



**Matheus Amaral Mendes Freitas**

**Controle Não-Linear de Trajetórias de um  
Sistema Sub-Atuado com Pêndulo Invertido**

**Projeto de Graduação**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Marco Antônio Meggiolaro

Rio de Janeiro  
Junho de 2023

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por força e sabedoria, que estiveram presentes em cada etapa dessa jornada acadêmica. Gostaria de estender minha profunda gratidão à minha mãe, Ana Cristina Amaral, cujo amor incondicional, apoio incansável e encorajamento constante foram pilares essenciais para meu sucesso. Também quero expressar minha gratidão ao meu irmão, Pedro Amaral, cujo apoio, compreensão e paciência ao longo desses anos foram uma fonte constante de motivação, e sou grato por compartilharmos essa jornada juntos.

Agradeço à minha namorada Emilly Alves por seu amor, apoio incondicional e compreensão ao longo de todo o processo de realização deste trabalho. Sua presença constante, encorajamento e paciência foram um verdadeiro sustento durante os desafios acadêmicos. Sou profundamente grato por ter você ao meu lado, compartilhando essa jornada e sendo minha fonte de motivação.

Devo uma imensa gratidão ao meu orientador, Marco Antonio Meggiolaro, cuja orientação, conhecimento e dedicação foram cruciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também ao meu amigo, Gabriel Fischer Abati, por suas valiosas contribuições, orientações dedicadas e paciência ao longo deste processo. Sua expertise e *insights* foram fundamentais para o aprimoramento deste trabalho.

À equipe da Riobotz, sou grato pela inspiração e paixão que despertaram pela engenharia. Seus conhecimentos compartilhados e ambiente estimulante foram essenciais para o desenvolvimento das habilidades técnicas e o aprofundamento do meu interesse na área.

Expresso minha profunda gratidão à instituição de ensino pela oportunidade de adquirir conhecimentos e habilidades que foram aplicados neste trabalho. Agradeço aos professores por compartilharem seu conhecimento, *insights* e dedicarem seu tempo para o meu crescimento acadêmico.

Agradeço aos meus colegas de turma e amigos que estiveram ao meu lado durante toda essa jornada, compartilhando desafios, aprendizados e momentos de descontração. Seu apoio mútuo, troca de ideias e encorajamento foram essenciais para manter a motivação e superar os desafios encontrados ao longo do caminho.

Por fim, meu mais sincero agradecimento a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para o sucesso deste trabalho. Seu apoio, colaboração e confiança foram fundamentais para alcançar esse resultado significativo. Estou verdadeiramente grato pela oportunidade de contar com pessoas tão incríveis ao meu redor.

## Resumo

### Controle Não-Linear de Trajetórias de um Sistema Sub-Atuado com Pêndulo Invertido

Este trabalho teve como objetivo principal o projeto e construção de uma bancada experimental para um sistema de pêndulo invertido. A ênfase foi dada aos aspectos mecânicos, visando garantir estabilidade e confiabilidade para futuras pesquisas na área de controle. A importância do aparato de testes se destaca como um elemento essencial para o sucesso deste trabalho. A bancada proporciona um ambiente confiável para a validação de modelos teóricos.

Foram explorados três métodos de controle: PID, LQR e Swing-up, comparando seu desempenho em termos de tempo de resposta, robustez e capacidade de lidar com distúrbios. Os resultados obtidos, analisados em comparação com dados experimentais e simulações, fornecem *insights* valiosos para o desenvolvimento de sistemas robóticos mais eficientes. Destaca-se a importância da integração entre o projeto mecânico, a bancada experimental e os algoritmos de controle para o sucesso do sistema de pêndulo invertido.

### Palavras-chave

Pêndulo Invertido; PID; LQR; Swing-up; Controle de Trajetória; SolidWorks; Bancada Experimental.

## **Abstract**

### **Nonlinear Control of Trajectories for an Underactuated System with an Inverted Pendulum**

This work aimed to design and construct an experimental setup for an inverted pendulum system. The emphasis was placed on mechanical aspects to ensure stability and reliability for future research in the field of control. The importance of the testing apparatus stands out as an essential element for the success of this work. The setup provides a reliable environment for validating theoretical models.

Three control methods were explored: PID, LQR, and Swing-up, comparing their performance in terms of response time, robustness, and disturbance handling capability. The obtained results, analyzed in comparison with experimental data and simulations, provide valuable insights for the development of more efficient robotic systems. The integration between mechanical design, the experimental setup, and control algorithms is highlighted as crucial for the success of the inverted pendulum system.

### **Keywords**

Inverted Pendulum; PID; LQR; Swing-up; Trajectory Control; SolidWorks; Experimental Bench.

# Sumário

1	Introdução	13
1.1	Revisão Bibliográfica	15
1.2	Objetivos	17
2	Modelagem do Pêndulo Invertido	19
2.1	Dinâmica do Sistema	19
2.2	Parâmetros Reais do Sistema	22
2.3	Função de Transferência	22
2.4	Análise do Sistema em Malha Aberta	23
2.5	Modelo de Espaço de Estados	24
2.6	Zero Order Hold	26
2.7	Modelagem Não Linear	27
3	Bancada Experimental	31
3.1	Bancada Experimental Original	32
3.2	Nova Bancada Experimental	33
3.3	Tecnologia de Impressão 3d FDM	34
3.4	Componentes Eletrônicos	36
3.4.1	Fonte de Alimentação	37
3.4.2	Sensor de Posição	38
3.4.3	Sensor de Fim de Curso	39
3.4.4	Hardware de Controle	39
3.4.5	Sistema de Atuação	41
3.5	Projeto Mecânico	42
3.5.1	Estrutura da Bancada	43
3.5.2	Base Sub-Atuada	44
3.6	Montagem Final	46
4	Controle	47
4.1	Controlabilidade	47
4.2	Observabilidade	48
4.3	Controlador PID	49
4.3.1	PID com feedback $\theta$ e $x$	50
4.3.2	Calibragem de Ganhos por Ackermann	50
4.4	Controlador LQR (Linear Quadratic Regulator)	51
4.4.1	Controle de Trajetória com LQR	54
4.5	Controlador Não-Linear de <i>Swing-Up</i>	54
5	Resultados	57
5.1	Resultados PID	57
5.2	Resultados LQR	58
5.2.1	LQR: Trajetória Ponto a Ponto	60
5.2.2	LQR: Trajetória Senoidal	62
5.2.3	LQR: Rejeição à Distúrbios	63

5.3	Resultados Swing-up	64
6	Conclusões	<b>67</b>
A	Datasheet do Filamento TPU da Empresa Slim3d	<b>70</b>
B	Datasheet do Filamento PETG da Empresa Slim3d	<b>71</b>

## Lista de figuras

1.1	O Problema do Cabo de Vassoura	13
1.2	Controle do Comportamento de Navios	14
1.3	Controle de Foguetes durante a Fase de Lançamento	14
1.4	Outras Aplicações para o Pêndulo Invertido	15
2.1	Esquema Simplificado do Pêndulo Invertido	19
2.2	Resposta ao Degrau em Malha Aberta	24
3.1	Exemplos de Bancadas Experimentais de Pêndulo Invertido	31
3.2	Bancada Desenvolvida por Abati (2020)	32
3.3	Montagem da Nova Bancada no SolidWorks	33
3.4	Impressora 3d Ender 3 v2 da Marca Creality	35
3.5	Diagrama de Blocos da Eletrônica da Bancada	36
3.6	Fonte de Alimentação Gophert CPS-6011	37
3.7	Fonte de Alimentação do Raspberry Pi 3B+	37
3.8	Sensor de Posição ( <i>encoder</i> ) CUI AMT102-V	38
3.9	Fixação do <i>encoder</i> no Motor para Medição da Posição $x$	38
3.10	Fixação do <i>encoder</i> no Pêndulo para Medição da Posição $\theta$	39
3.11	Sensor de Fim de curso da Creality	39
3.12	Microprocessador <i>Raspberry Pi 3B+</i>	40
3.13	Controlador ODrive v3.6	40
3.14	Motor ODrive modelo D6374 150kv	41
3.15	Motor ODrive montado na Case e Placa de Transferência	41
3.16	Sistema de Transmissão com Polias e Correia	42
3.17	Montagem Completa da Estrutura da Bancada	43
3.18	Processo de Usinagem do Perfil 20x20	44
3.19	Guia Ajustável com Rolamentos da Loja Forseti	44
3.20	Montagem completa da nova Base Projetada	45
3.21	Eixo do Pêndulo em Al6061-T6 e Pêndulo	45
3.22	Montagem Final da Bancada Experimental	46
4.1	Controle <i>Swing Up</i> e Zona de Estabilização	56
5.1	Resultados simulados com o controlador <i>PID</i> com <i>feedback</i> $\theta$ e $x$	57
5.2	Resultados experimentais com o controlador <i>PID</i> com <i>feedback</i> $\theta$ e $x$	58
5.3	Resultados simulados com o controlador <i>LQR</i> no Matlab	59
5.4	Resultados experimentais com o controlador <i>LQR</i>	60
5.5	Resultados simulados com o controlador <i>LQR</i> seguindo uma trajetória pontual	61
5.6	Resultados experimentais com o controlador <i>LQR</i> seguindo uma trajetória pontual	61
5.7	Resultados simulados com o controlador <i>LQR</i> seguindo uma trajetória senoidal	62

5.8	Resultados experimentais com o controlador <i>LQR</i> seguindo uma trajetória senoidal	63
5.9	Controlador LQR rejeitando distúrbios	64
5.10	Resultados simulados com o controlador <i>Swing-up</i> no Matlab	65
5.11	Resultados experimentais com o controlador <i>Swing-up</i>	65
5.12	Pêndulo Invertido sendo equilibrado pelos controladores <i>Swing-up</i> e LQR	66
A.1	Filamento PETG da Empresa Slim3d para Impressão FDM	70
B.1	Filamento PETG da Empresa Slim3d para Impressão FDM	71

## Lista de tabelas

2.1 Parâmetros do Sistema Real

22

## Lista de Abreviações

PID = Proportional Integrative Derivative

LQR = Linear Quadratic Regulator

CAD = Computer Aid Design

ZOH = Zero Order Hold

FDM = Fused Filament Fabrication

## Lista de Símbolos

$M$  = Massa da base (carrinho)

$m$  = Massa da Haste (pêndulo)

$l$  = Distância ao centro de massa da haste

$g$  = Aceleração da gravidade

$I$  = Momento de inércia da haste

$b$  = Coeficiente viscoso de amortecimento translacional da base

$x$  = Posição da base

$\theta$  = Ângulo da haste

$\dot{x}$  = Velocidade da base (carrinho)

$\dot{\theta}$  = Velocidade angular da haste

$f$  = Força aplicada na base (carrinho)

$\ddot{x}$  = Aceleração da base

$\ddot{\theta}$  = Aceleração angular da haste

$u$  = Resposta à lei de controle

$U$  = Vetor saída da lei de controle

$X$  = Vetor de variáveis de estados

$A$  = Matriz de estados do sistema contínuo

$B$  = Matriz de entrada do sistema contínuo

$C$  = Matriz de saída do sistema contínuo

$D$  = Matriz de alimentação do sistema contínuo

$\Phi$  = Matriz de estados do sistema discreto

$\Gamma$  = Matriz de entrada do sistema discreto

$H$  = Matriz de saída do sistema discreto

$J$  = Matriz de alimentação do sistema discreto

$\Psi$  = Função genérica não-linear

$\Upsilon$  = Função genérica não-linear

$F$  = Matriz jacobiana de  $\Psi$  em função de  $X$

$G$  = Matriz jacobiana de  $\Psi$  em função de  $U$

$H^*$  = Matriz jacobiana de  $\Upsilon$  em função de  $X$

$J^*$  = Matriz jacobiana de  $\Upsilon$  em função de  $U$

$Co$  = Matriz de controlabilidade do sistema

$Ob$  = Matriz de observabilidade do sistema

$J_{LQR}$  = Função de custo do controlador LQR

$K$  = Ganhos ótimos da lei de controle

$K^*$  = Ganhos do controle por Ackermann

$X_d$  = Vetor de estado desejado

$E_k$  = Energia cinética do sistema

$E_u$  = Energia potencial do sistema

# 1

## Introdução

O estudo e a pesquisa do pêndulo invertido sub-atuado constituem um desafio clássico e recorrente no campo da engenharia, sendo amplamente explorados em literatura especializada e em programas acadêmicos. O objetivo primordial desse sistema é investigar diversas metodologias de controle, com o intuito de demonstrar a eficácia e a robustez dos métodos diante das suas características intrinsecamente instáveis e não lineares (SILVA, 2017).

O pêndulo invertido, por sua natureza dinâmica e complexa, representa um objeto de estudo fascinante que desafia engenheiros e pesquisadores a desenvolverem técnicas avançadas de controle. Além disso, esse sistema desempenha um papel fundamental no estudo do controle de posição de sistemas instáveis, sendo considerado um exemplo paradigmático no ensino da teoria de controle, integrando conhecimentos interdisciplinares da área de mecatrônica. Amba (2015) sugere uma analogia intrigante ao afirmar que o controle da posição de um pêndulo invertido é análogo ao equilíbrio de um cabo de vassoura no dedo indicador, com movimento e controle restritos a uma única dimensão do espaço (como pode ser visto na Figura 1.1).

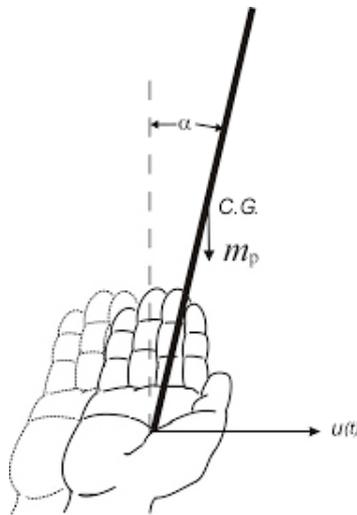


Figura 1.1: O Problema do Cabo de Vassoura

Fonte: Amba 2015

Em suma, o pêndulo invertido é um sistema de grande relevância no campo da engenharia, sendo amplamente estudado e utilizado como referência para o desenvolvimento e teste de algoritmos de controle em malha fechada. Através desse sistema, é possível investigar a eficácia e robustez de diferentes

metodologias de controle diante de suas características instáveis e não linearidades.

Devido à sua relevância, a análise e simulação do pêndulo invertido encontram ampla aplicação em uma variedade de áreas do conhecimento. Destacam-se, por exemplo, o controle do comportamento de navios sujeitos a oscilações forçadas provocadas pelo movimento de ondas (Figura 1.2)(RAHMAN; NAYFEH, 2003), o controle de posição de veículos espaciais durante a fase de lançamento (Figura 1.3)(OGATA, 2003), o controle da postura ereta natural de robôs bípedes (NAVES, 2006) e o controle de veículos autossustentáveis, como segways e hoverboards (Figura 1.4)(RIBEIRO, 2007) (ABATI, 2020).



Figura 1.2: Controle do Comportamento de Navios

Fonte: [clique aqui](#)



Figura 1.3: Controle de Foguetes durante a Fase de Lançamento

Fonte: SpaceX ([clique aqui](#))

Além disso, o controle em malha fechada, especialmente utilizando controladores clássicos como o PID, desempenha um papel fundamental no equilíbrio e estabilização do pêndulo invertido. Esse tipo de controlador, amplamente

utilizado na indústria, visa reduzir o erro entre a variável desejada e a variável adquirida pelos sensores, buscando levar esse erro a zero.



Figura 1.4: Outras Aplicações para o Pêndulo Invertido

Fonte: Boston Dynamics ([clique aqui](#)) e Mega Motion ([clique aqui](#))

Diante das motivações para o desenvolvimento deste trabalho, destaca-se a busca por adquirir e aprimorar os conhecimentos na área de controle de sistemas, assim como explorar as diversas alternativas de aplicação em pesquisas futuras.

Dessa forma, o estudo e desenvolvimento do pêndulo invertido apresentam um grande potencial para a formação acadêmica e profissional, preparando os estudantes para enfrentarem os desafios e demandas do mercado de trabalho, bem como para contribuir com o avanço e aperfeiçoamento das técnicas de controle em diversas áreas de aplicação.

## 1.1

### Revisão Bibliográfica

Esta seção tem como objetivo destacar o desenvolvimento histórico do pêndulo invertido, abordando as principais teorias relacionadas à sua dinâmica e controle. A revisão bibliográfica apresentada aqui demonstra como o estudo desse sistema tem auxiliado na compreensão dos conceitos físicos fundamentais e como seu modelo ainda impacta importantes avanços científicos.

Ao longo do tempo, diversos pesquisadores têm contribuído com teorias e estudos relacionados à dinâmica do pêndulo. Desde o trabalho pioneiro de cientistas como Galileu Galilei e Christian Huygens, que estabeleceram as bases teóricas para o estudo dessa área, até os avanços mais recentes, como as contribuições de pesquisadores contemporâneos. Essas teorias abrangem desde modelos simplificados até abordagens mais complexas, permitindo uma compreensão aprofundada do comportamento do pêndulo invertido.

Uma das teorias mais fundamentais é a Teoria do Pêndulo Simples, estabelecida por Galileu Galilei no século XVII. Essa teoria considera um pêndulo

idealizado, onde a haste é considerada sem massa e a amplitude de oscilação é limitada. Ela descreve a relação entre a aceleração gravitacional, o comprimento da haste e o período de oscilação do pêndulo. Embora seja uma simplificação, a teoria fornece uma base teórica importante para o entendimento do comportamento do pêndulo invertido. No entanto, a modelagem real é um sistema mais complexo devido a fatores como a presença de uma haste com massa, a não linearidade das equações de movimento e a influência de perturbações externas. Para modelar e analisar o pêndulo invertido em sua forma mais realista, teorias mais avançadas foram desenvolvidas.

Uma dessas teorias é a Teoria Linearizada, que envolve a linearização das equações de movimento do pêndulo invertido em torno de um ponto de equilíbrio. Essa abordagem permite a aplicação de técnicas de controle linear e simplifica a análise do sistema, tornando-o mais acessível para projetar controladores convencionais, como o controlador PID (*Proportional Integral Derivative*). A Teoria Linearizada é amplamente utilizada em estudos teóricos e práticos de controle.

Além disso, com o avanço da computação e dos métodos numéricos, outras teorias mais sofisticadas têm sido desenvolvidas, como a Teoria do Controle Não Linear. Essa teoria se concentra em lidar com as não linearidades inerentes do pêndulo invertido e busca projetar controladores mais avançados que levem em consideração o comportamento não linear do sistema. Abordagens como controle por realimentação de estados, controle por *backstepping* e controle ótimo têm sido aplicadas para melhorar o desempenho e a estabilidade do sistema.

Além das teorias mencionadas, é importante ressaltar que o estudo da dinâmica do pêndulo invertido também se estende a áreas relacionadas, como a teoria dos sistemas dinâmicos, a teoria do caos e a mecânica avançada. Essas áreas contribuem para uma compreensão mais profunda dos fenômenos observados e ampliam o escopo de pesquisa e desenvolvimento relacionados.

Será apresentado as contribuições de diferentes autores e os principais tópicos abordados na literatura sobre o pêndulo invertido, bem como as referências utilizadas neste trabalho para auxiliar na modelagem do sistema.

Silva (2017) trouxe contribuições relevantes ao explorar a eficácia e a robustez dos métodos de controle aplicados ao pêndulo invertido. Seu estudo destacou a importância de investigar diferentes metodologias de controle para lidar com as características instáveis e as não linearidades inerentes ao sistema. A pesquisa de Silva foi uma referência fundamental para compreender os desafios e as possíveis abordagens de controle do pêndulo invertido.

Lundberg e Barton (2010) ofereceram uma visão histórica importante ao

discutir o estudo do modelo do pêndulo invertido desde 1960. Eles ressaltaram a existência de várias propostas de controle, com ênfase no uso de controladores clássicos, como o controlador PID. A pesquisa de Lundberg e Barton proporcionou uma base sólida para entender a evolução do controle do pêndulo invertido ao longo do tempo e a importância do PID como uma abordagem amplamente adotada.

O trabalho de Abati (2020) apresenta um pêndulo invertido mecanicamente robusto, controlado horizontalmente, para o estudo de sistemas de controle. Abati aplicou um modelo matemático preciso para descrever a dinâmica do sistema, permitindo a implementação de diferentes controladores. Três controladores foram investigados: PID, LQR e Swing-up, sendo comparados através de análises teóricas e experimentais. O estudo mostrou a importância de um projeto bem estruturado e a aplicação de controladores eficazes na estabilização do pêndulo invertido.

Além desses autores mencionados, outros pesquisadores também contribuíram significativamente para a literatura sobre o pêndulo. Suas pesquisas abordaram temas como técnicas de identificação de sistema, controle adaptativo, redes neurais, controle fuzzy e algoritmos genéticos. Essas abordagens forneceram uma visão abrangente das diferentes metodologias de controle e ampliaram as possibilidades de estudo e aplicação em diversos contextos.

Neste trabalho, as contribuições dos autores mencionados e de outros pesquisadores foram fundamentais para auxiliar na modelagem e compreensão do pêndulo invertido. As teorias e técnicas propostas por eles serviram como base para o desenvolvimento do sistema de controle utilizado neste estudo. A utilização dessas referências consolidadas permitiu uma abordagem sólida e embasada para explorar os aspectos dinâmicos e de controle.

## 1.2

### Objetivos

Os objetivos deste trabalho de conclusão de curso, consistem em:

- Avaliar o problema do pêndulo invertido de dois graus de liberdade;
- Aprimorar um sistema de pêndulo invertido com base controlada horizontalmente já desenvolvido no Laboratório de Robótica da PUC-Rio;
- Obter o modelo matemático do pêndulo invertido em questão;
- Estudar e implementar três técnicas de controle ao problema do pêndulo invertido: PID, LQR e *Swing-up*;
- Controlar a trajetória da base enquanto o pêndulo se mantém equilibrado na posição vertical;

- Comparar dados simulados utilizando a ferramenta MATLAB & SIMULINK com dados experimentais providos pelo pêndulo real.

O objetivo principal deste trabalho é a construção de uma nova bancada experimental, baseada na bancada anteriormente desenvolvida por Abati (2020), visando melhorar a robustez mecânica e eletrônica do sistema. A nova bancada será projetada no software CAD, Solidworks, levando em consideração os desafios identificados no sistema atual, buscando aprimorar sua estabilidade, precisão e confiabilidade.

Através do novo aparato, pretende-se realizar experimentos mais precisos e repetíveis, permitindo a avaliação e comparação de dados simulados e experimentais. Isso proporcionará um estudo de diferentes abordagens visando um melhor desempenho no controle do pêndulo invertido.

Além disso, na nova bancada experimental, será implementado o controle da trajetória da base do sistema. Esse controle permitirá direcionar e controlar o movimento da base de forma precisa, enquanto o pêndulo se mantém equilibrado na posição vertical.

Esse novo dispositivo desenvolvido, representa uma evolução do projeto original, adaptada para superar os desafios identificados e proporcionar um ambiente mais adequado para o estudo do problema. Por meio dessa nova estrutura, será possível validar as técnicas de controle e comparar seu desempenho, contribuindo para o avanço do conhecimento nessa área de pesquisa.

## 2

### Modelagem do Pêndulo Invertido

A modelagem do pêndulo é uma etapa fundamental no estudo e compreensão do seu comportamento dinâmico. Através da representação matemática do sistema, é possível analisar sua resposta a diferentes condições e perturbações, bem como desenvolver estratégias de controle eficazes. Neste capítulo, será abordada a modelagem do pêndulo, considerando suas características físicas e as equações que descrevem o seu movimento.

#### 2.1

##### Dinâmica do Sistema

Na Figura 2.1 é apresentado um esquema simplificado da dinâmica do pêndulo invertido. O modelo do pêndulo invertido é composto por um carrinho (de massa  $M$ ) que se desloca em um trilho no eixo  $x$ , e uma haste (de massa  $m$ ) acoplada a um eixo junto ao carrinho, que pode realizar deslocamentos angulares e está sujeita à ação da gravidade, tendendo a cair. Nesse contexto, o objetivo do controle é manter esse sistema mecânico em equilíbrio na posição vertical, utilizando, por exemplo, uma força horizontal  $u$  aplicada ao carrinho.

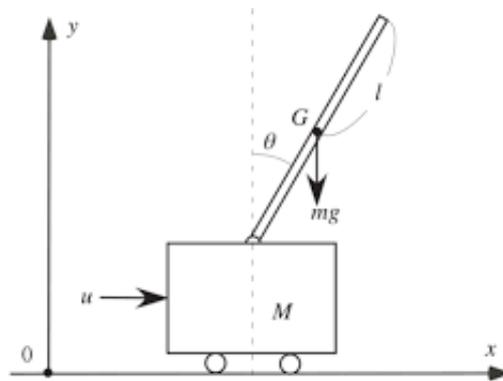


Figura 2.1: Esquema Simplificado do Pêndulo Invertido

Fonte: Abati 2020 (clique aqui)

A fim de obter as equações da dinâmica do sistema, foi utilizado o método de energia de Lagrange. Este método é uma abordagem poderosa para obter as equações de dinâmica de um sistema pois, ao utilizar os princípios de conservação de energia e momento, o método de Lagrange permite determinar as equações de movimento do sistema sem a necessidade de identificar explicitamente as forças envolvidas, diferentemente da abordagem

da mecânica newtoniana. Isso proporciona uma formulação mais geral e compacta para descrever o comportamento do sistema dinâmico em questão.

A seguir encontra-se o passo-a-passo para a obtenção das equações da dinâmica do sistema através do método de energia de Lagrange:

1. Definição das coordenadas generalizadas que descrevem o sistema, ou seja, os vetores de posição da base e do pêndulo:

$$P_{base} = [x, 0]^T \quad (2-1)$$

$$P_{pendulo} = [x + l\text{sen}(\theta), l\text{cos}(\theta)]^T \quad (2-2)$$

2. Derivando os vetores de posição, apresentados acima, obtem-se as velocidades da base e do pêndulo, respectivamente:

$$v_{base} = [\dot{x}, 0]^T \quad (2-3)$$

$$v_{pendulo} = [\dot{x} + l\dot{\theta}\text{cos}(\theta), -l\dot{\theta}\text{sen}(\theta)]^T \quad (2-4)$$

3. Cálculo do módulo da velocidade do pêndulo ( $|v_{pendulo}|^2$ ), que será necessário para o cálculo da energia cinética de translação do pêndulo:

$$|v_{pendulo}|^2 = \dot{x} + l\dot{\theta}\text{cos}(\theta)^2 + (-l\dot{\theta}\text{sen}(\theta))^2$$

$$|v_{pendulo}|^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\text{cos}(\theta) + l^2\dot{\theta}^2 \quad (2-5)$$

4. A fim de obter o Lagrangeano, basta calcular a diferença entre a energia cinética e a energia potencial ( $L = T - U_{pot}$ ):

- (a) A energia cinética pode ser calculada por:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m|v_{pendulo}|^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2-6)$$

Onde os termos são referentes a energia cinética de translação da base, a energia cinética de translação do pêndulo e a energia de rotação do pêndulo, respectivamente.

- (b) A energia potencial gravitacional pode ser calculada por:

$$U_{pot} = mgl\text{cos}(\theta) \quad (2-7)$$

Onde os termos são exclusivos do pêndulo (haste) do sistema.

- (c) Calculando o Lagrangeano por  $L = T - U_{pot}$ :

$$L = T - U_{pot} = \left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m|v_{pendulo}|^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2\right) - (mgl\text{cos}(\theta)) \quad (2-8)$$

5. As duas equações de Euler-Lagrange para este sistema, referentes a cada grau de liberdade, são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = f - b\dot{x} \quad (2-9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2-10)$$

6. Resolvendo as duas equações apresentadas acima, obtêm-se as equações que representam a dinâmica do sistema:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2-11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos(\theta) \quad (2-12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\ddot{x} + ml[\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2\sin(\theta)] \quad (2-13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta) + mgl\sin(\theta) \quad (2-14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (I + ml^2)\dot{\theta} + ml\dot{x}\cos(\theta) \quad (2-15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (I + ml^2)\ddot{\theta} + ml[\ddot{x}\cos(\theta) - \dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta)] \quad (2-16)$$

7. Calculando as equações da dinâmica do sistema a partir da substituição dos valores encontrados acima nas duas equações de Euler-Lagrange:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{x}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = f - b\dot{x} \quad (2-17)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos(\theta) - mgl\sin(\theta) = 0 \quad (2-18)$$

8. Analisando o modelo para ângulos muito pequenos pode-se linearizar as equações da dinâmica a partir da aproximação da série de Taylor:

- (a) As seguintes simplificações serão assumidas:

$$\theta \approx 0 \quad (2-19)$$

$$\sin(\theta) \approx 0 \quad (2-20)$$

$$\cos(\theta) \approx 1 \quad (2-21)$$

- (b) Sendo assim, as equações linearizadas de movimento se tornam:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = f - b\dot{x} \quad (2-22)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} - ml\ddot{x} - mgl\theta = 0 \quad (2-23)$$

## 2.2

### Parâmetros Reais do Sistema

Na Tabela 2.1, encontram-se apresentados todos os parâmetros referentes ao sistema da bancada experimental desenvolvida e apresentada neste trabalho. Estes parâmetros serão necessários para dar continuidade à modelagem dinâmica do sistema, conforme descrita ao longo deste Capítulo.

Símbolo	Parâmetro	Valor
M	Massa do Carrinho (Base)	0.463 kg
m	Massa do Pêndulo (Haste)	0.236 kg
l	Distância ao Centro de Massa do Pêndulo	0.165 m
g	Aceleração da Gravidade	9.810 m/s <sup>2</sup>
I	Momento de Inércia	0.0075 kgm <sup>2</sup>
b	Coefficiente Viscoso de Amortecimento Translacional da Base	0.100 Ns/m

Tabela 2.1: Parâmetros do Sistema Real

## 2.3

### Função de Transferência

Uma função de transferência é uma representação matemática que descreve a relação entre a entrada e a saída de um sistema dinâmico em termos de frequência. Ela é amplamente utilizada na análise e projeto de sistemas de controle, permitindo entender como diferentes frequências afetam a resposta do sistema.

A função de transferência é normalmente denotada por  $H(s)$ , onde "s" representa a variável complexa na transformada de *Laplace* (no domínio da frequência). Ela é obtida por meio da aplicação da transformada de *Laplace* às equações diferenciais do sistema e fornece uma descrição clara da relação entre a entrada e a saída em termos de frequência. Sua definição matemática pode ser dada por:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{st} dt \quad (2-24)$$

Aplicando, então, a transformada de *Laplace* nas equações de movimento apresentadas anteriormente, obtém-se as seguintes equações no domínio da frequência:

$$(M + m)X(s)s^2 + bX(s)s + ml\Theta(s)s^2 = f = U(s) \quad (2-25)$$

$$(I + ml^2)\Theta(s)s^2 + mlX(s)s^2 - mgl\Theta(s) = 0 \quad (2-26)$$

Reorganizando a Equação 2-25 e a Equação 2-26 é possível calcular as duas funções de transferência do sistema, conforme apresentado abaixo:

- (a) O comportamento do pêndulo para uma dada entrada U:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-mIs}{(MI + mI + Mml^2)s^3 + (I + ml^2)bs^2 - (M + m)mgl s - bmgI} \quad (2-27)$$

- (b) O comportamento da base para uma dada entrada U:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{(I + ml^2)s^2 - mgl}{(MI + mI + Mml^2)s^4 + (I + ml^2)bs^3 - (M + m)mgl s^2 - bmgI s} \quad (2-28)$$

Por fim, aplicando os valores referente ao pêndulo real, conforme apresentado na Tabela 2.1, obtém-se as funções de transferência do sistema:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-0.03894s}{0.008217s^3 + 0.001393s^2 - 0.267s - 0.0382} \quad (2-29)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{0.01393s^2 - 0.382}{0.008217s^4 + 0.001393s^3 - 0.267s^2 - 0.0382s} \quad (2-30)$$

## 2.4

### Análise do Sistema em Malha Aberta

A análise do pêndulo invertido em malha aberta envolve a investigação do comportamento do sistema sem a presença de um controle ativo. Nesse caso, as equações de movimento do pêndulo invertido são resolvidas sem intervenção externa para estabilizar ou controlar o sistema.

Em malha aberta, o pêndulo invertido exibirá um comportamento determinado pelas condições iniciais e pelas forças presentes no sistema, como a gravidade. Dependendo das condições iniciais, o pêndulo pode voltar para sua posição de equilíbrio natural (haste apontada para baixo). Logo, é esperado que haja, pelo menos, um polo positivo associado a cada função de transferência do sistema.

Os polos são representados pelas raízes dos polinômios denominadores de cada função de transferência. Sua análise, permite verificar a estabilidade do sistema onde, polos positivos são uma indicação forte de que o sistema é instável. A partir de uma simulação realizada no software Matlab, obtém-se os seguintes polos:

$$P_{\theta} = \begin{bmatrix} 5.6875 \\ -5.7140 \\ -0.1430 \end{bmatrix} \quad P_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.6875 \\ -5.7140 \\ -0.1430 \end{bmatrix}$$

Como esperado, existem polos positivos em ambas as funções de transferência, o que indica a instabilidade deste sistema.

Outra forma de verificar o comportamento do sistema e, conseqüentemente, a estabilidade do mesmo, é através da análise do comportamento do sistema em malha aberta a partir de uma entrada do tipo degrau. Dessa forma, constata-se que tanto a posição  $x$  do carrinho quanto o ângulo  $\theta$  do pêndulo tendem para  $\infty$  e  $-\infty$ , respectivamente. O resultado dessa simulação pode ser verificado na Figura 2.2.

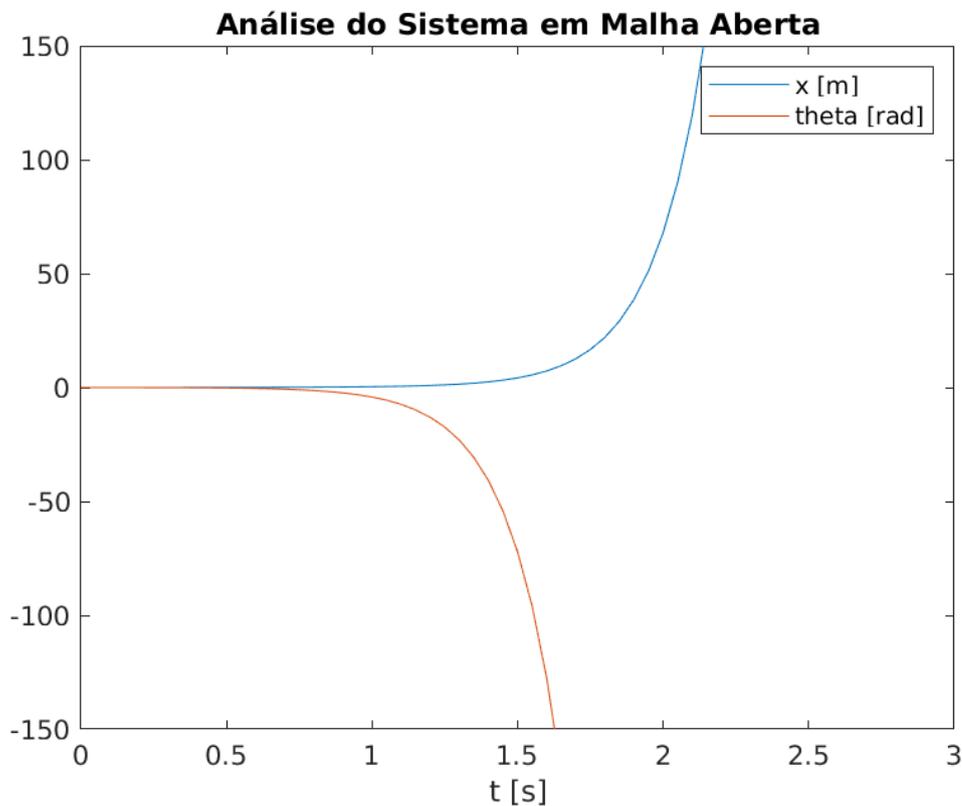


Figura 2.2: Resposta ao Degrau em Malha Aberta

Fonte: Autor (através do Software Matlab)

## 2.5 Modelo de Espaço de Estados

A análise e representação do pêndulo invertido através do modelo de espaço de estado é uma abordagem poderosa para descrever o comportamento dinâmico desse sistema complexo. O modelo de espaço de estado é uma

representação matemática que descreve as relações entre as variáveis de estado do sistema e suas taxas de variação ao longo do tempo. Ele é composto por duas equações principais:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU\end{aligned}\tag{2-31}$$

1. Equação de Estado:  $\dot{X} = AX + BU$

- "X" é o vetor de estados, que representa as variáveis do sistema;
- " $\dot{X}$ " é a derivada temporal das variáveis de estado;
- "A" é a matriz de estados, que descreve as relações lineares entre as variáveis de estado;
- "B" é a matriz de entrada, que relaciona as entradas do sistema com as variáveis de estado.

2. Equação de Saída:  $Y = CX + DU$

- "Y" é o vetor de saídas do sistema;
- "C" é a matriz de saída, que relaciona as variáveis de estado com as saídas.
- "D" é a matriz de realimentação, que relaciona as entradas do sistema com as saídas diretamente.

Utilizando a Equação 2-31 que descreve o movimento linearizado e rearrumando-as para ficarem com base de  $\ddot{x}$  e  $\ddot{\theta}$ , obtém-se:

$$\ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b\dot{x} - m^2l^2g\theta + (I + ml^2)f}{MI + mI + Mml^2}\tag{2-32}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mlb\dot{x} + (M + m)mgl\theta - mlf}{MI + mI + Mml^2}\tag{2-33}$$

Definindo o vetor de estados como  $X = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T$  a representação de espaço-estado do sistema é escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{MI+mI+Mml^2} & \frac{-m^2l^2g}{MI+mI+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{MI+mI+Mml^2} & \frac{(M+m).gl}{MI+mI+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-(I+ml^2)}{MI+mI+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{-ml}{MI+mI+Mml^2} \end{bmatrix} [f]\tag{2-34}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [f]\tag{2-35}$$

Por fim, aplicando os valores referente ao pêndulo real, conforme apresentado na Tabela 2.1, obtêm-se as seguintes matrizes A, B, C e D:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1695 & -1.8102 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0.4739 & 32.4946 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6946 \\ 0 \\ -4.7388 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2.6

### Zero Order Hold

*Zero Order Hold* (ZOH) é uma técnica de amostragem comumente utilizada no campo de controle digital e processamento de sinais. Ela é usada para converter um sinal analógico contínuo em uma sequência discreta de valores em intervalos de tempo discretos.

Em um sistema de controle, é comum que o controlador e o sistema a ser controlado operem em domínios diferentes: o controlador pode estar projetado no domínio discreto (tempo discreto), enquanto o sistema a ser controlado é frequentemente modelado no domínio contínuo (tempo contínuo). Nesses casos, é necessário converter o sinal contínuo gerado pelo controlador em um sinal discreto que possa ser aplicado ao sistema.

O equivalente ZOH para o modelo de espaço-estado é calculado da mesma forma que no modelo contínuo. Seu equacionamento é apresentado nas equações abaixo:

$$\Phi = e^{AT} \quad (2-36)$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{As} ds B \quad (2-37)$$

A partir da Equação 2-36 e da Equação 2-37 é possível calcular as matrizes discretizadas do modelo de espaço de estado. Para um  $T = 100ms$  tem-se:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0100 & -0.0001 & 0 \\ 0 & 0.9983 & -0.0181 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 1.0016 & 0.0100 \\ 0 & 0.0047 & 0.3251 & 1.0016 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0169 \\ -0.0002 \\ -0.0474 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, as equações de espaço de estado foram modificadas para sua notação discreta, com as novas matrizes calculadas por:

$$\dot{X}(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) \quad (2-38)$$

$$Y(k) = HX(k) + JU(k) \quad (2-39)$$

## 2.7

### Modelagem Não Linear

Nesta seção, serão apresentadas as equações da dinâmica do sistema, levando em consideração todas as suas características, sem as simplificações feitas no modelo linearizado. Essa modelagem mais completa será necessária para as simulações que serão realizadas utilizando o controlador não-linear de *Swing-Up*, as quais serão discutidas no Capítulo 4.

A partir das equações de movimento (Equação 2-17 e Equação 2-18), que serão transcritas a seguir, serão obtidas as matrizes do modelo não-linear do espaço de estados. Essa abordagem permitirá uma representação mais precisa e abrangente do comportamento do sistema durante as simulações e análises realizadas.

É importante ressaltar que essa modelagem mais detalhada é fundamental para compreender e estudar o sistema de forma mais completa, considerando todas as interações e características do mesmo. Com isso, será possível avaliar o desempenho do controlador proposto e analisar o comportamento do sistema em diferentes situações e condições operacionais.

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = f - b\dot{x}$$

$$(l + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos(\theta) - mlg\sin(\theta) = 0$$

Agora reescrevendo a Equação 2-18 com  $\ddot{\theta}$  sendo colocado em evidência, tem-se a seguinte equação:

$$\ddot{\theta} = \frac{ml(g\sin(\theta)) - \ddot{x}\cos(\theta)}{l + ml^2} \quad (2-40)$$

Ao substituir a Equação 2-40 na Equação 2-17 e realizar as devidas reformulações para obter  $\ddot{x}$  seguido da substituição de  $\ddot{x}$  da Equação 2-41 na Equação 2-18, obtém-se as seguintes equações da dinâmica não-linear:

$$\ddot{x} = \frac{(l + ml^2)(f - b\dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta)) - m^2 l^2 g \text{sen}(\theta) \cos(\theta)}{(l + ml^2)(M + m) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)} \quad (2-41)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)mgl \text{sen}(\theta) + bml\dot{x} \cos(\theta) - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) - fml \cos(\theta)}{(l + ml^2)(M + m) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)} \quad (2-42)$$

O sistema é escrito, de forma geral, por:

$$\dot{X} = \Psi(X, U) \quad (2-43)$$

$$Y = \Upsilon(X, U) \quad (2-44)$$

Onde  $\Psi$  e  $\Upsilon$  são funções genéricas não-lineares de  $X$  e  $U$ , logo:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{(l+ml^2)(f-b\dot{x}+ml\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta)-m^2 l^2 g \text{sen}(\theta) \cos(\theta))}{(l+ml^2)(M+m)-m^2 l^2 \cos^2(\theta)} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(M+m)mgl \text{sen}(\theta)+bml\dot{x} \cos(\theta)-m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta)-fml \cos(\theta)}{(l+ml^2)(M+m)-m^2 l^2 \cos^2(\theta)} \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

$$Y = \begin{bmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

Para realizar o cálculo das matrizes do modelo de espaço-estado, é necessário linearizar as funções localmente em torno de um ponto de operação, utilizando uma aproximação de primeira ordem. Essa linearização é obtida por meio das matrizes jacobianas, que representam as taxas de variação das funções em relação às variáveis de estado  $X$  e de entrada  $U$ . As matrizes jacobianas são calculadas da seguinte maneira:

$$F = \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (2-47)$$

$$G = \frac{\partial \Psi}{\partial U} \quad (2-48)$$

$$H^* = \frac{\partial \Upsilon}{\partial X} \quad (2-49)$$

$$J^* = \frac{\partial \Upsilon}{\partial U} \quad (2-50)$$

Para adaptar as matrizes anteriormente mencionadas para o cálculo do modelo de espaço-estado, é importante destacar que essas matrizes dependem

tanto do estado  $X$  quanto da saída de controle  $U$ . Dessa forma, é necessário recalculá-las a cada iteração do simulador, levando em consideração os valores atualizados do estado e da entrada.

Ao resolver as funções não-lineares  $\Psi$  e  $\gamma$ , é possível obter as matrizes do modelo de espaço-estado, que são calculadas da seguinte forma:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{\theta}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_4}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \Psi_4}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi_4}{\partial \dot{\theta}} \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml}{(I+ml)(M+m)-m^2l^2\cos^2(\theta)} \\ 0 \\ \frac{-ml\cos(\theta)}{(I+ml)(M+m)-m^2l^2\cos^2(\theta)} \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

$$H^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-53)$$

$$J^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-54)$$

Onde:

$$r = (I + ml)(M + m) - m^2l^2\cos^2(\theta) \quad (2-55)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{x}} = \frac{-(I + ml)b}{r} \quad (2-56)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} = \frac{((I + ml)ml\dot{\theta}^2\cos(\theta) - m^2l^2g\cos(2\theta))}{r} - \quad (2-57)$$

$$\frac{(I + ml)(f - b\dot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)m^2l^2\sin(2\theta))}{r^2} + \frac{m^4l^4g\sin^2(2\theta)}{2r^2} \quad (2-58)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{\theta}} = \frac{2(I + ml)\dot{\theta}\sin(\theta)}{r} \quad (2-59)$$

$$\frac{\partial \Psi_4}{\partial \dot{x}} = \frac{ml\cos(\theta)}{r} \quad (2-60)$$

$$\frac{\partial \Psi_4}{\partial \dot{\theta}} = \frac{[(M + m)mgl\cos(\theta) - bml\dot{x}\sin(\theta) - m^2l^2\cos(2\theta) + fml\sin(\theta)]}{r} - \frac{[(M + m)mgl\sin(\theta) + bml\dot{x}\cos(\theta) - m^2l^2\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta) - fml\cos(\theta)]}{r^2} - m^2l^2\sin(2\theta) \quad (2-61)$$

$$\frac{\partial \Psi_4}{\partial \dot{\theta}} = \frac{-m^2l^2\dot{\theta}\sin(\theta)}{r} \quad (2-62)$$

As funções de  $\dot{X}$  e  $Y$  sofrem modificações devido a não linearidade do modelo, sendo descritas por:

$$\dot{X} \approx \dot{X}(k) + F(k)(X - X(k)) + G(k)(U - U(k)) \quad (2-63)$$

$$Y \approx Y(k) + H^*(k)(X - X(k)) + J^*(k)(U - U(k)) \quad (2-64)$$

Quando simulando o sistema para amostras entre  $k$  e  $k + 1$ , assume-se que a saída do controlador permanece constante, ou seja,  $(U - U(k)) = 0$ . Com essa suposição, o próximo estado  $X(k + 1)$  pode ser calculado a partir do estado atual  $X(k)$ , da entrada de controle atual  $U(k)$ , do valor atual de  $\phi(k)$  e do valor inicial de  $\Gamma_0(k)$ , utilizando a Equação 2-67.

$$\dot{X} - \dot{X}(k) = F(k)(X - X(k)) \quad (2-65)$$

$$\dot{X} = F(k)X + [\Psi(X(k), U(k)) - F(k)X(k)] \quad (2-66)$$

$$X(k + 1) = \Phi^*X(k) + \Gamma_0[\Psi(X(k), U(k))] \quad (2-67)$$

Onde:  $\Phi^* = e^{FT}$  e  $\Gamma_0 = \int_0^\infty e^{Fs} ds$

### 3

## Bancada Experimental

As bancadas experimentais desempenham um papel de extrema importância no campo da pesquisa científica e no desenvolvimento de tecnologias. Elas são espaços físicos onde experimentos controlados são realizados, permitindo testar hipóteses, validar teorias e coletar dados precisos. Uma das principais razões pelas quais as bancadas são importantes é a possibilidade de testar e validar teorias científicas. Esses tipos de aparatos fornecem o ambiente controlado necessário para criar condições específicas e observar os resultados de forma sistemática. Isso possibilita confirmar ou refutar hipóteses, ajustar modelos teóricos e avançar no conhecimento científico.

Os testes de bancada desempenham um papel crucial no desenvolvimento e controle de sistemas de pêndulo invertido. Esses testes têm como objetivo avaliar o desempenho dos controles associados a essa configuração específica. Utilizando um aparato de testes de alta qualidade, é possível simular o funcionamento dos principais componentes do sistema. Na Figura 3.1 é possível visualizar dois exemplos de bancadas experimentais desenvolvidas para o estudo do problema do pêndulo invertido.

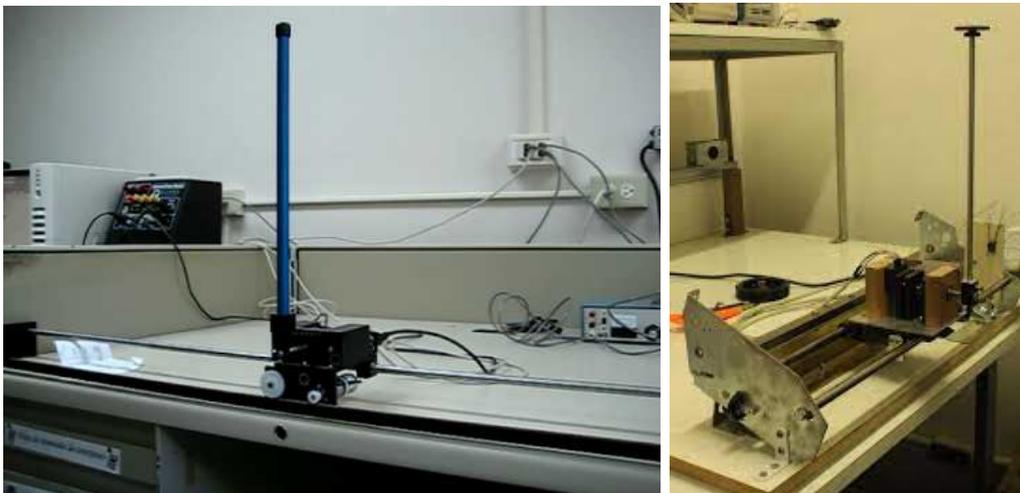


Figura 3.1: Exemplos de Bancadas Experimentais de Pêndulo Invertido

Fonte: UPRM ([clique aqui](#)) e LAC USP ([clique aqui](#))

O projeto experimental apresentado neste trabalho foi desenvolvido para representar de forma realista a situação de funcionamento do sistema de pêndulo invertido. A modelagem do dispositivo foi realizada utilizando software

Solidworks. Além disso, foram selecionados os componentes necessários para o funcionamento da bancada, bem como os sensores para aquisição de dados, que permitem obter informações precisas sobre o comportamento do pêndulo.

Neste capítulo, serão apresentados os subsistemas que compõem o sistema experimental do pêndulo invertido, apresentando os componentes projetados e seus respectivos processos de fabricação. O objetivo principal é garantir uma maior robustez mecânica, para lidar com os efeitos inerciais do sistema e garantir uma maior eficiência e melhores resultados.

### 3.1 Bancada Experimental Original

A bancada experimental desenvolvida por Abati (2020) (Figura 3.2) consiste em um sistema de pêndulo invertido com base controlada horizontalmente, similar ao apresentado neste trabalho. O objetivo era estudar e implementar técnicas de controle para esse problema.

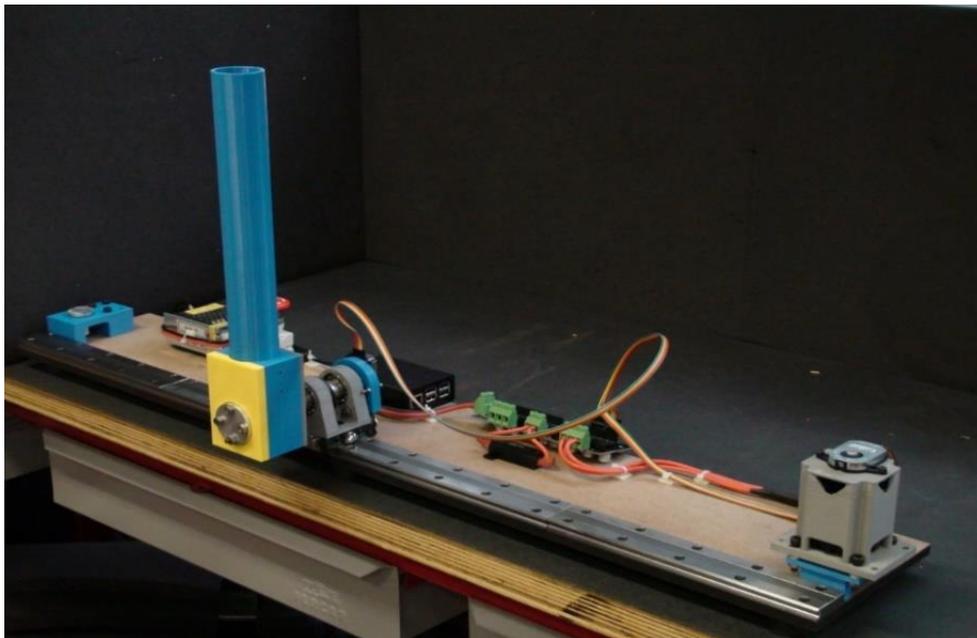


Figura 3.2: Bancada Desenvolvida por Abati (2020)

A bancada possui um braço rígido representando o pêndulo, uma base móvel (atuada por um motor através de um sistema de polias e correia) e sensores para medir a posição e ângulo do carrinho.

Em relação à construção mecânica, a fundação da estrutura foi feita a partir de uma chapa de madeira e cortada por uma cortadora à laser. O material escolhido não foi ideal visto que a madeira não é um material rígido e, por isso, a bancada sofria deformações de acordo com a movimentação do conjunto base/pêndulo ou pelo próprio peso da estrutura.

Além disso, o trilho foi construído a partir de quatro guias lineares da loja McMaster-CARR. Pelo fato de não ser um guia única, durante os ensaios experimentais, a base sofria bastante dificuldade de atravessar de um trilho para o outro devido ao fato de não estar perfeitamente alinhada.

Inicialmente, a proposta deste trabalho era utilizar a bancada desenvolvida por Abati para testar as técnicas de controle do pêndulo invertido. Entretanto, alguns problemas de robustez mecânica foram constatados (alguns já mencionados aqui) fazendo-se necessário o desenvolvimento e construção de uma nova bancada experimental.

### 3.2 Nova Bancada Experimental

A nova versão da bancada experimental (Figura 3.3) foi desenvolvida com o objetivo de aprimorar o sistema de pêndulo invertido, incorporando melhorias significativas em relação à versão anterior. Dentre as melhorias implementadas, destaca-se a utilização de alumínio estrutural na construção da estrutura da bancada, bem como a fabricação de peças em 3D para garantir maior precisão e encaixe adequado dos componentes.

Essas melhorias resultaram em um ambiente de testes mais robusto e estável, o que contribui para uma maior confiabilidade e precisão durante as operações. O uso do alumínio estrutural como material principal da bancada proporciona maior resistência mecânica, minimizando folgas e instabilidades no sistema.

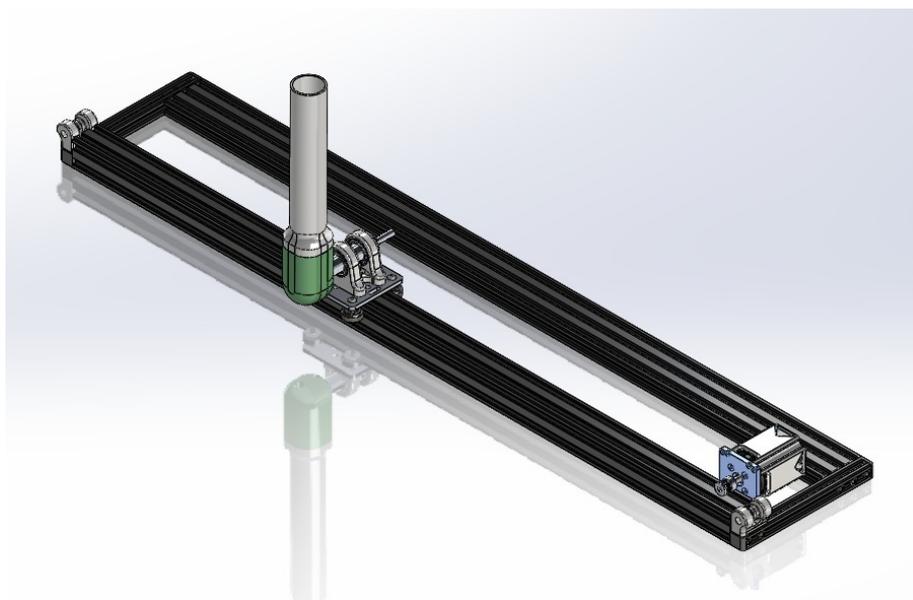


Figura 3.3: Montagem da Nova Bancada no SolidWorks

Fonte: Autor (através do software Solidworks)

O trilho da nova bancada é composto pelo próprio alumínio estrutural, com encaixes que permitem um percurso suave e livre de perturbações para o carrinho-pêndulo. Essa melhoria na trajetória é crucial para avaliar e comparar os dados simulados obtidos por ferramentas como Matlab e Simulink com os dados experimentais do pêndulo real.

Outro benefício notável é a fixação mais estável da correia utilizada no sistema. Com a estrutura reforçada e o uso do alumínio, a correia permanece tensionada, evitando movimentos indesejados durante o funcionamento da bancada de testes e falhas na movimentação da base. Essa maior estabilidade da correia contribui para um controle mais preciso do pêndulo invertido, resultando em uma trajetória mais consistente e confiável.

Esses aprimoramentos permitem realizar experimentos mais precisos, repetíveis e controlados. Além disso, viabilizam a implementação e o estudo de diferentes técnicas de controle, com o objetivo de aprimorar o desempenho do sistema de pêndulo invertido. A nova bancada também proporciona uma validação mais confiável dos algoritmos, comparando seu desempenho com os dados obtidos experimentalmente.

### 3.3

#### **Tecnologia de Impressão 3d FDM**

Nas próximas seções será apresentado os componentes utilizados para a montagem da nova bancada experimental. Diversas dessas peças e componentes foram fabricadas utilizando tecnologia de impressão 3d por FDM ou foram vinculados a peças fabricadas em 3d. Para a fabricação dessas peças, foi utilizado uma impressora 3d da marca Creality e modelo Ender 3v2 (conforme Figura 3.4).

A aplicação da tecnologia de impressão 3D na fabricação dos componentes do aparato experimental representa um avanço significativo no campo da pesquisa e desenvolvimento. Por meio dessa tecnologia, foi possível produzir peças personalizadas, precisas e funcionais, atendendo aos requisitos específicos do experimento.

Uma das principais vantagens da impressão 3D foi a capacidade de criar estruturas sob medida, como o pêndulo, com geometrias complexas e dimensões ideais para o estudo do pêndulo invertido. A precisão alcançada na fabricação dessas peças proporcionou estabilidade e equilíbrio durante os experimentos, garantindo resultados confiáveis e consistentes.

A liberdade de design oferecida por essa tecnologia possibilitou a criação de geometrias otimizadas, resultando em peças funcionais e de alta qualidade, perfeitamente adequadas às demandas do experimento.



Figura 3.4: Impressora 3d Ender 3 v2 da Marca Creality

Fonte: Sintetize 3d ([clique aqui](#))

As seguintes peças da nova bancada experimental foram fabricadas utilizando o processo de impressão 3d por FDM:

- Mancais para apoio e esticamento da correia;
- Mancal para fixação de rolamentos e apoio do eixo do pêndulo;
- Placa de transferência do motor;
- Case para proteção do motor e fixação do *encoder*;
- Case para proteção e fixação do controlador ODrive
- Case para proteção e fixação da chave geral
- Haste do Pêndulo Invertido e suporte para fixação no eixo
- Pés niveladores para nivelar a estrutura e amortecer a vibração

Vale ressaltar que este último item foi fabricado utilizando o material TPU que possui alta flexibilidade e é excelente para reduzir a vibração. As outras peças, por sua vez, foram fabricadas utilizando o material PETG, que possui excelente resistência e rigidez mecânica. Ambos *dashets* encontram-se presentes no Apêndice A e Apêndice B, respectivamente, e apresentam todas as características e propriedades mecânicas de cada material.

As peças impressas, aqui listadas, serão apresentadas e explicadas com mais detalhes em suas respectivas seções e subseções.

### 3.4 Componentes Eletrônicos

Os componentes eletrônicos utilizados neste projeto consistem, em quase sua totalidade, nos mesmos utilizados no projeto apresentado por Abati (2020). Os novos componentes utilizados, foram inseridos com o objetivo de melhorar a robustez do controle e da bancada experimental como um todo.

O aparato eletrônico consiste nos seguintes grupos/componentes apresentados abaixo:

1. Módulo de Alimentação: responsável por energizar todos os componentes;
  - (a) Conversor AC-DC 5v e 3A
  - (b) Conversor AC-DC 60V e 11A
2. Módulo de Sensoriamento: responsável por realizar as leituras da posição  $x$  da base e do ângulo  $\theta$  do pêndulo e as leituras de fim de curso do trilho;
3. Módulo de Controle: responsável por realizar as leituras dos sensores, controlar o motor e processar todos os sinais envolvidos;
  - (a) *Raspberry Pi 3B+*
  - (b) Controlador ODrive v3.6
4. Módulo de Atuação: responsável por movimentar a base do pêndulo no trilho.

Na Figura 3.5 é apresentado um esquemático simplificado, em forma de diagrama de blocos, de toda a eletrônica envolvida no funcionamento desta bancada experimental.

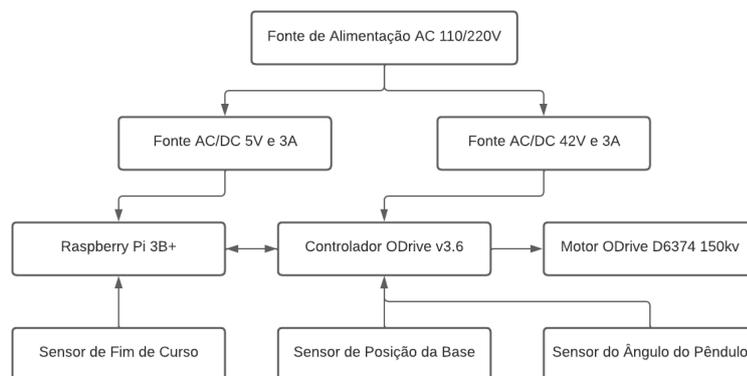


Figura 3.5: Diagrama de Blocos da Eletrônica da Bancada

Fonte: Autor (através do site Lucidchart)

### 3.4.1

#### Fonte de Alimentação

Para alimentar a bancada experimental, foi utilizado dois conversores AC-DC distintos: um deles responsável por alimentar o controlador ODrive e o outro responsável por alimentar o *Raspberry Pi 3B+*, que serão apresentados à seguir.

O primeiro deles (Figura 3.6) é uma fonte com saída variável da marca Gophert e modelo CPS-6011, podendo atingir 60V e suportar até 11A de corrente. Este conversor tem o objetivo de alimentar o controlador ODrive que, por sua vez, através de um conversor DC-DC converte a tensão de entrada para alimentar os sensores de posição (*encoders*). Como o controlador de motor utilizado suporta no máximo 48V de tensão de entrada, a fonte foi configurada para fornecer 42V a uma corrente máxima de 3A.



Figura 3.6: Fonte de Alimentação Gophert CPS-6011

Fonte: Gophert ([clique aqui](#))

O segundo conversor utilizado (Figura 3.7), foi uma fonte convencional de 5V e corrente máxima de 3A, que foi utilizada para alimentar o *Raspberry Pi*. Por consequência, ela também foi responsável por alimentar o sensor de fim de curso, que está ligado à uma das portas de 3.3V do *Raspberry*.



Figura 3.7: Fonte de Alimentação do Raspberry Pi 3B+

Fonte: Casa da Robótica ([clique aqui](#))

### 3.4.2 Sensor de Posição

Para medir a posição  $x$  do carrinho e o ângulo  $\theta$  da haste, foi utilizado dois sensores *encoders* incrementais, um para cada grau de liberdade (modelo CUI AMT102-V, conforme Figura 3.8). Conforme apresentado por Abati (2020) esse sensor funciona com um emissor e receptor infravermelho e um disco com 8192 furos. Cada fresta que os sensores infravermelhos capturam simboliza uma rotação de 0.0439 graus.



Figura 3.8: Sensor de Posição (*encoder*) CUI AMT102-V

Fonte: Mouser ([clique aqui](#))

Conforme mencionado acima, cada *encoder* foi posicionado em cada grau de liberdade. O sensor para medição da posição do carrinho, foi fixado junto a case do sistema de atuação e acoplado ao eixo no motor. Já o sensor para medição do angulo da haste, foi acoplado ao eixo rotativo do pêndulo invertido e fixado no mancal do carrinho. Tais posicionamentos, podem ser verificados na Figura 3.9 e na Figura 3.10.

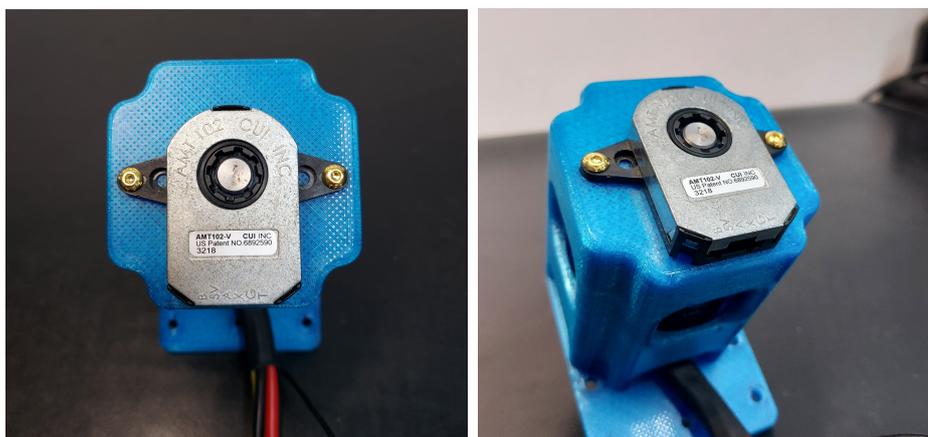


Figura 3.9: Fixação do *encoder* no Motor para Medição da Posição  $x$



Figura 3.10: Fixação do *encoder* no Pêndulo para Medição da Posição  $\theta$

### 3.4.3

#### Sensor de Fim de Curso

A fim de identificar os limites do trilho e o controle aplicado conhecer os  $X_{max}$  e  $X_{min}$  aos quais pode deslocar o carrinho, foi instalado um sensor de fim de curso em uma das extremidades do trilho. Este sensor é composto por um interruptor mecânico que é acionado por meio de um mecanismo físico quando o limite é alcançado.

Este sensor foi ligado a um dos pinos GPIO do *Raspberry Pi 3B+*, que por sua vez realizará a leitura do mesmo e identificará o instante em que o carrinho atingir a extremidade. O sensor em questão (Figura 3.11) é da marca Creality, comumente utilizado para as impressoras 3d da fabricante.

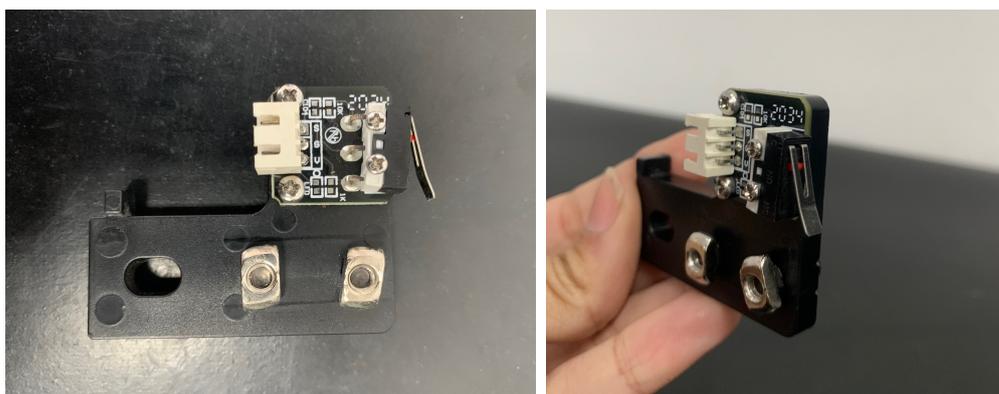


Figura 3.11: Sensor de Fim de curso da Creality

### 3.4.4

#### Hardware de Controle

O sistema de controle da bancada experimental esta dividido em dois subsistemas: *Raspberry Pi 3B+* e controlador de motor ODrive.

O *Raspberry Pi 3B+* (Figura 3.12) é um microprocessador de baixo custo e alto desempenho, amplamente utilizada para projetos de computação de pequena escala e IoT (Internet das Coisas). Embora seja um dispositivo compacto, o *Raspberry Pi 3B+* possui um poder computacional impressionante que o torna adequado para uma variedade de aplicações.



Figura 3.12: Microprocessador *Raspberry Pi 3B+*

Fonte: *Raspberry Pi* ([clique aqui](#))

Neste projeto, este microprocessador atua como uma espécie de "cérebro", realizando todo controle do pêndulo invertido. Através de um programa em *python* que fica embarcado nele mesmo, a placa se comunica via comunicação serial com o ODrive, para obter as medições dos *encoders* e enviar informações referentes ao controle do atuador.

A placa ODrive (Figura 3.13), por sua vez, tem o papel de receber todas as informações do *encoder* do ângulo  $\theta$  da haste e da posição  $x$  do carrinho. Além disso, este controlador é responsável por controlar o motor.

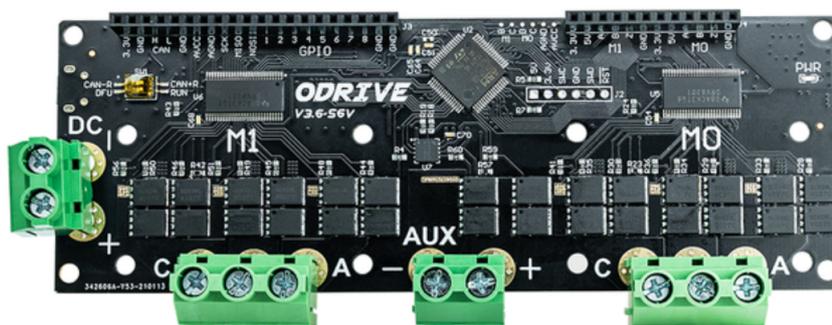


Figura 3.13: Controlador ODrive v3.6

Fonte: ODrive Shop ([clique aqui](#))

### 3.4.5 Sistema de Atuação

Para atuação do carrinho, e consequentemente equilíbrio do pêndulo, foi utilizado um motor brushless (sem escovas) da marca ODrive e modelo D6374 com 150 kv (Figura 3.14). Este motor, quando aplicado uma tensão de 48V, consegue atingir uma velocidade máxima de  $5760RPM = 603.19rad/s$  e torque máximo de  $3.86Nm$ .



Figura 3.14: Motor ODrive modelo D6374 150kv

Fonte: ODrive Shop ([clique aqui](#))

Para movimentar a base do pêndulo foi utilizado um sistema de polias e correia, similar ao que é feito para movimentar os eixos de Impressoras 3d, por exemplo. Na Figura 3.15 e na Figura 3.16 é possível ver a montagem do sistema de atuação (motor + case de proteção e fixação do *encoder* + placa de transferência) e o sistema de transmissão empregado. Vale ressaltar que ambas as peças utilizadas para a fixação do motor na estrutura, foram projetadas no software Solidworks e fabricadas através de impressão 3d com material PETG.

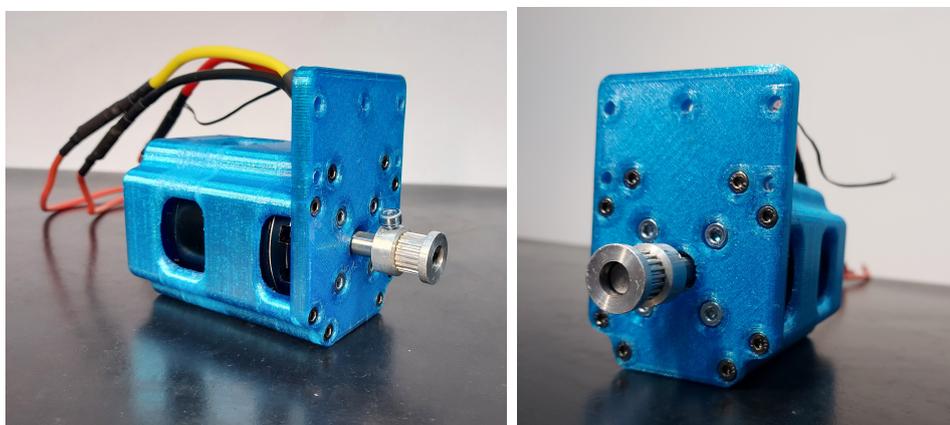


Figura 3.15: Motor ODrive montado na Case e Placa de Transferência

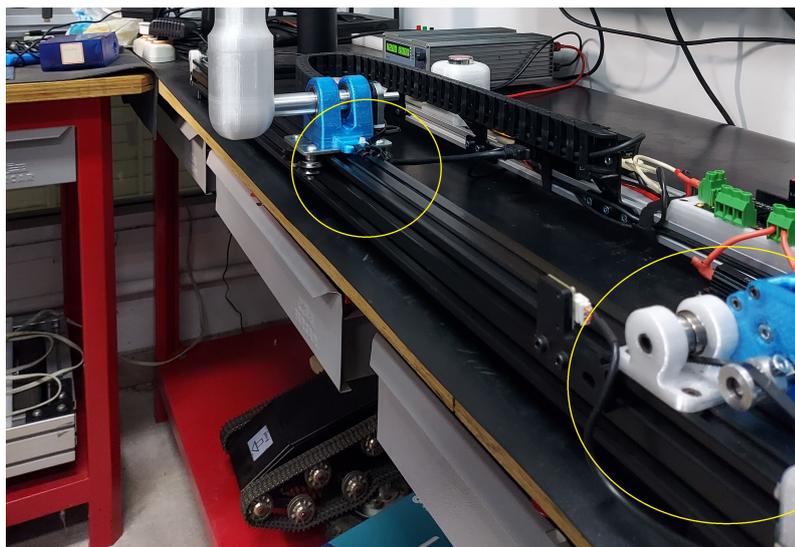


Figura 3.16: Sistema de Transmissão com Polias e Correia

### 3.5

#### Projeto Mecânico

Nesta seção, será abordado em detalhes a parte mecânica do aparato experimental. Serão apresentados os componentes utilizados, como a estrutura, as peças impressas em 3D e os elementos de fixação. Será explorado o design e a montagem desses componentes, destacando as melhorias realizadas em relação à versão anterior. Serão discutidos os critérios de seleção dos materiais, considerações de resistência e estabilidade, e os procedimentos de fabricação.

Além disso, serão abordadas as características mecânicas relevantes, como a rigidez da estrutura, a precisão do encaixe das peças e a estabilidade da bancada durante o funcionamento. Por meio dessa análise detalhada, será possível compreender melhor como as modificações na parte mecânica contribuem para a robustez e a precisão do sistema de pêndulo invertido na nova bancada experimental.

### 3.5.1

#### Estrutura da Bancada

A estrutura da bancada experimental (Figura 3.17) para o pêndulo invertido foi cuidadosamente projetada, tendo como base o uso de alumínio estrutural. O alumínio serviu como trilho principal da bancada, proporcionando uma base sólida e estável para o aparato experimental. A escolha do alumínio como material estrutural se deve à sua resistência, leveza e capacidade de absorção de vibrações.

A base da bancada foi especialmente projetada levando em consideração a necessidade de rigidez para suportar o peso dos componentes e evitar vibrações indesejadas. Cada encaixe entre as peças de alumínio foi cuidadosamente realizado, utilizando placas de fixação em perfis "L" e "T" para garantir uma conexão segura e estável. Essa abordagem permitiu criar uma estrutura sólida e confiável, capaz de sustentar o pêndulo invertido e os demais componentes da bancada durante os experimentos.



Figura 3.17: Montagem Completa da Estrutura da Bancada

A estrutura da bancada apresentada foi construída utilizando os seguintes perfis de alumínio estrutural:

- 40x40 (Preto): Utilizado como trilho do carrinho;
- 20x60 (Cinza): Utilizado para fixação dos componentes eletrônicos;
- 20x20 (Preto): Utilizado para a fixação dos perfis 40x40 e 20x60.

Vale ressaltar que o perfil 20x20 foi fixado no perfil 40x40 através de parafusos (sem os perfis em "L" ou "T" mencionados acima) e, para tal, foi necessário usinar o perfil 20x20. Este processo consistiu em realizar um furo passante e um rebaixo para a cabeça do parafuso, perpendicular a face do perfil. Na Figura 3.18 é possível verificar umas das etapas de usinagem sendo realizada na fresadora do laboratório da equipe RioBotz.



Figura 3.18: Processo de Usinagem do Perfil 20x20

Com uma estrutura bem projetada e construída, tornou-se possível conduzir experimentos precisos e confiáveis no estudo do pêndulo invertido, proporcionando uma plataforma segura e eficiente para análise e investigação dos fenômenos envolvidos.

### 3.5.2 Base Sub-Atuada

A base do pêndulo invertido foi projetada a partir de um sistema de guia ajustável com roldanas (Figura 3.19), similar aos usados em impressoras 3d. Essa nova estrutura permitiu um deslocamento suave e preciso do sistema.



Figura 3.19: Guia Ajustável com Rolamentos da Loja Forseti

Fonte: Forseti ([clique aqui](#))

A estrutura robusta e a capacidade de movimentação precisa desse carrinho foram adaptadas para atender às necessidades do pêndulo invertido, proporcionando um deslocamento controlado ao longo dos trilhos.

Acima dessa base, foi adicionado um mancal (Figura 3.20), fabricado através de impressão 3d, que biapoia o eixo através de dois rolamentos e, é a onde a correia é fixada. O eixo (Figura 3.21), por sua vez, foi fabricado a partir de um tarugo de Al6061-T6 utilizando um torno mecânico.

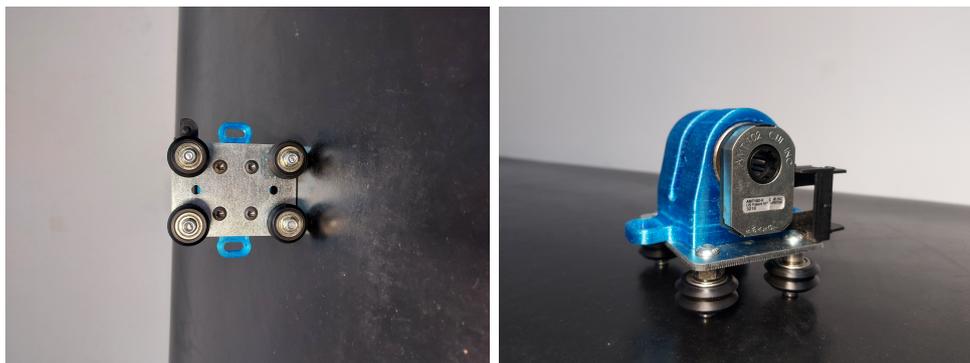


Figura 3.20: Montagem completa da nova Base Projetada



Figura 3.21: Eixo do Pêndulo em Al6061-T6 e Pêndulo

O movimento do carrinho é impulsionado por um sistema de polias, que são conectadas a um motor controlado pelo sistema de controle do pêndulo. A rotação do motor é transmitida às polias, que tracionam a correia fixada ao carrinho, permitindo seu deslocamento ao longo dos trilhos. Essa configuração mecânica garante um movimento suave e controlado do carrinho-pêndulo, seguindo os comandos do algoritmo.

Outra melhoria significativa no acoplamento mecânico da bancada experimental é a fixação aprimorada da correia. A correia está tensionada de maneira adequada e fixada de forma mais eficiente, evitando vibrações indesejadas durante o funcionamento do pêndulo. Essa estabilidade do sistema de transmissão contribui para um movimento mais preciso e controlado do

carrinho-pêndulo ao longo dos trilhos, melhorando a confiabilidade e a eficácia do sistema.

Em resumo, o acoplamento mecânico na nova bancada experimental foi projetado com base em trilhos de alumínio estrutural, um carrinho inspirado na técnica de transmissão da impressora 3D Ender 3v2 e um sistema de polias e correia para transmitir o movimento. Essas escolhas e melhorias garantem um deslocamento suave, controlado e preciso do carrinho-pêndulo ao longo dos trilhos, contribuindo para o bom desempenho do sistema de pêndulo invertido na bancada experimental.

### 3.6 Montagem Final

A montagem final da bancada do pêndulo invertido envolveu a integração dos componentes mecânicos, eletrônicos e de controle, resultando em um sistema completo e funcional. Foram realizadas etapas de construção e instalação, onde os elementos da nova bancada foram cuidadosamente posicionados e fixados, garantindo uma estrutura sólida e estável. Os componentes eletrônicos foram conectados de forma adequada, garantindo a correta comunicação entre os dispositivos de controle e o sistema de pêndulo invertido.

A montagem final da bancada pode ser vista na Figura 3.22 e representa a materialização dos objetivos deste trabalho, fornecendo uma plataforma robusta e confiável para o estudo e aprimoramento do problema do pêndulo invertido.



Figura 3.22: Montagem Final da Bancada Experimental

## 4 Controle

Neste capítulo será abordado técnicas de controle empregadas para estabilizar o pêndulo invertido na posição vertical. O desafio de manter o equilíbrio preciso deste sistema dinâmico tem despertado grande interesse em áreas como a engenharia de controle e a robótica. Técnicas de controle como PID, LQR e Swing Up serão aplicadas a fim de verificar a eficiência de tais controladores e analisar a estabilidade do sistema.

### 4.1 Controlabilidade

O conceito de controlabilidade é fundamental na teoria de controle de sistemas e está relacionado à capacidade de um sistema de ser controlado a partir de um estado inicial para um estado desejado, por meio da aplicação adequada de sinais de controle.

A controlabilidade é uma propriedade que depende tanto das características intrínsecas do sistema dinâmico quanto das possibilidades de atuação do controlador. Um sistema é considerado controlável se, a partir de qualquer estado inicial  $x(t_0)$ , é possível encontrar um sinal de controle que o leve ao estado desejado em um determinado intervalo de tempo finito  $t_0 < t < t_1$ .

Para analisar a controlabilidade de um sistema basta calcular a matriz de controlabilidade, definida pela Equação 4-1.

$$C_o = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \Phi^2\Gamma & \Phi^3\Gamma \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

Se o *rank* da matriz de controlabilidade for igual ao número de colunas  $n$ , então para um estado arbitrário existe uma sequência de sinais de controle que seja capaz de levar o sistema para um estado desejado.

Para o sistema de Pêndulo Invertido apresentado neste trabalho, é possível calcular a matriz de controlabilidade a partir das matrizes de estado  $\Phi$  e de entrada  $\Gamma$ , apresentadas anteriormente. Logo, a matriz de controlabilidade  $C_o$  é dada por:

$$C_o = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0003 & 0.0004 & 0.0006 \\ 0.0169 & 0.0169 & 0.0169 & 0.0169 \\ -0.0002 & -0.0007 & -0.0012 & -0.0017 \\ -0.0474 & -0.0474 & -0.0477 & -0.0481 \end{bmatrix}$$

A partir da matriz apresentada acima, obtida através de uma simulação do Matlab, observa-se que o *rank* da matriz de controlabilidade (ou seja, número de colunas linearmente independentes) é igual ao número de variáveis de estado, logo o sistema é completamente controlável.

## 4.2 Observabilidade

Observabilidade é um outro conceito fundamental no controle de sistemas e refere-se à capacidade de determinar o estado interno de um sistema dinâmico com base apenas em suas saídas observáveis. Em outras palavras, um sistema é considerado observável se todas as informações relevantes do estado do sistema podem ser inferidas a partir das medições disponíveis.

A observabilidade está relacionada à possibilidade de reconstruir o vetor de estados  $X$  com base nas medições das saídas  $Y$ . Se o sistema for completamente observável, então é possível determinar todos os componentes do vetor de estados a partir das medições de saída.

Para analisar a observabilidade de um sistema basta calcular a matriz de observabilidade, definida pela Equação 4-2.

$$Ob = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ H\Phi^2 \\ H\Phi^3 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

Se a matriz de observabilidade tiver posto completo, ou seja, for de posto  $n$ , então o sistema é considerado completamente observável. Caso contrário, se a matriz de observabilidade tiver posto menor que  $n$ , o sistema é considerado parcialmente observável. Logo, a matriz de observabilidade  $Ob$  é dada por:

$$Ob = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 1.0000 & 0.0100 & -0.0001 & -0.0000 \\ 0 & 0.0000 & 1.0016 & 0.0100 \\ 1.0000 & 0.0200 & -0.0004 & -0.0000 \\ 0 & 0.0001 & 1.0065 & 0.0200 \\ 1.0000 & 0.0299 & -0.0008 & -0.0000 \\ 0 & 0.0002 & 1.0147 & 0.0301 \end{bmatrix}$$

A partir da matriz apresentada acima, obtida através de uma simulação do Matlab, observa-se que o *rank* da matriz de observabilidade é igual ao número de variáveis de estado, logo todas as variáveis são observáveis.

### 4.3

#### Controlador PID

Os controladores PID são amplamente utilizados na indústria e, segundo Borase (2021), de 90 a 95% de todas as aplicações de controle automático têm algum laço de realimentação que envolve a lei de um compensador PID (AYALA, 2022).

O controlador PID combina três componentes principais: o termo proporcional (P), o termo integrador (I) e o termo derivativo (D). Cada um desses termos desempenha um papel específico na resposta e no desempenho do sistema controlado. Este tipo de controlador tem a forma:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_{t_i}^{t_f} e(t) dt + k_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (4-3)$$

onde  $u(t)$  e  $e(t)$  são os sinais de controle e erro, respectivamente, no domínio do tempo  $t_i$  (instante inicial) a  $t_f$  (instante final) do cálculo. O erro  $e(t)$ , calculado, é associado à um ganho que, por sua vez, está associado às parcelas proporcional, integral e derivativa ( $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$ , respectivamente) do controlador.

O termo proporcional é responsável por fornecer uma ação de controle proporcional ao erro presente no sistema. O erro é calculado como a diferença entre o valor desejado (referência) e o valor real (*feedback*) do sistema. O termo proporcional amplifica esse erro, produzindo um sinal de controle proporcional ao erro atual. Ele ajuda a reduzir o erro rapidamente, mas pode resultar em oscilações e *overshoot* (ultrapassagem) se usado sozinho.

O termo integrador é utilizado para lidar com o erro acumulado ao longo do tempo. Ele calcula a integral do erro ao longo do tempo e adiciona esse valor à ação de controle. Isso ajuda a corrigir erros de longo prazo e elimina o erro em regime permanente. Além disso, esse termo também reduz o impacto de perturbações constantes no sistema.

O termo derivativo é responsável por prever a tendência futura do erro com base na taxa de mudança atual do erro. Ele adiciona uma ação de controle proporcional à taxa de variação do erro, ajudando a estabilizar o sistema e melhorar sua resposta transitória. O termo derivativo é eficaz na redução de oscilações e *overshoot*, mas pode amplificar o ruído e ser sensível a perturbações rápidas.

A combinação dos três termos proporcional, integral e derivativo permite que o controlador PID responda de maneira eficiente a diferentes tipos de erros e forneça uma resposta precisa e estável. A contribuição relativa de cada termo é ajustada por meio de coeficientes, que são sintonizados de acordo com as características e requisitos específicos do sistema controlado.

A sintonia adequada dos parâmetros PID é um aspecto crucial para obter um controle eficiente. Existem várias técnicas e métodos de sintonia disponíveis, como Ziegler-Nichols, método de ajuste por tentativa e erro e algoritmos de otimização. A escolha da técnica de sintonia depende das características do sistema, dos requisitos de desempenho e da disponibilidade de informações sobre o sistema.

### 4.3.1

#### PID com feedback $\theta$ e $x$

O primeiro controlador estudado para controlar a haste do pêndulo invertido utiliza dois controladores PID, que controlam o erro entre uma referência desejada do ângulo da haste e o erro entre uma referência desejada da posição do carrinho. O resultado desses dois controladores são somados junto a um impulso para simular um distúrbio no sistema, para que o pêndulo saia da sua posição de estabilidade.

Para posicionar o carrinho em uma posição diferente de zero e, consequentemente, realizar o controle da trajetória do carrinho, é necessário modificar o  $x$  de referência.

### 4.3.2

#### Calibragem de Ganhos por Ackermann

A formulação de Ackerman é um método utilizado para determinar os ganhos do controlador PID de forma a atender a requisitos específicos de desempenho, como tempo de resposta, amortecimento e estabilidade. Esse método baseia-se na teoria do controle de sistemas lineares e é particularmente útil para controladores de veículos com direção não holonômica, como carros.

A ideia central da formulação de Ackerman é estabelecer uma relação entre os ganhos do controlador PID e os polos desejados do sistema em malha fechada. Os polos são os valores complexos das raízes do polinômio característico do sistema, que determinam as características dinâmicas, como estabilidade e resposta transitória.

O objetivo deste design é posicionar os polos de malha fechada nos eventuais polos desejados  $P = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]$ , ou seja, para que  $P$  contenha os autovalores de  $\Phi - \Gamma K$ . O vetor de ganhos  $K$  pode ser obtido por:

$$K^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C^{-1} \alpha_c(\Phi) \quad (4-4)$$

Logo, fixando os polos em 0.95, o seguinte vetor de ganhos foi obtido:

$$\begin{bmatrix} -13.4523 & -10.6600 & -42.3008 & -7.8775 \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

## 4.4

**Controlador LQR (Linear Quadratic Regulator)**

O controlador LQR é um método avançado de controle utilizado para sistemas lineares, no qual se busca otimizar uma função de custo quadrático, levando em consideração a dinâmica linear do sistema e a ponderação entre os estados e o sinal de controle.

A abordagem do LQR baseia-se na formulação matemática do problema de controle ótimo, com o objetivo de minimizar o custo total ao longo do tempo. Esse custo é definido como a soma ponderada dos erros de estado e do sinal de controle.

O controlador LQR utiliza o modelo dinâmico linearizado do sistema em torno de um ponto de operação de equilíbrio, geralmente representado por um sistema de equações diferenciais lineares. Esse modelo linear é então utilizado para projetar um controlador retroalimentado que minimiza a função de custo quadrático. A função de custo é representada pela equação abaixo:

$$J_{LQR} = \frac{1}{2} \sum [X(k)^T Q_1 X(k) + U(k)^T Q_2 U(k)] \quad (4-6)$$

Os parâmetros  $Q_1$  e  $Q_2$  apresentados na Equação 4-6 são matrizes de peso simétricas e positivo semi-definidas, ou seja, todos os seus autovalores são maiores ou iguais a zero. A matriz de peso  $Q_1$  esta relacionada ao quanto se deseja minimizar o erro do estado logo, quanto maior a matriz  $Q_1$  mais rápida será a resposta do controlador. Já a matriz de peso  $Q_2$  tem o papel de penalizar a atuação do sistema.

A fim de obter o ganho ótimo do controlador  $K$ , os seguintes procedimentos apresentados foram realizados:

1. Minimização da Equação 4-6 dada a restrição do modelo linear de espaço de estado:

$$\dot{X}(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) \quad (4-7)$$

2. Nova função de custo, assumindo  $\lambda(k+1)$  sendo um vetor multiplicador de Lagrange:

$$J_{LQR}(X, U, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [X(k)^T Q_1 X(k) + U(k)^T Q_2 U(k) + \lambda(k+1)^T (-X(k+1) + \Phi X(k) + \Gamma U(k))] \quad (4-8)$$

3. Derivada parcial da nova função de custo (Equação 4-8 em relação ao multiplicador variável  $\lambda(k+1)$  e às amostras  $X(k)$  e  $U(k)$ :

(a) Equação Adjunta:

$$\frac{\partial J_{LQR}}{\partial X(k)} = X(k)^T Q_1 - \lambda(k)^T + \lambda(k+1)^T \Phi = 0 \quad (4-9)$$

(b) Equação de Controle:

$$\frac{\partial J_{LQR}}{\partial U(k)} = U(k)^T Q_2 + \lambda(k+1)^T \Gamma = 0 \quad (4-10)$$

(c) Equação de Estado:

$$\frac{\partial J_{LQR}}{\partial \lambda(k+1)} = \frac{1}{2}[-X(k+1) + \Phi X(k) + \Gamma U(k)]^T = 0 \quad (4-11)$$

4. Definindo as matrizes  $S(k)$  com  $\lambda(k) = S(k)X(k)$ , a equação de controle (Equação 4-10) resulta em:

$$\begin{aligned} U(k)^T Q_2 &= -\lambda(k+1)^T \Gamma \\ Q_2 U(k) &= -\Gamma^T S(k+1)X(k+1) \\ Q_2 U(k) &= -\Gamma^T S(k+1)[\Phi X(k) + \Gamma U(k)] \end{aligned}$$

$$U(k) = [Q_2 + \Gamma S(k+1)\Gamma]^{-1} \Gamma^T S(k+1)\Phi X(k) = -K(k)X(k) \quad (4-12)$$

5. Como  $Q_2^T = Q_2$  a equação adjunta (Equação 4-9) resulta em:

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= Q_1 X(k) + \Phi^T \lambda(k+1) \\ S(k)X(k) &= Q_1 X(k) + \Phi^T S(k+1)X(k+1) \end{aligned}$$

$$S(k)X(k) = Q_1 X(k) + \Phi^T S(k+1)[\Phi X(k) + \Gamma U(k)] \quad (4-13)$$

6. Substituindo a lei de controle ( $U(k) = -KX(k)$ ) na equação adjunta (Equação 4-13) e isolando  $X(k)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} S(k)X(k) &= Q_1 X(k) + \Phi^T S(k+1)\Phi X(k) - \\ &\quad \Phi^T S(k+1)\Gamma[Q_2 + \Gamma^T S(k+1)\Gamma]^{-1} \Gamma^T S(k+1)\Phi X(k) \end{aligned} \quad (4-14)$$

$$\begin{aligned} S(k) - Q_1 - \Phi^T S(k+1)\Phi + \\ \Phi^T S(k+1)\Gamma[Q_2 + \Gamma^T S(k+1)\Gamma]^{-1} \Gamma^T S(k+1)\Phi X(k) &= 0 \end{aligned} \quad (4-15)$$

7. Para ser válido para qualquer  $X(k)$ , o coeficiente precisa ser nulo, gerando a seguinte equação de recorrência reversa:

$$S(k) = Q_1 + \Phi^T S(k+1) - S(k+1)\Gamma[Q_2 + \Gamma^T S(k+1)\Gamma]^{-1}\Gamma^T S(k+1)\Phi \quad (4-16)$$

8. Como o problema é um caso regulador, o somatório de 0 a  $\infty$  para um horizonte de tempo finito,  $J$  é minimizado para  $U(N) = 0$  pois  $U(N)$  só influencia  $X(k > N)$ , que não afeta  $J$ . Dessa forma, a equação de controle (Equação 4-10) resulta em:

$$\lambda(N+1) = 0 \quad \implies \quad \lambda(N) = Q_1 X(N) = S(N)X(N)$$

$$S(N) = Q_1 \quad (4-17)$$

9. Os valores de  $S(k)$  são calculados recursivamente desde  $k = N - 1$  até  $k = 0$ . Dessa forma, a lei de controle ótimo fica com ganho variável, obtendo:

$$K(k) = [Q_2 + \Gamma^T S(k+1)\Gamma]^{-1}\Gamma^T S(k+1)\Phi \quad (4-18)$$

10. Para o problema de horizonte finito (regulador), onde  $N$  tende ao infinito, o valor de  $S(k)$  tende para uma matriz constante  $S$ . Logo:

$$S = Q_1 + \Phi^T S - S\Gamma[Q_2 + \Gamma^T S\Gamma]^{-1}\Gamma^T S\Phi \quad (4-19)$$

Onde " $S$ " é a solução do problema de controle ótimo obtida através da equação de Riccati.

11. Dessa forma, o ganho ótimo ( $K$ ) passa a ser constante, conforme a equação abaixo:

$$K = [Q_2 + \Gamma^T S\Gamma]^{-1}\Gamma^T S\Phi \quad (4-20)$$

Como deseja-se minimizar os erros de estado, a matriz  $Q_1$  deve ser consideravelmente maior que o termo  $Q_2$ . Logo, os ganhos  $Q_1$  e  $Q_2$  escolhidos foram:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = 1$$

Logo, o vetor de ganhos  $K$  será representado por:

$$K = \begin{bmatrix} -4.1495 & -3.9784 & -24.6329 & -4.4688 \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

#### 4.4.1

##### Controle de Trajetória com LQR

Para posicionar o carrinho em uma posição diferente de zero e, consequentemente, realizar o controle da trajetória do carrinho, é necessário calcular a entrada de referência  $U_{ref}$  onde:

$$U = U_{ref} - KX \quad (4-22)$$

$$X(k+1) = (\Phi - \Gamma K)X(k) + \Gamma U_{ref}(k) \quad (4-23)$$

Se o valor desejado para a posição do carrinho é  $X_d$ , então em regime permanente:

$$X(K+1) \approx X(k) \approx X_d$$

$$X_d \approx (\Phi - \Gamma K)X_d + \Gamma U_{ref}(k)$$

$$\Gamma U_{ref} \approx (I - \Phi + \Gamma K)X_d$$

$$U_{ref} \approx (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^{-1} (I - \Phi) X_d + K X_d \quad (4-24)$$

O termo  $KX_d$  de  $U_{ref}$  pode ser incorporado na lei de controle, enquanto que o termo  $(\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^{-1}$  é um termo de *feedforward* que desaparece caso  $X_d$  seja uma configuração de equilíbrio (mesmo que instável).

$$U = U_{ref} - KX = -K(X - X_d) + (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^{-1} (I - \Phi) X_d \quad (4-25)$$

Como a parcela da equação  $(I - \Phi)X_d$  tem a primeira coluna nula, então qualquer estado desejado  $X_d = [X_d, 0, 0, 0]$  é uma configuração de equilíbrio, e nesse caso a lei de controle simplifica para:

$$U = -K(X - X_d) \quad (4-26)$$

#### 4.5

##### Controlador Não-Linear de *Swing-Up*

O controlador não-linear *Swing-up* é uma abordagem de controle utilizada no controle do pêndulo invertido para realizar a tarefa de *Swing-up*, ou

seja, levar o pêndulo da sua posição natural (haste apontada para o baixo) para uma posição vertical estável (haste apontada para o cima) antes de aplicar um controlador de equilíbrio convencional.

O objetivo do controlador *Swing-up* é fornecer uma trajetória de controle que aumente gradualmente a energia do sistema, levando o pêndulo a oscilar até alcançar uma energia suficiente para ser estabilizado na posição vertical.

Para este controlador, será proposta a técnica de *Energy Shaping* que consiste em modelar e controlar a energia total ( $E$ ) do sistema. A energia total é calculada através da soma da parcela cinética ( $E_k$ ) com a parcela potencial gravitacional ( $E_u$ ). O equacionamento deste processo encontrasse apresentado na Equação 4-27:

$$E_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M + m & ml\cos(\theta) \\ ml\cos(\theta) & I + ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

$$E_u = mgl\cos(\theta) \quad (4-28)$$

Para equilibrar o pêndulo em  $\theta = 0$  com velocidades nulas (ou seja,  $E_k = 0$ ), a energia total desejada será descrita por:

$$E_d = 0 + mgl\cos(0) \quad \implies \quad E_d = mgl \quad (4-29)$$

Dessa forma, uma condição necessária para equilibrar o pêndulo na posição vertical envolve fazer com que a energia total do sistema seja igual a energia desejada ( $E = E_d$ ). Dessa forma, o objetivo do controlador é minimizar o erro entre  $E_d - E$ , onde  $E$  é descrito por:

$$E = \frac{1}{2} [(M + m)\dot{x}^2 + (I + ml^2)\dot{\theta}^2] + 2ml\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + mgl\cos(\theta) \quad (4-30)$$

Para aumentar a energia do pêndulo, é adotada uma estratégia empírica para forçar a base no sentido contrário da velocidade relativa entre a base e a haste.

Dessa forma, é proposto uma lei de controle não-linear para aumentar a energia do pêndulo se  $E < E_d$ , ou diminuir se  $E > E_d$ . Tal lei de controle é apresentada na equação abaixo:

$$U(k) = -K_E[E_d - \hat{E}(k)]\text{sign}(\hat{\theta}(k)\cos(\hat{\theta}(k))) - K_B\hat{x}(k)^{11} \quad (4-31)$$

Onde:

- " $K_E$ " é um ganho proporcional ajustável;
- " $\text{sign}()$ " é a função que retorna o sinal de  $\dot{\theta}\cos(\theta)$ ;

- " $-K_B \hat{x}(k)^{11}$ " é um termo não-linear adicionado para evitar que a base saia da sua faixa de trabalho;
- " $K_B$ " é um ganho proporcional ajustável.

O alto expoente "11", aplicado ao termo não-linear, foi usado para que esse termo se torne desprezível em quase toda a faixa de trabalho, não atrapalhando o controle de energia, exceto quando a base estiver muito próximo das bordas.

O controlador de *Energy Shaping* proposto é capaz de erguer o pêndulo (*Swing-up*) mas não garante sua estabilidade quando atingir a posição vertical, em  $\theta = 0$ . Desse modo, faz-se necessário trocar a lei de controle aplicada para um controlador linear quando o pêndulo estiver próximo do topo e com baixa velocidade (ou seja, na zona de estabilização).

Além disso, se o ângulo do pêndulo sair da faixa principal  $-\pi < \theta < \pi$  é preciso somar (ou subtrair)  $2\pi$  para garantir que as posições de equilíbrio desejadas  $\theta_d = 0, 2\pi$  e  $-2\pi$  sejam equivalentes.

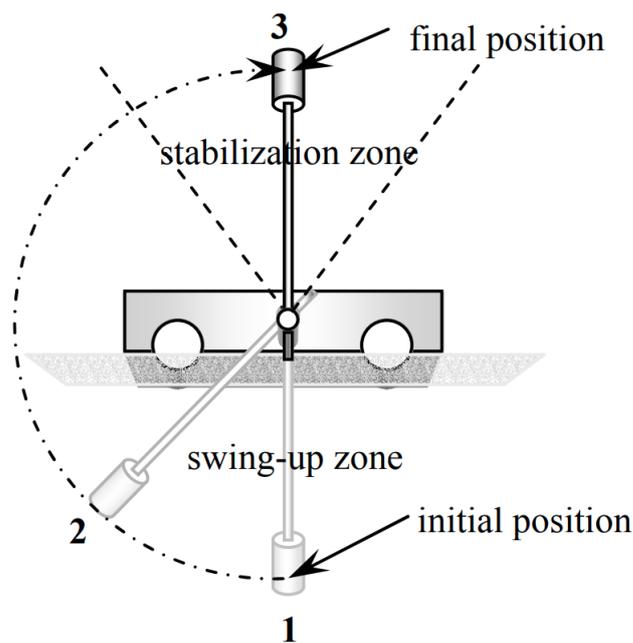


Figura 4.1: Controle *Swing Up* e Zona de Estabilização

Fonte: ResearchGate (clique aqui)

## 5 Resultados

A seção de resultados deste trabalho apresenta uma análise abrangente das técnicas de controle aplicadas ao sistema de pêndulo invertido. Nesta seção, serão discutidos os resultados obtidos para cada método de controle estudado: PID, LQR e Swing-Up. Será apresentada uma avaliação do desempenho de cada controlador em diferentes cenários, incluindo trajetórias ponto a ponto, trajetórias senoidais e rejeição a distúrbios. Essa análise permitirá uma compreensão mais aprofundada do comportamento do sistema sob diferentes abordagens de controle, fornecendo *insights* valiosos para a aplicação prática e desenvolvimento de estratégias avançadas de controle.

### 5.1 Resultados PID

Os primeiros experimentos realizados foram utilizando o controlador PID com *feedback*  $\theta$  e  $x$ . A fim de obter um resultado comparativo e avaliar a resposta deste controlador para o sistema estudado, foram realizadas algumas simulações utilizando o software Matlab e o comportamento apresentado pelas variáveis de estado  $x$  e  $\theta$  são apresentados na Figura 5.1.

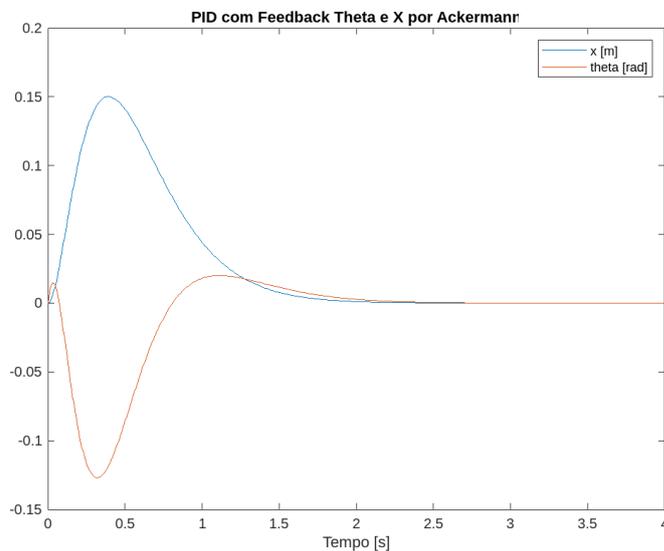


Figura 5.1: Resultados simulados com o controlador *PID* com *feedback*  $\theta$  e  $x$

Como foi observado através da análise empírica, o controlador proposto foi capaz de controlar a posição do carrinho e da haste (variáveis  $x$  e  $\theta$ ) e atingir o regime permanente após um tempo de, aproximadamente, dois segundos. Logo, comprova-se a convergência deste tipo de controlador.

A análise experimental, por sua vez, consistiu em desenvolver um programa em python para ser executado no microprocessador *Raspberry Pi B3+*, que representasse o equacionamento matemático e a lei de controle apresentadas no capítulo de Modelagem do Pêndulo Invertido e no capítulo de Controle, assim como foi feito para a análise empírica realizada no Matlab.

Em suma, o experimento consistiu em posicionar a haste na posição vertical (apontada para cima), iniciar o controlador PID e analisar a resposta do controlador em relação ao controle das variáveis de estado  $x$  e  $\theta$ . A partir da aplicação de impulsos aleatórios na extremidade do pêndulo, foi possível avaliar a resposta do controlador e os dados coletados durante o experimento são apresentados na Figura 5.2.

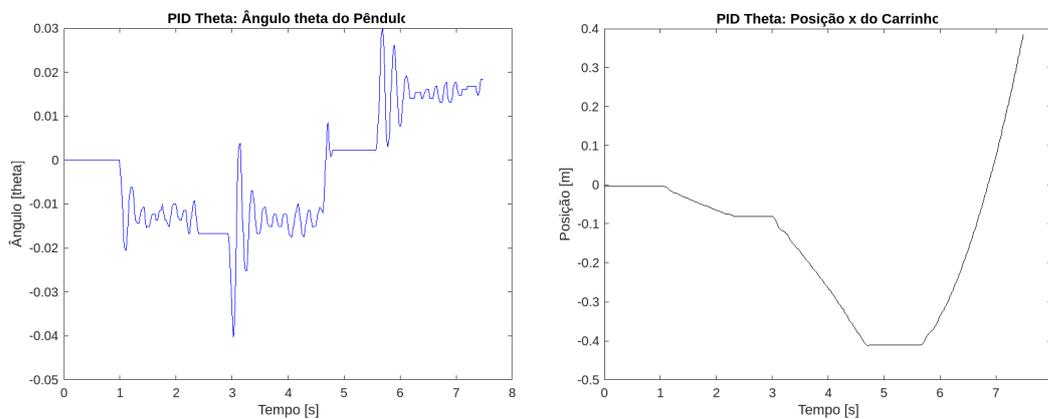


Figura 5.2: Resultados experimentais com o controlador *PID* com *feedback*  $\theta$  e  $x$

Diferente da análise empírica, o experimento realizado não convergiu para o resultado esperado. Como pode ser visualizado, a posição da haste é controlada mas o carrinho tende a  $x = \infty$ .

## 5.2 Resultados LQR

Os próximos experimentos realizados e apresentados neste trabalho, referem-se a aplicação do controlador LQR no controle da estabilidade do pêndulo invertido em relação da posição da base e do ângulo  $\theta$  da haste.

Assim como realizado para o controlador PID, inicialmente foram realizadas análises empíricas através do software Matlab, afim de verificar o comportamento do sistema e avaliar os ganhos escolhidos para o controlador. Em relação aos ensaios experimentais, o pêndulo foi posicionado na vertical, com a haste apontada para cima, e a base foi posicionada no centro do trilho. Aplicou-se, então, um impulso aleatório na ponta da haste e os dados referentes as variáveis de estados foram coletados para realizar as devidas análises.

Para este controlador, foram realizadas quatro abordagens diferentes, conforme listadas abaixo, e os seus respectivos resultados encontram-se apresentados ao longo dessa seção.

1. Análise do controlador LQR, sem se importar com o controle da base;
2. Análise do controlador LQR no controle da trajetória da base do pêndulo, para pontos escolhidos arbitrariamente;
3. Análise do controlador LQR no controle da trajetória da base do pêndulo, para seguir uma trajetória senoidal arbitrária;
4. Análise do controlador LQR em relação a rejeição de distúrbios relacionados aos parâmetros físicos do sistema.

Na análise dos resultados do controlador LQR, constatou-se um desempenho bem mais eficiente quando comparado ao controlador PID. O controlador LQR demonstrou eficiência de resposta rápida a distúrbios, resultando em um tempo de estabilização reduzido em comparação com o controlador PID. Além disso, o controlador LQR mostrou-se mais robusto em relação às variações nos parâmetros do sistema, mantendo um desempenho consistente mesmo diante de pequenas alterações.

A primeira análise deste controlador é apresentada na Figura 5.3 que demonstra a trajetória do ângulo da haste e a trajetória da base, a partir de uma simulação no Matlab, para os pesos  $Q_1$  e  $Q_2$  definidos arbitrariamente e os ganhos do controlador  $K$ .

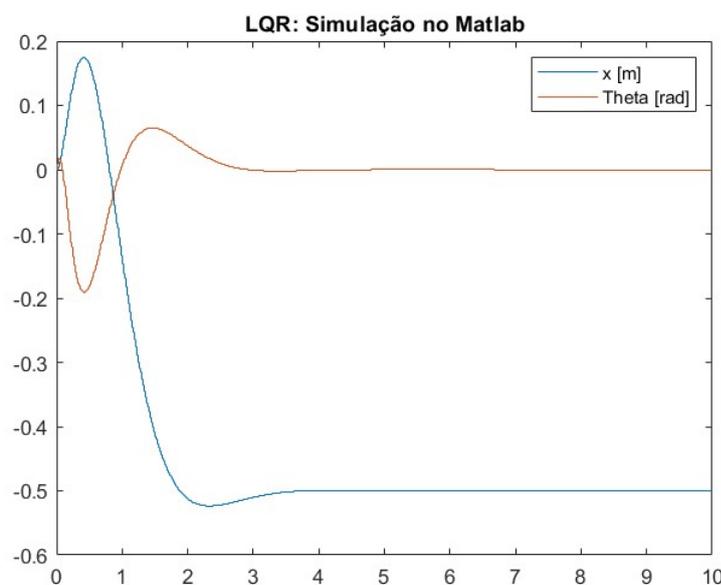


Figura 5.3: Resultados simulados com o controlador  $LQR$  no Matlab

Para o ensaio na bancada experimental, um programa em python foi desenvolvido para ser executado no microprocessador *Raspberry Pi B3+*, que representasse o equacionamento matemático e a lei de controle apresentadas, tornando possível reproduzir o experimento desejado. A haste se iniciou voltada para cima e a base localizada no centro da estrutura. Dois impulsos aleatório foram aplicado na extremidade da haste, sendo o segundo somente após o sistema atingir o regime permanente) e os dados medidos foram registrados e apresentados na Figura 5.4.

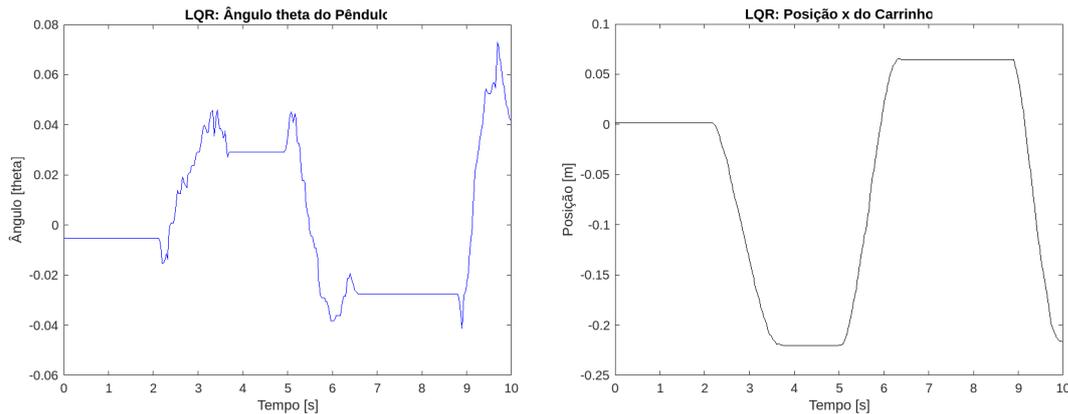


Figura 5.4: Resultados experimentais com o controlador *LQR*

Para esta abordagem, a posição do carrinho, em ambos os casos (simulado e experimental), não se estabiliza na origem. Tal fato se deve ao controlador *LQR* não ter uma componente integrativa para diminuir o erro em regime permanente. Entretanto, foi possível verificar que o controlador é capaz de controlar as variáveis de estado perto de  $\theta = 0$  e  $x = 0$ . Além disso, os resultados experimentais se assemelham aos resultados experimentais, diferentemente do que foi apresentado pelo controlador *PID*, o que valida os equacionamentos e teorias apresentadas.

Nas próximas duas subseções, serão apresentadas duas técnicas aplicadas para o controle da trajetória da base, conforme equacionamentos apresentados na Subseção 4.4.1.

### 5.2.1

#### **LQR: Trajetória Ponto a Ponto**

No quesito de controle de trajetória, a primeira análise feita para este controlador foi escolher posições  $x$  arbitrárias e analisar o comportamento do sistema e do controlador para seguir e estabilizar nas posições desejadas. Para realizar esta análise foi preciso estabelecer um  $X_d$  que variasse ao longo do tempo. Logo, as seguintes condições foram aplicadas:

$$\begin{cases} X_d = 0.25, & \text{se } 0 < t < 5 \\ X_d = -0.25, & \text{se } 5 < t < 10 \\ X_d = 0.15, & \text{se } 10 < t < 15 \end{cases} \quad (5-1)$$

Ao aplicar o controle LQR na trajetória ponto a ponto, observou-se resultados bem próximos ao desejado. O controlador LQR conseguiu rastrear a trajetória desejada, mantendo o pêndulo em um estado estável ao longo do percurso. Na Figura 5.5 é apresentado o resultado obtido através da simulação no Matlab, das variáveis de estado e do  $X_d$  utilizado como referência.

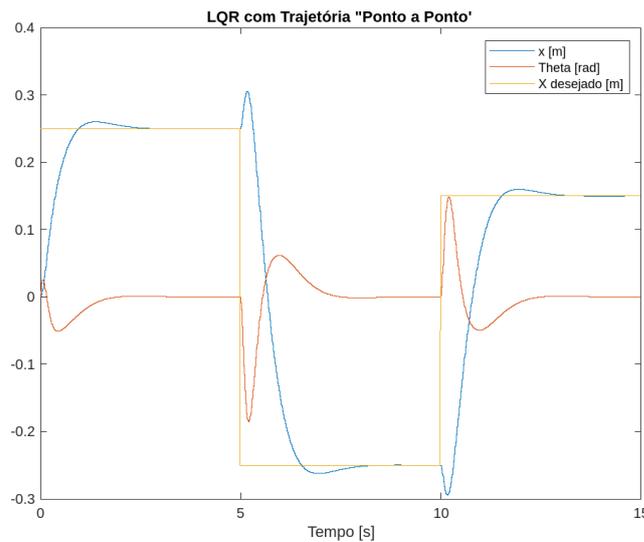


Figura 5.5: Resultados simulados com o controlador  $LQR$  seguindo uma trajetória pontual

Para a análise experimental, foi realizado os mesmos procedimentos dos controladores já apresentados, e o resultado registrado pelas variáveis de estado são apresentados na Figura 5.6. Vale ressaltar que o mesmo  $X_d$  utilizado na simulação empírica foi aplicado no ensaio realizado e este se encontra plotado junto do gráfico da posição do carrinho vs. tempo.

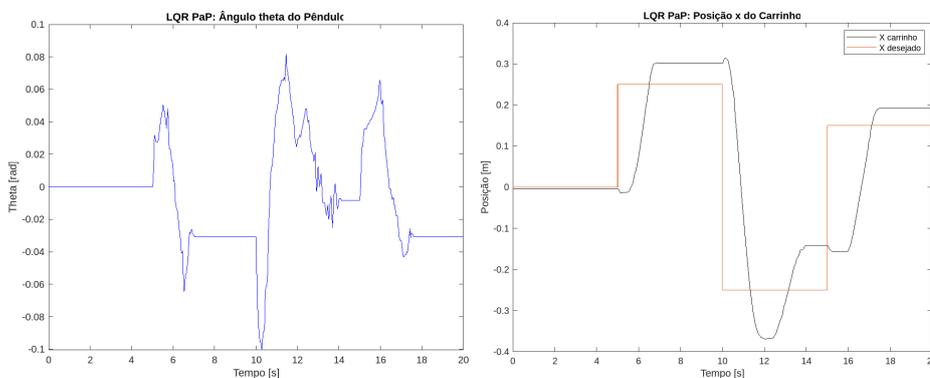


Figura 5.6: Resultados experimentais com o controlador  $LQR$  seguindo uma trajetória pontual

Analisando os resultados simulados e experimentais, observa-se que o controlador LQR foi capaz de controlar o ângulo  $\theta$  próximo de zero e estabilizar o carrinho nas posições desejadas. Ambos os resultados apresentados apresentam comportamentos similares, o que valida a técnica aplicada e os ganhos escolhidos para o controlador.

## 5.2.2

### LQR: Trajetória Senoidal

Seguindo a linha de controlar a trajetória do carrinho ao mesmo tempo que o pêndulo é equilibrado na posição vertical, foi estabelecida uma trajetória senoidal similar à como foi feito para a trajetória ponto a ponto. Logo, o seguinte  $X_d$  foi utilizado para as simulações e experimentos:

$$X_d(t) = 0.3 * \text{sen}(2 * t) \quad (5-2)$$

Na análise da trajetória senoidal, o controle LQR foi capaz de acompanhar a referência senoidal imposta. O pêndulo invertido foi capaz de seguir a trajetória desejada porém, apresentando um certo atraso em relação ao sinal de referência. O controlador LQR foi capaz de compensar as oscilações do sistema de forma eficiente, mantendo o pêndulo em equilíbrio durante toda a trajetória senoidal mesmo sofrendo perturbações externas.

Na Figura 5.7 é apresentado o resultado obtido através da simulação no Matlab, das variáveis de estado e do  $X_d$  utilizado como referência (conforme Equação 5-2);

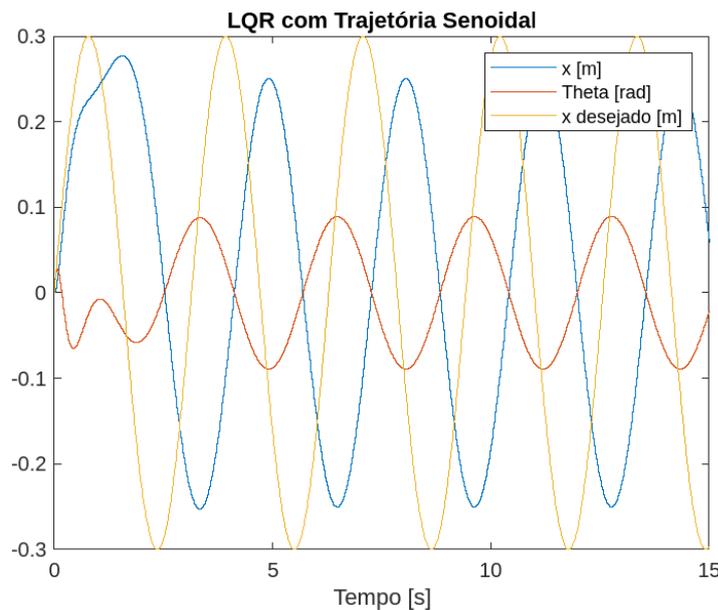


Figura 5.7: Resultados simulados com o controlador *LQR* seguindo uma trajetória senoidal

Para a análise experimental, foi realizado os mesmos procedimentos dos controladores já apresentados, e o resultado registrado pelas variáveis de estado são apresentados na Figura 5.8. Vale ressaltar que o mesmo  $X_d$  utilizado na simulação empírica foi aplicado no ensaio realizado e este se encontra plotado junto do gráfico da posição do carrinho vs. tempo.

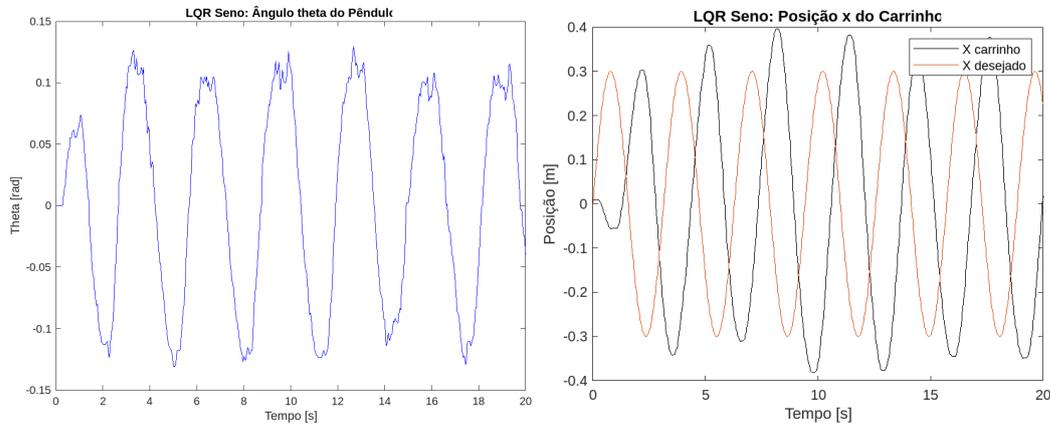


Figura 5.8: Resultados experimentais com o controlador  $LQR$  seguindo uma trajetória senoidal

Analisando os resultados simulados e experimentais, observa-se que o controlador LQR foi capaz de controlar o ângulo  $\theta$  próximo de zero e estabilizar o carrinho nas posições desejadas. Ambos os resultados apresentados apresentam comportamentos similares (apresentado o mesmo atraso em relação ao  $X_d$  aplicado), o que valida a técnica utilizada e os ganhos escolhidos para o controlador.

### 5.2.3

#### LQR: Rejeição à Distúrbios

No contexto da rejeição a distúrbios, o controle LQR foi capaz de lidar com perturbações externas de forma eficaz, rapidamente restaurando o equilíbrio do pêndulo invertido. O controlador LQR mostrou-se robusto diante das variações no ambiente e foi capaz de manter um controle preciso mesmo sofrendo mudanças nas suas propriedades físicas (massa ou geometria, por exemplo).

Neste ensaio experimental, foi adicionado um bloco de alumínio 6061-T6 de aproximadamente 3kg e um tarugo, também de alumínio 6061-T6, de aproximadamente 2.5kg (em momentos distintos). O objetivo deste procedimento foi analisar a robustez do controlado quando o sistema sofresse alteração em sua massa. Na Figura 5.9 é possível observar este experimento sendo realizado, adicionando-se as massas mencionadas a extremidade do pêndulo.

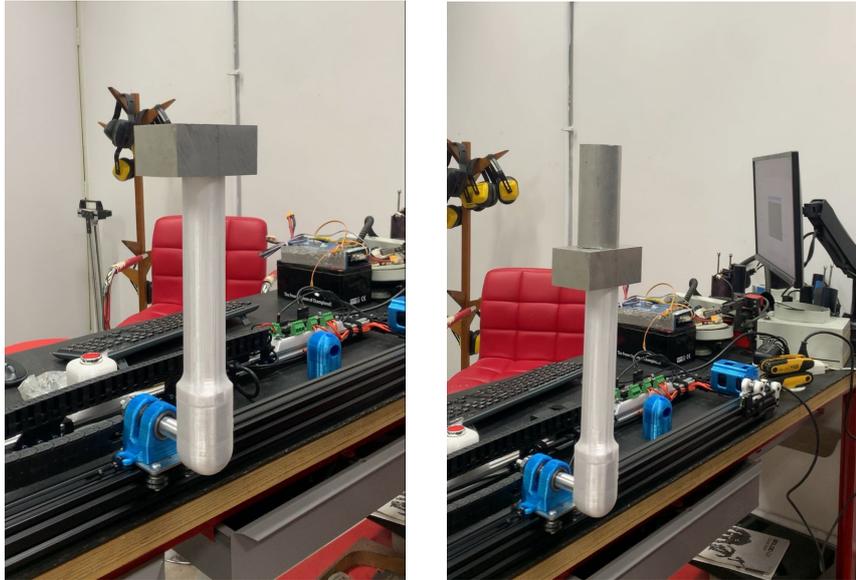


Figura 5.9: Controlador LQR rejeitando distúrbios

Após adicionar as massas, o controlador foi capaz de estabilizar o sistema e manter o pêndulo equilibrado mesmo sofrendo impulsos aleatórios para desestabilizar o sistema. Este resultado permite validar o controlador utilizado para situações em que o sistema sofra alterações em suas propriedades físicas.

### 5.3 Resultados *Swing-up*

Por último, foi aplicado a técnica de controle *Swing-up* ao problema do pêndulo invertido. Esta técnica consiste em levantar aplicar uma sequência de ações no sistema para transferir energia ao pêndulo, permitindo que ele atinja a posição vertical (haste apontada para cima). Isso é alcançado manipulando-se a energia potencial do pêndulo e convertendo-a em energia cinética para impulsionar o movimento.

Inicialmente simulações realizadas no software Matlab foram realizadas a fim de avaliar o comportamento do pêndulo invertido quando sujeito ao controlador não linear de *Swing-up*. Para este processo, diferente dos apresentados anteriormente, a haste inicia apontada pra baixo (ou seja, em sua posição de equilíbrio natural). Na Figura 5.10 observa-se os resultados obtidos através do Matlab.

Como foi observado o controlador de *energy shaping* fornece energia ao sistema até que a haste se aproxime de  $\theta = 0$ . Próximo deste ponto, a técnica de controle é alterada e a partir daí o pêndulo passa a ser estabilizado através do controlador LQR.

Partindo para o ensaio experimental, o mesmo procedimento apresentado para o resultado empírico foi adotado. Um programa utilizando a linguagem

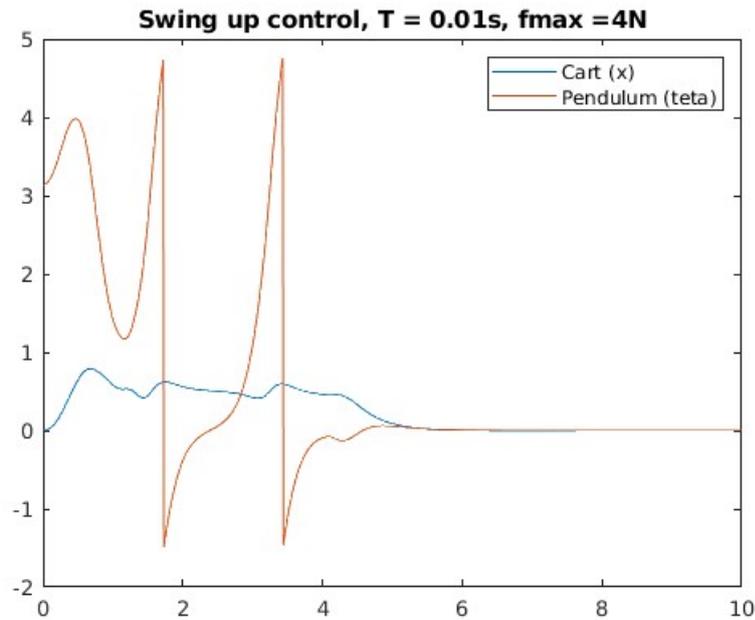


Figura 5.10: Resultados simulados com o controlador *Swing-up* no Matlab

de programação *python* foi desenvolvido e embarcado no *Raspberry Pi B3+* com o objetivo de aplicar as técnicas de controle desejadas de acordo com os equacionamento apresentados. O ângulo  $\theta$  foi constantemente observado e ao atingir o intervalo de  $-0.5 < \theta < 0.5 \text{ rad}$  o pêndulo passava a ser estabilizado através do controlador LQR.

Os dados das variáveis de estado foram registrados e se encontram apresentados na Figura 5.11.

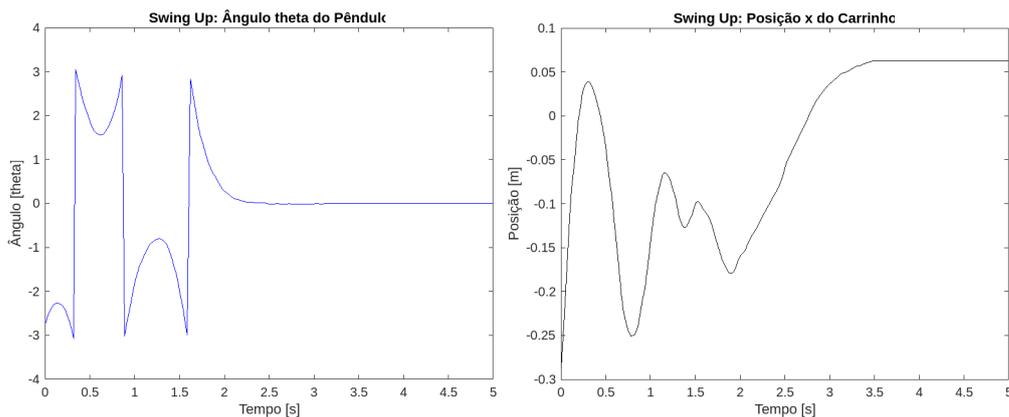


Figura 5.11: Resultados experimentais com o controlador *Swing-up*

Ao avaliar o método de controle *Swing-up*, observou-se um sucesso notável na tarefa de equilibrar o pêndulo invertido a partir de uma posição inicial com a haste orientada para baixo. O controlador *Swing-up* aplicou estratégias de energia para impulsionar o movimento do pêndulo, elevando-o até atingir a

posição vertical de equilíbrio (haste voltada para cima). Esse método mostrou-se eficiente e robusto, permitindo a estabilização do pêndulo em uma posição estável e controlada.

Por fim, ambos os resultados obtidos (empíricos, através do Matlab, e experimentais, através da bancada desenvolvida) apresentaram comportamentos similares e foram capazes de levantar a haste do pêndulo. Vale ressaltar que no ensaio experimental o sistema levou cerca de 3 segundos para atingir o regime permanente.

Na Figura 5.12 é possível verificar o pêndulo sendo equilibrado pelo controlador LQR, após o controlador *Swing-up* ser capaz de levantar o pêndulo de sua posição de equilíbrio natural (haste apontada para baixo) para  $\theta = 0$  (haste apontada para cima).

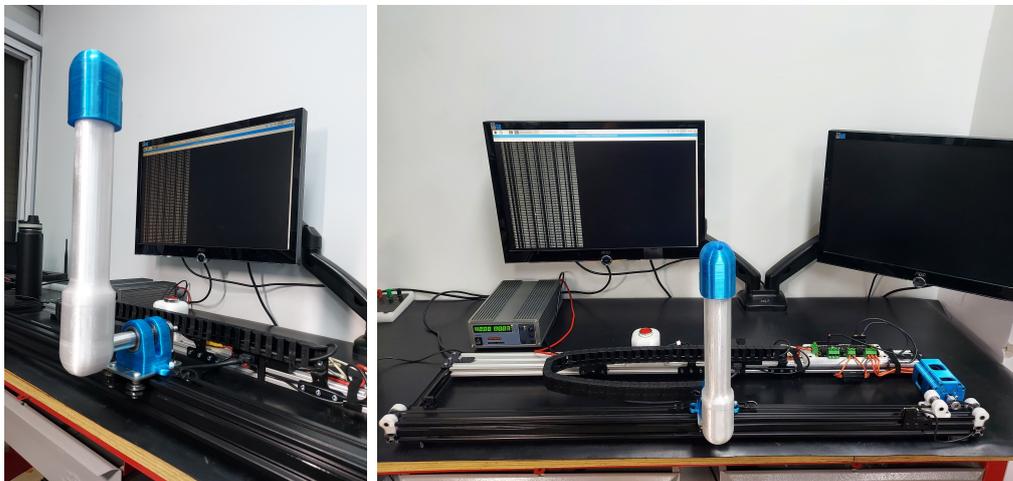


Figura 5.12: Pêndulo Invertido sendo equilibrado pelos controladores *Swing-up* e LQR

## 6

### Conclusões

Este estudo teve como objetivo projetar, construir e analisar um sistema de pêndulo invertido, bem como explorar três técnicas de controle distintas: PID, LQR e Swing-up. Foi desenvolvida uma bancada experimental de alta robustez, fornecendo uma base sólida para experimentos futuros e avanços na área de engenharia de controle, incluindo aplicações em sistemas mais complexos, como o pêndulo duplo invertido e o controle por *reinforcement learning*.

Os resultados obtidos destacam que o controlador PID conseguiu manter o pêndulo com a haste para cima até alcançar o limite do curso da base. No entanto, é importante observar que esse tipo de controlador não é adequado para sistemas com múltiplas variáveis de estado. Para obter um desempenho ideal, seria necessário realizar ajustes mais precisos nos ganhos.

Por outro lado, o controlador LQR demonstrou excelentes capacidades de controle simultâneo das variáveis  $x$  e  $\theta$  do pêndulo invertido sendo capaz de controlar a trajetória do carrinho ao mesmo que a haste se mantinha na posição vertical.

Além disso, o controlador não-linear Swing-up obteve sucesso ao equilibrar o pêndulo, partindo de uma posição inicial em que a haste estava orientada para baixo, até alcançar uma posição final com a haste apontando para cima.

Esses resultados contribuem para a compreensão e aplicação das técnicas de controle estudadas no contexto do pêndulo invertido. As descobertas obtidas neste trabalho fornecem uma base sólida para o desenvolvimento de estratégias avançadas de controle.

Em relação à bancada experimental, ela foi projetada levando em consideração a alta robustez necessária para garantir resultados confiáveis e precisos. O pêndulo em si foi cuidadosamente construído para garantir movimentos suaves e controlados. Capacidades de *feedback* em tempo real e registro de dados foram implementadas para capturar e registrar a resposta do sistema durante os experimentos de controle.

Esses resultados contribuem para a compreensão e aplicação das técnicas de controle estudadas no contexto do pêndulo invertido. As descobertas obtidas neste trabalho fornecem uma base sólida para o desenvolvimento de estratégias avançadas de controle, impulsionando o progresso da engenharia de controle e o aprimoramento de sistemas robóticos autônomos.

## Referências Bibliográficas

ABATI, G. F. (2020). **Simulação e Validação Experimental de Controle PID e LQR em um Sistema Sub-Atuado com Pêndulo Invertido**. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Mecânica – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

AMBA, A. J. (2015). **Feedback Linearization, Sliding Mode and Swing Up Control for the Inverted Pendulum on a Cart**. Dissertation for Degree of Master of Science MSc) in the Faculty of Engineering and Physical Sciences – University of Manchester.

AYALA, H. V. H. (2022). **Notas de Aula de Modelagem e Controle de Sistemas**. Notas de Aula Utilizada na Disciplina de Controle de Sistemas (ENG1719) da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

BORASE, R. P.; MAGHADE, D. K.; SONDKAR, S. Y. & PAWAR S. N. (2021). **A review of pid control, tuning methods and applications**. International Journal of Dynamics and Control.

DORF, R & BISHOP, R. H. (2009). **Sistemas de Controle Moderno**. 11 a ed. Rio de Janeiro: LTC, 752p.9

JÁCOME, I. C. (2013). **Controle Adaptativo por Modelo de referência e Estrutura Variável Discreto no Tempo**. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

KRUL, A. M. (2021). **Aprendizado por Reforço como Técnica de Controle para o Problema do Pêndulo Invertido**. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Mecânica – Faculdade de Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas.

MEGGIOLARO, M. A (2022). **Controle Discreto**. Notas de Aula Utilizada na Disciplina de Controle Discreto (ENG1421) da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

MEGGIOLARO, M. A (2022). **Controle de Sistemas Robóticos**. Notas de Aula Utilizada na Disciplina de Controle de Sistemas Robóticos (MEC2402) da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

NAVES, E. L. M. (2006). **Modelagem e Simulação do Controle de Postura Erreta Humana Quase-Estática com Reflexos Neuromusculares**. Tese de Doutorado em Engenharia elétrica – Universidade Federal de Uberlândia.

OGATA, K. (2003). Engenharia de Controle Moderno. 4 a ed, Pearson Prentice-Hall. PEREIRA, M. C. (2011) **Controle de Posição de um Pên-**

**dulo Planar usando Rodas de Reação.** Tese de Doutorado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

RAHMAN, E. & NAYFEH, A. H. (2003). **Two-Dimensional Control for Ship-Mounted Cranes: A Feasibility Study.** Journal of Vibration and Control – Virginia, EUA.

RIBEIRO, R. (2007). **Implementação de um Sistema de Controle de um Pêndulo Invertido.** Tese de Mestrado em Engenharia Elétrica – Universidade Federal de Itajubá.

ROBERGE, J. K. (1960). **The Mechanical Seal.** Bachelor's Thesis – Massachusetts Institute of Technology, May 1960.

SILVA, G. D. (2017). **Projeto, Modelagem, Simulação, Construção e Controle de um Veículo de duas Rodas Pêndulo Invertido.** Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Mecatrônica – Universidade Federal de Uberlândia.

STIMAC, A. K. (1999). **Standup and Stabilization of the Inverted Pendulum.** Doctoral Thesis of Mechanical Engineering - Massachusetts Institute of Technology.

## A

### Datasheet do Filamento TPU da Empresa Slim3d

Material flexível com bom alongamento, resiste a impactos e movimentos repetitivos sem desgaste ou rachaduras. Excelente redução de vibração e resistente a óleos e graxas, podendo ser utilizado em vedações.



Figura A.1: Filamento PETG da Empresa Slim3d para Impressão FDM

#### Características do Material

- Peso: 0.8 kg (embalagem selada a vácuo)
- Diâmetro Nominal: 1.75mm
- Tolerância dimensional: +/- 0.05mm
- Dureza: Shore A 92,5 +/-0,5
- Temperatura do bico de impressão: 190-220 °C
- Temperatura da mesa de impressão : 0-60 °C
- Densidade: 1,22 g/cm<sup>3</sup> (ISO 1183)
- Resistência à tração: 50 MPa (ISO 527)
- Tensão de tração a 100% de alongamento: 14 MPa (ISO 37)
- Tensão de tração a 300% de alongamento: 26 MPa (ISO 37)
- Alongamento na ruptura: 550% (ISO 527)
- Resistência ao rasgo: 130 KN/m (ISO 34-1)
- Deformação de compressão: 30 °C (ISO 815 - 23°C)

## B

### Datasheet do Filamento PETG da Empresa Slim3d

Material reciclável com alta transparência e brilho, alta transmissão de luz, boa tenacidade, excelente resistência mecânica e estabilidade química, suporta até 80 ° C (temperatura de transição vítrea) sem deformações.



Figura B.1: Filamento PETG da Empresa Slim3d para Impressão FDM

#### Características do Material

- Peso: 1 kg (embalagem selada a vácuo)
- Diâmetro Nominal: 1.75mm
- Tolerância dimensional: +/- 0.05mm
- Temperatura do bico de impressão: 220-250 °C
- Temperatura da mesa de impressão : 60-90 °C
- Densidade: 1,26 g/cm<sup>3</sup> (ISO 1183)
- Resistência à tração: 48 MPa (ISO 527 5mm/min)
- Deformação até a ruptura: 180% (ISO 527 5mm/min)
- Resistência à flexão: 65 MPa (ISO 178:2001)
- Resistência a impacto: 10,5 KJ/m<sup>2</sup> (ISO 180)
- Módulo de flexão: 1900 MPa (ISO 178:2001)