

## 2 Estabilidade de Tensão

### 2.1 Introdução

O objetivo desta seção é mostrar a possibilidade de existência de fenômenos que se possa assemelhar a aqueles observados na operação de sistemas elétricos, e associados ao colapso de tensão. Mais precisamente, isto deve ser feito procurando-se situações de fluxo máximo de potência ativa e/ou reativa em ramos de transmissão. O efeito de ações usuais de controle de tensão deve ser também observado, no intuito de verificar-se a existência de regiões de operação onde o efeito dessas ações é oposto ao esperado.

O sistema é dito seguro, do ponto de vista de tensão, se possui a capacidade de não somente operar de forma estável, mas também de manter esta estabilidade frente a distúrbios e aumentos de seu carregamento. Define-se que um sistema elétrico de potência é estável no ponto de operação se, após um distúrbio, forem mantidos dentro dos limites os estados (tensões, ângulos, etc) do sistema e se for atingido um novo ponto de equilíbrio.

### 2.2 O Limite de Estabilidade de Tensão (LET)

Para a compreensão do fenômeno da estabilidade de tensão, se estudará o comportamento estático de um sistema elétrico com duas barras: composto de um gerador com capacidade infinita de geração, uma carga modelada por potência constante, e uma linha de transmissão sem limite térmico. A análise de um caso simples fornece mais chances de se obter explicações simples. A corrente que flui no circuito mostrado na Figura 2.1 é:

$$I_{01} = \frac{\dot{V}_0}{Z_t \angle \alpha_t + Z_C \angle \phi} \quad (2.1)$$

$$I_{01} = \frac{V_0}{\sqrt{(Z_t \cos \alpha_t + Z_C \cos \phi)^2 + (Z_t \sin \alpha_t + Z_C \sin \phi)^2}} \quad (2.2)$$

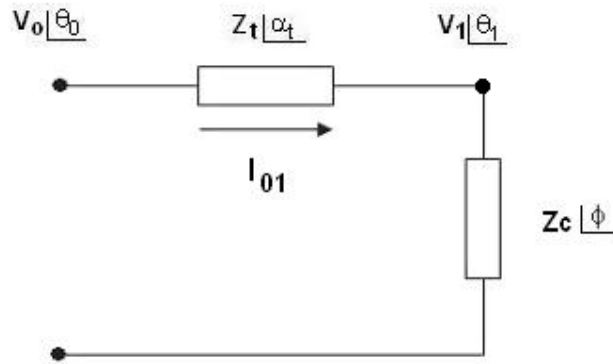


Figura 2.1 - Circuito de Duas Barras para Deduzir o Limite de Estabilidade de Tensão

A potência ativa que "sai" da barra de carga, e que é igual ao negativo da potência consumida na carga é:

$$P_{10} = -P_1 = -I_{01}^2 \cdot Z_C \cdot \cos \phi \quad (2.3)$$

Substituindo (2.2) em (2.3), calcula-se a potência elétrica injetada na barra terminal 1:

$$P_{10} = -\frac{V_0^2 \cdot Z_C \cdot \cos \phi}{Z_t^2 \cdot \cos^2 \alpha_t + 2 \cdot Z_t \cdot Z_C \cdot \cos \alpha_t \cdot \cos \phi + Z_C^2 \cdot \cos^2 \phi + b} \quad (2.4)$$

onde:

$$b = Z_t^2 \cdot \sin^2 \alpha_t + 2 \cdot Z_t \cdot Z_C \cdot \sin \alpha_t \cdot \sin \phi + Z_C^2 \cdot \sin^2 \phi \quad (2.5)$$

Reescrevendo:

$$P_{10} = -P_1 = -\frac{V_0^2 \cdot Z_C \cdot \cos \phi}{Z_t^2 + Z_C^2 + 2 \cdot Z_t \cdot Z_C \cdot \cos(\phi - \alpha_t)} \quad (2.6)$$

De (2.6), tenta-se encontrar o valor de  $Z_c$  que maximiza a potência ativa da carga através da primeira derivada de  $P_1$ :

$$\frac{\partial P_1}{\partial Z_C} = \frac{V_0^2 \cdot \cos \phi \cdot [Z_t^2 + Z_C^2 + 2 \cdot Z_t \cdot Z_C \cdot \cos(\alpha_t - \phi)]}{[Z_t^2 + Z_C^2 + 2 \cdot Z_t \cdot Z_C \cdot \cos(\alpha_t - \phi)]^2} - \frac{Z_C \cdot V_0^2 \cdot \cos \phi \cdot [2 \cdot Z_C + 2 \cdot Z_t \cdot \cos(\alpha_t - \phi)]}{[Z_t^2 + Z_C^2 + 2 \cdot Z_t \cdot Z_C \cdot \cos(\alpha_t - \phi)]^2} = 0 \quad (2.7)$$

Operando (2.7):

$$V_0^2 \cdot Z_t^2 \cdot \cos \phi + V_0^2 \cdot Z_C^2 \cdot \cos \phi + 2 \cdot V_0^2 \cdot Z_t \cdot Z_C \cdot \cos \phi \cdot \cos(\alpha_t - \phi) - 2V_0^2 \cdot Z_C^2 \cdot \cos \phi - 2V_0^2 \cdot Z_C \cdot Z_t \cdot \cos \phi \cdot \cos(\alpha_t - \phi) = 0 \quad (2.8)$$

que é reduzido a:

$$V_0^2 \cdot Z_t^2 \cdot \cos \phi = V_0^2 \cdot Z_C^2 \cdot \cos \phi \Rightarrow Z_C = Z_t \quad (2.9)$$

Calcula-se a segunda derivada de  $P_1$  em relação à  $Z_C$  para conferir que é efetivamente um máximo:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial Z_C^2} /_{Z_C=Z_t} < 0 \quad (2.10)$$

De (2.9) e (2.10), conclui-se que  $P_1$  é máximo quando:

$$\boxed{Z_C = Z_t} \quad (2.11)$$

$P_{10}$  é mínimo quando  $P_1$  é máximo. Substituindo-se (2.11) em (2.6), tem-se:

$$P_{10}^{\min} = -\frac{V_0^2 \cdot Z_C \cdot \cos \phi}{2 \cdot Z_C^2 \cdot [1 + \cos(\phi - \alpha_t)]} = -\frac{V_0^2 \cdot \cos \phi}{4 \cdot Z_C \cdot \cos^2 \left( \frac{\phi - \alpha_t}{2} \right)} \quad (2.12)$$

que é reduzido a:

$$P_1^{\max} = \frac{V_0^2 \cdot \cos \phi}{4 \cdot Z_C \cdot \cos^2 \left( \frac{\phi - \alpha_t}{2} \right)} \quad (2.13)$$

Para  $P_1^{\max}$  e uma dada impedância de carga  $Z_c$  com fator de potência  $\phi$ :

$$V_1 = Z_C \cdot I_{01} \Rightarrow V_1 = \frac{V_0 \cdot Z_C}{\sqrt{2 \cdot Z_t^2 \cdot (1 + \cos(\phi - \alpha_t))}} \quad (2.14)$$

$$V_1 = \frac{V_0}{\sqrt{4 \cdot \cos^2 \left( \frac{\phi - \alpha_t}{2} \right)}} \quad (2.15)$$

e então de (2.15) calcula-se a tensão crítica na barra terminal:

$$V_{1\text{Crítico}} = \frac{V_0}{2 \cdot \cos \left( \frac{\phi - \alpha_t}{2} \right)} \quad (2.16)$$

De (2.11), sabe-se que  $Z_C = Z_t$ , e então monta-se a equação:

$$\dot{V}_1 = \dot{Z}_c \cdot \dot{I}_{01} \quad \text{logo} \quad V_1 \angle \theta_1 = Z_c \angle \phi \frac{\dot{V}_0}{Z_t \angle \alpha_t + Z_C \angle \phi} \quad (2.17)$$

Considerando só a parte real:

$$V_1 \cos \theta_1 = \frac{V_0 \cdot (\cos \alpha_t \cdot \cos \phi + \cos^2 \phi + \sin \alpha_t \cdot \sin \phi + \sin^2 \phi)}{d} \quad (2.18)$$

onde:

$$d = [\cos^2 \alpha_t + 2 \cdot \cos \alpha_t \cdot \cos \phi + \cos^2 \phi + \sin^2 \alpha_t + 2 \cdot \sin \alpha_t \cdot \sin \phi + \sin^2 \phi] \quad (2.19)$$

Operando (2.18) e (2.19):

$$\begin{aligned}
 V_1 \cos \theta_1 &= \frac{V_0 \cdot (\cos \alpha_t \cdot \cos \phi + \sin \alpha_t \cdot \sin \phi + 1)}{2 \cdot \cos \alpha_t \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sin \alpha_t \cdot \sin \phi + 2} \\
 &= \frac{V_0 \cdot (\cos \alpha_t \cdot \cos \phi + \sin \alpha_t \cdot \sin \phi + 1)}{2 \cdot (\cos \alpha_t \cdot \cos \phi + \sin \alpha_t \cdot \sin \phi + 1)}
 \end{aligned}
 \quad (2.20)$$

que é reduzido a:

$$V_1 = \frac{V_0}{2 \cdot \cos \theta_1} \quad (2.21)$$

Igualando-se (2.16) a (2.21), obtém-se:

$$\frac{V_0}{2 \cdot \cos \theta_1} = \frac{V_0}{2 \cdot \cos \left[ \frac{\phi - \alpha_t}{2} \right]} \quad (2.22)$$

e então, de (2.22) calcula-se o ângulo crítico na barra terminal:

$$\boxed{\theta_{1\text{Crítico}} = \frac{\phi - \alpha_t}{2}} \quad (2.23)$$

O LET é o lugar geométrico das tensões em módulo e ângulo ( $V_{1\text{Crítico}}$  e  $\theta_{1\text{Crítico}}$ ), onde o módulo da impedância equivalente da carga é igual ao módulo da impedância da linha de transmissão série. O LET representa os pontos da máxima transmissão de potência à carga, uma para cada fator de potência, o que depende da parte reativa, e/ou eventual compensação reativa da carga. Em outras palavras, variando-se  $\phi$  e usando-se (2.21) e (2.23) traça-se o LET no plano P×V.

### 2.2.1 Curvas P, Q e $\phi$ Constantes

Utilizando-se o circuito de 2 barras mostrado na Figura 2.2, deduz-se as equações da potência ativa e reativa injetada na barra terminal.

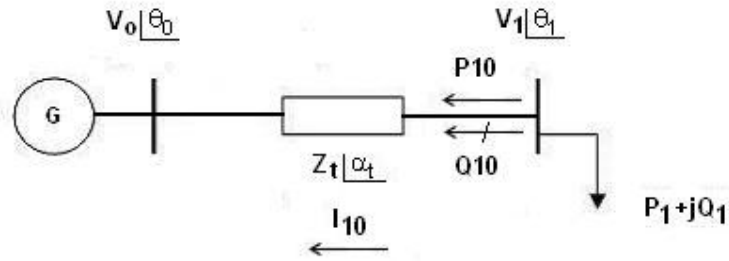


Figura 2.2 - Sistema de Duas Barras sem Capacitor na Barra Terminal

$$S_{10}^* = P_{10} - jQ_{10} = V_1^* I_{10} \quad (2.24)$$

$$I_{10} = \frac{V_1 \angle \theta_1 - V_0 \angle \theta_0}{Z_t \angle \alpha_t} \quad (2.25)$$

$$V_1^* = V_1 \angle -\theta_1 \quad (2.26)$$

Substituindo-se (2.25) e (2.26) em (2.24):

$$S_{10}^* = \frac{V_1^2 \cdot \cos(\alpha_t)}{Z_t} - \frac{V_1 \cdot V_0 \cdot \cos(\theta_{10} + \alpha_t)}{Z_t} - j \left[ \frac{V_1^2 \cdot \sin(\alpha_t)}{Z_t} - \frac{V_1 \cdot V_0 \cdot \sin(\theta_{10} + \alpha_t)}{Z_t} \right] \quad (2.27)$$

Separando-se em (2.27) a parte real e imaginária da potência aparente injetada, fica:

$$P_{10} = -P_1 = \frac{V_1^2}{Z_t} \cdot \cos \alpha_t - \frac{V_1 \cdot V_0 \cdot \cos(\theta_{10} + \alpha_t)}{Z_t} \quad (2.28)$$

$$Q_{10} = -Q_1 = \frac{V_1^2}{Z_t} \cdot \sin \alpha_t - \frac{V_1 \cdot V_0 \cdot \sin(\theta_{10} + \alpha_t)}{Z_t} \quad (2.29)$$

Para cada  $P_{10}$  constante, e variando-se  $\theta_{10}$  em (2.28), pode-se calcular  $V_1$  e, portanto, traçar-se a curva para  $P$  constante no plano  $P \times V$  (ou  $S \times V$ ).

Para cada  $Q_{10}$  constante, e variando-se  $\theta_{10}$  em (2.29), pode-se calcular  $V_1$  e, portanto, traçar-se a curva para  $Q$  constante no plano  $Q \times V$  (ou  $S \times V$ ).

A tangente do ângulo do fator de potência na carga é:

$$\tan \phi = \frac{Q_{10}}{P_{10}} \quad (2.30)$$

Substituindo-se (2.28) e (2.29) em (2.30) e colocando-se em evidência a tensão na barra terminal  $V_1$ :

$$V_1 = \frac{V_0 \cdot [\text{sen}(\theta_{10} + \alpha_t) - \tan \phi \cdot \cos(\theta_{10} + \alpha_t)]}{\text{sen} \alpha_t - \tan \phi \cdot \cos(\alpha_t)} \quad (2.31)$$

Em (2.31) é mostrado o módulo da tensão na barra de carga num sistema de duas barras sem capacitor em relação ao ângulo do fator de potência na carga. Para cada  $\phi$  constante, e variando-se  $\theta_{10}$  em (2.31), pode-se calcular  $V_1$  e, portanto, traçar-se a curva para  $\phi$  constante no plano PxV (ou SxV).

Considerando-se agora um capacitor na barra de carga as equações da potência ativa e reativa injetada na barra terminal podem ser deduzidas a partir da Figura 2.3.

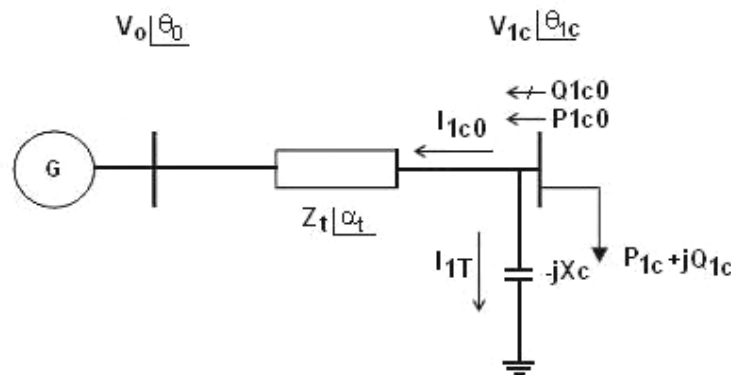


Figura 2.3 - Sistema de Duas Barras com Capacitor na Barra Terminal

$$S_{1c0}^* = P_{1c0} - jQ_{1c0} = V_{1c}^* \cdot (I_{1c0} + I_{1T}) \quad (2.32)$$

$$I_{1c0} = \frac{V_{1c} \angle \theta_{1c} - V_0 \angle \theta_0}{Z_t \angle \alpha_t} \quad (2.33)$$

$$I_{1T} = \frac{V_{1c} \angle \theta_{1c}}{-jX_c} \quad (2.34)$$

$$V_{1c}^* = V_{1c} \angle -\theta_{1c} \quad (2.35)$$

Substituindo-se (2.33), (2.34) e (2.35) em (2.32):

$$S_{1co}^* = \frac{V_{1c}^2 \cdot \cos(\alpha_t)}{Z_t} - \frac{V_{1c} \cdot V_0 \cdot \cos(\theta_{1co} + \alpha_t)}{Z_t} - j \left[ V_{1c}^2 \left( \frac{\sin(\alpha_t)}{Z_t} - \frac{1}{X_c} \right) - \frac{V_{1c} \cdot V_0 \cdot \sin(\theta_{1co} + \alpha_t)}{Z_t} \right] \quad (2.36)$$

Separando-se em (2.36) a parte real e imaginária da potência aparente injetada, fica:

$$P_{1co} = -P_{1c} = \frac{V_{1c}^2}{Z_t} \cdot \cos \alpha_t - \frac{V_{1c} \cdot V_0 \cdot \cos(\theta_{1co} + \alpha_t)}{Z_t} \quad (2.37)$$

$$Q_{1co} = -Q_{1c} = V_{1c}^2 \left[ \frac{\sin(\alpha_t)}{Z_t} - \frac{1}{X_c} \right] - \frac{V_{1c} \cdot V_0 \cdot \sin(\theta_{1co} + \alpha_t)}{Z_t} \quad (2.38)$$

Para cada  $P_{1co}$  constante, e variando-se  $\theta_{1co}$  em (2.37), pode-se calcular  $V_{1c}$  e, portanto, traçar-se a curva para P constante no plano PxV (ou SxV).

Para cada  $Q_{1co}$  constante, e variando-se  $\theta_{1co}$  em (2.38), pode-se calcular  $V_{1c}$  e, portanto, traçar-se a curva para Q constante no plano QxV (ou SxV).

Substituindo-se (2.37) e (2.38) em (2.30) e colocando-se em evidência a tensão na barra terminal  $V_{1c}$ :

$$V_{1c} = \frac{-X_c \cdot V_0 \cdot [\cos(\theta_{1co} + \alpha_t) \cdot \text{tg}(\phi) - \sin(\theta_{1co} + \alpha_t)]}{X_c \cdot \sin(\alpha_t) - Z_t - X_c \cdot \text{tg}(\phi) \cdot \cos(\alpha_t)} \quad (2.39)$$

Em (2.39) é mostrado o módulo da tensão na barra de carga num sistema de duas barras com capacitor em relação ao ângulo do fator de potência na carga. Para cada  $\phi$  constante, e variando-se  $\theta_{1co}$  em (2.39), pode-se calcular  $V_{1c}$  e, portanto, traçar-se a curva para  $\phi$  constante no plano PxV (ou SxV).

O LET passa pelas "pontas" de todas as curvas para P constante no plano PxV, isto é, une todos os pontos de máximo carregamento. O LET separa as duas regiões de trabalho: região A ou região superior da curva para P constante, onde se tem controle sobre a tensão, e a região B ou região inferior da curva para P constante, onde ações de controle de tensão podem ter efeitos opostos ao esperado [Prada, R.B., Santos, J.O.R.,



Greenhalgh, A.B., Seelig, B.H.T., Palomino, E.G.C., 2001]. Isso será demonstrado na Seção 2.3.

### 2.3 A Existência de uma Máxima Potência Transmitida

De (2.28), é deduzido que:

$$V_1^2 \left[ \frac{\cos \alpha}{Z_t} \right] - V_1 \left[ \frac{V_0 \cdot \cos(\theta_{10} + \alpha_t)}{Z_t} \right] + [P_1] = 0 \quad (2.40)$$

Usando-se (2.40) traçou-se as curvas tensão  $V_1$  versus defasagem angular  $\theta_1$  para diferentes valores de potência ativa constante. São mostradas na Figura 2.4 que, quanto mais interna a curva, maior a potência elétrica transmitida para a carga. A curva vai ocupando uma área cada vez menor até que se reduz a um único ponto e que, portanto, corresponde à máxima carga que pode ser atendida.

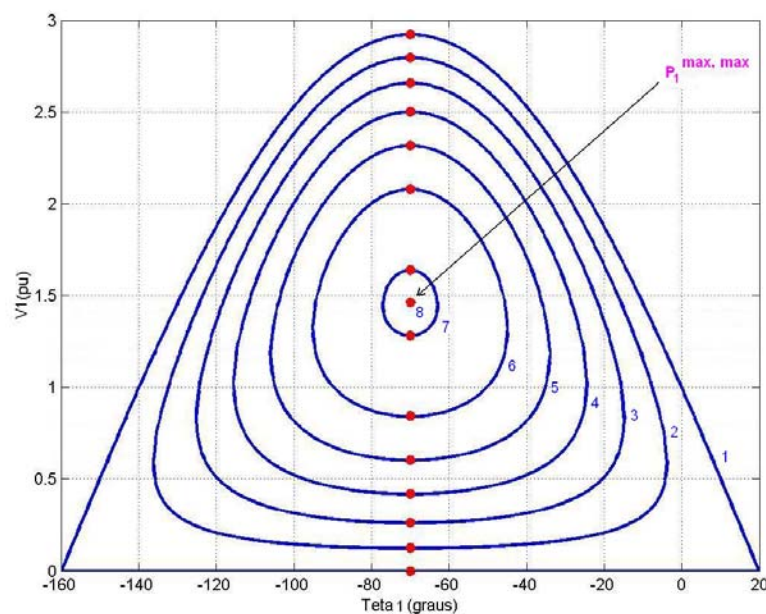


Figura 2.4 - Curvas para P Constante no Plano Defasagem Angular  $\theta_1$  versus Tensão  $V_1$

Na Tabela 2.1 são mostrados os valores de potência ativa constante em cada uma das curvas da Figura 2.4 (considerou-se  $V_0=1,0$  pu e  $Z_t=0,4$  pu). São também mostrados na Tabela 2.1 os valores de magnitude de tensão ( $V_a$  e  $V_b$ ) para os quais a derivada da

potência ativa em relação à defasagem angular muda de sinal. Quando  $V_a$  e  $V_b$  são iguais, a máxima potência transmitida é atingida (a oitava linha da Tabela 2.1).

Tabela 2.1 - Pontos de Operação  $\partial P/\partial \theta=0$

No. Curva	$P_1$ (pu)	$V_a$ (pu)	$V_b$ (pu)	$\theta_1$ (graus)
1	0,000	2,9238	0,0000	-70,0
2	0,300	2,7984	0,1253	-70,0
3	0,600	2,6600	0,2638	-70,0
4	0,900	2,5033	0,4204	-70,0
5	1,200	2,3184	0,6053	-70,0
6	1,500	2,0806	0,8431	-70,0
7	1,800	1,6408	1,2829	-70,0
8	1,827	1,4619	1,4619	-70,0

O valor da defasagem angular na barra 1 que maximiza a potência elétrica transmitida é calculado através da primeira derivada de (2.28):

$$\frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} = -\frac{V_1 \cdot V_0}{Z_t} \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_0 + \alpha_t) = 0, \text{ onde } \theta_0 = 0^\circ \quad (2.41)$$

que é reduzido a:

$$\theta_1 = -\alpha_t \quad (2.42)$$

A derivada segunda de (2.28) é negativa:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial \theta_1^2} < 0 \quad (2.43)$$

$$-\frac{V_1 \cdot V_0}{Z_t} \cdot \cos(-\alpha_t - 0^\circ + \alpha_t) < 0 \quad (2.44)$$

e então, o ângulo  $\theta_1 = -\alpha_t$  corresponde a  $P_1$  máximo.

O valor da tensão  $V_1$  na barra 1 que maximiza a potência elétrica transmitida é obtido através da primeira derivada de (2.28):

$$\frac{\partial P_1}{\partial V_1}(\theta_1^{\text{crítico}}) = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial V_1} = -2 \cdot \frac{V_1}{Z_t} \cdot \cos(\alpha_t) + \frac{V_0}{Z_t} \cdot \cos(\theta_1 - \theta_0 + \alpha_t) \quad (2.46)$$

$$\boxed{V_1 = \frac{V_0}{2 \cdot \cos(\theta_1)}} \quad (2.47)$$

A derivada segunda de (2.28) é negativa, garantindo que trata-se de um ponto de máximo:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial V_1^2}(\theta_1^{\text{crítico}}) < 0 \quad (2.48)$$

$$-2 \cdot \frac{\cos(\alpha_t)}{Z_t} < 0 \quad (2.49)$$

Com  $\theta_1 = -70^\circ$  em (2.47) obtém-se  $V_1 = 1,4619$  pu. Substituindo  $\theta_1 = -70^\circ$  e  $V_1 = 1,4619$  pu em (2.28) obtém-se o valor da máxima potência elétrica possível de ser transmitida à carga:  $P_1 = 1,8273$  pu, valor que confere com o encontrado quando da construção das curvas mostradas na Figura 2.4.

### 2.3.1 Por Que a Potência Consumida Passa a Diminuir

Define-se a potência elétrica consumida na carga em um ponto “k” e em outro ponto “k+1” como sendo:

$$P_1^k = V_1^k \cdot I_1^k \cdot \cos \phi \quad (2.50)$$

$$P_1^{k+1} = V_1^{k+1} \cdot I_1^{k+1} \cdot \cos \phi \quad (2.51)$$

onde:

$V_1^k$  e  $I_1^k$  são os módulos da tensão e corrente na carga num ponto “k”

$V_1^{k+1}$  e  $I_1^{k+1}$  são os módulos da tensão e corrente na carga num ponto “k+1”

Através de (2.50) e (2.51) podem-se calcular as variações de potências entre os dois pontos, dadas por:

$$\Delta P_1^k = P_1^{k+1} - P_1^k \quad (2.52)$$

$$\Delta P_1^k = V_1^{k+1} \cdot I_1^{k+1} \cdot \cos \phi - V_1^k \cdot I_1^k \cdot \cos \phi \quad (2.53)$$

A equação (2.53), com  $\cos \phi = 1$ , por exemplo e sem perda de generalidade, pode ser expressa através das variações de tensão e corrente como mostrado em (2.54) e (2.55):

$$\Delta P_1^k = (V_1^k + \Delta V_1^k)(I_1^k + \Delta I_1^k) - (V_1^k \cdot I_1^k) \quad (2.54)$$

$$\Delta P_1^k = [V_1^k \cdot \Delta I_1^k] + [I_1^k \cdot \Delta V_1^k + \Delta V_1^k \cdot \Delta I_1^k] \quad (2.55)$$

Para todo k, a medida que se aumenta a carga:

$$\Delta V_1^k < 0, \text{ as variações da tensão são negativas} \quad (2.56)$$

$$\Delta I_1^k > 0, \text{ as variações da corrente são positivos} \quad (2.57)$$

Na Tabela 2.2 são mostrados pontos de operação da curva  $\phi$  constante, sendo que os primeiros pertencem à parte superior de curvas para P constante, enquanto que os últimos pertencem à parte inferior. Para exemplificar como funciona (2.55), consideram-se dois pontos de operação da tabela.

Tabela 2.2 - Variações de Tensão e Corrente na Barra de Carga

k	$P_1^k$ (pu)	$V_1^k$ (pu)	$\theta_1^k$ (graus)	$I_1^k$ (pu)	$\Delta V_1^k$ (pu)	$\Delta I_1^k$ (pu)
1	0,0000	1,0000	0,0	0,0000	-0,0248	0,1671
2	0,1629	0,9752	-3,6	0,1671	-0,0287	0,1664
3	0,3156	0,9465	-7,2	0,3334	-0,0324	0,1651
4	0,4557	0,9141	-10,8	0,4985	-0,0360	0,1631
5	0,5810	0,8781	-14,4	0,6616	-0,0395	0,1605
6	0,6894	0,8386	-18,0	0,8221	-0,0428	0,1573
7	0,7794	0,7958	-21,6	0,9794	-0,0459	0,1534
8	0,8494	0,7499	-25,2	1,1328	-0,0489	0,1489
9	0,8984	0,7010	-28,8	1,2817	-0,0517	0,1439
10	0,9256	0,6493	-32,4	1,4255	-0,0542	0,1382
11	0,9306	0,5951	-36,0	1,5638	-0,0566	0,1321
12	0,9132	0,5385	-39,6	1,6958	-0,0587	0,1254
13	0,8738	0,4798	-43,2	1,8212	-0,0606	0,1182
14	0,8130	0,4192	-46,8	1,9394	-0,0622	0,1105
15	0,7318	0,3570	-50,4	2,0499	-0,0637	0,1024
16	0,6313	0,2933	-54,0	2,1523	-0,0648	0,0939
17	0,5133	0,2285	-57,6	2,2463	-0,0657	0,0851
18	0,3796	0,1628	-61,2	2,3314	-0,0664	0,0759
19	0,2322	0,0964	-64,8	2,4072	-0,0667	0,0664
20	0,0735	0,0297	-68,4	2,4736	--	--

**a) Ponto de operação na parte superior da curva**

Considerando os valores de  $k=8$  na Tabela 2.2:

$$\Delta P_1^k = \boxed{+} \left[ V_1^k \cdot \Delta I_1^k \right] + \boxed{-} \left[ I_1^k \cdot \Delta V_1^k + \Delta V_1^k \cdot \Delta I_1^k \right] = +0,0489 \text{ pu}$$

onde os sinais + e - sobre a fórmula indicam se o termo é, respectivamente, positivo ou negativo.

A potência transmitida aumenta ( $\Delta P_1^k > 0$ ) até um certo máximo carregamento enquanto o efeito de variações positivas do módulo da corrente  $\Delta I_1^k > 0$  predominarem sobre as variações negativas do módulo da tensão  $\Delta V_1^k < 0$  e de tal forma que:

$$\left| V_1^k \cdot \Delta I_1^k \right| > \left| I_1^k \cdot \Delta V_1^k + \Delta V_1^k \cdot \Delta I_1^k \right|.$$

Então, no ponto  $k+1=9$ ,  $P_1^9 = P_1^8 + \Delta P_1^8 = +0,8984$  pu, o que confere com o valor mostrado para  $k=9$  na Tabela 2.2.

### b) Ponto de operação na parte inferior da curva

Considerando os valores para  $k=14$  na Tabela 2.2:

$$\Delta P_1^k = \overset{+}{[V_1^k \cdot \Delta I_1^k]} + \overset{-}{[I_1^k \cdot \Delta V_1^k + \Delta V_1^k \cdot \Delta I_1^k]} = -0,0811 \text{ pu}$$

A potência transmitida diminui ( $\Delta P_1^k < 0$ ) a partir de um certo máximo carregamento devido ao efeito das variações negativas do módulo da tensão  $\Delta V_1^k < 0$  predominarem sobre as variações positivas da corrente  $\Delta I_1^k > 0$  e de tal forma que:  $[V_1^k \cdot \Delta I_1^k] < [I_1^k \cdot \Delta V_1^k + \Delta V_1^k \cdot \Delta I_1^k]$ .

Então, no ponto  $k+1=15$ ,  $P_1^{15} = P_1^{14} + \Delta P_1^{14} = +0,7318 \text{ pu}$ , que confere com o valor mostrado para  $k=15$  na Tabela 2.2.

Mostrou-se analítica e numericamente que a potência ativa consumida na carga aumenta, atinge um máximo e passa a diminuir.

## 2.4 A Introdução de um Capacitor Pode Diminuir a Tensão

Analisa-se porque, quando se conecta um capacitor ( $Z_c = -9,025j$ ) em paralelo com a carga, a tensão aumenta quando o ponto de operação está na região superior da curva para  $P$  constante, enquanto que a tensão diminui quando o ponto de operação está na região inferior da curva. Nas Figuras 2.5 e 2.6 são mostrados os circuitos sem e com capacitor respectivamente, que serão utilizados nesta análise.

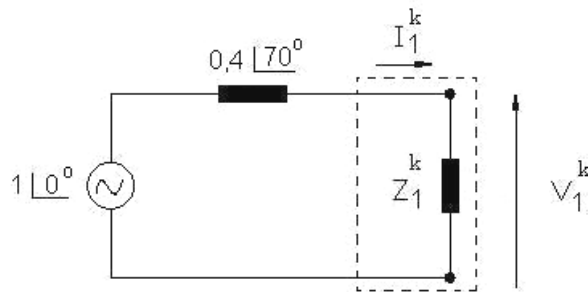


Figura 2.5 - Circuito sem Capacitor

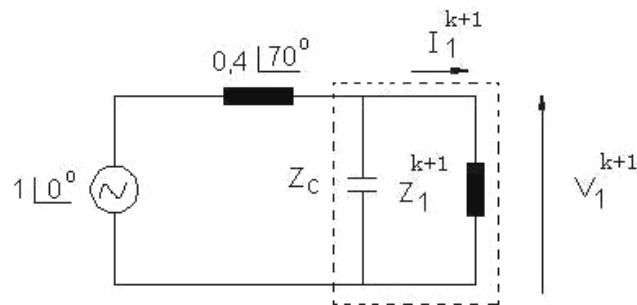


Figura 2.6 - Circuito com Capacitor

Analisa-se de forma gráfica através das Figuras 2.7 e 2.8 o que acontece quando chavea-se um capacitor na curva para  $P_1^k = 0,8$  pu constante, tanto na região superior como inferior da curva.

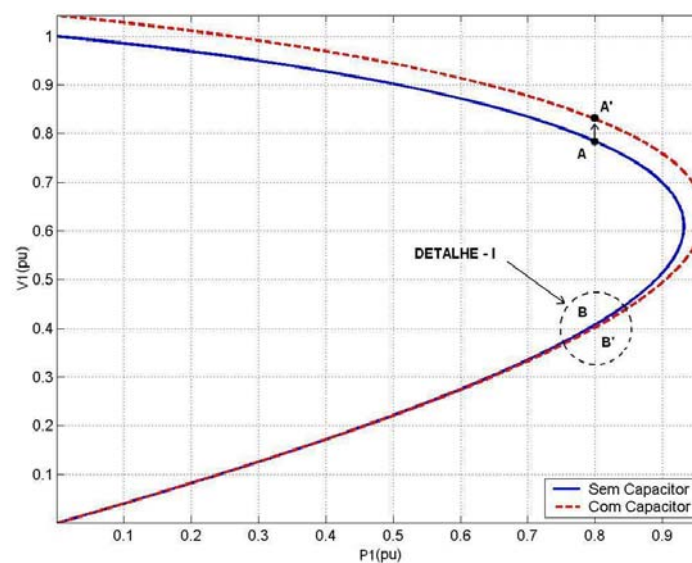


Figura 2.7 - Aumento e Diminuição da Tensão Respectivamente na Região Superior e Inferior da Curva com a Introdução de um Capacitor

A Figura 2.8 mostra em detalhe o que acontece na região inferior da curva quando se conecta um capacitor.

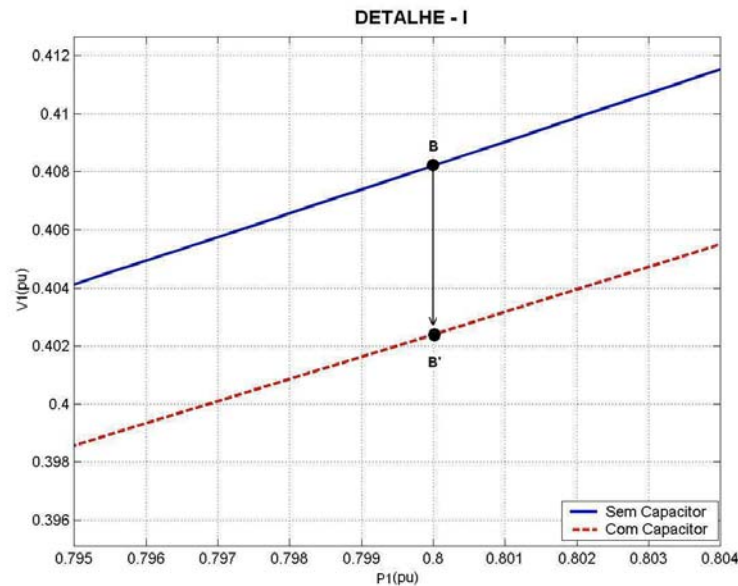


Figura 2.8 - Diminuição da Tensão na Região Inferior da Curva com a Introdução de um Capacitor

Na região superior da curva quando se passa do ponto A da curva sem capacitor para o ponto A' com capacitor, a tensão aumenta (Figura 2.7) e para manter constante a potência, a corrente que flui pela carga tem que diminuir:  $P_1 = \uparrow V_1 \cdot \downarrow I_1 \cdot \cos \phi$ . Na região inferior da curva acontece o efeito contrário quando se passa do ponto B da curva sem capacitor para o ponto B' com capacitor, isto é, a tensão diminui (Figura 2.8) e para manter a potência constante, a corrente que flui pela carga tem que aumentar:  $P_1 = \downarrow V_1 \cdot \uparrow I_1 \cdot \cos \phi$ .

O objetivo agora é explicar esse comportamento de forma analítica. Define-se a potência elétrica consumida na carga em um ponto "k" e em outro ponto "k+1" que representam pontos de operação em curvas PxV diferentes:

O modelo de carga é potência constante e, portanto, de (2.50) e (2.51) tem-se:

$$P_1^k = P_1^{k+1} \quad (2.58)$$

$$(Z_1^k) \cdot (I_1^k)^2 \cdot \cos \phi = (Z_1^k + \Delta Z_1^k) \cdot (I_1^k + \Delta I_1^k)^2 \cdot \cos \phi \quad (2.59)$$



Há uma diferença entre a impedância equivalente da carga sem e com capacitor ( $\Delta Z_1^k$ ) porque a carga deve consumir a mesma quantidade de potência ativa sem e com capacitor.

As tensões na carga em um ponto “k” e em outro ponto “k+1”, onde os termos  $Z_1^k$ ,  $I_1^k$ ,  $\Delta Z_1^k$  e  $\Delta I_1^k$  satisfazem (2.59), podem -ser escritas como:

$$V_1^k = Z_1^k \cdot I_1^k \quad (2.60)$$

$$V_1^{k+1} = (Z_1^k + \Delta Z_1^k) \cdot (I_1^k + \Delta I_1^k) \quad (2.61)$$

A variação do módulo da tensão na carga pode ser calculada subtraindo a tensão entre os pontos “k+1” e “k”:

$$\Delta V_1^k = V_1^{k+1} - V_1^k \quad (2.62)$$

$$\Delta V_1^k = [I_1^k \cdot \Delta Z_1^k] + [Z_1^k \cdot \Delta I_1^k + \Delta Z_1^k \cdot \Delta I_1^k] \quad (2.63)$$

Para exemplificar como funciona (2.63) e poder explicar o aumento ou decréscimo da tensão na carga, com a introdução de um capacitor, consideram-se dois pontos de operação da Tabela 2.3.

Tabela 2.3 - Pontos de Operação para Avaliar o Aumento ou Decréscimo da Tensão com a Introdução de um Capacitor

Na Região Superior da Curva								
$P_1^k$ (pu)	Curva sem Capacitor			Curva com capacitor			$\Delta Z_1^k$ (pu)	$\Delta I_1^k$ (pu)
	$V_1^k$ (pu)	$Z_1^k$ (pu)	$I_1^k$ (pu)	$V_1^{k+1}$ (pu)	$Z_1^{k+1}$ (pu)	$I_1^{k+1}$ (pu)		
0,1	0,9852	9,6253	0,1023	1,0279	10,4386	0,0984	0,8133	-0,0038
0,5	0,9023	1,6292	0,5538	0,9437	1,7804	0,5300	0,1511	-0,0237
0,8	0,7834	0,7666	1,0219	0,8293	0,8591	0,9653	0,0925	-0,0566
Na Região Inferior da Curva								
$P_1^k$ (pu)	Curva sem Capacitor			Curva com capacitor			$\Delta Z_1^k$ (pu)	$\Delta I_1^k$ (pu)
	$V_1^k$ (pu)	$Z_1^k$ (pu)	$I_1^k$ (pu)	$V_1^{k+1}$ (pu)	$Z_1^{k+1}$ (pu)	$I_1^{k+1}$ (pu)		
0,1	0,0406	0,0165	2,4635	0,0399	0,0162	2,4642	-0,0003	0,0008
0,5	0,2219	0,0984	2,2552	0,2209	0,0976	2,2616	-0,0007	0,0065
0,8	0,4084	0,2084	1,9593	0,4026	0,2026	1,9882	-0,0059	0,0289

**a) Ponto de operação na parte superior da curva**

Considerando os valores para  $P_1^k = +0,8$  pu da Tabela 2.3:

$$\Delta V_1^k = \boxed{[I_1^k \cdot \Delta Z_1^k]}^+ + \boxed{[Z_1^k \cdot \Delta I_1^k + \Delta Z_1^k \cdot \Delta I_1^k]}^- = +0,04587 \text{ pu}$$

onde os sinais + e - sobre a fórmula indicam se o termo é, respectivamente, positivo ou negativo.

A elevação da tensão ( $\Delta V_1^k > 0$ ) acontece enquanto o efeito de variações positivas do módulo da impedância de carga  $\Delta Z_1^k > 0$  predominarem sobre as variações negativas do módulo da corrente de carga  $\Delta I_1^k < 0$  e de tal forma que:  $[I_1^k \cdot \Delta Z_1^k] > [Z_1^k \cdot \Delta I_1^k + \Delta Z_1^k \cdot \Delta I_1^k]$ .

Então, no ponto  $k+1$ ,  $V_1^{k+1} = V_1^k + \Delta V_1^k = +0,8293$  pu, o que confere com o valor mostrado na Tabela 2.3. Portanto, a tensão aumenta quando chavea-se um capacitor.

**b) Ponto de operação na parte inferior da curva**

Considerando os valores para  $P_1^k = +0,8$  pu da Tabela 2.3:

$$\Delta V_1^k = \boxed{[Z_1^k \cdot \Delta I_1^k]}^+ + \boxed{[I_1^k \cdot \Delta Z_1^k + \Delta Z_1^k \cdot \Delta I_1^k]}^- = -0,00575 \text{ pu}$$

A redução da tensão ( $\Delta V_1^k < 0$ ) acontece enquanto o efeito de variações negativas do módulo da impedância de carga  $\Delta Z_1^k < 0$  predominarem sobre as variações positivas do módulo da corrente de carga  $\Delta I_1^k > 0$  e de tal forma que:  $[Z_1^k \cdot \Delta I_1^k] < [I_1^k \cdot \Delta Z_1^k + \Delta Z_1^k \cdot \Delta I_1^k]$ .

Então, no ponto  $k+1$ ,  $V_1^{k+1} = V_1^k + \Delta V_1^k = +0,4026$  pu, o que confere com o valor mostrado na Tabela 2.3. Portanto, a tensão diminui quando chavea-se um capacitor.

Mostrou-se analítica, gráfica e numericamente que a tensão sobe quando chavea-se um capacitor na região superior da curva e diminui quando se faz na região inferior da curva.

## 2.5 Saturação da Elevação da Tensão com a Introdução de Muitos Capacitores

Na Figura 2.9 são mostradas várias curvas para  $\phi$  constante no plano PxV. Cada uma delas corresponde a diferentes capacitores instalados e ao mesmo fator de potência na carga (no caso, unitário). Trabalha-se com as reatâncias dos capacitores em pu. Os valores dos bancos de capacitores em MVar corresponde às suas produções reativas quando a tensão sobre eles é 1 pu. Nota-se na figura que, à medida que são introduzidos novos capacitores:

- a partir de 0 MVar, a parte superior da curva "sobe" para níveis de tensão mais altos, enquanto que a parte inferior da curva "desce" para níveis de tensão mais baixos.
- esse comportamento se mantém até que a compensação reativa atinge 212 MVar.
- a partir de 212 MVar, o comportamento se inverte, a parte superior da curva "desce" para níveis de tensão mais baixos, enquanto que a parte inferior da curva "sobe" para níveis de tensão mais altos.

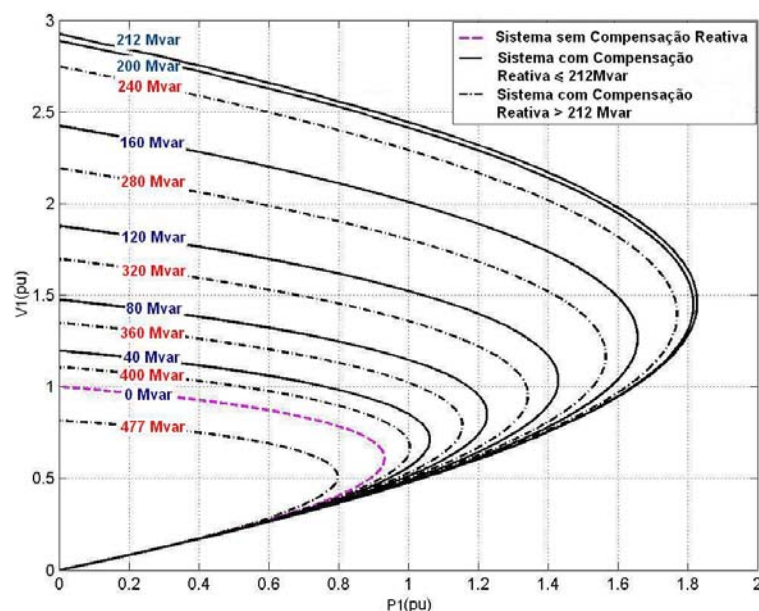


Figura 2.9 - Efeito da Introdução de Muitos Capacitores sobre a Tensão

Na Figura 2.10 estão mostradas as curvas para  $\phi$  constante sem e com compensação reativa de acordo com (2.31) e (2.39) respectivamente, e a curva para  $P$  constante ( $P_1=0,8$  pu) de acordo com (2.40). Os valores de compensação reativa usados nas curvas da Figura 2.9 foram mantidos. A carga também se mantém com fator de potência unitário.

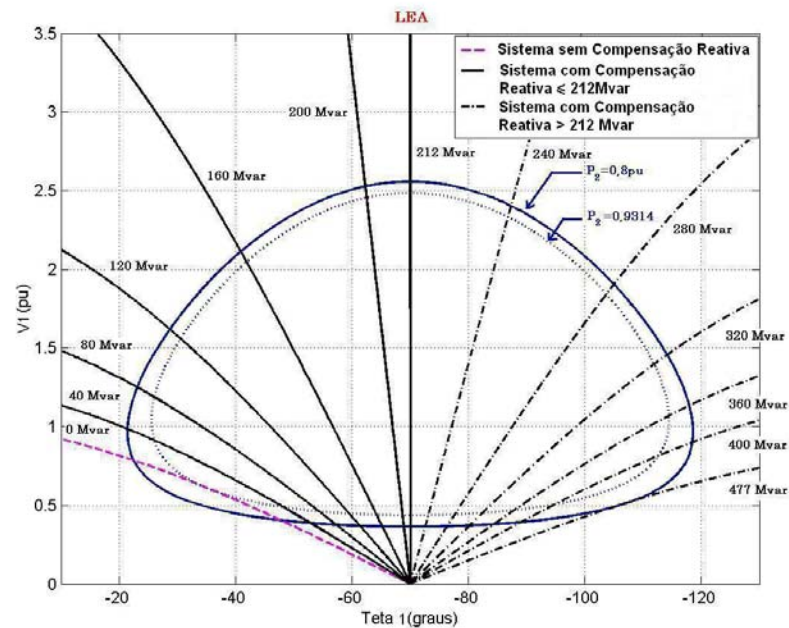


Figura 2.10 - Curvas para  $\phi$  Constante e para  $P$  Constante

Verifica-se na Figura 2.10 que a curva para  $\phi$  constante quando a compensação reativa é igual a 212 MVar coincide exatamente com a curva vertical correspondente ao limite de estabilidade estática angular (ver Apêndice A). Logo, os pontos de operação à direita da reta vertical correspondente à compensação de 212 MVar são instáveis do ponto de vista angular. E ainda, o comportamento da tensão com a conexão de capacitores se inverte quando o ponto de operação está sobre o limite de estabilidade estática angular.

Para explicar a saturação da elevação da tensão na carga para  $P$  constante através de (2.63), com a introdução de muitos capacitores, consideram-se dois pontos de operação da Tabela 2.4.

Tabela 2.4 - Pontos de Operação para Avaliar a Saturação da Elevação da Tensão

Região Superior da Curva								
k	Compensação (MVar)	$P_1^k$ (pu)	$V_1^k$ (pu)	$Z_1^k$ (pu)	$I_1^k$ (pu)	$Q_1^k$ (pu)	$\Delta Z_1^k$ (pu)	$\Delta I_1^k$ (pu)
1	0	0,8	0,7846	0,7706	1,0181	0	0,4393	-0,2052
2	40	0,8	0,9836	1,2099	0,8129	-0,4288	0,7341	-0,1711
3	80	0,8	1,2476	1,9440	0,6418	-1,3798	1,3303	-0,1475
4	120	0,8	1,6184	3,2743	0,4943	-3,4833	2,2847	-0,1147
5	160	0,8	2,1104	5,5590	0,3796	-7,8958	2,5071	-0,0659
6	200	0,8	2,5303	8,0661	0,3137	-14,1877	0,2070	-0,0041
7	212	0,8	2,5613	8,2731	0,3096	-15,4075	-1,0700	0,0238
8	240	0,8	2,4014	7,2031	0,3334	-15,3336	-2,6626	0,0860
9	280	0,8	1,9042	4,5405	0,4194	-11,2497	-1,8894	0,1296
10	320	0,8	1,4556	2,6511	0,5490	-7,5121	-1,0502	0,1581
11	360	0,8	1,1319	1,6009	0,7071	-5,1108	-0,5925	0,1835
12	400	0,8	0,8981	1,0084	0,8906	-3,5749	-0,6814	0,6721
14	477	0,8	0,5111	0,3270	1,5627	-1,3804	--	--

#### a) Elevação da tensão na parte superior da curva

Considerando os valores para k=6 da Tabela 2.4:

$$\Delta V_1^k = \overset{+}{[I_1^k \cdot \Delta Z_1^k]} + \overset{-}{[Z_1^k \cdot \Delta I_1^k + \Delta Z_1^k \cdot \Delta I_1^k]} = +0,0310 \text{ pu}$$

onde os sinais + e - sobre a fórmula indicam se o termo é, respectivamente, positivo ou negativo.

A elevação da tensão ( $\Delta V_1^k > 0$ ) acontece enquanto o efeito de variações positivas do módulo da impedância de carga  $\Delta Z_1^k > 0$  predominarem sobre as variações negativas do módulo da corrente de carga  $\Delta I_1^k < 0$  e de tal forma que:  $[I_1^k \cdot \Delta Z_1^k] > [Z_1^k \cdot \Delta I_1^k + \Delta Z_1^k \cdot \Delta I_1^k]$ .

Então, no ponto k+1=7,  $V_1^7 = V_1^6 + \Delta V_1^6 = +2,5613$  pu, o que confere com o valor mostrado na sétima linha da Tabela 2.4. Portanto, a tensão aumenta quando chavea-se um capacitor.

#### b) Redução da tensão na parte superior da curva

Considerando os valores para k=7 da Tabela 2.4:

$$\Delta V_1^k = \boxed{[Z_1^k \cdot \Delta I_1^k]} + \boxed{[I_1^k \cdot \Delta Z_1^k + \Delta Z_1^k \cdot \Delta I_1^k]} = -0,1599 \text{ pu}$$

A redução da tensão ( $\Delta V_1^k < 0$ ) acontece enquanto o efeito de variações negativas do módulo da impedância de carga  $\Delta Z_1^k < 0$  predominarem sobre as variações positivas do módulo da corrente de carga  $\Delta I_1^k > 0$  e de tal forma que:  $[Z_1^k \cdot \Delta I_1^k] < [I_1^k \cdot \Delta Z_1^k + \Delta Z_1^k \cdot \Delta I_1^k]$ .

Então, no ponto  $k+1=8$ ,  $V_1^8 = V_1^7 + \Delta V_1^7 = +2,4014 \text{ pu}$ , o que confere com o valor mostrado na oitava linha da Tabela 2.4. Portanto, a tensão diminui quando chavea-se um capacitor.

Mostrou-se gráfica, analítica e numericamente que, mesmo na região superior da curva para P constante, um excesso de capacitores pode fazer com que a tensão diminua, ao invés de aumentar. No entanto, a região onde isso ocorre coincide com a região onde os pontos de operação são instáveis do ponto de vista angular.

Mostrou-se graficamente que, na região inferior da curva para P constante, um excesso de capacitores pode fazer com que a tensão aumente, ao invés de diminuir. A região onde isso ocorre também coincide com a região onde os pontos de operação são instáveis do ponto de vista angular.

## 2.6 Índices de Avaliação das Condições de Segurança de Tensão

O objetivo é identificar se a solução de tensão para uma carga conectada à barra i está na parte superior, na inferior e a distância à “ponta do nariz” da curva  $V \times P, Q$ . A “ponta do nariz” corresponde à máxima quantidade de potência ativa e reativa que pode ser transmitida à carga ou a partir de um gerador. O carregamento da rede de transmissão é representado por condições nodais associadas ao máximo fluxo de potência ativa e reativa que pode ser transmitida dos geradores para as cargas. Desenvolve-se uma ferramenta analítica de avaliação dessas condições nodais com base em modelo matemático simples, mas poderoso, de uma interpretação física direta do fenômeno. Índices abrangentes e significativos de avaliação são deduzidos [Prada R.B., Palomino E.G.C., dos Santos J.O.R., Bianco A., Pilotto L.A.S., 2002].

O sistema linearizado das equações estáticas de fluxo de carga é:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Colocando as equações e variáveis relacionadas com a barra em análise para baixo, fica:

$$\begin{bmatrix} \Delta P' \\ \Delta Q' \\ \vdots \\ \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta' \\ \Delta V' \\ \vdots \\ \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

As sub-matrizes A, B, C e D são as partições da matriz Jacobiano [J], onde:

A - representa a matriz Jacobiana original do sistema, excluindo as linhas e colunas referentes à barra em análise.

B - representa as derivadas das equações de potência ativa e reativa do sistema em relação às variáveis dependentes da barra em estudo.

C - representa as derivadas das equações de potência ativa e reativa da barra em análise em relação às outras variáveis dependentes do sistema.

D - representa as derivadas das equações de potência ativa e reativa da barra em análise em relação às suas próprias variáveis dependentes.

Assume-se uma variação infinitesimal de carga ou geração  $\nabla P_i$  e  $\nabla Q_i$  somente para a barra i de um sistema multi-nó, isto equivale a  $\nabla P' = \nabla Q' = 0$ . As relações de sensibilidade entre as injeções de potência ativa e reativa e a magnitude e o ângulo da tensão na barra i, levando em consideração o restante do sistema pode ser avaliadas por:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} = [D'] \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$$[D'] = [D] - [C] \cdot [A^{-1}] \cdot [B] \quad (2.67)$$

$D'$  - relaciona  $P_i$ ,  $Q_i$ , com  $\theta_i$  e  $V_i$ , levando em consideração o restante do sistema. Tem dimensão  $2 \times 2$ . No sistema multi-nó:  $D' \neq D \neq J$

É demonstrado que o sinal do determinante e a magnitude da matriz  $[D']$  indicam respectivamente, a região de operação e a distância ao máximo carregamento.

## 2.6.1 Magnitude do Determinante da Matriz $[D']$

### 2.6.1.1 Sistema Duas Barras

Em um sistema de duas barras o fluxo de potência que chega na barra  $i$  é igual à carga consumida. Considerando  $k$  como uma barra de geração o determinante da matriz  $[D']$  é calculado por:

$$\det[D'] = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} * \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} - \frac{\partial P_i}{\partial V_i} * \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \quad (2.68)$$

onde:

$$P_i = V_i^2 G_{ii} + V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad (2.69)$$

$$Q_i = -V_i^2 B_{ii} + V_i V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad (2.70)$$

Resolvendo (2.69) e (2.70) em (2.68), obtém-se:

$$\begin{aligned} \det[D'] = & -V_i V_k^2 (G_{ik}^2 + B_{ik}^2) + 2V_i^2 B_{ii} (V_k G_{ik} \sin \theta_{ik} - V_k B_{ik} \cos \theta_{ik}) \\ & - 2V_i^2 G_{ii} (V_k G_{ik} \cos \theta_{ik} + V_k B_{ik} \sin \theta_{ik}) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Fazendo  $Y_{ik}^2 = (G_{ik}^2 + B_{ik}^2)$  e multiplicando ambos os lados de (2.71) por  $V_i$ :

$$\begin{aligned} \det[D'] V_i = & -[V_i V_k Y_{ik}]^2 + 2V_i^2 B_{ii} [V_i V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik})] \\ & - 2V_i^2 G_{ii} [V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik})] \end{aligned} \quad (2.72)$$



Por outro lado, a potência aparente injetada na barra  $i$  é dada por  $S_i = P_i + jQ_i$ . De (2.69) e (2.70):

$$\begin{aligned} S_i^2 = P_i^2 + Q_i^2 = V_i^4 \cdot (G_{ii}^2 + B_{ii}^2) \\ + V_i^2 \cdot V_k^2 \cdot Y_{ik}^2 + 2V_i^2 G_{ii} V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \\ - 2V_i^2 B_{ii} V_i V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Fazendo  $S_{io} = V_i^2 \cdot Y_{ii}$  e comparando (2.72) e (2.73) obtém-se finalmente:

$$\det[D'] V_i = S_{io}^2 - S_i^2 \quad (2.74)$$

O resultado obtido é muito importante para o estudo do carregamento da rede. O termo  $S_{io}^2$  é função do elemento diagonal da matriz admitância de barra e do módulo da tensão na barra  $i$ . Supondo a tensão constante na barra  $i$  e aumentando gradualmente o valor da potência injetada  $S_i$ , o máximo será alcançado quando  $S_i^2$  for igual a  $S_{io}^2$  fazendo com que o produto  $\det[D'] V_i$  seja igual a zero.

Dessa forma, pode-se dizer que para um sistema de duas barras:

- $S_i$  é a potência injetada na barra  $i$  no ponto de operação em análise.
- $S_{io}$  é a máxima potência que pode ser injetada na barra  $i$  (dado por  $S_{io} = V_i^2 \cdot Y_{ii}$ ).
- $\det[D'] V_i$  é o indicador da distância de  $S_i^2$  a  $S_{io}^2$ .

### 2.6.1.2 Sistema Multi-Nó

Um importante resultado obtido para um sistema de duas barras agora é estendido ao sistema multi-nó. Seja  $[D]$  a matriz que relaciona linearmente as injeções de potência ativa e reativa ao ângulo e módulo da tensão na barra  $i$ :

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} & \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} & \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & u \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

seja:

$$[-C.A^{-1}.B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Usando (2.75) e (2.76) em (2.67):

$$\det[D'] = \det \left[ \begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \right] \quad (2.77)$$

$$\det[D'] = [x.u - y.z] + [x.b_4 - y.b_3] + [b_1.u - b_2.z] + [b_1.b_4 - b_2.b_3] \quad (2.78)$$

De (2.75) tem-se:

$$\det[D] = [x.u - y.z] \quad (2.79)$$

Substituindo (2.79) em (2.78):

$$\det[D'] = \det[D] + [x.b_4 - y.b_3] + [b_1.u - b_2.z] + [b_1.b_4 - b_2.b_3] \quad (2.80)$$

O resultado obtido para um sistema de duas barras, onde  $[D'] \equiv [D]$ , aqui repetido para comodidade,  $\det[D]V_i = S_{io}^2 - S_i^2$  pode ser estendido. Multiplicando-se ambos lados de (2.80) por  $V_i$ , fica na forma:

$$\det[D']V_i = \det[D]V_i - S_{is}^2 \quad (2.81)$$

onde:

$$S_{is}^2 = -V_i \{ [x.b_4 - y.b_3] + [b_1.u - b_2.z] + [b_1.b_4 - b_2.b_3] \} \quad (2.82)$$

ou

$$\det[D']V_i = S_{i0}^2 - S_i^2 - S_{is}^2 \quad (2.83)$$

O novo termo  $S_{is}^2$  pode ser obtido de (2.81):

$$S_{is}^2 = (\det[D] - \det[D']) \cdot V_i \quad (2.84)$$

Dessa forma, pode-se dizer que para um sistema multi-nó:

- $S_i$  é a potência injetada na barra  $i$  no ponto de operação em análise.
- $S_{i0}$  é a máxima potência que poderia ser injetada para a barra  $i$ , caso o sistema fosse de duas barras (dado por  $S_{i0} = V_i^2 \cdot Y_{ii}$ ).
- $S_{is}^2$  está relacionada à potência injetada no restante do sistema que limita a injeção de potência na barra  $i$  (dado por  $S_{is}^2 = (\det[D] - \det[D']) \cdot V_i$ ).
- $S_m^2 = S_{i0}^2 - S_{is}^2$  é definida como a máxima potência que poderia ser injetada na barra  $i$ .

### 2.6.2 Sinal do Determinante da Matriz $[D']$

Os vetores gradiente de potência ativa e reativa podem ser escritos como:

$$\dot{V}P = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \cdot \vec{i} + \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \quad \text{e} \quad \dot{V}Q = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \cdot \vec{i} + \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \quad (2.85)$$

onde  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  são vetores de uma base ortonormal.

O produto vetorial é:

$$\dot{V}P \times \dot{V}Q = \left[ \left( \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \right) - \left( \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \right) \right] \cdot \vec{k} \quad (2.86)$$

Substituindo (2.68) em (2.86):

$$\dot{V}P \times \dot{V}Q = \det[D'] \quad (2.87)$$

como:

$$\dot{V}P \times \dot{V}Q = |\dot{V}P| \cdot |\dot{V}Q| \cdot \text{sen}(\beta) \quad (2.88)$$

Onde  $\beta$  é o ângulo entre  $\dot{V}P$  e  $\dot{V}Q$ . Também:

$$\det[D'] = |\dot{V}P| \cdot |\dot{V}Q| \cdot \text{sen}(\beta) \quad (2.89)$$

Como o sinal de  $\det[D']$  é função somente de  $\beta$ , tem-se:

$$\det[D'] > 0 \text{ se } \text{sen}(\beta) > 0, \rightarrow 0^\circ < \beta < 180^\circ$$

$$\det[D'] < 0 \text{ se } \text{sen}(\beta) < 0, \rightarrow 0^\circ > \beta > -180^\circ$$

$$\det[D'] = 0 \text{ se } \text{sen}(\beta) = 0, \rightarrow \beta = \pm 180^\circ, \beta = 0^\circ$$

Observa-se na Figura 2.11 que, tomando  $\dot{V}P_i$  como eixo de referência, na região superior da curva  $VxP,Q$  sempre ocorre  $0^\circ < \beta < 180^\circ$  e na região inferior da mesma curva sempre ocorre  $0^\circ < \beta < -180^\circ$ . No ponto máximo, os vetores gradientes  $\dot{V}P_i$  e  $\dot{V}Q_i$  estão alinhados, e então o ângulo  $\beta$  formado por esses dois vetores é  $\pm 180^\circ$  e também  $\beta = 0^\circ$  devido à ocorrência numérica.

Portanto,  $\det[D'] > 0$  caracteriza a parte superior da curva  $VxP,Q$  e  $\det[D'] < 0$  caracteriza a parte inferior da mesma curva, enquanto que  $\det[D'] = 0$  caracteriza a fronteira entre essas duas regiões, isto é, a “ponta do nariz”.

É ainda, é fácil perceber que o ângulo  $\beta$  pode complementar a avaliação do carregamento da rede, indicando a região de operação e a distância angular até o máximo.

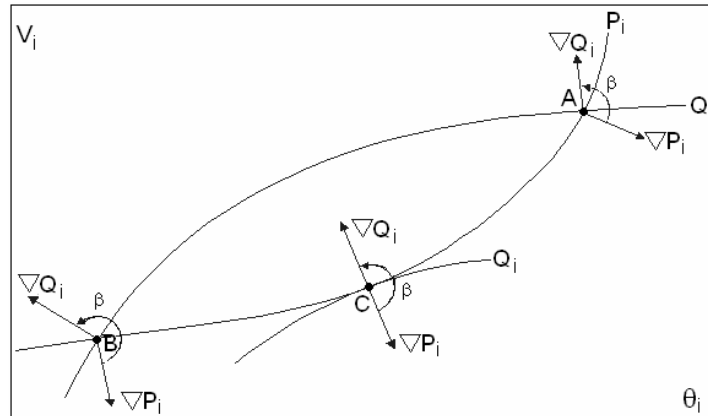


Figura 2.11 - Localização do Vetor Gradiente de  $P_i$  e  $Q_i$  no Plano  $V \times \theta$

### 2.6.3 Margem de Potência

O valor  $(S_m - S_i)$  é a diferença de potência em MVA entre a potência que está sendo injetada e a máxima potência estimada para o ponto de operação em análise. O problema de interpretação do tamanho do índice é resolvido usando-se  $S_i$  e  $S_m$ . A margem é grande ou pequena? Pode ser grande em uma barra e pequena para outra. Por exemplo, se  $S_m = 10$  e  $S_i = 1$ , então, a margem é 9 vezes o que está sendo injetado. Se, por outro lado,  $S_i = 99$  e  $S_m = 100$ , então a margem é aproximadamente 0,01 do que está sendo injetado.

Na região superior da curva  $V \times P, Q$  da Figura 2.12, a margem de potência  $(S_m - S_i)$  é um valor positivo e deve ser lido como a quantidade em MVA que poderia ser "adicionada" a  $S_i$  para atingir a estimativa do máximo  $S_m$ . Pode-se definir uma margem em pu ou em percentual. Esta margem será igual à unidade quando a potência injetada na barra  $i$  é nula ( $S_i = 0$ ), e tende a zero à medida que a injeção tende ao valor máximo ( $S_i = S_m$ ). Esta margem é definida como:

$$M = \left( \frac{S_m - S_i}{S_m} \right) = \left( 1 - \frac{S_i}{S_m} \right) \text{ em pu de } S_m, \text{ ou} \quad (2.90)$$

$$M = \left( \frac{S_m - S_i}{S_m} \right) = \left( 1 - \frac{S_i}{S_m} \right) \times 100 \% \text{ em percentual de } S_m \quad (2.91)$$

Na região inferior da curva  $V \times P, Q$  da Figura 2.12, a margem de potência  $(S_m - S_i)$  é um valor negativo e deve ser lido como a quantidade em MVA que deveria ser "retirada" de  $S_i$  para atingir a estimativa do máximo  $S_m$ . Pode-se definir uma margem em pu ou em

percentual. Esta margem será igual a zero quando a injeção na barra  $i$  é máxima ( $S_i = S_m$ ) e tende a -1 quando  $S_m$  tende a zero. Esta margem é definida como:

$$M = \left( \frac{S_m - S_i}{S_i} \right) = \left( \frac{S_m}{S_i} - 1 \right) \text{ em pu de } S_i, \text{ ou} \quad (2.92)$$

$$M = \left( \frac{S_m - S_i}{S_i} \right) = \left( \frac{S_m}{S_i} - 1 \right) \times 100 \% \text{ em percentual de } S_i \quad (2.93)$$

No ponto de operação correspondente ao máximo carregamento,  $(S_m - S_i)$  é nulo e, portanto, não há nada a adicionar ou retirar de  $S_i$  para atingir  $S_m$ .

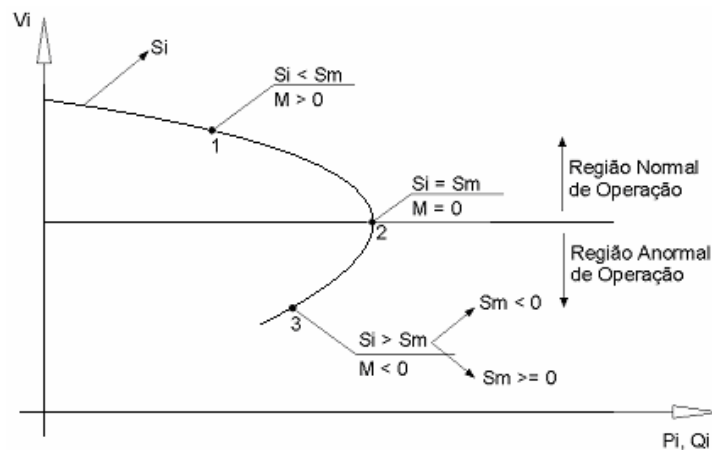


Figura 2.12 - Sinal da Margem na Curva VxS

Em sistemas multi-nó pode acontecer que na região inferior da curva VxP,Q, além da margem ser negativa, esta estiver abaixo de -100 % em alguns casos (quando  $S_m < 0$  isto implica que  $M < -100\%$ ), [França, R.F., dos Santos, J.O.R., Prada, R.B., Ferreira, L.C.A., Bianco, A., 2003]. De acordo com a definição,  $S_m^2$  é negativo se  $S_{io}^2 < \Delta \det.V_i$  e isso pode acontecer devido a:

- Se o termo  $S_{io}^2 = V_i^4 \cdot Y_{ii}^2$  for pequeno, significa que o módulo da tensão ou o elemento diagonal da matriz admitância da barra são pequenos.
- Se o termo  $\Delta \det.V_i = (\det[D] - \det[D']) \cdot V_i$  for grande, significa principalmente que  $\det[D'] \cdot V_i < 0$ .