordar sobre suas características específicas neste trabalho.

Os contratos de opções, funcionam de forma análoga a um seguro de um bem, por exemplo, em que o segurado (titular ou comprador) paga um prêmio para a seguradora (lançador ou vendedor) para ter o direito de vender o bem em um valor pré-determinado (preço de exercício), mesmo que o valor do bem em si tenha sido perdido, por razão de um sinistro, por exemplo. Neste caso, o seguro seria análogo a uma opção de venda.

Opções possuem um alto nível de complexidade para terem seu preço justo estimado antes de seu vencimento, dado as várias variáveis associadas ao valor temporal dela. Usualmente são precificadas através do modelo *Black-Scholes-Merton*, uma solução analítica e contínua para o problema, que estima o preço teórico de uma opção européia, através de uma Equação Diferencial Parcial, chamada de equação *Black-Scholes*. Este modelo possui cinco variáveis, o preço atual (preço spot) e volatilidade do ativo objeto, o preço de exercício (*strike*), o prazo até o vencimento e a taxa livre de risco.

Para se ter um maior entendimento deste modelo e de suas aplicações, é necessário o conhecimento de determinados conceitos, como as chamadas gregas de opção (*The Greeks*), *Delta*, *Gamma*, *Vega*, *Theta* e *Rho*, que são as derivadas parciais da EDP *Black-Scholes*, o “sorriso de volatilidade”, *Volatility Smile,* que é um padrão encontrado na volatilidade implícita das opções de um mesmo ativo objeto no mesmo vencimento para diferentes *strikes*, a superficie de volatilidade, ITM (*in-the-money*), ATM (*at-the-money*) e OTM (*on-the-money*), termos que se referem ao conceito de *moneyness* da opção, isto é, a posição relativa do preço spot (atual) do ativo subjacente ao preço de exercício da opção (strike).

Este trabalho buscará explorar os diferentes tipos de contratos de opções existentes e utilizados, e realizar uma análise do mercado destes tipos de contratos e dos modelos utilizado para a precificação deles.

1.1 Motivação

A motivação para o desenvolvimento deste trabalho nesse tema se pela cada vez maior relevância e utilização de ferramentas computacionais e métodos numéricas no mercado financeiro, dado o aumento exponencial da capacidade computacional para o processamento e armazenamento de dados, os mercados financeiros vem se modernizando e automatizando processos que anteriormente eram discricionários e intuitívos, para processos quantitativos e baseados em dados, *data-driven*. Desta forma, o entendimento dos modelos matemáticos/computacionais de precificação de opções se torna relevante, dada a importância deste mercado para o setor financeiro e seu impacto na economia.

2 Situação Atual

O modelo *Black-Scholes-Merton* assume determinadas premissas que não se refletem na prática, como que os ativos e instrumentos subjacentes, de qual a opção deriva, possuem um preço com movimento geométrico browniano, com uma distribuição normal, não distribuem dividendos ou cupons até o dia de vencimento, possuem infinita liquidez, dentre outras premissas. O que não se confirma na realidade, já que os ativos possuem uma quantidade mínima discreta, a liquidez dos ativos subjacentes não são infinitas e a distribuição que os ativos segue no mercado é a chamada distribuição de cauda longa (*fat-tail distribution*), dado a frequência de certos eventos de alto desvio padrão, que caso os preços dos mercados seguissem uma distribuição normal, ocorreriam em uma frequência muito menor comparado ao que ocorre de fato.

Existem outros modelos propostos que não implicam necessariamente nestas mesmas premissas, como o modelo binomial de precificação de opções, que é um modelo discreto e númerico que utiliza uma estrutura de árvore binomial para estimar o preço justo, sendo utilizado em alguns casos onde o modelo *Black-Scholes-Merlon* não é aplicável.

Também é utilizado o modelo de precificação de opções via métodos de Monte Carlo para opções mais complexas e com características exóticas. Não é muito utilizada para *vanilla options* por sua maior complexidade e exigência computacional, sendo equivalente ao Black-Scholes, quando calculado a partir de uma amostra com preços que seguem uma distribuição normal.

3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo sobre o mercado de opções, sobre os diferentes tipos de contratos de opções e suas características e os diferentes modelos matemáticos utilizados pelos agentes do mercado para se chegar no preço justo de um contrato de opção, analisando os diferentes modelos de precificação utilizados, como o modelo *Black-Scholes-Merton* e o modelo de precificação de opções via métodos de Monte Carlo, de que formas e maneiras estes contratos podem ser operados pelos agentes do mercado, como bancos, seguradoras e outros investidores institucionais e instituições financeiras, seja visando uma proteção (*hedge*) de uma posição em um determinado ativo, alavancagem ou especulação.

4 Atividade Realizadas

4.1 Estudos preliminares

Nas semanas iniciais de Projeto Final II foi continuado o estudo geral sobre o mercado de opções, iniciado em Projeto Final I, visando melhorar a base para os estudos subsequentes envolvendo os modelos matemáticos de precificação de contratos.

4.2 Estudos conceituais e de tecnologia

A principal referência utilizada para o estudo geral do mercado de opções e modelos de precificação foi a referência [1]. No que se refere as tecnologias utilizadas para realizar as implementações, testes e simulações computacionais, elas já eram conhecidas e utilizadas previamente ao desenvolvimento do Projeto Final II, como a linguagem de programação *Python*, ambiente de desenvolvimento *Jupyter Notebook*, bibliotecas utilizadas dentre outras tecnologias.

4.3 Cronograma

Durante o Projeto Final I, foi elaborado um cronograma para a realização dos Projeto Final I e II, dado a algumas alterações e dificuldade encontradas para a realização do projeto Final II, o cronograma realizado foi diferente do planejado.

Cronograma planejado de estudo, projeto e desenvolvimento de Projeto Final II

Atividades 2023.1	Março				Abril				Maio				Junho				Julho			
8. Continuação do estudo do mercado de opções																				
9. Continuação do estudo dos modelos de precificação																				
10. Implementação dos modelos																				
11. Simulação dos modelos																				

12. Análise dos modelos e simulações																				
13. Desenvolvimento do Relatório de Projeto Final II																				
14. Desenvolvimento do documento e ensaio da apresentação																				

Cronograma realizado de estudo, projeto e desenvolvimento de Projeto Final II

Atividades 2023.1	Março				Abril				Maio				Junho				Julho			
8. Continuação do estudo do mercado de opções																				
9. Continuação do estudo dos modelos de precificação																				
10. Implementação dos modelos																				
11. Simulação dos modelos																				
12. Análise dos modelos e simulações																				
13. Desenvolvimento do Relatório de Projeto Final II																				
14. Desenvolvimento do documento e ensaio da apresentação																				

5 Mercados e contratos de opções

Inicialmente, é preciso entender o funcionamento de um mercado de contratos derivativos, em que para toda posição “comprada” (*long*), existe uma contraparte que está “vendida” (*short*) no contrato, seja futuro ou opção, diferentemente do mercado á vísta de ações, por exemplo, que existe uma quantidade base de ações/títulos existentes. Então, a posição em aberto, *Open Interest*, se refere a essa quantidade de contratos abertos em uma bolsa de negociação de futuros.

5.1.1 Tipos de contratos de opções

Existem diversos tipos de opções, com uma serie de características próprias, algumas delas são:

- **Opção Europeia**

Opções do tipo Europeia são um tipo de opção que só podem ser exercidas na data de vencimento.

- **Opção Americana**

Opções do tipo Americana são um tipo de opção que podem ser exercidas em qualquer data até a data de vencimento da opção, pela maior flexibilidade, quando comparada a uma equivalente do tipo Europeia, tendem a ser mais caras por conta do valor do direito de exercer em antecipado.

- **Opção *Bermudan***

Opções do tipo *Bermudan* são um tipo de opção exótica, em que ela pode ser exercida em determinadas datas, do início do contrato até o vencimento.

- **Opção *Asian***

Opções do tipo Asiática são um tipo de opção exótica, em que o preço de referência do ativo é a média aritmética do preço em um determinado período, ao inves de ser o preço do ativo no vencimento. Geralmente, quando comparado a uma opção equivalente do tipo Europeia, tendem a ser mais barata por ser menos sensivel a volatilidade do mercado e flutuações pontuais de preço, perto do vencimento do contrato.

- **Opção *Digital***

Opções do tipo Digital são um tipo de opção exótica, também chamadas de *cash-or-nothing option*, em que a diferença para uma opção padrão, é que o contrato é sobre um valor nominal em financeiro, e não uma quantidade do ativo underlying, e dessa forma o contrato tem um resultado, *payoff*, fixo. Por exemplo, uma opção de compra tipo *digital* que tem um notional de 10, irá ter como payoff esse valor em qualquer caso de exercício, independente do preço do ativo *underlying*, diferente de uma opção tipo vanilla, que o payoff seria a diferença do preço do ativo no vencimento para o preço de exercício (As opções padrão, são geralmente classíficadas como *asset-or-nothing option*, pelo fato de você receber ou entregar o ativo underlying, em caso de exercício).

As chamadas opções *vanilla* é uma classificação mais generalista que engloba as opções do tipo Europeia e Americana, enquanto as demais opções são usualmente denominadas exóticas, dada a sua natureza mais complexa e de maior difícil precificação e menos frequente negociação.

Estes são alguns dos tipos de contratos existentes, entratanto existem diversos outras estruturas de contratos exóticos de opções que podem ser fechados entre os agentes, geralmente negociadas em contratos OTC (*over-the-counter*), isto é, não são negociadas em bolsa de valores, e sim diretamente entre as partes, podendo ser com liquidação física, ou financeira, entre outras características específicas negociada entre as partes.

5.1.2 Movimento Geométrico Browniano (GBM)

O movimento geométrico browniano (*Geometric Brownian Motion*), GBM, é um modelo estatístico que tem um papel fundamental nos modelos de precificação de opções, em que nestes modelos, o movimento do preço do ativo base é regido e segue esse tipo de processo estocástico aleatório, derivado do conhecido movimento Browniano ou processo de Wiener. Sendo que as equações que modelam esse processo:

$$\frac{dS}{S} = \mu S\, dt + \sigma S\, dZ$$

Equação diferencial estocástica
que modela o GBM, em tempo contínuo

$$\frac{dS}{S} = \mu S\, dt + \sigma S\, dZ$$

Equação diferencial estocástica
que modela o GBM, em tempo discreto

Aonde:

μ é o retorno esperado do ativo (também chamado de *drift)*

S é o preço inicial do ativo

σ é o desvio-padrão dos retornos (Volatilidade)

Entretanto, como iremos ver mais a frente, a utilização desse modelo de processo estocástico para modelas os possíveis movimentos futuros é impreciso, pois historicamente, as distribuições de retorno dos ativos não seguem uma distribuição normal.

5.1.3 Moneyness

Moneyness é o termo que relaciona o preço de exercício da opção com o preço *spot* do ativo, sendo um conceito para entender o valor intrínseco de uma opção. Para isso, existem três categorias para classificar essa característica da opção:

- ***In-the-money* (ITM):**

Quando o exercício imediato da opção teria um resultado positivo, isto é, ela possui um valor intrínseco. Para opções *"vanilla",* seria quando o preço de exercício, está abaixo, no caso de uma opção de compra, ou acima, no caso de uma opção de venda, do preço spot do ativo.

- ***Out-the-money* (OTM):**

Quando o exercício imediato da opção teria um resultado negativo, isto é, ela não tem um valor intrínseco e não seria exercida por conta disto. Para as opções do tipo *"vanilla"*, seria quando o preço de exercício, está acima, no caso de uma opção de compra, ou abaixo, no caso de uma opção de venda, do preço spot.

- ***At-the-money* (ATM):**

Quando o exercício imediato da opção não resultaria em perda nem em lucro, isto é, ela não tem um valor intrínseco. No caso em que a opção está com o preço de exercício igual ao preço spot do ativo.

Também é utilizado o termo *at-the-money forward* (ATMF), que é quando a opção tem o mesmo preço de strike no preço *forward* do ativo base para a data de vencimento, sendo preço *forward*, o preço *spot* do ativo ajustado pela taxa livre de risco do período até o vencimento. Também costumasse denominar a *moneyness* de uma opção em percentual do preço spot, isto é, se divide o preço de exercício pelo preço spot do ativo, obtendo-se um número em percentual. Por exemplo, uma opção com strike 10 e o preço spot do ativo está em 8, está 20% "fora do dinheiro" (*out-of-money*) ou tem *moneyness* de 120%.

A volatilidade implícita de uma opção *atmf* pode ser interpretada como o consenso de expectativa dos agentes para a volatilidade do ativo base da opção de hoje até o seu vencimento, sendo especificamente da opção *atmf*, conforme observado em dados históricos, e que iremos análisar no próximo capítulo do trabalho.

5.1.4 Valor intrínseco e temporal da opção

Valor intrínseco é o valor que representa o valor da opção em caso de exercício imediato da opção e é associado a *moneyness* da opção, ou seja, uma opção que está “fora do dinheiro” (OTM), ela tem valor intrínseco zero. E se estiver “dentro do dinheiro” (ITM), ela vale exatamente a diferença absoluta do preço do ativo spot para o, conforme descrito pelas fórmulas abaixo:

$$O_{OTM} = 0$$
$$O_{ITM} = |S - K|$$

Valor temporal (*time value*), ou valor extrínseco se refere ao valor da opção atribuído as incertezas do mercado em relação a mudanças futuras no preço do ativo até o vencimento da opção, associadas ao tempo. Diversos fatores interferem no valor temporal de uma opção, como tempo até o vencimento, volatilidade esperada do ativo e taxa de juros livre de risco, dentro outros fatores.

- Resultado (*Payoff*) de uma operação de opção

Para as operações de opções *vanilla*, existem quatro operações que podem ser realizadas. Comprar/Vender uma opção de Compra/Venda. Sendo o resultado (*payoff*), dependendo do preço do ativo *underlying* no vencimento, pode ser observado nos gráficos abaixo.

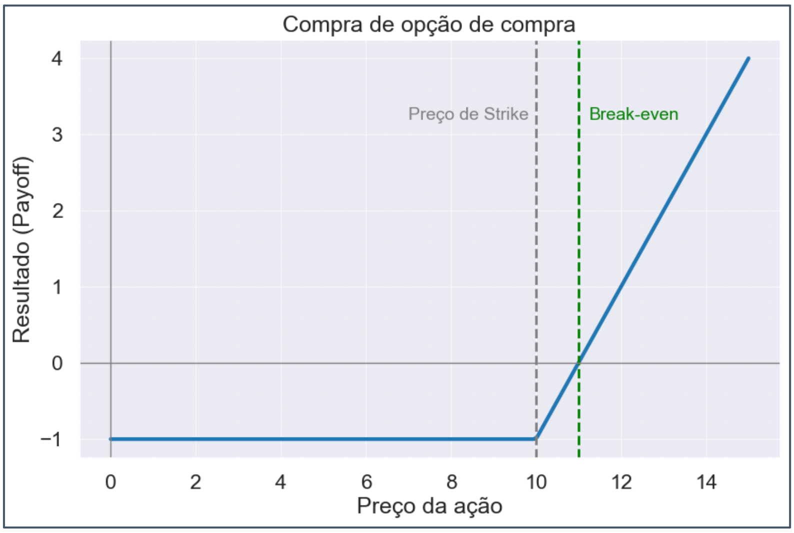

Figura 1 - Payoff de compra um contrato de opção de compra

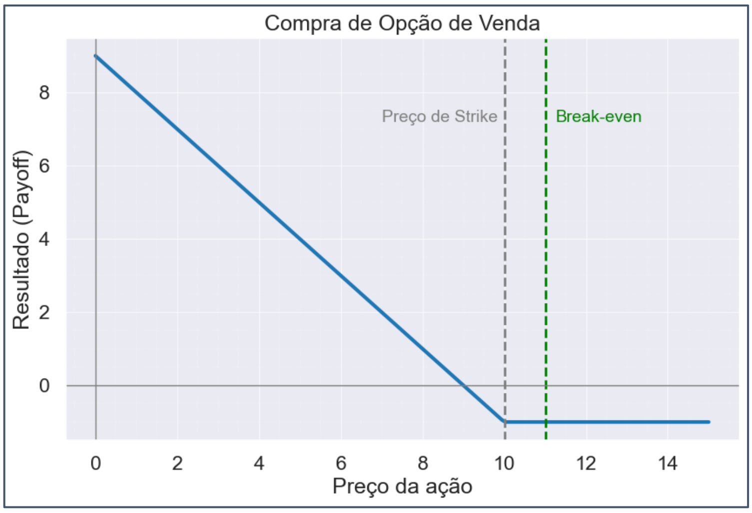

Figura 2 - Payoff de compra de um contrato de opção de venda

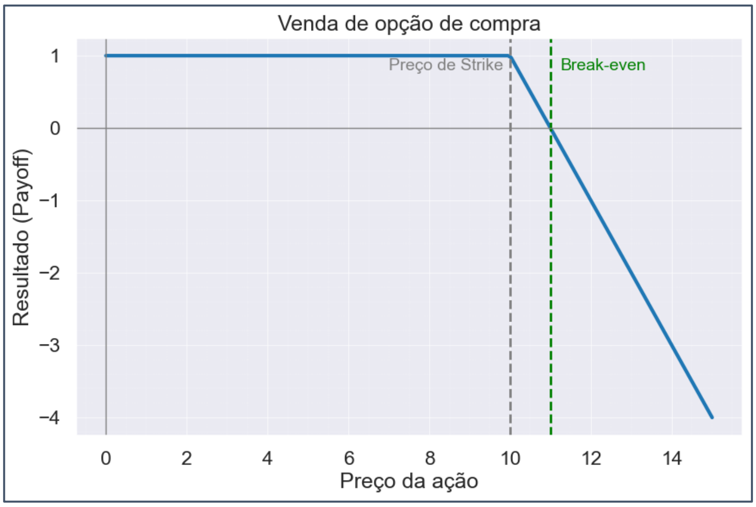

Figura 3 - Payoff de venda de um contrato de opção de compra

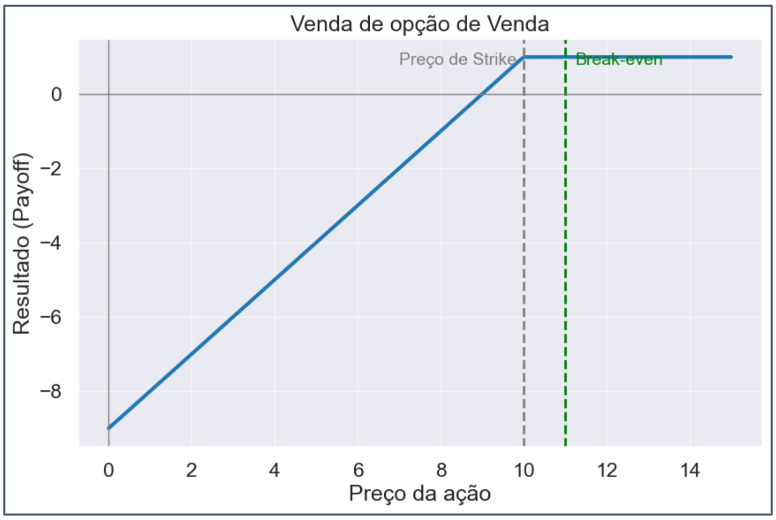

Figura 4 -Payoff de venda de um contrato de opção de compra

Como podemos observar, ao comprar uma opção, apesar de se estar fazendo o pagamento um prêmio em antecipado, a convexidade do próprio contrato está a seu favor, em casos de eventos de cauda ou aumento de volatilidade, e a sua perda máxima nesse tipo de operação é o próprio prêmio pago pelo contrato.

Enquanto no caso de estar vendendo uma opção, acaba sendo uma operação mais complexa e com risco muito maior caso seja realizada de forma descoberta, dada que a perda é ilimitada no caso da venda de *call*, e limitada na diferença entre o preço de exercício e 0, no caso de venda de *put*.

Existe também operações mais complexas, que envolvem mais de um contrato simultaneamente, como *call / put spread* ou *butterfly*, ou também operações envolvendo opção em paralelo a posições ao ativo *underlying*, como no caso da operação de *covered call*, em que esse conjunto de opções e/ou ativos é usualmente chamado de estrutura, ou de operação estruturada.

5.1.5 Volatilidade no mercado de opções

Volatilidade é um conceito fundamental no mercado de opções, dado que no principal modelo utilizado para a precificação, é a única variável que não é conhecida, sendo exatamente o que é arbritado e negociado entre os agentes, sendo volatilidade, o desvio padrão do preço de um determinado ativo ao longo do tempo, que reflete a incerteza e riscos associados a ele e são categorizadas em dois “tipos” de volatilidade.

- **Volatilidade histórica**

Volatilidade histórica, também chamada de volatilidade realizada, é calculada a partir dos dados passados da série histórica de preços do ativo de um determinado período. Pode ser calculada a volatilidade histórica, por exemplo, dos últimas trinta ou sencenta dias, utilizando os dados dos respectivos periodos, com a fórmula:

$$Volatilidade\ histórica = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}}\sqrt{T}$$

- **Volatilidade implícita**

Volatilidade implícita é uma medida calculada a partir dos preços negociados das opções do ativo de um determinado vencimento, que reflete a expectativa do mercado da volatilidade do preço de um determinado ativo da data presente até o vencimento. No modelo Black-Scholes-Merton, as variáveis conhecidas são, preço atual do ativo, preço do strike, taxa de juros livre de risco e tempo até o vencimento, sendo somente a volatilidade do período, como sendo a variável não conhecida. Então, os agentes ao negociar uma opção, estão negociando indiretamente também uma volatilidade para o ativo *underlying* para o período do contrato.

Assim, é possível calcular a volatilidade implícita no preço daquela opção. Entretanto, não há uma solução fechada para a volatilidade implícita a partir da fórmula, dessa forma, com o preço negociado, em conjunto com as demais variáveis, se calcula a volatilidade implícita através de métodos numéricos para solução de raízes de equação, podendo ser utilizado, o método de Newton-Raphson ou Método de Brent, sendo estes dois os mais utilizados nesse caso.

Método de *Newton-Raphson* é um método mais simples que tenta estimar a raiz a partir de uma estimativa inicial e utilizando a derivada da função, iterando até uma convergência com erro associado tolerável.

Método de Brent é um método híbrido, sendo mais robusto comparado com o *Newton-Raphson*, dado que combina múltiplos métodos, método da bissecção, método de secantes e método de interpolação quadrática inversa.

Dessa forma, a volatilidade implícita de uma opção *at-the-money forward* pode ser interpretada como a expectativa de volatilidade do ativo *underlying* de hoje até o vencimento, sendo especificamente de uma opção *at-the-money*, dado que os ativos historicamente não seguem uma distribuição normal, e quanto mais distante do preço atual *forward* do preço de exercício está, maior a volatilidade implícita atribuída a opção, apesar do BSM não considerar este efeito de aumento de volatilidade nas caudas da distribuição de probabilidade, os agentes consideram esse aumento de volatilidade ao precificar os contratos e é possível observar esse fenômeno a partir de dados históricos.

5.1.6 Put-call parity

Put-call parity é uma relação entre o preço de uma opção de compra, com o uma opção de venda de um mesmo underlying, vencimento e preço de exercício, válido somente para opções do tipo Europeia, sendo definido pela equação:

$$C + PV\ (K) = P + S$$

Aonde:

- C é o preço da opção de compra
- PV(K) é o valor presente do preço de exercício
- P é o preço da opção de venda

- S é o preço atual do ativo *underlying*

Dessa forma, a soma do prêmio da opção de compra, com o preço de exercício ajustado pela taxa livre de risco do período, isto é, trazer o preço de exercício a valor presente, é igual a soma do prémio da opção de venda com o preço atual do ativo *underlying*.

E essa característica de equivalência torna possível a realização de arbitragem entre os dois contratos, de *call* e *put*. (Arbritagem é uma operação que busca ganhar em distorções pontuais e operacionais, sem incorrer em risco direcional de mercado. Por exemplo, em uma ação que é listada em duas bolsas de valores diferentes, caso ocorra uma distorção de preço, em que em cada bolsa a ação é negociada a preços diferentes, é possível arbritar, vendendo onde está mais caro e comprando onde está mais barato, provendo liquidez e corrigindo essa distorção de mercado). E no caso de arbritagem envolvendo opções, quando a uma quebra dessa paridade, é possível realizar essa operação.

6 Modelos de precificação

Ao longo do desenvolvimento dos mercados e modelagem financeira, foram desenvolvidos diversos modelos que tentam estimar o valor presente de uma opção com vencimento no futuro, considerando diversas variáveis, como o Modelo Black-Scholes-Merlon e modelo via métodos de Monte Carlo.

6.1 Modelo Black-Scholes-Merton (BSM)

O modelo de precificação de opção *Black-Scholes-Merton* (BSM), conhecido popularmente como *Black-Scholes*, é um modelo proposto por Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton e publicado em 1973, para precificar contratos de opções do tipo *calls* e *puts* do tipo Europeia.

$$w(x,t) = xN(d_1) - ce^{r(t-t^*)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln x/c + (r + \frac{1}{2}v^2)(t^* - t)}{v\sqrt{t^* - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln x/c + (r - \frac{1}{2}v^2)(t^* - t)}{v\sqrt{t^* - t}}$$

Figura 5 - Fórmula do modelo Black-Scholes do artigo original publicado por Fischer Black e Myron Scholes

Notação mais moderna e recente, utilizada nos dias de hoje, e encontrado na literatura, como na referência [1]:

$$C = S_0N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Sendo um modelo de base contínua, alguma das premissas consideradas são, que os preços dos ativos seguem um movimento geométrico browniano, que o ativo não paga dividendos, que a volatilidade do ativo e a taxa de juros livre de risco são constantes até o vencimento, dentre outras premissas, o que causa algumas distorções já que, por exemplo, os ativos não seguem históricamente uma distribuição normal, que é a base para o movimento geométrico browniano, utilizado no modelo.

E apesar destas premissas terem se demostrado inválidas ao longo dos anos, por conta da capacidade do modelo de generalização e extensabilidade de uso, ainda é usada hoje como referência para a precificação dos contratos de opções, se fazendo necessário alguns ajustes nos parâmetros do modelo, como volatilidade e taxa de juros livre de risco, para se ter um valor mais próximo do realizado.

6.1.1 As "Gregas" do modelo Black-Scholes-Merton

As chamadas "gregas", *Greeks*, são as derivadas parciais da EDP (equação diferencial parcial) presentes no BSM, sendo elas:

- **Delta (Δ)**

Delta ($\boldsymbol{\Delta}$) é derivada em relação ao preço do ativo, sendo a derivada parcial mais relevante para os agentes do mercado, pois mede a taxa de variação do preço da opção, em relação a variação do ativo *undelying*. Isto é, quanto a opção variará de preço em relação a variação de preço do ativo *undelying*.

$$\Delta(C) = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\Delta(P) = \frac{\partial P}{\partial S} = -N(-d_1) = N(d_1) - 1$$

- **Gamma (Γ)**

Gamma (Γ) é a segunda derivada em relação ao preço do ativo, sendo a taxa de variação do Delta ($\boldsymbol{\Delta}$). Ou seja, quanto uma variação no preço do ativo impactará no delta da opção. Ou seja, Quanto o Delta variará em relação a variação de preço do ativo *undelying*.

$$\Gamma(\mathrm{O}) = \frac{\partial^2 O}{\partial \mathrm{S}^2} = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

Sendo a função N' definida como:

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- **Theta ($\boldsymbol{\Theta}$)**

Theta ($\boldsymbol{\Theta}$) é a derivada em relação ao tempo, e mede a sensibilidade do preço da opção em relação a passagem do tempo, até o vencimento.

$$\Theta(C) = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

$$\Theta(P) = \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

- **Vega (v)**

Vega (v) é a derivada em relação a volatildade até o vencimento, que mede a sensibilidade do preço da opção em relação a variação da volatilidade do ativo *undelying*.

$$V(O) = \frac{\partial O}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{T} N'(d_1)$$

- **Rho (r)**

Rho (r) é a derivada em relação a taxa de juros livre de risco, que mede a variação da opção em relação a variações na taxa de juros livre de risco.

$$Rho(C) = \frac{\partial C}{\partial r} = KTe^{-rT}N(d_2)$$

$$Rho(P) = \frac{\partial C}{\partial r} = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

As gregas tem um papel fundamental para a operacionalização destes contratos pelos agentes, já que elas medem a relação da opção a cada uma das suas variáveis utilizadas no BSM, e são uma medida de risco utilizadas.

Dado que o modelo possuí uma equação diferencial parcial, é possivel se continuar derivando sequencialmente e obter outras derivadas parciais em relação a múltiplas variáveis, entretanto as citadas acima são as, geralmente, utilizadas para o gerenciamento da exposição da opção e de risco.

6.1.2 Exposição da Opção

Com o BSM, é possivel calcular a exposição que a opção tem ao ativo *underlying*, isto é, o delta da opção. Dessa forma, é possível "simular" o ativo *underlying* utilizando uma opção e replicar sua variação, a partir do cálculo do delta. Dessa forma, é possível ser realizada uma operação de arbritagem entre a opção e o ativo sem incorrer em uma exposição direcional ao ativo. Esse tipo neutralização do delta da opção é conhecido como *delta hedging* ou *dynamic delta hedging*, dado que o delta da opção varia com a variação do preço do ativo underlying e demais variáveis do modelo, então é preciso fazer um ajuste constante na posição do ativo, que neutralizará a exposição da opção, para a posição *delta neutral* ser mantida. Esse tipo de gerenciamente de risco pode ser realizado nas várias gregas do BSM e usualmente os formadores de mercado, possuem limite de risco para cada grega por ativo, dado risco de liquidez e eventos de cauda que não estava sendo precificado que podem ocorrer, e que o mercado não é contínuo e sem custo de transação, pode ocorrer problemas e dificuldade para se manter a posição *delta neutral*.

- *Pin Risk*

Pin risk é um termo associado a uma situação que pode ocorrer em opção próxima da sua data de vencimento, quando o ativo *underlying* está com o preço muito próximo do preço de exercício do contrato de opção, logo as contrapartes não conseguem ter total certeza até o fechamento do mercado, se irão ser exercidos naquele contrato ou se poderão exercer o mesmo, e isso acaba sendo um risco principalmente para os agentes formadores de mercado, que usualmente não possuem uma exposição direcional ao ativo underlying da opção e para manter a exposição da carteira delta neutral, em razão da variação do delta ser muito grande, perto do strike e do vencimento (gamma). O que pode causar uma distorção no mercado, caso o tamanho da posição em opção seja relevante quando comparado ao volume negociação da ação.

6.2 Modelo de precificação via métodos de Monte Carlo

6.2.1 Métodos de Monte Carlo

Método de Monte Carlo são uma categoria de técnicas de simulação computacional que faz uso de variáveis pseudo-aleatórias para se tentar entender o comportamento de um sistema complexo que não possui uma solução analítica fechada, através de métodos numéricos.

6.2.2 Precificação de opções via Métodos de Monte Carlo

O modelo de precificação de opção via métodos de Monte Carlo é um outro modelo também desenvolvido, entretanto por requerer mais poder computacionalmente, acaba sendo utilizado somente em caso específico em que se faz necessário, como opções asiáticas e outros tipos de opções exóticas. Sendo definido pelas fórmulas:

$$S(T) = S(0) * \exp\left[\left(\hat{u} - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\epsilon_i\sqrt{T}\right]$$

$$C(T) = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} e^{-rt} * Max(S_i(T) - K, 0)$$

$$P(T) = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} e^{-rt} * Max(K - S_i(T), 0)$$

$$\epsilon_N := Amostra\ aleatória\ de\ N\ elementos\ de\ uma\ distríbuição\ normal,$$
$$considerando\ \mu = 0.0\ e\ \sigma = 1.0$$

7 Implementação e análise dos modelos e dados históricos

Para as implementações e simulações computacionais, foi utilizado um ambiente de desenvolvimento *Jupyter Notebook* e linguagem *Python* versão 3.9.10, dada a flexibilidade e extensão de bibliotecas voltadas para a análise, ciência de dados e método numéricos, o que torna um excelente ambiente para o desenvolvimento desse projeto. Dessa forma, foram utilizadas as bibliotecas *matplotlib*, *numpy*, *pandas*, *scipy*, *seaborn* e *yfinance*.

```
import sys
from math import log, sqrt, pi, exp
from datetime import datetime

import math
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.ticker as ticker
from matplotlib.ticker import PercentFormatter
import numpy as np
import pandas as pd
from scipy.stats import norm
import seaborn as sns
from scipy.optimize import brentq
from matplotlib.ticker import FuncFormatter

import yfinance as yf
print(sys.version)

3.9.16 (main, Mar  1 2023, 12:19:38)
[Clang 14.0.6 ]
```

Figura 6 - Versão do Python e bibliotecas importadas

7.1 Implementação do modelo Black-Scholes

Foi realizado a implementação do modelo do BSM e das respectivas gregas e cálculo numérico da volatilidade implícita, via método de Brent.

```
def d1 (S, K, T, r, sigma):
return (log(S/K) + (r + sigma **2. / 2.) * T) / (sigma * sqrt(T))

def d2 (S, K, T, r, sigma):
return (log(S/K) + (r - sigma ** 2. / 2.) * T) / (sigma * sqrt(T))

def callBS(S, K, T, r, sigma):
return S * norm.cdf(d1(S, K, T, r, sigma)) - K * exp(-r * T) * norm.cdf(d2(S,K,T,r,sigma))

def putBS(S, K, T, r, sigma):
return K * exp(-r * T) * norm.cdf(-d2(S,K,T,r,sigma)) - S * norm.cdf(-d1(S,K,T,r,sigma))
```

Figura 7 - Código-fonte da implementação em Python do modelo Black-Merlon-Scholes.

```
def deltaCallBS(S,K,T,r,sigma):
    return norm.cdf(d1(S, K, T, r, sigma))
def thetaCallBS(S, K, T, r, sigma):
    return -(S * norm.pdf(d1(S,K,T,r,sigma))*sigma/(2. * sqrt(T))) - r * K * exp(-r * T) * norm.cdf(d2(S,K,T,r,sigma))

def rhoCallBS(S, K, T, r, sigma):
    return K * T * exp(-r * T) * norm.cdf(d2(S, K, T,r,sigma))
def deltaPutBS(S, K, T, r, sigma):
    return norm.cdf(d1(S,K,T,r,sigma)) - 1.
def thetaPutBS(S,K,T,r,sigma):
    return -(S * norm.pdf(d1(S,K,T,r,sigma)) * sigma / (2. * sqrt(T))) + r * K * exp(-r * T) * norm.cdf(-d2(S,K,T,r,sigma))
def rhoPutBS(S,K,T,r,sigma):
    return -K * T * exp(-r * T) * norm.cdf(-d2(S,K,T,r,sigma))

def gammaBS(S,K,T,r,sigma):
    return norm.pdf(d1(S,K,T,r,sigma)) / (S * sigma * sqrt(T))
def vegaBS(S,K,T,r,sigma):
    return S * sqrt(T) * norm.pdf(d1(S,K,T,r,sigma))
```

Figura 8 - Código-fonte da implementação em Python das gregas do modelo Black-Scholes-Merton.

```
def impliedVolatilityCall(S, K, T, r, C):
f = lambda sigma: callBS(S, K, T, r, sigma) - C
return brentq(f, -1e-3, 10e3)
def impliedVolatilityPut(S, K, T, r, P):
f = lambda sigma: callBS(S, K, T, r, sigma) - P
return brentq(f, -1e-3, 10e3)
```

- Simulação e análise do BSM

Foi realizado uma simulação, para calcular o preço da opção e gregas com 360 dias, 30 dias e 1 dia para o vencimento, com um gráfico mostrando as gregas e preço da opção, sendo o eixo X o preço da ação e o eixo Y, a variável em questão, onde os parâmetros utilizados no BSM para a análise e gráficos:

- Preço do ativo foi utilizado uma faixa (r*ange*), por ser um dos eixos dos gráficos (S)
- Preço de exercício: 10 (K)
- Tempo até o vencimento: 360 dias, 30 dias e 1 dia. (T)
- Taxa de juros livre de risco: 5% ao ano (r)
- Volatilidade: 30% (sigma)

Essa simulação tinha como obtivo realizar uma análise para entender conceitualmente a dinâmica dos padrões das gregas para uma variação no tempo restante da opção, ou seja, uma variação no valor temporal da opção.

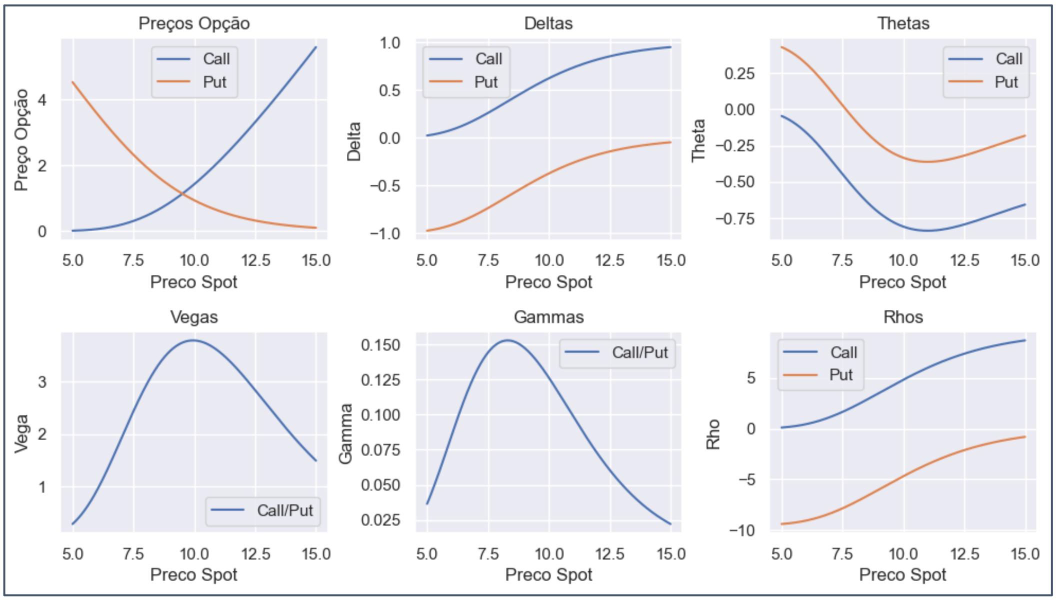

Figura 9 - Preço da opção e gregas para 360 dias

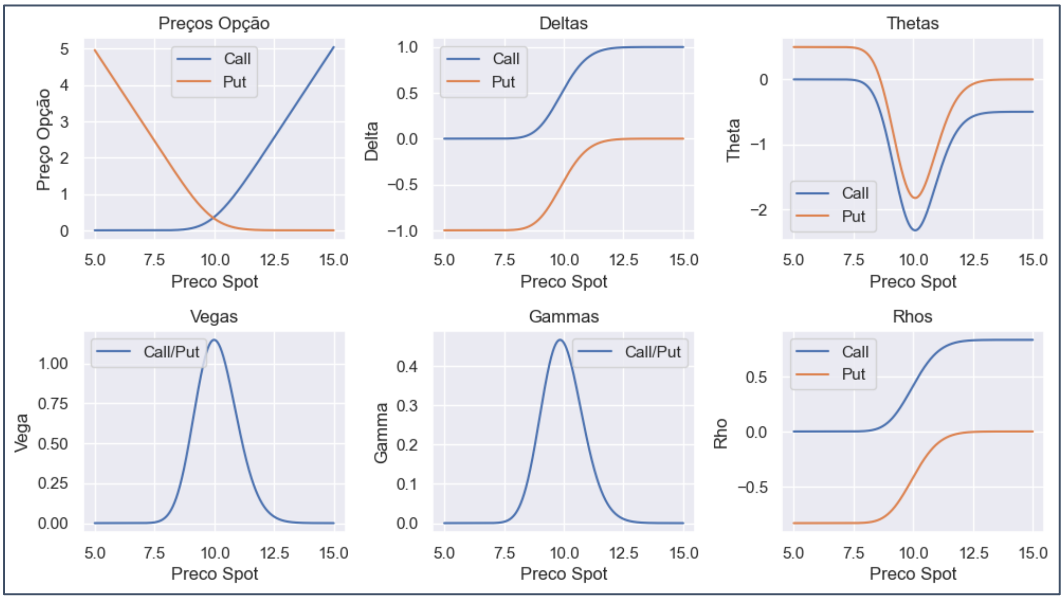

Figura 10 – Preço da opção e gregas para 30 dias

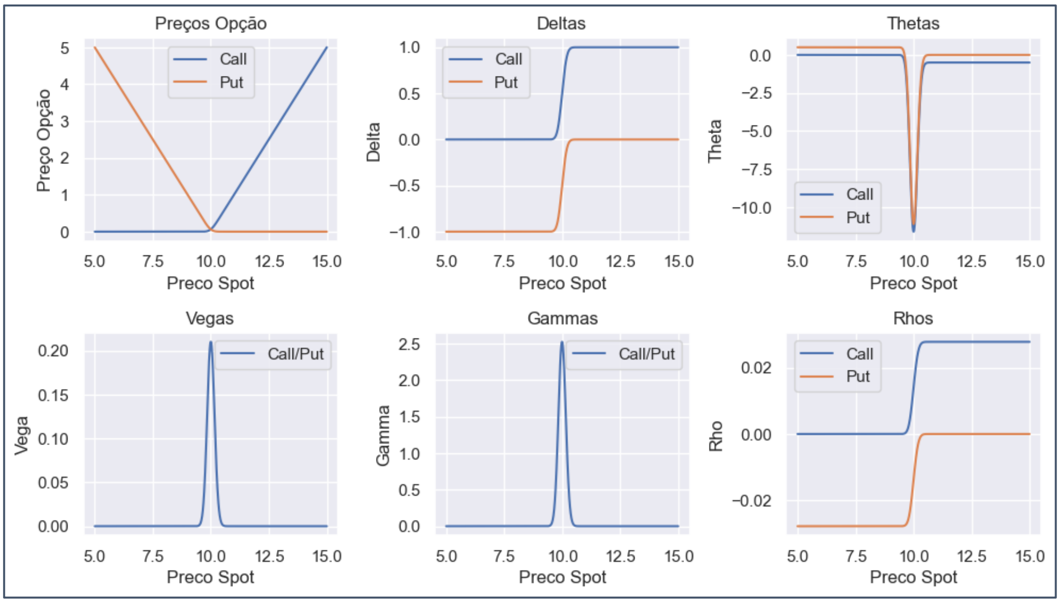

Figura 11 - Preço da opção e gregas para 1 dia

É possível observer a partir dos gráficos, padrões de um aumento da sensibilidade do preço da opção em relações a todas as variáveis, isto é, perto do vencimento, uma pequena alteração pode impactar significamente o preço do contrato, caso a opção esteja perto do preço de exercício (ATM), enquanto se estiver longe do preço de exercício (OTM e ITM), há pouca alteração de valor da opção. Perto do vencimento, o modelo BSM tende ao valor intrínseco da opção, dado que o valor temporal está tendendo a zero.

7.1.1 Sorriso de volatilidade

Sorriso de volatilidade, *Volatility Smile*, é um padrão encontrado quando comparado as volatilidades implícitas das opções com vários preços de exercícios em um mesmo vencimento e ativo, que começou a ser observado nos mercados após um *crash*, em 1987. Dado que o modelo Black-Scholes assume como premissa que os preços dos ativos seguem uma distribuição normal, enquanto na verdade o padrão observado na distribuição das variações diárias de preço dos ativos é mais próximo da classe das chamadas *fat-tailed distributions*, em que apresentam uma *skewness* e *kurtosis* mais largas ao comparado uma distribuição normal. Assim, quanto mais *in-the-money* e OTM *out-the-money* uma opção está, maior será a volatilidade implícita atribuída a ela, por conta essa maior probabilidade de eventos de cauda ocorreram, em comparação ao que uma distribuição normal assume.

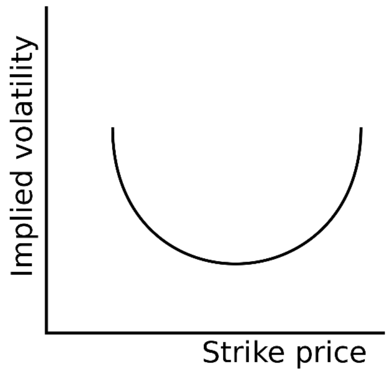

Figura 12 - Ilustração do sorriso de volatilidade

7.1.2 Análise dos dados históricos de opções de Ações de *TSLA*

A partir de um conjunto de dados real, obtidos a partir da biblioteca yfinance, pacote em Python que disponibiliza dados históricos de diversos mercados na área de finanças que tem como fonte de dados o site Yahoo Finance.

Para isso, foi realizado uma query pela biblioteca, e um armazenamento dos dados obtidos em um *dataframe* e armazenado em um arquivo .csv para as análises e avaliações poderem ser reproduzidas posteriormente.

Para está análise, alguns gráficos foram gerados com os dados obtidos e que podem levar a um melhor entendimento do funcionamento e formas de utilização desse mercado pelos agentes.

	contractSymbol	optionType	strike	expiryDate	midPrice	lastPrice	volume	openInterest	impliedVolatility
0	TSLA230623C00050000	Call	50.0	2023-06-23	210.525	210.76	58.0	2.0	7.849610
1	TSLA230623C00060000	Call	60.0	2023-06-23	200.125	110.65	NaN	2.0	6.562502
2	TSLA230623C00070000	Call	70.0	2023-06-23	190.825	186.76	2.0	2.0	4.480473
3	TSLA230623C00085000	Call	85.0	2023-06-23	175.800	146.91	NaN	13.0	3.800782
4	TSLA230623C00090000	Call	90.0	2023-06-23	170.550	167.40	1.0	3.0	2.593754
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
3728	TSLA251219P00420000	Put	420.0	2025-12-19	180.200	179.85	4.0	6.0	0.376853
3729	TSLA251219P00430000	Put	430.0	2025-12-19	188.375	187.95	6.0	3.0	0.373831
3730	TSLA251219P00440000	Put	440.0	2025-12-19	196.675	196.45	24.0	33.0	0.370780
3731	TSLA251219P00450000	Put	450.0	2025-12-19	205.175	205.00	36.0	7.0	0.368872
3732	TSLA251219P00460000	Put	460.0	2025-12-19	213.575	212.50	28.0	145.0	0.364783

3733 rows × 9 columns

Figura 13 - Descrição da Base de Dados obtidas a partir da yfinance

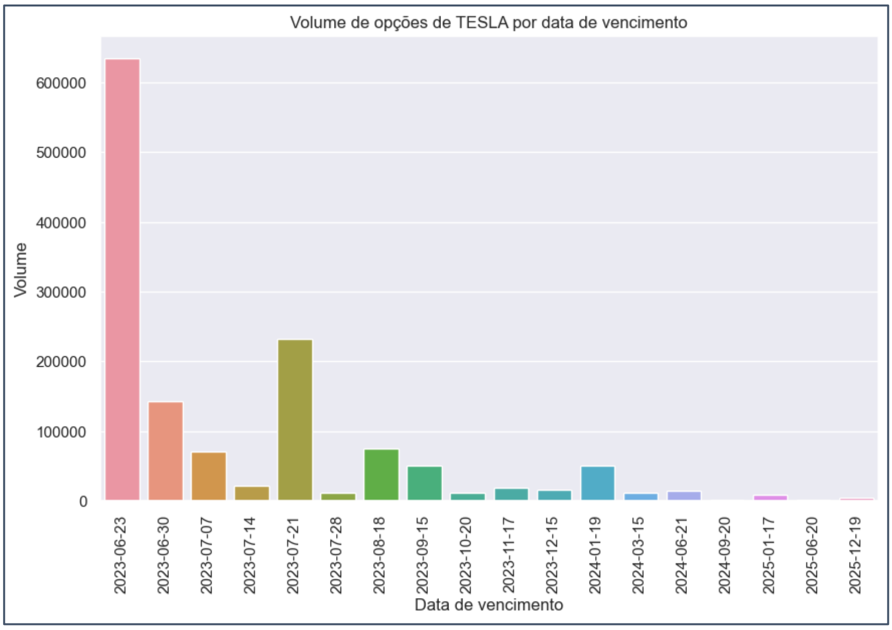

Figura 14 - Volume diário de opções de TSLA por data de vencimento

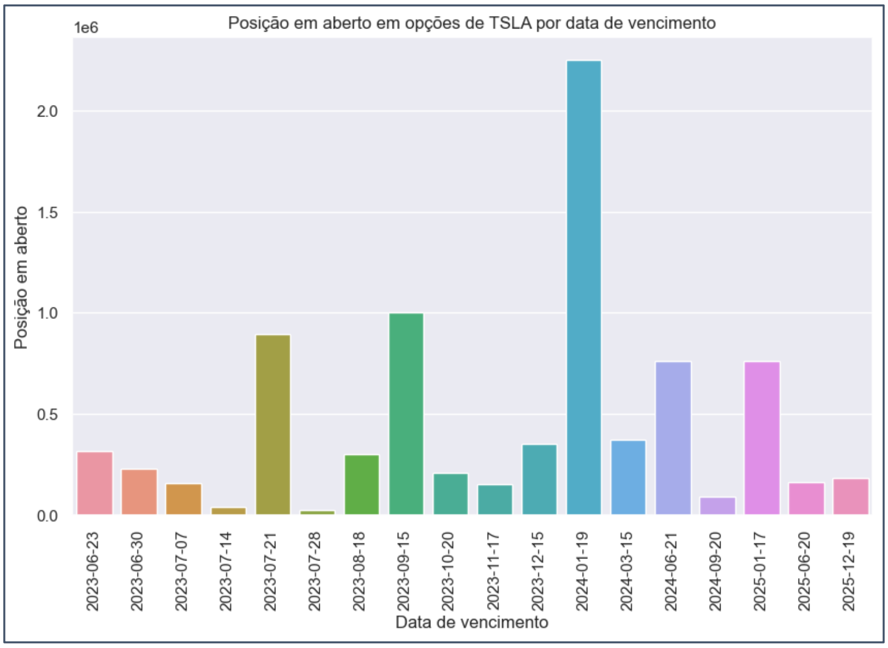

Figura 15 - Posição em aberto em opções de TSLA por vencimento

A partir desse conjunto de dados podem observar alguns padrões e características do mercado de opções, em que as opções de vencimento muito curto, menos de um mês até o vencimento, têm um alto volume de negociação. Entretanto, ao observar a posição em aberto, os vencimentos mais longos, como três ou seis meses são os que concentram maiores posições em aberto (*open interest*), o que pode se entender que os contratos mais curtos são mais negociados diariamente, mas o posicionamente de agentes está mais concentrado nos contratos de vencimento um pouco mais longo.

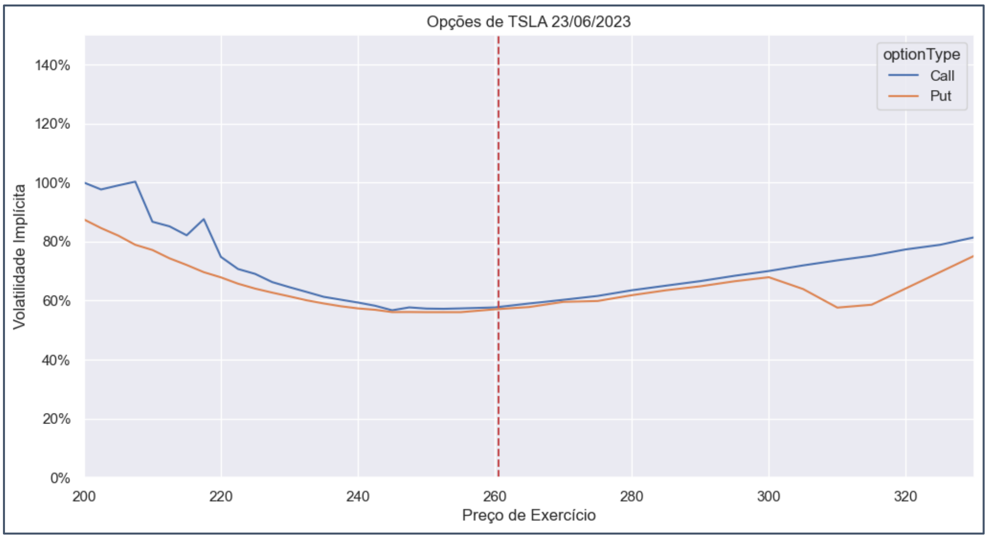

Figura 16 - Volatilidade ímplicita nas opções de TSLA com vencimento em 23/06/2023 por Strike, em 16/06/2023.

7.2 Implementação do modelo de precificação de opção via métodos de Monte Carlo

Foi realizada também a implementação do modelo via métodos de Monte Carlo, considerando uma distribuição normal para a amostra, como abaixo. Variações desse modelo podem ser implementadas com diferentes distribuições para a amostra ou opções de mais de um *underlying*, dado que seria possível a partir de duas amostras, calcular o *payoff* da opção para uma combinação de possíveis valores para cada um dos strikes dos ativos *underlying*.

```
def OPMMonteCarloMethods(S, K, T, r, sigma, N, optionType):
    e = np.random.standard_normal(N)
    ST = S * np.exp((r - (sigma ** 2.) / 2.) * T + sigma * e * np.sqrt(T))
    if optionType == 'Call':
        payoff = np.maximum(ST - K, 0)
    else:
        payoff = np.maximum(K - ST, 0)
    optionPrice = np.exp(-r * T) * np.mean(payoff)
return optionPrice
```

```
S = 10. # Preço spot
K = 10. # Strike
T = 30./360. # Em Fracão de ano (Periodo que a taxa de juros em %
é dada)
r = 0.05 # Em percentual
sigma = 0.30 # Em percentual
N = 10000
optionType = 'Call'
print(callBS(S,K,T,r,sigma))
print(OPMMonteCarloMethods(S, K, T, r, sigma, N, optionType))

output:
0.36585674067004526
0.36622453375324115
```

Foram realizados testes para a comparação dos modelos implementados, utilizando os mesmos parâmetros, e pode ser observado que usando uma distribuição normal como base para a geração das amostrar, o modelo de Monte Carlo tende ao valor encontrado pelo BSM. Entretanto, como discutido anteriormente, o modelo via métodos de Monte Carlo é mais flexível que o BSM, podendo ser modificado para outros casos que o BSM não se aplica.

8 Considerações Finais

Este trabalho buscou realizar um estudo geral do mercado de opções, e alguns dos modelos utilizados para a precificação deste tipo de contrato de derivativos fazer simulações e análise de dados históricos, que estimam o seu valor presente, considerando determinadas premissas e parâmetros.

Estudos adicionais podem ser realizados abordando variações de opções exóticas mais complexas, como opções digitais híbridas e modelos precificação para esse tipo de contrato, sobre modelos de precificação mais modernos para opções *vanilla*, que corrigem determinadas premissas, visto que não se adequam tanto aos dados históricos de mercado, como volatilidade estocástica ou modelo de volatilidade local (*local volatility*), em que volatilidade não é fixa, tratando a volatilidade em si como um processo estocástico, sendo dependente de outras variáveis, como o próprio preço do ativo subjacente e modelos que consideram distribuições de cauda longa (*fat-tailed distribution*), como a distribuição de *Cauchy*, ao invés de utilizar a distribuição normal, como base para o movimento dos preços dos ativos.

Outros pontos que poderiam ser alvos de estudos futuros são, superfície de volatilidade, que é uma forma de visualizar volatilidade implícita das opções de um ativo *underlying*, em relação ao preço de exercício e ao tempo até o vencimento, baseada no BSM, em que os agentes desenvolvem modelos proprietários para a construção dessa superfícies, para conseguir estimar quanto deveria ser a volatilidade implícita da opção, que utilizam e consideram outras variáveis, como liquidez do ativo subjacente, eventos econômicos ou idiossincráticos da empresa, no caso de ser uma opção de ação, movimento da curva de juros futuros, dentro outras variáveis.

Os mercados de opções e seus modelos de precificação tem um papel relevante para agentes do setor financeiro, como bancos e seguradoras, que utilizam estes modelos para o gerenciamento de risco deste tipo de contrato, que sendo de extrema importancia o seu entendimento para a estabilidade financeira.

9 Referências

[1] Hull, John C. **Opções, Futuros e Outros Derivativos** ; tradução: Francisco Araújo da Costa; revisão técnica: Guilherme Ribeiro de Macêdo. – 9. ed. – Porto Alegre : Bookman, 2016.

[2] **Manual de Apreçamento de Contratos de Opções** – B3, 30 jun. 2020 Disponível em: <https://www.b3.com.br/data/files/66/F0/A6/7C/34525610BE423F46AC094EA8/Manual-de-Aprecamento-Opcoes.pdf>. Acesso em: 03 out. 2022.

[3] Black, Fisher. Scholes, Myron. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/1831029?origin=JSTOR-pdf>

[4] Cox, John C. Ross, Stephen A. Rubinstein, Mark. *Option pricing: A simplified approach*. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304405X79900151?via%3Dihub>

[5] M. Ross, Sheldon. **Simulation** – 6. Ed; London - Academic Press, 2023.

[6] ***Pricing Options with Mathematical Models*** – Caltech, Disponível em: <http://www.its.caltech.edu/~cvitanic/PAPERS/All%20slides.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2023.

[7] Shiller, Robert. **Financial Markets** – Coursera / Yale Disponível em: <https://www.coursera.org/learn/financial-markets-global>. Acesso em: 04 dez. 2022

[8] **CS 179 Lecture 17** – Caltech, Disponível em: <http://courses.cms.caltech.edu/cs179/Old/2015_lectures/cs179_2015_lec17.pdf>. Acesso em: 03 out. 2022.

[9] Rytenband, Jairo. **Entenda as gregas e as estratégias com opções** Disponível em: <https://www.fundoversa.com.br/entenda-as-gregas-e-as-estrategias-com-opcoes/>. Acesso em: 03 out. 2022

[10] Roh, HW. ***Understanding Fat-tailed Distribution*** – Towards Data Science, Disponível em: <https://towardsdatascience.com/journey-to-tempered-stable-distribution-part-1-fat-tailed-distribution-958d28bc20c>. Acesso em: 03 out. 2022

[11] Hayes, Adam. ***The Black-Scholes Model*** – Investopedia, 03 jun. 2022 Disponível em: <https://www.investopedia.com/terms/b/blackscholes.asp>. Acesso em: 03 out. 2022

[12] Stewart, Ian. ***The mathematical equation that caused the banks to crash*** – The Guardian Disponível em: <https://www.theguardian.com/science/2012/feb/12/black-scholes-equation-credit-crunch>. Acesso em: 05 oct. 2022

[13] Mekulu, Kevin. ***Option Pricing Using Monte Carlo Simulations*** - Investopedia Disponível em: <https://www.investopedia.com/terms/m/montecarlosimulation.asp>. Acesso em: 04 dez. 2022

[14] Polanitzer, Roi. ***Cox, Ross & Rubinstein (1979) Binomial Model; Predict European and American Options Prices*** – Medium Disponível em: <https://medium.com/@polanitzer/cox-ross-rubinstein-1979-binomial-model-predict-european-and-american-options-prices-c0902039a951>. Acesso em: 04 dez. 2022

[15] Kenton, Will. ***Monte Carlo Simulation: History, Hot it Works, and 4 Key Steps*** - Investopedia Disponível em: <https://www.investopedia.com/terms/m/montecarlosimulation.asp>. Acesso em: 04 dez. 2022

[16] Chen, James. Put-Call Parity: Definition, Formula, How it Works, and Examples – Disponível em: <https://www.investopedia.com/terms/p/putcallparity.asp>. Acesso em: 20 jun. 2023.