



Francisco Corrêa Dias

**Análise viscoelástica de estruturas de concreto
sujeitas a envelhecimento e dano do material**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientadora: Prof^a. Deane de Mesquita Roehl

Coorientador: Dr. Luis Fernando Paullo Muñoz

Rio de Janeiro

Março de 2020



Francisco Corrêa Dias

Análise viscoelástica de estruturas de concreto sujeitas a envelhecimento e dano do material

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof^a. Deane de Mesquita Roehl

Orientadora

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Dr. Luis Fernando Paulo Muñoz

Coorientador

Instituto Tecgraf/PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Júlio Jerônimo Holtz Silva Filho

Escola Politécnica, UFRJ

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Francisco Corrêa Dias

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Federal Fluminense (UFF) em 2016. No segundo semestre de 2017, ingressou no Mestrado em Engenharia Civil ofertado pelo Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, na área de concentração Estruturas. No ano de 2018, passou a integrar o grupo de Modelagem e Simulação Multifísica do Instituto Tecgraf/PUC-Rio como pesquisador. Atualmente, desenvolve pesquisas na área de modelos constitutivos, com foco na fluência e dano do concreto.

Ficha Catalográfica

Dias, Francisco Corrêa

Análise viscoelástica de estruturas de concreto sujeitas a envelhecimento e dano do material / Francisco Corrêa Dias; orientadora: Deane de Mesquita Roehl; coorientador: Luis Fernando Paullo Muñoz. – 2020.

119 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2020.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil e Ambiental - Teses. 2. Fluência do concreto. 3. Método dos elementos finitos. 4. Interface coesiva. 5. Fluência na flexão. I. Roehl, Deane de Mesquita. II. Paullo Muñoz, Luis Fernando. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. IV. Título.

CDD: 624

À minha família.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que está comigo em todos os momentos e permitiu que eu concluísse mais essa etapa da minha vida.

À Virgem Maria, sob o título de Nossa Senhora de Fátima, que é meu exemplo de confiança e esperança em Deus.

À minha família, pela educação, atenção e suporte oferecidos para atingir os meus objetivos. De modo especial, agradeço à minha mãe Maria Adelia, que lutou incansavelmente pela minha educação e é meu porto seguro; ao meu pai Francisco Carlos, que me incentivou com suas sábias palavras; à minha irmã Emanuelle, que sempre soube me dar bons conselhos; e ao meu irmão Raphaell, que acompanhou meu desenvolvimento desde os primeiros dias na escola.

À minha orientadora Deane Roehl, por toda confiança, estímulo e conhecimentos transmitidos ao longo de toda a pesquisa.

Ao meu coorientador Luis Fernando Muñoz, por todos os conselhos, sugestões e apoio, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

À Giovanna Barta, a mulher que conquistou o meu coração, me apoiou em todos os momentos e tornou mais leve os meus dias.

A todos os amigos que contribuíram de alguma forma nesta minha jornada. Em especial ao Andrew Lima, Danilo Rangel, Luan Alves, Marcos Chacon, Natália Rollim, Raquel Franklin e Rian de Miranda.

Ao Rafael Abreu e Gilcyvânia Castro, que foram muito mais que companheiros de apartamento, me acolhendo em suas vidas como um membro da família.

Aos sacerdotes e amigos William César e Demétrio Gomes.

Aos professores da Universidade Federal Fluminense que incentivaram meu desenvolvimento acadêmico, especialmente os professores Mauro Schulz, Mayra Perlingeiro e André Pereira.

A todos os meus colegas da PUC-Rio.

A todos os colegas que o Instituto Tecgraf/PUC-Rio me proporcionou. Um agradecimento especial à Bruna Silveira, Cristian Mejia, Fernanda Pereira, Julio Rueda, Kaio Benedetti, Lourdes Maria, Marcello Congro, Nilthson Noreña, Pedro Firme, Renan Costa, Renan Marks, Renato Escobar e Roberto Quevedo.

Ao Clube de Regatas do Flamengo, que em parceria com a PUC-Rio, permitiu que eu descobrisse o amor pela natação.

Aos professores e funcionários da PUC-Rio, por todas as contribuições prestadas.

À PUC-Rio e ao Instituto Tecgraf/PUC-Rio, por todos os auxílios concedidos, que possibilitaram o desenvolvimento deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Resumo

Dias, Francisco Corrêa; Roehl, Deane de Mesquita; Muñoz, Luis Fernando Paullo. **Análise viscoelástica de estruturas de concreto sujeitas a envelhecimento e dano do material**. Rio de Janeiro, 2020. 119p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A fluência do concreto é um fenômeno físico complexo e apresenta características diferentes das observadas na maioria dos materiais. Apesar dos diversos estudos desenvolvidos, a compreensão desse fenômeno ainda não é completa e os modelos disponíveis na literatura para simulação numérica variam em complexidade, número de parâmetros e condições que garantem a sua aplicabilidade. Os estudos mais recentes desenvolvidos por Bažant se destacam e reportam boa concordância com resultados experimentais. Seus fundamentos são utilizados no desenvolvimento do modelo de fluência básica linear adotado neste trabalho. Dessa forma, realiza-se uma revisão da viscoelasticidade linear, na qual apresentam-se os modelos reológicos, as relações constitutivas e as principais hipóteses adotadas no estado multiaxial de tensão. Discute-se as propriedades da fluência do concreto e apresenta-se a teoria da solidificação, que tem por objetivo representar a evolução ao longo do tempo das propriedades aparentes do concreto. A partir desse estudo, adota-se um modelo de fluência básica com envelhecimento definido por cadeias de Kelvin e desenvolve-se um algoritmo para integração numérica da taxa de deformação. O modelo é implementado em um programa de elementos finitos e validado com resultados experimentais de fluência linear. Por fim, este trabalho propõe a modelagem da não linearidade da fluência do concreto com o emprego de elementos de interface coesiva. Apresenta-se uma metodologia para calibração dos parâmetros envolvidos, e compara-se a resposta do modelo com resultados experimentais de um ensaio de fluência na flexão. Os resultados obtidos numericamente mostram boa concordância com os resultados experimentais tanto para o caso de fluência linear pura quanto para o caso de fluência e dano.

Palavras-chave

Fluência do concreto; método dos elementos finitos; interface coesiva; fluência na flexão.

Abstract

Dias, Francisco Corrêa; Roehl, Deane de Mesquita (Advisor); Muñoz, Luis Fernando Paulo (Co-advisor). **Viscoelastic analysis of concrete structures subject to material aging and damage**. Rio de Janeiro, 2020. 119p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Concrete creep is a complex physical phenomenon and has different characteristics from those observed in most materials. Despite several studies developed, the understanding of this phenomenon is not yet complete and the models available in the literature for numerical simulation vary in complexity, number of parameters and conditions that ensure their applicability. The latest studies developed by Bažant stand out and report good agreement with experimental results. Their fundamentals are used in the development of the linear basic creep model adopted in this work. Thus, it is carried out a review of linear viscoelasticity, in which the rheological models, the constitutive relationships, and the main assumptions adopted in the multi-axial state of stress are presented. Concrete creep properties are discussed and the solidification theory is presented, aiming to represent the development over time of the apparent concrete properties. Based on this study, a basic creep model with aging defined by Kelvin chains is adopted and an algorithm for numerical integration of the strain rate is developed. The model is implemented in a finite element program and validated with experimental linear creep results. Finally, this work proposes modeling the nonlinear dependence of concrete creep with the use of cohesive interface elements. A methodology for calibrating the parameters involved is presented, and the model response is compared with the experimental results of a bending creep test. The numerically obtained results show good agreement with the experimental results for both the pure linear creep and the creep and damage.

Keywords

Concrete creep; finite element method; cohesive interface; creep on bending.

Sumário

1	Introdução	20
1.1.	Motivação	20
1.2.	Objetivos e metodologia	21
1.3.	Estrutura da Dissertação	22
2	Fundamentos da viscoelasticidade linear	24
2.1.	Caracterização da Fluência	24
2.2.	Modelos reológicos viscoelásticos	28
2.2.1.	Modelo de Maxwell	30
2.2.2.	Modelo de Kelvin	33
2.2.3.	Cadeia de Kelvin	36
2.2.4.	Cadeia de Maxwell	37
2.2.5.	Modelos com envelhecimento	38
2.2.6.	Modelos com solidificação	40
2.3.	Relação integro-diferencial da tensão-deformação	43
2.4.	Operador integro-diferencial	46
2.5.	Princípio da correspondência	48
2.6.	Estado multiaxial de tensão	50
3	Fluência do concreto	52
3.1.	Propriedades e causas	52
3.2.	Fluência na tração	55
3.3.	Teoria da solidificação	56
3.3.1.	Deformação viscoelástica	58
3.3.2.	Função de envelhecimento	60
4	Modelo numérico de fluência com envelhecimento e dano	62
4.1.	Fluência com envelhecimento	62
4.1.1.	Solução analítica	62

4.1.2. Integração numérica	64
4.2. Modelagem de dano com elementos de interface coesiva	68
4.3. Implementação computacional	72
4.3.1. O <i>framework</i> GeMA	72
4.3.2. Estratégia numérica	73
5 Aplicações e Resultados	75
5.1. Validação do algoritmo de integração	75
5.1.1. Caso uniaxial	75
5.1.2. Caso multiaxial	79
5.2. Validação da implementação no GeMA	81
5.3. Calibração de parâmetros	84
5.3.1. Calibração da função de envelhecimento	85
5.3.2. Calibração da função de fluência	89
5.4. Fluência na flexão	91
5.4.1. Exemplo de aplicação	92
5.4.2. Modelagem numérica	94
5.4.3. Resultados da fluência na flexão	99
6 Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	105
6.1. Conclusões	105
6.2. Sugestões para Trabalhos Futuros	107
7 Referências bibliográficas	108
Apêndice	114
A. Determinação da curva média de evolução do módulo de elasticidade	114
A.1. Neville (2012)	114
A.2. Kocab <i>et al.</i> (2017)	116
B. Evolução da calibração dos parâmetros da cadeia de Kelvin por análise inversa	118

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Isócronas de fluência para o concreto (BAŽANT, 1988)	28
Figura 2.2 – Elementos básicos dos modelos reológicos: (a) a mola e (b) o amortecedor	29
Figura 2.3 – Mola e amortecedor em série: Modelo de Maxwell	30
Figura 2.4 – Teste padrão para o modelo de Maxwell (FLÜGGE, 1975)	33
Figura 2.5 – Modelo de Kelvin	33
Figura 2.6 – Ensaio padrão para o modelo de Kelvin (FLÜGGE, 1975)	35
Figura 2.7 – Cadeia de Kelvin	36
Figura 2.8 – Cadeia de Maxwell	37
Figura 2.9 – Viga em balanço com carga P na extremidade livre	49
Figura 3.1 – (a) Deformação por retração, (b) deformação mecânica (elástica + fluência) causada pela tensão e (c) recuperação depois do descarregamento	53
Figura 3.2 – Curvas de retração, fluência e recuperação depois do descarregamento (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018)	53
Figura 3.3 – Isócrona real (linha cheia) e fictícia (linha tracejada) (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018)	56
Figura 3.4 – Modelo completo da teoria da solidificação (BAŽANT; PRASANNAN, 1989a)	58
Figura 3.5 – Comparação das formas das funções de envelhecimento de Graslay e Lange (2007) e Bažant e Jirásek (2018) para o intervalo de 30 e 300 dias	61
Figura 4.1 – Parcelas da integração numérica para a cadeia de Kelvin	65
Figura 4.2 – Representação esquemática do domínio Ω , o contorno Γ , a fratura com superfície Γ_f e as forças de superfície T_c e T_{ex} . (MEJIA; PAULLO; ROEHL, 2020)	69

Figura 4.3 – Modelo de dano com amolecimento linear (MEJIA; PAULLO; ROEHL, 2020)	71
Figura 4.4 – Passos principais de uma simulação no GeMA (MENDES, 2016)	73
Figura 5.1 – Primeiro teste uniaxial: histórico de deformação analítico	76
Figura 5.2 – Primeiro teste unidimensional: resultado da integração numérica para diferentes incrementos de tempo	77
Figura 5.3 – Segundo teste unidimensional: resultado da integração numérica para diferentes incrementos de tempo	78
Figura 5.4 – Primeiro teste multiaxial: histórico de deformação	80
Figura 5.5 – Primeiro teste multiaxial: histórico de tensão obtido por integração numérica	80
Figura 5.6 – Segundo teste multiaxial: histórico de tensão obtido por integração numérica	81
Figura 5.7 – Modelos para validação: (a) modelo para o estado plano de tensão e (b) modelo para o caso tridimensional	83
Figura 5.8 – Teste multiaxial: Comparação do histórico de deformação obtido com a implementação no GEMA e com a solução analítica.	84
Figura 5.9 – Resultado da calibração para os dados de Neville (2012)	86
Figura 5.10 – Resultado da calibração para os dados de Kocab (2017)	87
Figura 5.11 – Comparação do comportamento das funções de envelhecimento para instantes fora do intervalo de calibração	88
Figura 5.12 – Calibração da função de fluência com o ensaio c_099_04	90
Figura 5.13 – Calibração da função de fluência ensaio c_099_08	91
Figura 5.14 – (a) Geometria do modelo de viga a ensaiar (b) esquema do ensaio de flexão. (OMAR <i>et al.</i> , 2009)	92
Figura 5.15 – Carga-deslocamento para o ensaio de flexão até a ruptura (OMAR <i>et al.</i> , 2009)	93
Figura 5.16 – Deslocamento de fluência básica para os carregamentos de 36, 60 e 80% de F_{max} (Omar <i>et al.</i> , 2009 apud SALIBA <i>et al.</i> , 2014)	94

Figura 5.17 – Malha de elementos finitos e região central com elementos de interface coesiva.	95
Figura 5.18 – Comparação entre o resultado do modelo numérico no GeMA com o resultado experimental obtido por Omar <i>et al.</i> (2009)	96
Figura 5.19 – Comparação da fluência básica do deslocamento no meio do vão Calibração com materiais semelhantes: (a) fluência linear (FL) e (b) fluência não linear (FNL)	100
Figura 5.20 – Comparação da fluência básica do deslocamento no meio do vão. Calibração com materiais semelhantes e análise inversa: (a) fluência linear (FL) e (b) fluência não linear (FNL)	101
Figura 5.21 – Configuração deformada da viga com elementos de interface ao final da aplicação da carga e depois de 60 dias. Deslocamentos ampliados em 200 vezes.	103
Figura 5.22 – Calibração combinada com análise inversa: Evolução da fratura ao longo do ensaio de fluência para o carregamento de 80% da carga máxima	104
Figura A.0.1 – Estimativa da evolução do módulo de elasticidade secante por tipo de agregado para os dados Neville (2012)	114
Figura A.0.2 – Estimativa da evolução do módulo de elasticidade secante com base na medição aos 28 dias por tipo de agregado para os dados Neville (2012)	115
Figura A.0.3 – Estimativa média da evolução do módulo de elasticidade secante com base na medição aos 28 dias para os dados Neville (2012)	115
Figura A.0.4 – Evolução dos módulos de elasticidade estático e dinâmico para o concreto A	116
Figura A.0.5 – Evolução dos módulos de elasticidade estático e dinâmico para o concreto B	117
Figura A.0.6 – Evolução média dos módulos de elasticidade estático e dinâmico para os concretos A e B	117
Figura B.0.7 – Valor mínimo da função objetivo por iteração para a calibração no Minerva	118
Figura B.0.8 – Médias e valores mínimos por iteração no Minerva	118
Figura B.0.9 – Resultado do ajuste de curva no Minerva	119

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Parâmetros adotados na cadeia de Kelvin	76
Tabela 5.2: Diferenças relativas máximas para diferentes incrementos de tempo no primeiro teste uniaxial.	77
Tabela 5.3 – Diferenças relativas máximas para diferentes incrementos de tempo no segundo teste uniaxial	79
Tabela 5.4 – Calibração da função de envelhecimento para os dados de Neville (2017)	86
Tabela 5.5 – Resultado da Calibração da função de envelhecimento para os dados de Kocab (2017)	87
Tabela 5.6 – Calibração da função de envelhecimento com os dados experimentais de Neville (2012) utilizando apenas os instantes de tempo $t' = 3, 7$ e 28 dias.	88
Tabela 5.7 – Características principais dos ensaios adotados na calibração da função de fluência	89
Tabela 5.8 – Resultado da calibração da função de fluência com o ensaio c_099_04	90
Tabela 5.9 – Resultado da calibração da função de fluência com o ensaio c_099_08	90
Tabela 5.10 – Propriedades mecânicas aos 28 dias determinadas por Omar <i>et al.</i> (2009)	92
Tabela 5.11 – Parâmetros adotados para o modelo de interface coesiva	96
Tabela 5.12 – Parâmetros adotados para o modelo de interface coesiva	98
Tabela 5.13 – Parâmetros adotados com a abordagem de calibração com materiais semelhantes	99
Tabela 5.14 – Parâmetros obtidos com a abordagem de calibração combinada com análise inversa	101

Lista de Quadros

Quadro 2.1 – Princípio da Superposição de Boltzmann	25
Quadro 4.1 – Algoritmo de integração local em um ponto de Gauss	68

Lista de Símbolos

$\dot{\square}$	Derivada de \square com respeito ao tempo
$\langle \square \rangle$	Operador de Macaulay sobre \square
$ \square $	Módulo de \square
$\square^{(\infty)}$	Valor limite de \square para $t \rightarrow \infty$
\square_i	Valor de \square para o i -ésimo elemento em uma cadeia reológica
\square_n	Valor de \square para o incremento n da integração numérica
$\square_{i,n}$	Valor de \square para o i -ésimo elemento em uma cadeia reológica no incremento n da integração numérica
\square_{ij}	Componente ij do tensor \square
a/c	Relação água cimento
\mathbf{C}_v	Matriz de flexibilidade elástica adimensional
\mathbf{D}_v	Matriz de rigidez elástica adimensional
\mathbf{D}	Matriz constitutiva tangente do elemento de interface
\mathbf{D}^{ve}	Matriz tangente consistente viscoelástico da integração numérica
d	Variável de dano para o amolecimento linear do elemento de interface coesiva
E	Módulo de elasticidade
$E(t)$	Módulo de elasticidade dependente do tempo
E_c	Módulo de elasticidade experimental estático
E_d	Módulo de elasticidade experimental dinâmico
E_i	i -ésimo módulo de elasticidade em uma cadeia reológica
$E^{(28)}$	Módulo de elasticidade aos 28 dias
f_c	Resistência à compressão do concreto
f_t	Resistência à tração do concreto

F_{\max}	Carga máxima aplicada no ensaio de flexão
G_f	Energia de fratura
H	Umidade
$H(t)$	Função degrau unitário
I	Momento de inércia transversal
$J(t, t')$	Função de fluência
$J_0(t - t')$	Função de fluência sem envelhecimento
K_n	Rigidez elástica normal do elemento de interface
K_s	Rigidez elástica de cisalhamento do elemento de interface
$q(t)$	Histórico de carregamento
r	Coefficiente de correlação
$R(t, t')$	Função de relaxação
$R_0(t - t')$	Função de relaxação sem envelhecimento
t	Tempo decorrido
t'	Instante de carregamento
$t - t'$	Tempo de carregamento
T	Temperatura
$v(t)$	Função de envelhecimento: crescimento relativo do volume sólido do material
w	Deslocamento vertical da viga
α	Constante empírica para a função de envelhecimento apresentada por Bažant e Jirásek (2018)
β_i	i -ésima constante empírica β na série exponencial da função de envelhecimento apresentada por Grasley e Lange (2007)
$\delta(t)$	Função delta de Dirac
$\Delta\varepsilon$	Incremento de deformação mecânica na integração numérica
$\Delta\varepsilon^{el}$	Incremento de deformação elástica instantânea na integração numérica
$\Delta\varepsilon^{ve}$	Incremento de deformação viscoelástica na integração numérica

$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor com as componentes de incremento de deformação na integração numérica
$\Delta \boldsymbol{\sigma}$	Vetor com as componentes de incremento de tensão na integração numérica
Δt	Intervalo de tempo na integração numérica
Δ_s	Separação cisalhante no elemento de interface
Δ_n	Separação normal no elemento de interface
Δ_o	Separação efetiva no início do dano no elemento de interface
Δ_f	Separação efetiva crítica do elemento de interface
Δ_m	Deslocamento efetivo no elemento de interface
$\hat{\varepsilon}$	Valor de deformação constante
ε_e	Deformação elástica instantânea
ε_v	Deformação viscosa
ε_{ve}	Deformação viscoelástica
$\varepsilon(t)$	Histórico de deformação
ε_σ	Deformação mecânica
ε_e	Deformação elástica
ε_c	Deformação de fluência
ε_{sh}	Deformação devido à retração
ε_T	Deformação térmica
ε_n^{ve}	Deformação viscoelástica no instante t_n na integração numérica
$\varepsilon_{i,n}^{ve}$	Deformação viscoelástica no i -ésimo elemento da cadeia de Kelvin no instante t_n na integração numérica
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor com as componentes de deformação (notação de Voigt)
η	Viscosidade
$\eta(t)$	Viscosidade dependente do tempo
$\hat{\sigma}$	Valor de tensão constante
σ_e	Tensão elástica
σ_v	Tensão viscosa

σ_n	Tensão no instante de tempo t_n na integração numérica
$\sigma(t)$	Histórico de tensão
σ	Vetor com as componentes de tensão (notação de Voigt)
σ_n	Vetor com as componentes de tensão no instante de tempo t_n da integração numérica
τ	Tempo de tempo de retardo no modelo de Kelvin ou tempo de relaxação no modelo de Maxwell
τ_i	i-ésimo tempo de retardo em uma cadeia reológica de Kelvin ou i-ésimo tempo de relaxação em uma cadeia reológica de Maxwell
τ_n	Tensão normal no elemento coesivo
τ_s	Tensão cisalhante no elemento coesivo
τ_{so}	Resistência cisalhante do elemento de interface coesiva
τ_{no}	Resistência normal do elemento de interface coesiva
$\Phi(t-t')$	Função de fluência de uma cadeia de Kelvin sem envelhecimento
$\psi(t-t')$	Função de fluência de uma cadeia de Maxwell sem envelhecimento
ω_i	i-ésima constante empírica ω na série exponencial da função de envelhecimento apresentada por Grasley e Lange (2007)
\mathcal{I}	Operador integro-diferencial de fluência
\mathcal{R}	Operador integro-diferencial de relaxação

1 Introdução

1.1. Motivação

A definição de um modelo que represente bem o comportamento fluência do concreto é uma tarefa desafiadora, pois os mecanismos associados estão conectados direta e indiretamente a diversos fatores, como por exemplo a resistência à compressão, a idade do concreto no instante do carregamento, as condições de umidade e a relação água/cimento. Desde a identificação do fenômeno por Hatt (1907), a fluência do concreto tem sido explorada por diversos trabalhos. Entretanto, a sua total compreensão total ainda não foi alcançada (BAŽANT, 2001; BAŽANT; JIRÁSEK, 2018).

Os primeiros avanços significativos na pesquisa da fluência do concreto ocorreram nas décadas de 1930 e 1940, a partir da necessidade de se projetar arcos de grande extensão, cuja estabilidade à longo prazo poderia não ser garantida sem a consideração da fluência na análise de flambagem. Além disso, a invenção do concreto protendido exigiu o conhecimento sobre as perdas de protensão causadas pela fluência e retração do concreto. Nesse período, Eugène Freyssinet, Gustaaf Paul Robert Magnel e Franz Dischinger foram os pioneiros no estudo desses assuntos. Simultaneamente, o interesse na construção de grandes barragens iniciado na década de 1930 estimulou a compreensão dos efeitos da relaxação, que impactava a velocidade de construção e a garantia de integridade da barragem.

Na década de 1950 houve o desenvolvimento do método de balanços sucessivos com o uso do concreto protendido pelo alemão Ulrich Finsterwalder. Um dos maiores saltos na pesquisa ocorreu nas décadas de 1960 e 1970, com o desenvolvimento da energia nuclear. Com ela, surgiam os problemas de integridade das estruturas de contenção e dos vasos de reação, para os quais a fluência em

temperaturas elevadas é motivo de grande preocupação. Esta pesquisa se estendeu durante os anos de 1970 e 1980 para problemas de prevenção ou mitigação de acidentes nucleares em elevadas temperaturas.

Nesse período, Rush *et al.* (1960, apud FARAH *et al.*, 2019) foi o primeiro a reportar o dano do concreto devido a fluência e diversos modelos analíticos foram propostos na literatura, como por exemplo, o método de módulo efetivo ajustado à idade proposto por Trost (1967, apud GOEL; KUMAR; PAUL, 2007) e a lei de dupla potência para a fluência proposto por Bazant e Osman (1976). Esses primeiros modelos, entretanto, foram desenvolvidos com o objetivo de facilitar a análise estrutural, sendo realizadas diversas simplificações.

Modelos mais recentes foram desenvolvidos com base na termodinâmica do fenômeno (BAŽANT *et al.*, 1997; ULM; COUSSY, 1995). O recente avanço das técnicas computacionais, tornou viável a consideração de modelos numéricos mais complexos e capazes de modelar efeitos até então desconsiderados. O envelhecimento e o dano do concreto são um resultado da combinação complexa de diversos fenômenos e pesquisas com formulações multifísicas têm sido propostas para sua descrição (ABDELLATEF *et al.*, 2019).

No grupo de Modelagem e Simulação Multifísica do Instituto Tecgraf/PUC-Rio, estudos sobre modelagens computacionais da fluência em materiais cimentícios (BRANDÃO *et al.*, 2017) e em rochas salinas (FIRME; ROEHL; ROMANEL, 2016; FIRME *et al.*, 2018) vêm sendo amplamente desenvolvidos, assim como os estudos sobre modelagem computacional de fraturas (ESCOBAR *et al.*, 2016; MEJIA; PAULLO; ROEHL, 2015; RUEDA CORDERO; MEJIA SANCHEZ; ROEHL, 2019). A combinação do modelo de interface coesiva com o comportamento de fluência se mostra uma abordagem interessante para a representação da fluência não linear.

1.2. Objetivos e metodologia

O objetivo deste trabalho é estudar um modelo para a fluência básica do concreto considerando os fenômenos de envelhecimento e dano. Adicionalmente, busca-se formular e incorporar tais efeitos em um modelo numérico para simulação

em um programa de Elementos Finitos a fim de representar estruturas sujeitas a elevados níveis de carregamento.

Para tanto, discutem-se os fundamentos da viscoelasticidade linear de um material com solidificação e realiza-se sua implementação computacional. Elementos de interface coesiva são empregados para representar o comportamento da fluência não linear causado pelo dano do material. Apresenta-se uma metodologia de calibração dos parâmetros do modelo e, por fim, estuda-se um caso de fluência na flexão.

1.3. Estrutura da Dissertação

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos e dois apêndices de modo a apresentar as etapas envolvidas na modelagem computacional da fluência e dano do concreto. Esta introdução compõe o Capítulo 1 do trabalho.

No Capítulo 2, são descritos os fundamentos da viscoelasticidade linear adotadas no trabalho. Apresentam-se os modelos reológicos, a relação integro-diferencial e as considerações necessárias para a análise da fluência no estado multiaxial de tensão.

No capítulo 3, apresenta-se as características particulares da fluência do concreto, discutindo-se brevemente as suas causas. Ao final, apresenta-se a teoria da solidificação, que busca representar o efeito do envelhecimento utilizando-se conceitos baseados nos fenômenos físicos e químicos no concreto.

O capítulo 4 traz as principais contribuições deste trabalho. Desenvolve-se por etapas o modelo numérico da fluência com envelhecimento e a este adiciona-se um mecanismo de dano a partir de elementos de interface coesiva. São apresentadas as soluções analíticas para o modelo viscoelástico adotado considerando um teste de fluência e o esquema de integração desenvolvido. Desse modo, apresenta-se a formulação dos elementos de interface coesiva e discute-se a implementação computacional do modelo viscoelástico com dano.

No capítulo 5, realiza-se a validação das implementações desenvolvidas neste trabalho a partir da análise local do ponto material e da análise global de problemas estruturais. Discutem-se as dificuldades da calibração do modelo e propõe-se a aplicação de uma metodologia que facilita o processo a partir da diminuição do

número de parâmetros a serem calibrados simultaneamente. Por conseguinte, compara-se o modelo proposto na dissertação com um ensaio de fluência na flexão de vigas de concreto presente na literatura. Para tal, utilizam-se duas abordagens para a determinação dos parâmetros: a primeira a partir de ensaios uniaxiais de concretos semelhantes e a segunda a partir da combinação de técnicas de análise inversa. Por fim, apresentam-se e discutem-se os resultados obtidos.

No Capítulo 6, expõem-se as conclusões desta dissertação e as sugestões para trabalhos futuros.

O Apêndice A, apresenta o tratamento dos dados utilizados na calibração de parâmetros da função de envelhecimento.

O apêndice B, expõem-se as informações do processo de calibração de parâmetros combinada com métodos de análise inversa.

2 Fundamentos da viscoelasticidade linear

Alguns materiais apresentam influência da taxa de carregamento em sua resposta mecânica, de tal forma que, se alcançam maiores deformações quando as tensões crescem de forma mais lenta. Esses materiais apresentam uma taxa de deformação dependente da tensão e são conhecidos como materiais viscoelásticos. Metais em elevadas temperaturas, concreto e plásticos apresentam esse comportamento, que pode se dar de maneira linear ou não linear com a tensão aplicada.

Nesse capítulo serão abordados os principais conceitos e fundamentos da viscoelasticidade linear clássica. Visa-se apresentar os principais conceitos e relações essenciais para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

2.1. Caracterização da Fluência

Os materiais viscoelásticos apresentam dois fenômenos básicos: a fluência e a relaxação. O primeiro consiste no aumento gradual das deformações ao longo do tempo quando se impõe uma tensão constante. O segundo é caracterizado pela diminuição das tensões ao longo do tempo quando se impõe uma deformação constante. A fluência e a relaxação são diretamente conectados e possuem uma origem comum: o comportamento viscoso da microestrutura do material.

Modelos constitutivos que consideram tais fenômenos são importantes para evitar consequências indesejadas, como por exemplo, grandes deslocamentos a longo prazo nas estruturas (BAŽANT; YU; LI, 2012). Uma abordagem possível baseia-se na dependência entre o valor atual de tensão (ou deformação) e toda a história anterior de deformação (ou tensão).

A viscoelasticidade linear clássica baseia-se no princípio da superposição de Boltzmann, que define como resposta a uma combinação de carregamentos a superposição de efeitos (MARKOVITZ, 1977). Isso significa que a relação entre o

histórico de tensões e o histórico de deformações é definida por um operador linear. No Quadro 2.1 esse princípio é enunciado.

Quadro 2.1 – Princípio da Superposição de Boltzmann

Se, para um dado material,
o histórico de tensão $\sigma_a(t)$ corresponder ao histórico de deformação $\varepsilon_a(t)$
e o histórico de tensão $\sigma_b(t)$ corresponder ao histórico de deformação $\varepsilon_b(t)$
então,
para constantes reais arbitrárias c_a e c_b ,
 $\sigma(t) = c_a \sigma_a(t) + c_b \sigma_b(t)$ corresponde a $\varepsilon(t) = c_a \varepsilon_a(t) + c_b \varepsilon_b(t)$

Fonte: (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018, p. 10, tradução nossa) ¹

É importante salientar que o princípio da superposição não é uma lei física da natureza e sua aplicação é válida como uma aproximação em determinadas condições. No caso do concreto, que é foco deste trabalho, esse princípio é uma hipótese realista se as tensões permanecerem na faixa de serviço. No caso da fluência básica (fluência de um corpo de prova selado) com tensões na faixa de serviço, a hipótese de linearidade está de acordo com os resultados experimentais (NEVILLE, A M, 1960; NEVILLE, AM., 2012).

A partir desse princípio, a relação uniaxial entre tensão-deformação em um material viscoelástico pode ser caracterizada por uma única função. Há duas abordagens equivalentes: uma se baseia na função de fluência (*compliance function*) $J(t, t')$ e a outra na função de relaxação (*relaxation function*) $R(t, t')$.

Considerando um teste de fluência em que um corpo sem tensões iniciais é submetido a uma tensão constante $\hat{\sigma}$ no instante t' , tem-se o histórico de tensão

$$\sigma(t) = \hat{\sigma}H(t - t') \quad (2.1)$$

¹ If, for a given material, stress history $\sigma_a(t)$ corresponds to strain history $\varepsilon_a(t)$ and stress history $\sigma_b(t)$ corresponds to strain history $\varepsilon_b(t)$ then, for arbitrary real constants c_a and c_b , $\sigma(t) = c_a \sigma_a(t) + c_b \sigma_b(t)$ corresponds to $\varepsilon(t) = c_a \varepsilon_a(t) + c_b \varepsilon_b(t)$ (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018, p. 10).

onde $H(t)$ é a função degrau unitário definida por:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Conceitualmente, o valor de $H(t)$ em $t=0$ não é definido, mas algumas abordagens assumem como 0,5 por ser a média dos valores extremos. Neste trabalho, entretanto, adota-se o mesmo critério utilizado por Bažant e Jirásek (2018), em que admite-se $H(0) = 1$ por maior conveniência.

O material viscoelástico não apresenta deformação antes do instante de carregamento t' . Em t' há uma deformação instantânea e após t' há o acréscimo de deformações. Seguindo o princípio da superposição, o histórico de deformações correspondente assume a forma

$$\varepsilon(t) = \hat{\sigma} J(t, t') \quad (2.3)$$

Em (2.3) a função de fluência $J(t, t')$ é a razão entre o histórico de deformação $\varepsilon(t)$ e a tensão constante $\hat{\sigma}$. Seu valor pode ser interpretado como a deformação no tempo t causada por uma tensão unitária atuando a partir do tempo t' . Para valores de $t < t'$, J é igual a zero. No caso de um material elástico, por exemplo, a função de fluência assume a forma

$$J(t, t') = \frac{1}{E} H(t - t') \quad (2.4)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material.

De maneira análoga, no teste de relaxação aplica-se uma deformação constante $\hat{\varepsilon}$ no instante t' , obtendo-se

$$\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon} H(t - t') \quad (2.5)$$

A tensão para esse caso é nula até a aplicação da carga em t' . No instante t' tem-se uma tensão instantânea, que diminui o seu valor com o passar do tempo t . O histórico de tensão é dado por

$$\sigma(t) = \hat{\varepsilon} R(t, t') \quad (2.6)$$

A função de relaxação $R(t, t')$ em (2.6) é a razão entre o histórico de tensão $\sigma(t)$ e a deformação constante $\hat{\varepsilon}$. Seu valor pode ser interpretado como a tensão no tempo t causada por uma deformação unitária a partir do tempo t' . Para valores de $t < t'$, R é igual a zero. No caso de um material elástico, por exemplo, a função de fluência assume a forma

$$R(t, t') = E H(t - t') \quad (2.7)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material.

As funções de relaxação e fluência assumem uma função na viscoelasticidade semelhante àquele assumido pelo módulo da elasticidade e seu inverso na elasticidade linear.

Outro fenômeno observado no comportamento de materiais viscoelásticos é o envelhecimento (*aging*), que é caracterizado pela mudança das propriedades mecânicas aparentes do material ao longo do tempo. Dessa forma, em um material com envelhecimento, as respostas obtidas variam conforme a mudança dos instantes t e t' avaliados. Já um material sem envelhecimento, a resposta depende apenas da duração do carregamento $t - t'$ e a função de fluência pode ser escrita como

$$J(t, t') = J_0(t - t') \quad (2.8)$$

onde J_0 é a função de fluência dependente apenas do tempo de carregamento.

O mesmo ocorre com a função de relaxação, que assume a forma

$$R(t, t') = R_0(t - t') \quad (2.9)$$

onde R_0 é a função de relaxação dependente apenas do tempo de carregamento.

O concreto é um material que apresenta envelhecimento, uma vez que as reações químicas em sua microestrutura alteram suas propriedades viscoelásticas ao longo do tempo. Concretos com idade suficientemente elevada apresentam

pouca variação em suas propriedades, mas de modo geral, um modelo adequado para concreto deve considerar os efeitos de envelhecimento.

O princípio da superposição pode ser aplicado no estudo de materiais com envelhecimento se forem considerados os valores atuais de tensão e deformação. O concreto apresenta um comportamento viscoelástico linear até cerca de 40 a 50% de sua resistência à compressão (NEVILLE, A M, 1960; NEVILLE, AM., 2012). A Figura 2.1 apresenta as isócronas de fluência do concreto, que ilustram transição da fluência linear para a não linear.

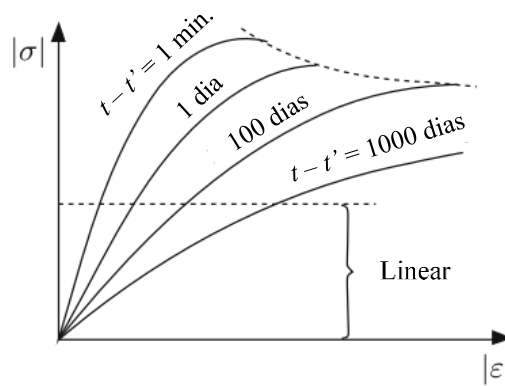


Figura 2.1 – Isócronas de fluência para o concreto (BAŽANT, 1988)

Para a construção de uma curva isócrona de fluência são realizados ensaios de mesma duração com vários níveis de carregamento. A não linearidade da fluência do concreto é causada pelo aumento da microfissuração do concreto ao longo do tempo.

2.2. Modelos reológicos viscoelásticos

As funções de fluência e relaxação podem ser aproximadas por expressões analíticas obtidas com modelos reológicos. Esses tipos de modelos representam esquemas idealizados dos processos que ocorrem na microestrutura do material e são compostos pela combinação de elementos discretos de dois tipos básicos: a mola e o amortecedor (FLÜGGE, 1975). A Figura 2.2 apresenta um esquema desses elementos básicos.



Figura 2.2 – Elementos básicos dos modelos reológicos: (a) a mola e (b) o amortecedor

O elemento de mola apresenta um comportamento elástico linear. A aplicação de um carregamento causa uma deformação que pode ser totalmente recuperada, sendo, portanto, uma deformação reversível. Nesse processo, o material elástico linear conserva sua energia interna e a relação entre a tensão σ_e e a deformação ε_e independe do tempo de carregamento, seguindo a Lei de Hooke

$$\sigma_e = E \varepsilon_e \quad (2.10)$$

onde E é o módulo de elasticidade.

No caso do amortecedor, admite-se que ele seja composto por um pistão dentro de um cilindro com o fundo perfurado, permitindo assim a passagem de ar. Considera-se que entre pistão e a parede do cilindro há um lubrificante bastante viscoso, sendo necessária a aplicação de uma carga para existir um deslocamento relativo entre as partes. A velocidade com a qual o pistão se move é maior com o aumento da carga e, considerando o lubrificante como fluido newtoniano, o comportamento viscoso é governado por uma relação proporcional entre a tensão σ_v e a taxa de deformação $\dot{\varepsilon}_v$:

$$\sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_v \quad (2.11)$$

onde o fator de proporcionalidade η é a viscosidade.

A combinação desses dois elementos básicos pode ser feita para gerar modelos compostos. Os modelos mais simples e consagrados na literatura são o de Maxwell e o de Kelvin, que consistem no arranjo de uma mola e um amortecedor em série e em paralelo, respectivamente.

2.2.1. Modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell é composto por um arranjo em série de uma mola e um amortecedor, como se pode observar na Figura 2.3.

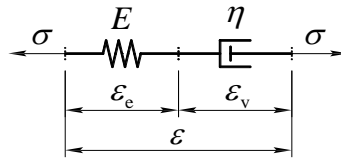


Figura 2.3 – Mola e amortecedor em série: Modelo de Maxwell

A tensão total σ aplicada no conjunto é a mesma nos dois elementos básicos e a deformação total ϵ sofrida pelo conjunto é a soma da deformação individual de cada elemento.

$$\sigma = \sigma_v = \sigma_e \quad (2.12)$$

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_v \quad (2.13)$$

Derivando as expressões (2.10) e (2.13) é possível combiná-las com (2.11) para obter a relação tensão deformação em um elemento de Maxwell.

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (2.14)$$

Considerando um teste de fluência com o carregamento aplicado em $t' = 0$, (2.1) assume a forma

$$\sigma(t) = \hat{\sigma}H(t) \quad (2.15)$$

Para valores de $t \geq 0$, a função $H(t)$ torna-se unitária e a relação diferencial em (2.14) transforma-se em uma equação diferencial de primeira ordem:

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\hat{\sigma}}{\eta} \quad (2.16)$$

Integrando (2.16) obtém-se

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\eta}t \quad (2.17)$$

onde ε_0 é a constante de integração.

Para determinar ε_0 , uma condição inicial se faz necessária. Em $t = 0$, no instante de aplicação da tensão $\hat{\sigma}$, o amortecedor apresenta deformação $\varepsilon_v = 0$, sendo a deformação total ε resultado apenas da deformação instantânea ε_e da mola. Dessa forma, $\varepsilon(0) = \hat{\sigma}/E$ e a expressão (2.17) pode ser reescrita na forma:

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} + \frac{\hat{\sigma}}{\eta}t \quad (2.18)$$

A fim de obter a expressão para a função de fluência, divide-se (2.18) pela tensão constante aplicada $\hat{\sigma}$:

$$J_0(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad (2.19)$$

Por conveniência, define-se o parâmetro $\tau = \eta/E$, conhecido como tempo de relaxação, e reescreve-se a função de fluência como

$$J_0(t) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \quad (2.20)$$

que é válida para valores de $t \geq 0$. Quando os valores de t são negativos, a função de fluência deve ser nula, uma vez que não há carregamento aplicado. Sendo assim, a expressão completa da função de fluência pode ser apresentada como

$$J_0(t) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) H(t) \quad (2.21)$$

É importante observar que a função de fluência (2.21) pode ser interpretada como a soma das funções de flexibilidade da mola, $(1/E)H(t)$, e do amortecedor, $(t/\eta)H(t)$. Para unidades acopladas em série a deformação total é a soma das

deformações parciais e, conseqüentemente, a função de fluência total é a soma das funções de fluência parciais.

No caso de um teste de relaxação, considera-se uma deformação constante $\hat{\varepsilon}$ aplicada no instante $t' = 0$. O histórico de deformação é dado por

$$\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon}H(t) \quad (2.22)$$

Substituindo (2.22) na relação (2.14) e admitindo-se $t \geq 0$ obtém-se

$$\frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} = 0 \quad (2.23)$$

Como no caso anterior, utilizando o tempo de relaxação τ , tem-se

$$\tau\dot{\sigma}(t) + \sigma(t) = 0 \quad (2.24)$$

que é uma equação diferencial homogênea de primeira ordem com solução igual a

$$\sigma(t) = Ce^{-t/\tau} \quad (2.25)$$

onde C é a constante de integração que pode ser determinada pela condição inicial $\sigma(0) = E\hat{\varepsilon}$, obtida considerando a resposta do modelo depois da aplicação de deformação imposta subitamente. Substituindo $C = E\hat{\varepsilon}$, obtém-se

$$\sigma(t) = E\hat{\varepsilon}e^{-t/\tau} \quad (2.26)$$

Dividindo a expressão (2.26) pela deformação imposta $\hat{\varepsilon}$ obtém-se a função de relaxação

$$R_0(t) = Ee^{-t/\tau}H(t) \quad (2.27)$$

Na Figura 2.4, apresenta-se o teste padrão para o modelo de Maxwell. Ele é capaz de apresentar de forma esquemática o comportamento esperado para esse arranjo, uma vez que é composto por uma etapa de fluência para $0 < t < t_1$ seguido uma etapa de relaxação a partir de t_1 .

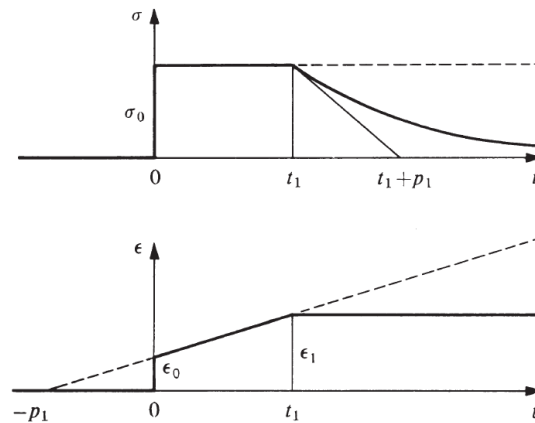


Figura 2.4 – Teste padrão para o modelo de Maxwell (FLÜGGE, 1975)

A linha tracejada na Figura 3.4 representa a resposta que o modelo de Maxwell apresentaria, caso a etapa de fluência fosse continuada além de t_1 . Esse modelo também é conhecido como fluido de Maxwell, já que ele apresenta a propriedade típica de um fluido: a capacidade de se deformar indefinidamente sob tensão constante.

2.2.2. Modelo de Kelvin

O modelo de Kelvin, também conhecido como modelo de Kelvin-Voight, é composto por um elemento de mola e um elemento de amortecedor acoplados em paralelo, conforme a Figura 2.5.

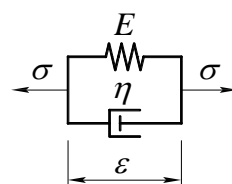


Figura 2.5 – Modelo de Kelvin

As duas unidades em paralelo transmitem a mesma deformação e a tensão total é obtida pela soma das tensões em cada elemento. Dessa forma, tem-se

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \quad (2.28)$$

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v \quad (2.29)$$

Obtém-se a relação entre tensão-deformação do conjunto substituindo (2.10) e (2.11) na equação (2.29):

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (2.30)$$

Em um ensaio de fluência, com histórico de tensão conforme (2.15) e valores de $t \geq 0$, obtém-se a partir de (2.30) a equação diferencial

$$E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) = \hat{\sigma} \quad (2.31)$$

Considerando a condição inicial $\varepsilon(0) = 0$, obtém-se como solução particular

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (2.32)$$

onde $\tau = \eta/E$ é conhecido nesse contexto como tempo de retardo. De forma análoga ao procedimento realizado para a cadeia de Maxwell, obtém-se a função de fluência para o modelo de Kelvin, que é dada por

$$J_0(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-t/\tau}) H(t) \quad (2.33)$$

A função de fluência é nula para $t = 0$ e cresce de forma contínua até o valor assintótico de $1/E$. Observa-se que para tempos de carregamento muito menores que τ o comportamento é predominantemente viscoso, sendo as deformações elásticas negligenciáveis, e em tempos de carregamento muito maiores que τ , o comportamento é predominantemente elástico, sendo as deformações viscosas negligenciáveis. Esse comportamento é o oposto do apresentado pelo modelo de Maxwell.

Já em um ensaio de relaxação com histórico de deformação conforme (2.22) e valores de $t \geq 0$ uma análise simplista pode conduzir a um resultado equivocado de histórico de tensão igual a $\sigma(t) = E\hat{\varepsilon}$. Esse histórico representa a resposta de uma mola elástica sem um amortecedor conectado a ela. A correta análise leva em consideração a aplicação instantânea da carga em $t = 0$. A derivada da função degrau unitário, conhecida como função delta de Dirac, $\delta(t)$, deve ser aplicada. Dessa forma, o histórico de tensão correspondente é dado pela expressão

$$\sigma(t) = E\hat{\varepsilon}H(t) + \eta\hat{\varepsilon}\delta(t) \quad (2.34)$$

e a função de relaxação para o modelo de Kelvin é

$$R_0(t) = EH(t) + \eta\delta(t) \quad (2.35)$$

Devido ao acoplamento em paralelo, pode-se esperar que a função de relaxação seja igual à soma das funções de relaxação dos elementos individuais, o que de fato ocorre. As funções de relaxação da mola e do amortecedor são, respectivamente, $EH(t)$ e $\eta\delta(t)$. A descontinuidade da função de relaxação, entretanto, não é notada em modelos reológicos comumente adotados para concreto. Nesse caso, considera-se cadeias de elementos básicos, que são arranjados de tal forma que um salto instantâneo na deformação seja acomodado em saltos finitos de tensão.

O teste padrão para o modelo de Kelvin é apresentado na Figura 2.6.

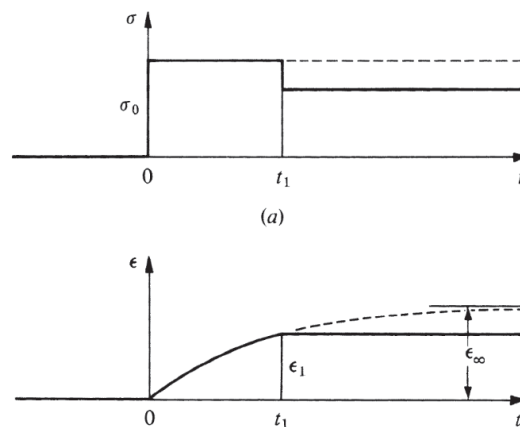


Figura 2.6 – Ensaio padrão para o modelo de Kelvin (FLÜGGE, 1975)

As linhas tracejadas apresentam o comportamento do ensaio de fluência para valores de tempo além de t_1 . Nesse ensaio, como já citado, o comportamento assintótico conduz o valor da deformação para ϵ_∞ . Tal comportamento é próximo ao de um sólido e difere no fato da deformação não assumir seu valor final de uma única vez, se aproximando dele de forma gradual. Por essa semelhança, o modelo de Kelvin também é conhecido como sólido de Kelvin.

No teste padrão, pode-se observar que o modelo de Kelvin é incapaz de representar qualquer deformação elástica instantânea e não apresenta relaxação gradual da tensão quando submetido a deformação constante.

2.2.3. Cadeia de Kelvin

O acoplamento de modelos reológicos em série corresponde à soma das funções de fluência dos modelos individuais. Conectar em série diversos modelos de Kelvin (chamados de unidades de Kelvin) constrói a cadeia de Kelvin. Cada unidade da cadeia descreve o processo de fluência em torno de um intervalo de tempo, que geralmente apresenta ordem de grandeza próxima ao seu tempo de retardo. Combinar unidades com diferentes tempos de retardo pode ampliar a concordância entre a cadeia reológica e a função de fluência de um material real. A consideração de uma unidade composta apenas por uma mola permite que a cadeia de Kelvin possa representar deformações instantâneas e a função de relaxação se torne regular.

O esquema geral para uma cadeia de Kelvin é apresentado na Figura 2.7.

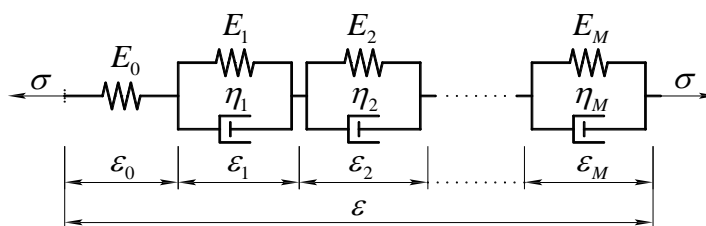


Figura 2.7 – Cadeia de Kelvin

A cadeia consiste em uma mola elástica caracterizada pela rigidez E_0 e M unidades de Kelvin caracterizadas pela rigidez E_i e viscosidade η_i , em que $i=1,2,\dots,M$. Ao invés de viscosidades, pode-se utilizar os tempos de retardo $\tau_i = \eta_i/E_i$ como parâmetros primários. A função de fluência para a cadeia de Kelvin é facilmente obtida como a soma das funções de fluência das unidades individuais:

$$J_0(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^M \frac{1}{E_i} (1 - e^{-t/\tau_i}) \right] H(t) \quad (2.36)$$

Na literatura matemática, uma série infinita na forma $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j t}$ é conhecida como série de Dirichlet ou série de Prony. A expressão entre colchetes em (2.36) é um caso especial da série finita de Dirichlet.

Recomenda-se que os tempos de retardo estejam em uma progressão geométrica com razão igual a 10 e satisfaçam as condições $\tau_1 \leq 3t_{\min}$ e $\tau_M \geq 0,5t_{\max}$, onde t_{\min} e t_{\max} são, respectivamente, o menor e o maior tempo de carregamento de interesse (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018). Dessa forma uma cadeia de Kelvin com M unidades de Kelvin pode aproximar a função de fluência real em M ordens de magnitude no espaço de duração de carregamentos $t - t'$.

2.2.4. Cadeia de Maxwell

De forma análoga, pode-se construir a cadeia de Maxwell, composta por diversas unidades de Maxwell acopladas em paralelo, conforme a Figura 3.8.

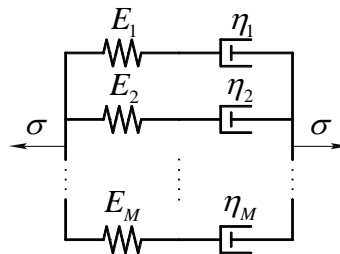


Figura 2.8 – Cadeia de Maxwell

Nesse caso, a função de relaxação total é obtida pela soma das funções de relaxação das unidades individuais. Dessa forma, a função de relaxação da cadeia é dada por

$$R_0(t) = \left(\sum_{i=1}^M E_i e^{-t/\tau_i} \right) H(t) \quad (2.37)$$

onde E_i e τ_i , com $i = 1, 2, \dots, M$, são as rigidezes e os tempos de relaxação das M unidades individuais. A expressão entre parêntesis no lado direito de (2.37) é novamente um caso especial de série de Dirichlet.

Se todos os tempos de relaxação são finitos, a função de relaxação tende à zero quando t se aproxima de infinito. Para se obter um limite positivo, pode-se, como no caso da cadeia de Kelvin, adotar um termo correspondente a uma mola sem um amortecedor. Do ponto de vista prático, é suficiente garantir que os tempos de relaxação cubram um intervalo suficientemente amplo, com o tempo de relaxação excedendo o tempo de interesse.

Para cadeias sem envelhecimento, é possível provar que toda cadeia de Maxwell é exatamente equivalente à uma cadeia de Kelvin conjugada e vice-versa. Como as propriedades do concreto costumam ser determinadas por testes de fluência, a função de fluência é considerada como característica primária e as cadeias de Kelvin são muito mais usadas nos modelos de concreto que as cadeias de Maxwell. Por essa razão, no presente trabalho são apresentados os dois tipos de modelo, mas somente as cadeias de Kelvin são utilizadas para a representação do concreto.

2.2.5. Modelos com envelhecimento

Com exceção de concretos com muita idade ou casos de carregamento de curta duração, o efeito do envelhecimento tem grande importância e precisa ser considerado em aplicações práticas. Para representar os efeitos de envelhecimento, é necessário usar uma forma generalizada das cadeias reológicas, considerando a variação das propriedades de cada unidade ao longo do tempo. Por isso, as propriedades E e η não devem ser consideradas constantes neste caso.

A relação tensão-deformação para o amortecedor apresentada em (2.11), mantém a sua forma original, exceto pela viscosidade, que se torna dependente do tempo atual t . Dessa forma, (2.11) é reescrita na forma

$$\sigma_v(t) = \eta(t) \dot{\epsilon}_v(t) \quad (2.38)$$

A generalização da lei elástica em (2.10) é mais complicada. Considerar a sua forma original, substituindo simplesmente E por uma função do tempo levaria a conclusões equivocadas. Uma deformação constante imposta à mola, por exemplo, teria como resultado uma tensão que aumenta com a evolução do tempo. Esse comportamento, entretanto, é inadmissível e viola as leis fundamentais da termodinâmica. A correta abordagem considera que o aumento de rigidez tem efeito apenas nos incrementos de tensão e deformação, sem causar modificações nos seus valores acumulados. Sendo assim, (2.10) deve ser reescrita em sua forma incremental:

$$\dot{\sigma}_e(t) = E(t) \dot{\epsilon}_e(t) \quad (2.39)$$

Cadeia de Maxwell

No caso do modelo de Maxwell, a relação tensão-deformação (2.14) permanece com a mesma forma, sendo suficiente considerar E e η como funções do tempo:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} + \frac{\sigma(t)}{\eta(t)} \quad (2.40)$$

Com a finalidade de obter a função de relaxação para a composição da cadeia de Maxwell, é necessário solucionar a equação (2.40) com $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ e $\sigma(t)$ considerada como desconhecida. Para um desenvolvimento genérico de $E(t)$ e $\eta(t)$, essa equação diferencial tem coeficientes variáveis e pode ser solucionada por separação de variáveis. No caso especial em que a relação $\eta(t)/E(t) = \tau$ permanece constante, obtém-se a função de relaxação para o elemento de Maxwell com envelhecimento em uma forma semelhante a (2.27):

$$R(t, t') = E(t') e^{-(t-t')/\tau} H(t-t') \quad (2.41)$$

Para uma cadeia de Maxwell, tem-se

$$R(t, t') = \left(\sum_{i=1}^M E_i(t') e^{-(t-t')/\tau_i} \right) H(t-t') \quad (2.42)$$

que representa uma forma generalizada da série de Dirichlet.

Cadeia de Kelvin

No modelo de Kelvin, a manipulação das equações (2.29), (2.38) e (2.39) (2.39) conduz à relação tensão-deformação expressa por

$$\dot{\sigma}(t) = E(t) \dot{\varepsilon}(t) + \frac{d}{dt} [\eta(t) \dot{\varepsilon}(t)] \quad (2.43)$$

que é uma equação de segunda ordem e pode ser reescrita como

$$\dot{\sigma}(t) = D(t) \dot{\varepsilon}(t) + \eta(t) \ddot{\varepsilon}(t) \quad (2.44)$$

onde define-se por conveniência $D(t) = E(t) + \dot{\eta}(t)$.

Com objetivo de encontrar a função de fluência, considera-se $\dot{\sigma}(t) = 0$ na equação (2.44). No caso em que a relação $D(t)/\eta(t)$ permanece constante, assumem-se as condições iniciais $\varepsilon(t') = 0$ e $\dot{\varepsilon}(t') = \hat{\sigma}/[\tau D(t')]$, obtendo assim

$$J(t, t') = \frac{1 - e^{-(t-t')/\tau}}{D(t')} H(t - t') \quad (2.45)$$

Para a cadeia de Kelvin com envelhecimento, obtém-se

$$J(t, t') = \left[\frac{1}{E_0(t')} + \sum_{i=1}^M \frac{1 - e^{-(t-t')/\tau_i}}{D_i(t')} \right] H(t - t') \quad (2.46)$$

2.2.6. Modelos com solidificação

Cadeia de Kelvin

A solução para o modelo de Kelvin com envelhecimento apresentada em (2.45) é obtida a partir da hipótese que a razão $D(t)/\eta(t)$ permanece constante. Entretanto, não há justificativas físicas para que isso aconteça, uma vez que a relação $E(t) = \eta(t)/\tau - \dot{\eta}(t)$ deve ser satisfeita, com τ constante. Por outro lado, a hipótese adotada no modelo de Maxwell com envelhecimento de que a rigidez da mola cresce proporcionalmente à viscosidade do amortecedor, $\eta(t)/E(t)$, pode ser encarado como mais natural. O conceito de solidificação pode justificar essa relação.

Na teoria da solidificação, as mudanças das propriedades aparentes são devido à solidificação de um constituinte sem envelhecimento, causada pelas reações de hidratação no concreto. Considera-se $v(t)$ uma função que descreve o crescimento relativo do volume sólido do material. Dessa forma, o módulo de elasticidade e a viscosidade são ambas proporcionais a $v(t)$, permanecendo a razão entre eles constante.

A evolução das propriedades do modelo de Kelvin pode ser descrita por $E(t) = E^{(\infty)}v(t)$ e $\eta(t) = \eta^{(\infty)}v(t)$, onde $E^{(\infty)}v^{(\infty)}$ e $\eta^{(\infty)}v^{(\infty)}$ representam os valores finais do módulo de elasticidade e da viscosidade ao final do processo da solidificação. Substituindo essas expressões em (2.43) considerando $\dot{\sigma}(t) = 0$ por se tratar de um ensaio de fluência, obtém-se para o modelo de Kelvin a relação

$$E^{(\infty)}v(t)\dot{\varepsilon}(t) + \frac{d}{dt}\left[\eta^{(\infty)}v(t)\dot{\varepsilon}(t)\right] = 0 \quad (2.47)$$

Substituindo $\eta^{(\infty)}v(t)\dot{\varepsilon}(t)$ pela tensão transmitida pelo amortecedor $\sigma_v(t)$ e $E^{(\infty)}/\eta^{(\infty)}$ pelo respectivo tempo de retardo τ , reescreve-se (2.47) na forma

$$\frac{\sigma_v(t)}{\tau} + \dot{\sigma}_v(t) = 0 \quad (2.48)$$

que com a condição inicial $\sigma_v(t') = \hat{\sigma}$ possui a solução particular

$$\sigma_v(t) = \hat{\sigma}e^{-(t-t')/\tau} \quad (2.49)$$

O histórico de deformação correspondente pode ser obtido com a integração da taxa de deformação $\dot{\varepsilon}(t) = \sigma_v/\eta(t) = \sigma_v/(\tau E^{(\infty)}v(t))$, considerando a condição inicial $\varepsilon(t') = 0$. Como a função $v(t)$ nesse contexto é uma função arbitrária, a integração não pode ser realizada analiticamente, mas pode-se escrever formalmente seu resultado como

$$\varepsilon(t) = \int_{t'}^t \frac{\sigma_v(s)}{\eta(s)} ds = \frac{\hat{\sigma}}{\tau E^{(\infty)}} \int_{t'}^t \frac{e^{-(s-t')/\tau}}{v(s)} ds \quad (2.50)$$

e a função de fluência pode ser expressa pela sua taxa de variação em relação ao tempo t :

$$\dot{j}(t, t') = \frac{e^{-(t-t')/\tau}}{\eta(t)} = \frac{e^{-(t-t')/\tau}}{\tau E^{(\infty)}v(t)}, \quad t \geq t' \quad (2.51)$$

A função de fluência para uma cadeia de Kelvin com envelhecimento é obtida com a soma das funções de fluência dos elementos individuais. Assume-se que essas unidades possuem diferentes tempos de retardo τ_i e diferentes módulos de elasticidade finais $E_i^{(\infty)}$, mas seus valores são governados por uma única função $v(t)$ que caracteriza o processo de solidificação. A taxa de variação para da função de fluência para a cadeia de Kelvin é

$$\dot{J}(t, t') = \frac{1}{v(t)} \sum_{i=1}^M \frac{e^{-(t-t')/\tau_i}}{\tau_i E_i^{(\infty)}}, \quad t \geq t' \quad (2.52)$$

Considerando $v(t) = 1$ para todo $t \geq t'$ a equação (2.52) se reduz para a taxa de variação da função de fluência para uma cadeia de Kelvin sem envelhecimento com tempos de retardo τ_μ e módulos de elasticidade finais $E_\mu^{(\infty)}$. Integrando a expressão (2.52) obtém-se a função de fluência descrita por

$$J(t, t') = \frac{1}{E_0(t')} + \int_{t'}^t \frac{\dot{\Phi}(s-t')}{v(s)} ds, \quad t \geq t' \quad (2.53)$$

onde

$$\Phi(t-t') = \sum_{i=1}^M \frac{1 - e^{-(t-t')/\tau_i}}{E_i^{(\infty)}} H(t-t') \quad (2.54)$$

é interpretada como a função de fluência de uma cadeia de Kelvin sem envelhecimento. O termo $E_0(t') = E_0^{(\infty)} v(t')$ é o módulo elástico no instante t' , que surge como resultado da integração. De forma geral, o termo $1/E_0(t')$ corresponde à flexibilidade da mola isolada na cadeia de Kelvin com envelhecimento.

Cadeia de Maxwell

Para o elemento de Maxwell, a expressão (2.42) foi obtida com a hipótese que a relação $\eta(t)/E(t) = \tau$ permanece constante, que está de acordo com a teoria da solidificação. Substituindo simplesmente $E_i(t')$ em (2.42) por $E_i^{(\infty)} v(t')$, é possível

escrever a função relaxação para uma cadeia de Maxwell com envelhecimento como

$$R(t, t') = v(t')\psi(t - t') \quad (2.55)$$

onde

$$\psi(t - t') = \left(\sum_{i=1}^M E_i^{(\infty)} e^{-(t-t')/\tau_i} \right) H(t - t') \quad (2.56)$$

é a função de relaxação de uma cadeia de Maxwell sem envelhecimento.

2.3.

Relação integro-diferencial da tensão-deformação

Sendo conhecida a função de fluência do material, é possível obter a deformação causada por um histórico arbitrário de tensão com auxílio do princípio da superposição, enunciado no Quadro 3.1.

Considerando inicialmente um teste de fluência em que a tensão aumenta instantaneamente de zero para σ_1 no instante t_1 , permanecendo constante até t_2 , quando a tensão sofre um salto para σ_2 e permanece constante novamente. O histórico de tensão para esse ensaio pode ser representado por

$$\sigma(t) = \Delta\sigma_1 H(t - t_1) + \Delta\sigma_2 H(t - t_2) \quad (2.57)$$

onde $\Delta\sigma_1 = \sigma_1$ e $\Delta\sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_1$ são o primeiro e o segundo incrementos de tensão, respectivamente. Conforme o estudo desenvolvido nos capítulos anteriores, o primeiro incremento de tensão $\Delta\sigma_1 H(t - t_1)$ tem como resposta o histórico de deformação $\Delta\sigma_1 J(t, t_1)$. Da mesma forma, o segundo incremento de tensão $\Delta\sigma_2 H(t - t_2)$ induz o incremento de deformação $\Delta\sigma_2 J(t, t_2)$. Aplicando o princípio da superposição, (2.57) tem como histórico de deformação correspondente

$$\varepsilon(t) = \Delta\sigma_1 J(t, t_1) + \Delta\sigma_2 J(t, t_2) \quad (2.58)$$

O mesmo raciocínio pode ser estendido para uma série de carregamentos. Dessa forma, o histórico de tensão definido por

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k H(t-t_k) \quad (2.59)$$

conduz para o histórico de deformação

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k J(t, t_k) \quad (2.60)$$

As expressões (2.59) e (2.60) correspondem ao caso em que n carregamentos discretos são aplicados de forma instantânea nos tempos t_k , permanecendo constantes até o tempo t_{k+1} . Diminuindo o comprimento dos intervalos entre os saltos de tensão, no limite de $(t_{k+1} - t_k)$ tendendo a zero, o somatório em (2.60) se transforma em uma integral:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t, t') d\sigma(t') \quad (2.61)$$

onde os tempos t_k são substituídos pela variável de integração t' que percorre o histórico do instante zero até o tempo corrente t . Bažant e Jirásek (2018) chamam atenção que essa equação não somente deriva do princípio da correspondência, mas também é uma outra forma de enunciá-lo. Usando a superposição, pode-se generalizar ainda mais (2.61) para o caso de tensão e deformação multiaxial.

A interpretação do lado direito da equação (2.61) como uma integral de Stieltjes permite abranger históricos mais genéricos de tensão, compostos por funções contínuas com saltos finitos de tensão. Em termos da integral clássica de Riemann, a equação (2.61) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \sum_{k=1}^n J(t, t_k) \Delta\sigma_k + \int_0^{t_1^-} J(t, t') \dot{\sigma}(t') dt' \\ & + \sum_{k=2}^n \int_{t_{k-1}^+}^{t_k^-} J(t, t') \dot{\sigma}(t') dt' + \int_{t_n^+}^t J(t, t') \dot{\sigma}(t') dt' \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde t_k , com $k = 1, 2, \dots, n$, são os instantes entre zero o tempo atual t em que ocorrem os saltos de tensão $\Delta\sigma_k$. Nos intervalos entre dois saltos, a tensão é

assumida como uma função diferenciável no tempo, sendo $d\sigma(t')$ substituído por $\dot{\sigma}(t')dt'$, em que $\dot{\sigma}$ é a derivada da tensão em relação ao tempo, ou seja a taxa de tensão.

Para o caso frequente no qual o concreto se encontra sem carregamento até o instante t' em que uma tensão σ_1 é aplicada de forma instantânea (com um salto) e mais tarde $\sigma(t)$ permanece contínua e diferenciável, (2.62) se reduz a

$$\varepsilon(t) = J(t, t')\sigma_1 + \int_{t_1^+}^t J(t, t')\dot{\sigma}(t')dt' \quad (2.63)$$

Em alguns tipos de aplicações, a taxa de deformação é preferível por ser mais prático o seu uso. Derivando (2.61) em relação ao tempo t com o uso da regra de Leibniz para diferenciação de integrais, obtém-se

$$\dot{\varepsilon}(t) = J(t, t)\dot{\sigma}(t) + \int_0^t \dot{J}(t, t')d\sigma(t') \quad (2.64)$$

onde $J(t, t)$ é a flexibilidade instantânea na idade t e a taxa da função de fluência é dada por $\dot{J}(t, t') = \partial J(t, t') / \partial t$. Cabe observar também que $1/J(t, t) = E(t)$ é o módulo de elasticidade instantâneo do material na idade t .

O caso com uma tensão σ_1 aplicada de forma instantânea é obtida realizando o mesmo processo com (2.63):

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{J}(t, t_1)\sigma_1 + J(t, t)\dot{\sigma}(t) + \int_{t_1^+}^t \dot{J}(t, t')\dot{\sigma}(t')dt' \quad (2.65)$$

O raciocínio desenvolvido para a função de fluência pode ser aplicado de forma análoga na função de relaxação. Sendo ela conhecida, é possível obter a tensão associada a um histórico de deformação arbitrário. De forma equivalente a (2.61), utiliza-se o princípio da superposição e obtém-se

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t, t')d\varepsilon(t') \quad (2.66)$$

que da mesma forma que (2.61), representa o princípio da superposição.

Para um histórico de deformação com uma única descontinuidade no instante t_1 análogo ao caso abordado em (2.63), o histórico de deformação assume a forma

$$\sigma(t) = R(t, t_1) \varepsilon_1 + \int_{t_1}^t R(t, t') \dot{\varepsilon}(t') dt' \quad (2.67)$$

Observando as equações (2.63) e (2.67) é possível observar que as funções de fluência e de relaxação não são independentes. Conhecendo-se a função de fluência, é possível obter a função de relaxação assumindo um ensaio de relaxação com $\sigma(t) = \hat{\varepsilon}R(t, t_1)$ e $\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon}H(t - t_1)$ na equação (2.63). Adotando $\sigma_1 = \hat{\varepsilon}R(t, t_1)$, obtém-se para todo $t \geq t_1$:

$$J(t, t_1)R(t_1, t_1) + \int_{t_1}^t J(t, t') \dot{R}(t', t_1) dt' = 1 \quad (2.68)$$

onde a função desconhecida $R(t, t_1)$ depende apenas de t e \dot{R} é a derivada da função de relaxação em relação à primeira variável.

A taxa de tensão análoga à (2.65) é dada por

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{R}(t, t_1) \varepsilon_1 + R(t, t) \dot{\varepsilon}(t) + \int_{t_1}^t \dot{R}(t, t') \dot{\varepsilon}(t') dt' \quad (2.69)$$

onde $R(t, t) = E(t)$ é o módulo de elasticidade instantâneo na idade t e $\dot{R}(t, t') = \partial R(t, t') / \partial t$. É necessário ressaltar que apesar da flexibilidade instantânea $J(t, t)$ ser o inverso da rigidez instantânea $R(t, t)$, de forma geral o valor da função de fluência não é igual ao inverso da função de relaxação.

2.4. Operador integro-diferencial

A representação da relação tensão-deformação a partir de operadores integro-diferenciais é uma abordagem poderosa, geral e elegante (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018). Os operadores são capazes de atribuir a cada função definida em um domínio adequado uma outra função como sua imagem. No caso da viscoelasticidade, definem-se o *operador de fluência* \mathcal{J} que mapeia o histórico de tensão no histórico de deformação correspondente, e o *operador de relaxação* \mathcal{R} que mapeia o histórico de deformação no histórico de tensão correspondente. Dessa forma, é possível representar de maneira mais compacta e mais geral as relações (2.61), (2.62) e (2.63) como

$$\varepsilon(t) = \mathcal{J}\{\sigma(t)\} \quad (2.70)$$

onde as chaves enfatizam que \mathcal{J} é um operador aplicado sobre toda a função $\sigma(t)$ e não apenas uma função do valor de σ em um instante t . De forma análoga, as equações (2.66) e (2.67) podem ser reescritas na forma

$$\sigma(t) = \mathcal{R}\{\varepsilon(t)\} \quad (2.71)$$

Os operadores de fluência e relaxação são mutualmente inversos, sendo as seguintes relações válidas:

$$\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{J} \quad (2.72)$$

Devido a essa propriedade, a composição dos dois operadores produz o operador identidade \mathcal{J} , que mapeia uma função arbitrária nela mesma. Essa relação é útil quando equações envolvendo os operadores \mathcal{J} e \mathcal{R} precisam ser resolvidas. Outra propriedade importante é a linearidade desses operadores, expressa formalmente pelas expressões

$$\mathcal{J}\{c_1\sigma_1(t) + c_2\sigma_2(t)\} = c_1\mathcal{J}\{\sigma_1(t)\} + c_2\mathcal{J}\{\sigma_2(t)\} \quad (2.73)$$

$$\mathcal{R}\{c_1\varepsilon_1(t) + c_2\varepsilon_2(t)\} = c_1\mathcal{R}\{\varepsilon_1(t)\} + c_2\mathcal{R}\{\varepsilon_2(t)\} \quad (2.74)$$

que são válidas para todos os números reais c_1 e c_2 e todas as funções σ_1 , σ_2 , ε_1 e ε_2 . Observe que as equações (2.73) e (2.74) são outra forma de escrever o princípio da superposição, apresentado no Quadro 2.1. Por fim, é importante notar que os operadores de fluência e de relaxação mapeiam a função degrau unitário para as funções de fluência e de relaxação, respectivamente:

$$\mathcal{J}\{H(t-t')\} = J(t, t') \quad (2.75)$$

$$\mathcal{R}\{H(t-t')\} = R(t, t') \quad (2.76)$$

A relação inversa pode ser representada como

$$H(t-t') = \mathcal{R}\{J(t-t')\} = \mathcal{J}\{R(t-t')\} \quad (2.77)$$

É importante notar que os operadores \mathcal{J} e \mathcal{R} apresentados consideram apenas a deformação mecânica (induzida pelas tensões). Para se considerar as deformações provenientes de mudanças de temperatura e umidade, adota-se a decomposição aditiva das parcelas de deformação mecânica $\mathcal{J}\{\sigma(t)\}$, de retração ε_{sh} e térmica ε_T , conforme as expressões a seguir.

$$\varepsilon(t) = \mathcal{J}\{\sigma(t)\} + \varepsilon_{sh}(t) + \varepsilon_T(t) \quad (2.78)$$

$$\sigma(t) = \mathcal{R}\{\varepsilon(t) - \varepsilon_{sh}(t) - \varepsilon_T(t)\} \quad (2.79)$$

2.5. Princípio da correspondência

De forma geral, existem três conjuntos de equações a serem satisfeitas no estudo das estruturas: as condições de equilíbrio, as relações cinemáticas e as equações constitutivas. Como as diferenças entre análises elásticas e viscoelásticas residem nas relações constitutivas, o *princípio da correspondência* enuncia que: a solução de uma estrutura viscoelástica pode ser obtida a partir da solução elástica do mesmo problema, substituindo as constantes elásticas pelos operadores viscoelásticos correspondentes (CREUS, 1986).

Flügge (1975) apresenta o princípio da correspondência de maneira mais simples a partir de casos particulares. Para um teste de fluência em uma viga viscoelástica, ele afirma que as tensões são as mesmas que em uma viga elástica idêntica sob o mesmo carregamento, enquanto as deformações e deslocamentos dependem do tempo e suas expressões derivam do problema elástico, substituindo E por $1/J(t)$. Já em um teste de relaxação em uma viga viscoelástica, ele afirma que os deslocamentos e as deformações são os mesmos que em uma viga elástica correspondente, enquanto as tensões dependem do tempo e podem ser obtidas pelas tensões elásticas multiplicadas por $R(t)/E$.

Para exemplificar a aplicação do princípio da correspondência, apresenta-se o caso de uma viga em balanço com comprimento L e uma carga pontual P em sua extremidade livre, conforme a Figura 2.9.

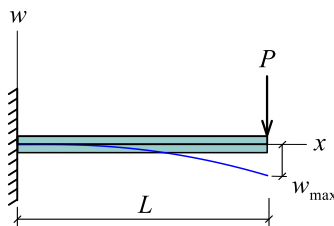


Figura 2.9 – Viga em balanço com carga P na extremidade livre

No caso elástico, tem-se os deslocamentos verticais w na direção do carregamento dados pela expressão

$$w = -\frac{Px^2}{6EI}(3L-x) \quad (2.80)$$

onde x é a coordenada no eixo longitudinal da viga, E é o módulo de elasticidade e I o momento de inércia transversal. O valor de w_{\max} é obtido na extremidade da viga, em que $x = L$.

No caso das tensões normais na seção transversal da viga, tem-se

$$\sigma = \frac{P(L-x)}{I}y \quad (2.81)$$

onde y é a ordenada vertical medida a partir da linha neutra da seção.

Pelo princípio da correspondência é possível obter a resposta da viga viscoelástica correspondente a partir de (2.80) e (2.81). Observa-se que na expressão da tensão σ não existe nenhuma constante elástica, e dessa forma, a equação (2.81) é a mesma para o caso viscoelástico. Já no caso dos deslocamentos w , é necessário fazer a substituição de $1/E$ pelo operador \mathcal{J} . Dessa forma, a expressão (2.80) é reescrita na forma

$$w = -\frac{\mathcal{J}Px^2}{6I}(3L-x) \quad (2.82)$$

E para $P = P(t)$, tem-se

$$w = -\frac{\mathcal{J}\{P(t)\}x^2}{6I}(3L-x) = -\frac{x^2}{6I}(3L-x) \int_0^t J(t,t') \dot{P}(t) dt \quad (2.83)$$

No caso particular de um teste de fluência em que $P(t) = \hat{P} H(t-t')$ tem-se

$$w = -\frac{J(t,t')Px^2}{6I}(3L-x) \quad (2.84)$$

Observa-se que a equação (2.84) é um caso particular da equação (2.84) e coincide com a definição apresentada por Flügge (1975). Para considerar outros tipos de estrutura, o mesmo raciocínio deve ser aplicado. Em caso de estruturas sujeitas a torção, por exemplo, a constante G deve ser substituída por operadores de fluência e relaxação cisalhantes.

2.6. Estado multiaxial de tensão

A lei generalizada de Hooke descreve os materiais isotrópicos lineares a partir de duas constantes elásticas independentes, como por exemplo o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν ou o módulo volumétrico K e o módulo cisalhante G . A extensão para a viscoelasticidade a partir do princípio da correspondência conduz à conclusão que se deve usar também duas funções independentes. Para o caso particular de um teste de fluência, por exemplo, é necessário a função de fluência volumétrica $J_K(t,t')$ e a função de fluência cisalhante $J_G(t,t')$. Ainda que na nanoescala o mecanismo da fluência ocorra pelo deslizamento, na macroescala há alterações volumétricas e desviadora, o que é uma consequência da porosidade. Devido à falta de dados de ensaios tridimensionais para o concreto, em aplicações práticas assume-se que todas as funções de fluência podem ser obtidas escalando-se de forma apropriada a função de fluência uniaxial $J(t,t')$. Considera-se, portanto, que o coeficiente de Poisson não é afetado pela fluência e pode ser considerado como constante. A partir dessa suposição, uma generalização da relação tensão-deformação em (2.61) pode ser escrita na forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_0^t J(t,t') \mathbf{C}_\nu d\boldsymbol{\sigma}(t') = \mathbf{C}_\nu \int_0^t J(t,t') d\boldsymbol{\sigma}(t') \quad (2.85)$$

onde

$$\mathbf{C}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

é a matriz de flexibilidade elástica adimensional correspondente ao valor unitário do módulo de elasticidade, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor 6×1 com as componentes de deformação, e $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor 6×1 com as componentes de tensão.

Com um raciocínio análogo, a relação tensão-deformação em (2.66) pode ser escrita na forma

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t R(t, t') \mathbf{D}_\nu d\boldsymbol{\varepsilon}(t') = \mathbf{D}_\nu \int_0^t R(t, t') d\boldsymbol{\varepsilon}(t') \quad (2.87)$$

onde

$$\mathbf{D}_\nu = \mathbf{C}_\nu^{-1} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

é a matriz de rigidez elástica adimensional correspondente ao valor unitário do módulo de elasticidade. As versões bidimensionais da relação tensão-deformação válidas para o estado plano de tensão ou estado plano de deformação podem ser obtidas pela alteração apropriada das matrizes \mathbf{D}_ν e \mathbf{C}_ν .

3 Fluência do concreto

3.1. Propriedades e causas

A fluência do concreto possui características particulares, diferindo-se dos outros materiais em sua origem e em seu comportamento. No concreto, as deformações viscosas acontecem para tensões muito abaixo de sua resistência e normalmente possuem pouco efeito na segurança contra o colapso (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018). Entretanto, sabe-se que elas têm um papel importante nas condições de serviço e durabilidade das estruturas, podendo ter um impacto econômico importante nas construções (HARANKI, 2009).

Duas componentes de deformação dependentes do tempo do concreto podem ser identificadas:

1. as *deformações higrótérmicas*, que são independentes da tensão σ e à temperatura constante representa a deformação de retração ε_{sh} (negativa); e
2. as *deformações mecânicas adicionais* que ocorrem de maneira retardada e são causadas pela tensão, chamadas de forma geral de fluência.

A deformação de cisalhamento dependente do tempo é puramente devido à fluência, porque a expansão térmica e a retração são volumétricas e não produzem deformações de cisalhamento.

Para níveis de tensões de serviço (até 40% da resistência) e teor de umidade constante, a fluência depende linearmente das tensões aplicadas (NEVILLE, A M, 1960; NEVILLE, AM., 2012) e a teoria da viscoelasticidade pode ser utilizada. Em caso de secagem ou altos níveis de tensão, a fluência do concreto é não linear, mas o termo viscoplasticidade, usado para fluência não linear de metais em altas temperaturas é inapropriado, pois o concreto não apresenta plasticidade (exceto sob

tensão de confinamento enormes). A dependência não linear da fluência em relação à tensão é causada essencialmente pelo fraturamento ou danos por microfissuração.

Quando exposta à atmosfera, uma amostra de concreto apresenta retração, como mostra a Figura 3.1a. A deformação por retração ε_{sh} cresce com o tempo t e se aproxima de um limite finito com diminuição gradual da taxa, conforme a Figura 3.2a.

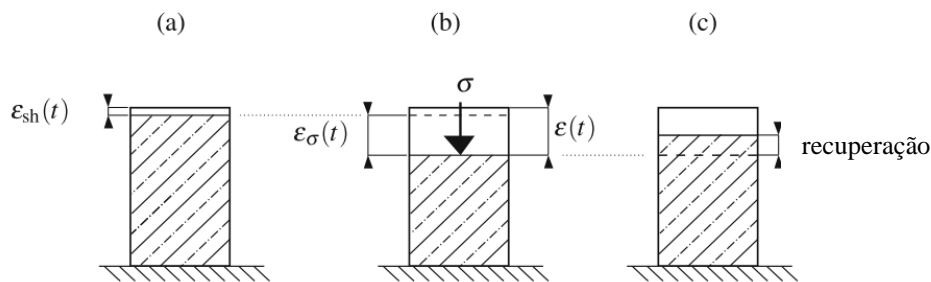


Figura 3.1 – (a) Deformação por retração, (b) deformação mecânica (elástica + fluência) causada pela tensão e (c) recuperação depois do descarregamento

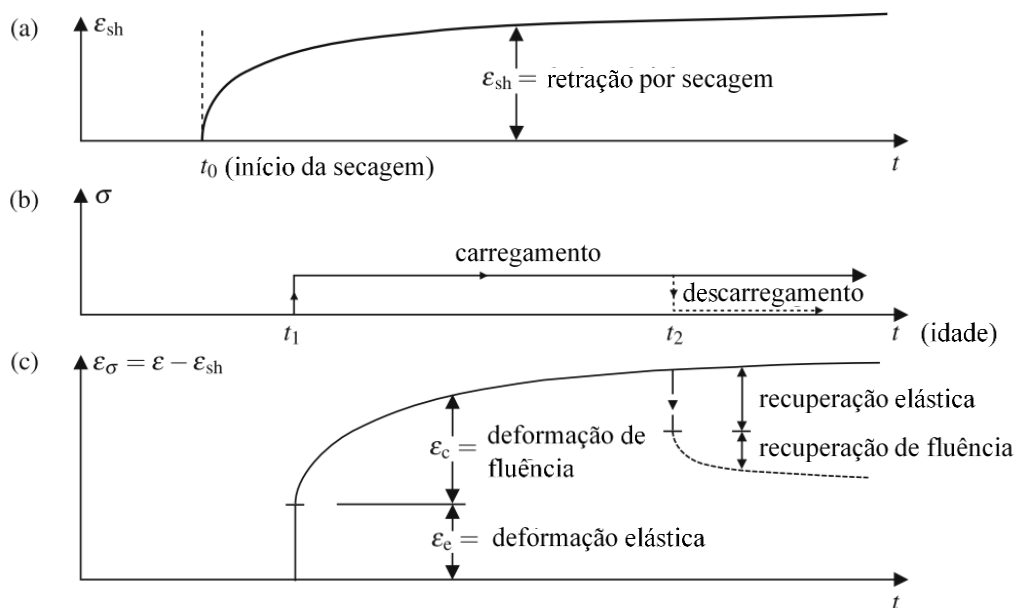


Figura 3.2 – Curvas de retração, fluência e recuperação depois do descarregamento (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018)

Na maioria dos concretos, a maior parte da retração representa a *retração por secagem*, que é causada principalmente pela difusão da água a partir dos poros. No caso de amostras imersas em água, ocorre o *inchaço*, representado por uma deformação ε_{sh} positiva, que normalmente apresenta uma magnitude bem menor

que a retração, e por isso é geralmente desprezível. O inchaço é causado principalmente pela incorporação de água adicional na estrutura do concreto.

Uma parte da retração, chamada de *retração autógena*, é causada pela mudança de volume causadas pelas reações químicas de hidratação do cimento em condições seladas. Essa é a única parcela de retração presente em amostras seladas. No caso de concretos com resistência normal e relação água-cimento acima de 0,55, ela representa uma parcela muito pequena da retração e usualmente é desprezada. Concretos modernos com alta resistência e relação água-cimento abaixo de 0,4 e diversos aditivos, a retração autógena é comparável à magnitude da deformação por secagem e deve ser levada em conta.

Sob tensão, uma amostra de concreto apresenta a uma deformação adicional, conforme Figura 3.1b, conhecida como *deformação mecânica* $\varepsilon_\sigma(t)$ sendo composta por duas parcelas:

1. a deformação elástica (ou instantânea), ε_e e
2. a deformação de fluência, ε_c .

Se uma tensão σ é subitamente imposta em uma amostra de concreto na idade t_1 , a deformação elástica é $\varepsilon_e = \sigma/E(t_1)$, onde $E(t_1)$ é o módulo de elasticidade na idade t_1 . Mantida a tensão constante, a deformação de fluência cresce gradualmente com uma taxa decrescente, conforme mostra a Figura 3.2c.

O descarregamento do concreto em uma idade t_2 resulta em uma recuperação de deformação instantânea correspondente ao módulo de elasticidade $E(t_2)$ na idade t_2 , seguida de uma recuperação parcial ao longo do tempo da deformação de fluência em uma taxa que decresce gradualmente.

A fluência que ocorre em um teor de umidade constante do concreto é chamada *fluência básica*. Ela é causada pela quebra e reconstituição das ligações na microestrutura coloidal do gel de silicato de cálcio hidratado (C-S-H).

Em caso um corpo de prova não selado, uma parcela adicional de deformação ocorre, sendo conhecida como *fluência por secagem*. Essa deformação se desenvolve no tempo de forma semelhante à retração e também possui uma dependência da geometria da seção. A fluência por secagem possui causas físicas complexas, como por exemplo, o aumento da taxa de quebra das ligações químicas

(BAŽANT *et al.*, 1997) e a distribuição não uniforme da umidade dos poros que causam a formação de microfissuras (BAŽANT; ASCE; WU, 1974).

Uma propriedade notável da fluência do concreto é o *envelhecimento*, que faz com que a resistência, bem como o módulo de elasticidade E aumente com o tempo t . Isso faz com que a recuperação elástica seja menor que a deformação elástica inicial e que amostras de concreto carregadas em idades elevadas apresentem muito menos deformação de fluência que amostras carregadas em idades jovens.

Uma causa importante, mas não única, do envelhecimento é o processo de hidratação. Os produtos da hidratação, principalmente o gel de silicato de cálcio hidratado, preenchem gradualmente os poros da pasta endurecida de cimento; dessa forma, o volume total e o tamanho médio dos poros diminuem, o que gradualmente endurece e fortalece a microestrutura. Além disso, um gradual relaxamento das microtensões autoequilibradas na nanoescala da estrutura do gel de cimento (BAŽANT *et al.*, 1997).

3.2. Fluência na tração

Segundo Bažant e Jirásek (2018) , o comportamento da fluência na tração e na compressão são iguais. Afirmar o contrário significaria dizer que há uma mudança brusca de inclinação na isócrona do concreto (Figura 2.1) quando as tensões passam de compressão para tração. Entretanto isso não é observado em ensaios experimentais (Figura 3.3). Na realidade, dentro do intervalo de aplicabilidade dos modelos constitutivos lineares, não pode haver diferenças entre a tensão e compressão.

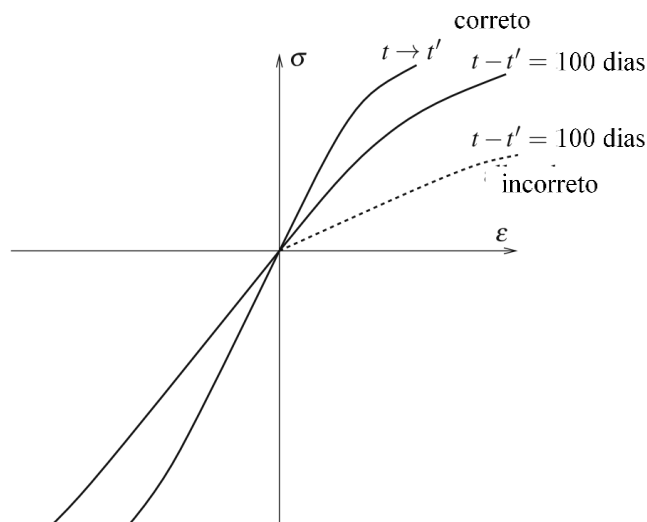


Figura 3.3 – Isócrona real (linha cheia) e fictícia (linha tracejada) (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018)

Existe, entretanto, uma clara diferença na transição da fluência linear para não linear causada por tensões elevadas. Na compressão uniaxial, essa transição ocorre em torno de 40 a 50%, da resistência, porém no caso de tração uniaxial, ela pode ocorrer para proporções muito menores (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018).

A não linearidade da fluência é causada pelo dano do material e em caso de tensões de tração, principalmente pelo dano de microfissuração. Esse fenômeno é propriamente representado quando se usa um modelo de dano triaxial geral, ou um modelo de fraturamento para calcular a deformação adicional não linear, que deve ser adicionada à deformação de fluência calculada linearmente (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018).

3.3. Teoria da solidificação

O fenômeno do envelhecimento causa não somente a atenuação da taxa de fluência do concreto com a duração do carregamento, mas também a diminui com a idade de carregamento. Por isso, a consideração desse fenômeno complica a modelagem matemática da fluência (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018). A teoria da solidificação baseia-se na mudança física da matriz cimentícia causada pelas reações químicas de hidratação, que contribuem de forma importante no envelhecimento.

Durante as reações químicas de hidratação, os grãos de cimento anidro são gradualmente dissolvidos na água dos poros. Nesse processo, eles se recombina

como gel de silicato de cálcio hidratado (C-S-H), que exibe viscoelasticidade, e outros produtos sólidos, como por exemplo o hidróxido de cálcio, que exibe comportamento elástico. O C-S-H recém-formado é depositado nas superfícies dos poros na pasta de cimento solidificada. O volume dos produtos provenientes da hidratação aumenta em prejuízo dos volumes de água e cimento anidro.

Bažant e Prasannan (1989a) afirmam que não é possível formular termodinamicamente um sistema descrito somente por propriedades que variam no tempo. A sua formulação é possível somente se o sistema for decomposto em componentes sem dependência do tempo cujas concentrações variam no tempo. Dessa forma, o a propriedade de envelhecimento na fluência é atribuída ao crescimento do volume de cimento solidificado, que é tratado como uma substância com propriedades invariantes no tempo. Essa é a ideia central da teoria da solidificação proposta por Bažant (1977) e desenvolvida em detalhe por Bažant e Prasannan (1989a, b).

O volume do cimento solidificado até o instante t é representado pela função de envelhecimento $v(t)$. Essa função pode ser normalizada, de tal forma que seu valor se torne igual para valores de tempo tendendo ao infinito. Uma compreensão mais precisa demonstra que o valor de $v(t)$ é a fração de volume do gel de C-S-H que forma um esqueleto sólido interconectado (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018). Isso se deve ao fenômeno de polimerização do C-S-H que age até as idades mais avançadas e permite o aumento das interconectividades entre as moléculas sem existir o aumento considerável do volume de material solidificado (THOMAS; JENNINGS, 2006).

O modelo completo da teoria da solidificação na fluência do concreto é apresentado na Figura 3.4. Considera-se um arranjo em série, em que a deformação total é decomposta em deformação elástica σ/E_0 , viscoelástica ε_v , de fluxo viscoso ε_f e a deformação $\tilde{\varepsilon}$, que engloba os fenômenos de retração, temperatura e dano. A função $v(t)$ atua sobre a deformação viscoelástica ε_v , que é a parcela de deformação efetiva atuante no gel de cimento. No instante t' o volume relativo dv solidifica e se prende à superfície do volume solidificado anteriormente. Todo o material solidificado está sujeito aos mesmos incrementos de deformação depois

de t' . A tensão macroscópica σ é a resultante das tensões na escala micro em todo o volume de material solidificado.

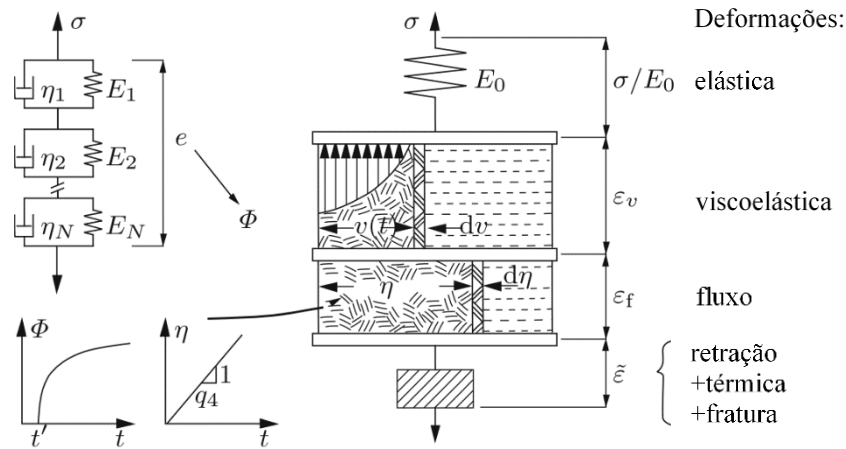


Figura 3.4 – Modelo completo da teoria da solidificação (BAŽANT; PRASANNAN, 1989a)

Neste trabalho será utilizada as formulações da teoria da solidificação para a parcela viscoelástica.

3.3.1. Deformação viscoelástica

O incremento de deformação viscoelástica $d\varepsilon_{ve}(t')$ introduzido em t' causa no instante t a microtensão $\Psi(t-t')d\varepsilon_{ve}(t')$, onde $\Psi(t-t')$ é a função de relaxação sem envelhecimento do gel de C-S-H. Como a contribuição da microtensão na tensão macroscópica é proporcional ao volume de material solidificado, a relação de proporcionalidade é dada pela função $v(t)$. Assim, o incremento de deformação $d\varepsilon_{ve}(t')$ contribui em $v(t')\Psi(t-t')d\varepsilon_{ve}(t')$ na tensão macroscópica. Estendendo o raciocínio, obtém-se a contribuição na tensão macroscópica em t de todos os incrementos de deformação viscoelástica previamente aplicados:

$$\sigma(t) = \int_0^t v(t')\Psi(t-t')d\varepsilon_{ve}(t') \quad (3.1)$$

Por conveniência, utiliza-se uma variável auxiliar $e(t)$, definida pela equação $\dot{e}(t) = v(t)\dot{\varepsilon}_{ve}(t)$ e a condição inicial $e(0) = 0$. Ela pode ser interpretada como um

tipo de deformação viscoelástica efetiva, que é totalmente recuperável após o descarregamento. Por outro lado, ε_{ve} é apenas parcialmente recuperável devido ao aumento de ν . Substituindo $de(t) = \nu(t)d\varepsilon_{ve}(t)$ na equação (3.1) obtém-se

$$\sigma(t) = \int_0^t \Psi(t-t') de(t') \quad (3.2)$$

Observa-se que (3.2) tem a mesma forma da relação (2.66) para um material viscoelástico sem envelhecimento, sendo $\Psi(t-t')$ a função de relaxação e a deformação substituída por e . Isso significa que a tensão σ no material solidificante e a deformação viscoelástica efetiva e são relacionados por uma relação constitutiva de um constituinte sem envelhecimento. Invertendo (3.2), tem-se

$$e(t) = \int_0^t \Phi(t-t') d\sigma(t') \quad (3.3)$$

onde $\Phi(t-t')$ é a função de fluência sem envelhecimento do gel de cimento.

A transformação da deformação viscoelástica efetiva e em deformação real ε é possível a partir da diferenciação de (3.3) e divisão pela função ν :

$$\dot{\varepsilon}_{ve}(t) = \frac{\dot{e}(t)}{\nu(t)} = \frac{1}{\nu(t)} \left[\Phi(0)\dot{\sigma}(t) + \int_0^t \dot{\Phi}(t-t') d\sigma(t') \right] \quad (3.4)$$

Ao se comparar com a expressão genérica em (2.64) para taxa de deformação de um material viscoelástico com envelhecimento, pode-se identificar a flexibilidade instantânea

$$\frac{1}{E_{ve}(t)} = \frac{\Phi(0)}{\nu(t)} \quad (3.5)$$

e a taxa de variação da função de fluência

$$j_{ve}(t, t') = \frac{\dot{\Phi}(t-t')}{\nu(t)} \quad (3.6)$$

onde $\dot{J}_{ve}(t, t') = \partial J_{ve}(t, t') / \partial t$ e o subíndice “ve” em E e J indicam que essas características se referem a parte viscoelástica do concreto.

Usando a função de fluência instantânea $J_{ve}(t', t') = 1/E_{ve}(t') = \Phi(0)/v(t')$ como valor inicial e integrando (3.6) com respeito a t , obtém-se a função de fluência macroscópica do gel deduzida a partir da teoria da solidificação.

$$J_{ve}(t, t') = J_{ve}(t', t') + \int_{t'}^t \dot{J}_{ve}(s, t') ds = \frac{\Phi(0)}{v(t)} + \int_{t'}^t \frac{\dot{\Phi}(s-t')}{v(s)} ds \quad (3.7)$$

3.3.2. Função de envelhecimento

A função de envelhecimento $v(t)$ deve ser capaz de representar a evolução das propriedades do concreto ao longo do tempo. Sua forma, entretanto, pode ser aproximada por diferentes expressões analíticas. O efeito da solidificação costuma ser definido por $1/v(t)$, a fim de facilitar o uso da equação (3.7). Grasley e Lange (2007) apontam o uso de uma função definida pelo somatório de N funções exponenciais com a forma

$$\frac{1}{v(t)} = \sum_{i=1}^N \beta_i e^{-\omega_i t} \quad (3.8)$$

onde β_i e ω_i são constantes empíricas. Seu uso conjunto com a função de fluência sem envelhecimento, Φ , usando cadeias de Kelvin expresso na equação (2.64) permite a fácil determinação de soluções analíticas a partir de transformadas de Laplace. Apesar disso, seu uso é restrito ao intervalo de ajuste utilizado na determinação dos parâmetros β_i e ω_i , uma vez que a função $v(t)$ tende para o infinito quando o $t \rightarrow \infty$.

Bažant e Prasannan (1989a) sugerem uma função desenvolvida a partir de resultados experimentais e baseada na lei de potência dupla. Em trabalhos mais recentes (BAŽANT; JIRÁSEK, 2018) ela é definida por

$$\frac{1}{v(t)} = \left(\frac{\lambda_0}{t} \right)^m \frac{1}{\alpha} + 1 \quad (3.9)$$

onde λ_0 , m e α são constantes empíricas.

Bažant e Jirásek (2018) afirmam que para maioria dos concretos pode-se adotar $m = 0,5$ e $\lambda_0 = 1$ dia. Dessa forma, a equação é simplificada para

$$\frac{1}{v(t)} = \frac{t^{-0.5}}{\alpha} + 1 \quad (3.10)$$

A equação (3.10) tem a vantagem de ter apenas um parâmetro empírico a ser determinado e apresenta uma maior coerência para análises de duração longa, uma vez que o valor da função $v(t)$ converge para 1 quando o $t \rightarrow \infty$. Apesar disso, seu uso conjunto com a função de fluência Φ da equação (2.64) conduz para uma integral sem solução expedita. Isso dificulta a determinação de soluções analíticas, sendo necessária a aproximação da resposta por uma fórmula adequada. A Figura 3.4 mostra o comportamento da função $v(t)$ dadas por Graslay e Lange (2007) e Bažant e Jirásek (2018) para tempo de análise curtos e longos.

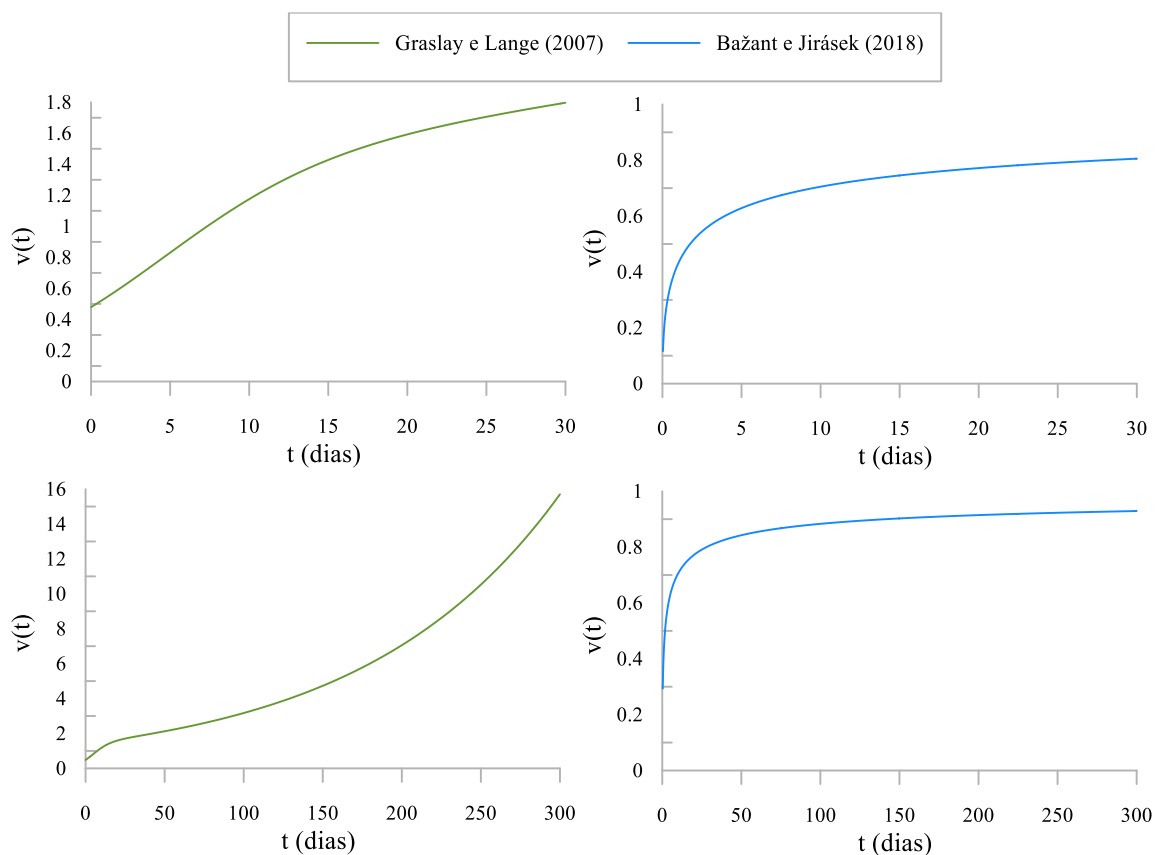


Figura 3.5 – Comparação das formas das funções de envelhecimento de Graslay e Lange (2007) e Bažant e Jirásek (2018) para o intervalo de 30 e 300 dias

4

Modelo numérico de fluência com envelhecimento e dano

No presente trabalho, será adotado um modelo viscoelástico para a fluência básica do concreto composto por cadeias de Kelvin com envelhecimento, conforme abordado na Seção 2.2.5. A parcela elástica, considerada como a deformação instantânea do material, é englobada no modelo viscoelástico com envelhecimento. A parcela das deformações devido ao dano é considerada com o modelo de elementos coesivos. A seguir, descrevem-se as principais características do modelo numérico adotado.

4.1. Fluência com envelhecimento

4.1.1. Solução analítica

A relação integro-diferencial da tensão-deformação, permite conhecer a resposta de um material viscoelástico sujeito à um histórico de tensão ou deformação conhecido. A partir da taxa de deformação em (3.4), obtém-se a equação diferencial que governa o comportamento de um material viscoelástico com envelhecimento. Ao considerar um ensaio de fluência, em que uma tensão constante $\hat{\sigma}$ é aplicada de forma instantânea no tempo t' , é possível obter a solução analítica para a equação diferencial. Considerando a função de fluência Φ de uma cadeia de Kelvin sem envelhecimento e a função $v(t)$ definida em (3.8), obtém-se

$$\varepsilon(t, t') = \hat{\sigma} H(t - t') \left[\sum_{j=1}^N \frac{\beta_j e^{-t' \omega_j}}{E_0^{(\infty)}} \left(\sum_{i=1}^M \frac{1 - e^{-\frac{(t-t')(\tau_i \omega_j + 1)}{\tau_i}}}{E_i^{(\infty)} (\tau_i \omega_j + 1)} \right) \right] \quad (4.1)$$

onde M é o número de unidades da cadeia de Kelvin e N é o número de exponenciais consideradas na função $v(t)$. A função de fluência com envelhecimento nesse caso assume a forma

$$J(t, t') = H(t - t') \left[\sum_{j=1}^N \frac{\beta_j e^{-t' \omega_j}}{E_0^{(\infty)}} \left(\sum_{i=1}^M \frac{1 - e^{-\frac{(t-t')(\tau_i \omega_j + 1)}{\tau_i}}}{E_i^{(\infty)} (\tau_i \omega_j + 1)} \right) \right] \quad (4.2)$$

Para os valores de $M = 3$ e $N = 2$, como adotado no trabalho de Grasley e Lange (2007), a equação (4.2) assume a forma

$$J(t, t') = H(t - t') \left[\beta_1 e^{-t' \omega_1} \left(\frac{1}{E_0^{(\infty)}} + \frac{1 - e^{-\frac{(t-t')(\tau_1 \omega_1 + 1)}{\tau_1}}}{E_1^{(\infty)} (\tau_1 \omega_1 + 1)} + \frac{1 - e^{-\frac{(t-t')(\tau_2 \omega_1 + 1)}{\tau_2}}}{E_2^{(\infty)} (\tau_2 \omega_1 + 1)} + \frac{1 - e^{-\frac{(t-t')(\tau_3 \omega_1 + 1)}{\tau_3}}}{E_3^{(\infty)} (\tau_3 \omega_1 + 1)} \right) \right. \\ \left. + \beta_2 e^{-t' \omega_2} \left(\frac{1}{E_0^{(\infty)}} + \frac{1 - e^{-\frac{(t-t')(\tau_1 \omega_2 + 1)}{\tau_1}}}{E_1^{(\infty)} (\tau_1 \omega_2 + 1)} + \frac{1 - e^{-\frac{(t-t')(\tau_2 \omega_2 + 1)}{\tau_2}}}{E_2^{(\infty)} (\tau_2 \omega_2 + 1)} + \frac{1 - e^{-\frac{(t-t')(\tau_3 \omega_2 + 1)}{\tau_3}}}{E_3^{(\infty)} (\tau_3 \omega_2 + 1)} \right) \right] \quad (4.3)$$

Cabe observar que a partir de (4.3) é possível obter a flexibilidade instantânea $J(t, t)$ do material apresentada na equação (2.64). Seu valor é obtido a partir do limite da função de fluência J para $t \rightarrow t'^+$:

$$\lim_{t \rightarrow t'^+} J(t, t') = \frac{(\beta_1 e^{-t' \omega_1} + \beta_2 e^{-t' \omega_2})}{E_0^{(\infty)}} \quad (4.4)$$

Alterando a função $v(t)$ para a expressão definida em (3.10), conforme a sugestão de Bažant *et al.* (2018; 1989a, b), não é possível encontrar a solução para a equação diferencial a partir das transformadas de Laplace. Todavia, a solução aproximada pode ser obtida com *softwares* de álgebra computacional. Dessa forma, a expressão aproximada para o histórico de deformação correspondente é

$$\varepsilon(t, t') = \hat{\sigma} H(t - t') \left[\frac{t' \alpha + \sqrt{t'}}{t' E_0^{(\infty)} \alpha} + \sum_{i=1}^M \left(\frac{1 - e^{-\frac{(t-t')}{\tau_i}}}{E_i^{(\infty)}} + \frac{e^{\frac{t'}{\tau_i}} \sqrt{\tau_i} \pi \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{t}{\tau_i}} \right) - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{t'}{\tau_i}} \right) \right)}{E_i^{(\infty)} \tau_i \alpha} \right) \right] \quad (4.5)$$

onde M é o número de unidades da cadeia de Kelvin e $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ é a função erro, obtida pela integração da função Gaussiana normalizada.

A função de fluência correspondente a este último caso é, portanto,

$$J(t, t') = H(t - t') \left[\frac{t'\alpha + \sqrt{t'}}{t'E_0^{(\infty)}\alpha} + \sum_{i=1}^M \left(\frac{1 - e^{-\frac{(t-t')}{\tau_i}}}{E_i^{(\infty)}} + \frac{e^{-\frac{t'}{\tau_i}} \sqrt{\tau_i \pi} \left(erf\left(\sqrt{\frac{t}{\tau_i}}\right) - erf\left(\sqrt{\frac{t'}{\tau_i}}\right) \right)}{E_i^{(\infty)} \tau_i \alpha} \right) \right] \quad (4.6)$$

De forma análoga ao caso anterior, é possível obter a flexibilidade instantânea $J(t, t)$ do material realizando o limite da função de fluência J para $t \rightarrow t'^+$.

$$\lim_{t \rightarrow t'^+} J(t, t') = \frac{t'\alpha + \sqrt{t'}}{t'E_0^{(\infty)}\alpha} \quad (4.7)$$

4.1.2. Integração numérica

A taxa de deformação para um material viscoelástico pode ser escrita de forma genérica pela equação (2.64). Para um material sem envelhecimento a integral de Stieltjes na forma clássica de Riemann assume a forma

$$\dot{\varepsilon}(t) = J_0(0)\dot{\sigma}(t) + \int_0^t \dot{J}_0(t-t')\dot{\sigma}(t') dt' \quad (4.8)$$

onde a primeira parcela ao lado direito da equação é a resposta elástica instantânea no instante t e a segunda parcela, composta pela integral, é a resposta viscoelástica ao longo do intervalo de tempo entre 0 e t .

Para a avaliação do incremento de deformação no Método dos Elementos Finitos (MEF), é utilizada a integração numérica da expressão (4.8) em um intervalo de tempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, onde os t_n e t_{n+1} identificam instantes consecutivos. Nessas condições, o incremento de deformação também pode ser dividido em duas parcelas

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^{el} + \Delta \varepsilon^{ve} \quad (4.9)$$

onde $\Delta\varepsilon^{el}$ é parcela de incremento de deformação elástica instantânea e $\Delta\varepsilon^{ve}$ é a parcela viscoelástica ocorrida no intervalo de tempo Δt .

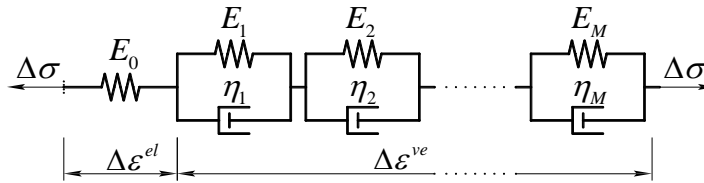


Figura 4.1 – Parcelas da integração numérica para a cadeia de Kelvin

Para a função de fluência de uma cadeia de Kelvin sem envelhecimento, a parcela instantânea corresponde à resposta elástica da mola com rigidez E_0 na Figura 4.1. O incremento de deformação elástica instantânea para esse caso é

$$\Delta\varepsilon^{el} = \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{E_0} \quad (4.10)$$

onde σ_n e σ_{n+1} são as tensões nos instantes de tempo t_n e t_{n+1} respectivamente.

A integração da parcela viscoelástica $\Delta\varepsilon^{ve}$ para a cadeia de Kelvin da Figura 4.1 é obtida por Mackenzie-Helnwein e Hanhijärvi (2003a, b). Assumindo-se a hipótese de variação linear da tensão durante o incremento de tempo Δt , a integração é realizada de forma semi-analítica. Dessa forma, obtém-se de maneira implícita a deformação viscoelástica da cadeia de Kelvin no instante t_{n+1} :

$$\varepsilon_{n+1}^{ve} = \sum_{i=1}^M \left[\varepsilon_{i,n}^{ve} e^{-\Delta t/\tau_i} + \frac{\sigma_n}{E_i} f_n(\Delta t/\tau_i) + \frac{\sigma_{n+1}}{E_i} f_{n+1}(\Delta t/\tau_i) \right] \quad (4.11)$$

onde $\varepsilon_{i,n}^{ve}$ é a deformação viscoelástica no i -ésimo elemento da cadeia de Kelvin no instante t_n , σ_n e σ_{n+1} são, respectivamente, as tensões nos instantes de tempo t_n e t_{n+1} , E_i e τ_i , com $i=1,2,\dots,M$, são as rigidezes e os tempos de retardo das M unidades individuais de Kelvin e as funções f_n e f_{n+1} são obtidas via integração numérica, a saber:

$$f_{n+1}(\xi) = 1 - \frac{1}{\xi} (1 - e^{-\xi}) \quad (4.12)$$

$$f_n(\xi) = 1 - e^{-\xi} - f_{n+1}(\xi) \quad (4.13)$$

A partir de (4.11) é possível obter o incremento de deformação viscoelástica $\Delta \varepsilon^{ve}$ da cadeia de Kelvin como:

$$\Delta \varepsilon^{ve} = \varepsilon_{n+1}^{ve} - \varepsilon_n^{ve} = \sum_{i=1}^M \left[\varepsilon_{i,n}^{ve} \left(e^{-\Delta t/\tau_i} - 1 \right) + \frac{\sigma_n}{E_i} f_n(\Delta t/\tau_i) + \frac{\sigma_{n+1}}{E_i} f_{n+1}(\Delta t/\tau_i) \right] \quad (4.14)$$

Com as equações (4.9), (4.10) e (4.14) é possível escrever o incremento de deformação total obtido pela integração da taxa de deformação em (4.8) para uma cadeia de Kelvin expressa por

$$\Delta \varepsilon = \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{E_0} + \sum_{i=1}^M \left[\varepsilon_{i,n}^{ve} \left(e^{-\Delta t/\tau_i} - 1 \right) + \frac{\sigma_n}{E_i} f_n(\Delta t/\tau_i) + \frac{\sigma_{n+1}}{E_i} f_{n+1}(\Delta t/\tau_i) \right] \quad (4.15)$$

No caso de uma cadeia de Kelvin com envelhecimento, a expressão da taxa de deformação é dada pela relação (3.4) que pode ser reescrita como

$$\dot{\varepsilon}_{ve}(t) = \frac{1}{\nu(t)} \left[\Phi(0) \dot{\sigma}(t) + \int_0^t \dot{\Phi}(t-t') \dot{\sigma}(t') dt' \right] \quad (4.16)$$

onde a expressão entre colchetes é equivalente à taxa de deformação para um material sem envelhecimento apresentada em (4.8). A integração da expressão recai no resultado obtido em (4.15) multiplicado pelo inverso da função $\nu(t)$ avaliada no instante $t^* = t_n + \Delta t/2$ (LEE, 2007). Dessa forma, o incremento de deformação para uma cadeia de Kelvin com envelhecimento é dado por

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{\nu(t^*)} \left\{ \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{E_0} + \sum_{i=1}^M \left[\varepsilon_{i,n}^{ve} \left(e^{-\Delta t/\tau_i} - 1 \right) + \frac{\sigma_n}{E_i} f_n(\Delta t/\tau_i) + \frac{\sigma_{n+1}}{E_i} f_{n+1}(\Delta t/\tau_i) \right] \right\} \quad (4.17)$$

A consideração do estado multiaxial é realizada com as mesmas hipóteses apresentadas na seção 2.6. Realizando um processo de integração análogo para a taxa de deformação obtida a partir da relação constitutiva (2.85), obtém-se a integração numérica para o caso multiaxial. O incremento de deformação para esse caso é

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{\nu(t^*)} \left\{ C_v \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{E_0} + \sum_{i=1}^M \left[\varepsilon_{i,n}^{ve} \left(e^{-\Delta t/\tau_i} - 1 \right) + C_v \frac{\sigma_n}{E_i} f_n(\Delta t/\tau_i) + C_v \frac{\sigma_{n+1}}{E_i} f_{n+1}(\Delta t/\tau_i) \right] \right\} \quad (4.18)$$

onde \mathbf{C}_v é a matriz de flexibilidade elástica adimensional, $\boldsymbol{\sigma}_n$ e $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ são as representações vetoriais reduzidas do tensor de tensões nos instantes t_n e t_{n+1} , e $\boldsymbol{\varepsilon}_{i,n}^{ve}$ é a representação vetorial reduzida do tensor de deformações viscoelásticas do i -ésimo elemento da cadeia de Kelvin no instante t_n .

Análises realizadas com o MEF em que a solução é obtida por um esquema incremental-iterativo necessitam do operador tangente a nível do material. Esse operador pode ser obtido pela relação tensão-deformação na sua forma infinitesimal, sendo conhecido como *operador tangente contínuo*. Simo *et al.* (1998; 1985) apresentam para modelos elastoplásticos o conceito de *operador tangente consistente*, obtido da relação tensão-deformação na sua forma já integrada, permitindo uma melhora na convergência global. Utilizando esse último conceito, a relação $\Delta\boldsymbol{\sigma}/\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ é obtida a partir da equação (4.18), a saber

$$\mathbf{D}^{ve} = v(t^*) \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^M \frac{f_{n+1}(\Delta t/\tau_i)}{E_i} \right)^{-1} \mathbf{D}_v \quad (4.19)$$

onde \mathbf{D}_v é matriz de rigidez elástica adimensional definida na seção 2.6.

O algoritmo de solução local (em um ponto material) proposto neste trabalho é apresentado no Quadro 4.1. Para uma análise realizada em Elementos Finitos, esse tipo de abordagem corresponde a um ponto de integração (ou ponto de Gauss). Neste algoritmo, adotam-se as seguintes premissas: todas as tensões e deformações são conhecidas no instante t_n ; a deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ no instante t_{n+1} é obtida como resultado de um passo no algoritmo de solução global por meio do MEF e, portanto, é conhecida; e assume-se a hipótese de variação linear da tensão durante o incremento de tempo Δt .

Quadro 4.1 – Algoritmo de integração em um ponto material

1. Para um dado passo $n+1$, o algoritmo recebe como dados de entrada os tensores $\boldsymbol{\sigma}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i}^{ve}$ convergidos no passo anterior e a previsão $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$
2. Calcula-se o incremento de deformação total $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n$
3. Obtém-se o valor de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ baseado na equação (4.18). O sistema de equações possui solução fechada na forma

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\mathbf{D}^{ve}}{v(t_m)} \left\{ v(t_m) \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mathbf{C}_v \boldsymbol{\sigma}_n}{E_0} - \sum_{i=1}^M \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{n,i}^{ve} (e^{-\Delta t/\tau_i} - 1) + \mathbf{C}_v \frac{\boldsymbol{\sigma}_n}{E_i} f_n(\Delta t/\tau_i) \right] \right\}$$
4. Atualizam-se as tensões $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ e deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$
5. Calcula-se o operador tangente consistente \mathbf{D}^{ve} conforme (4.19)

4.2.

Modelagem de dano com elementos de interface coesiva

Neste trabalho, elementos de interface coesiva são utilizados para a representação do dano na matriz de concreto em um contexto de Elementos Finitos. Essa metodologia tem origem no modelo da zona coesiva, proposto por Barenblatt (1962) e Dugdale (1960), e tem apresentado resultados muito satisfatórios para representação de fraturas em materiais como o concreto, metais, cerâmicas, compósitos e rochas (MEJIA; PAULLO; ROEHL, 2020). A seguir são apresentadas as formulações básicas para a modelagem do processo de dano utilizando elementos de interface coesiva.

Seja um domínio Ω com contorno Γ e uma fratura definida pela superfície Γ_f , conforme a Figura 4.2. O equilíbrio desse conjunto pode ser obtido a partir do princípio dos trabalhos virtuais, expresso por

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\Gamma_f} \delta\boldsymbol{\Delta} : \mathbf{T}_c dS = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u} : \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u} : \mathbf{T}_{ex} dS \quad (4.20)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões no elemento contínuo, \mathbf{T}_c é a força coesiva ao longo da fratura, \mathbf{b} são as forças de corpo no domínio Ω , \mathbf{T}_{ex} são as forças externas no contorno Γ , $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ é a deformação virtual, $\delta\boldsymbol{\Delta}$ a abertura virtual da fratura e $\delta\mathbf{u}$ o deslocamento virtual.

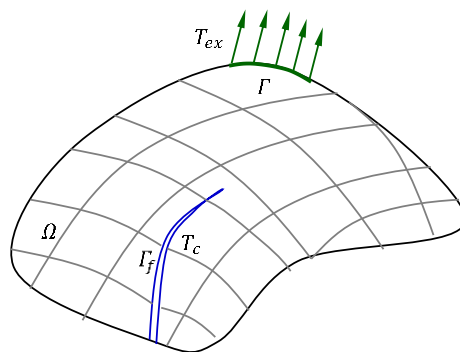


Figura 4.2 – Representação esquemática do domínio Ω , o contorno Γ , a fratura com superfície Γ_f e as forças de superfície T_c e T_{ex} . (MEJIA; PAULLO; ROEHL, 2020)

O domínio Ω é discretizado em elementos contínuos e elementos de interface ao longo do caminho da fratura. O campo de deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}$ sobre o domínio Ω é interpolado a partir do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u} com auxílio da matriz das funções de forma \mathbf{N} , conforme a seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{u} \quad (4.21)$$

A separação relativa Δ ao longo da fratura Γ_f é aproximada a partir dos deslocamentos nodais pelo uso da matriz global de separação-deslocamento \mathbf{B}_{ci} .

$$\Delta = \mathbf{B}_{ci}\mathbf{u} \quad (4.22)$$

onde \mathbf{B}_{ci} é dada por

$$\mathbf{B}_{ci} = \mathbf{N}\mathbf{L}\mathbf{R} \quad (4.23)$$

onde \mathbf{N} é a matriz de função de forma, \mathbf{L} é a matriz de relaciona o vetor separação-deslocamento local e \mathbf{R} é a matriz de rotação.

Nesse contexto, o vetor das forças internas \mathbf{f}_{ci} de um elemento de interface é dado por

$$\mathbf{f}_{ci} = \int_{\Gamma_f} \mathbf{B}_{ci}^T \mathbf{T}_c dS \quad (4.24)$$

O gradiente das forças internas conduz para a matriz tangente do elemento de interface

$$\mathbf{K}_{ci} = \frac{\partial \mathbf{f}_{ci}}{\partial \mathbf{u}} = \int_{\Gamma_f} \mathbf{B}_{ci}^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_{ci} dS \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{D}_c = \partial \mathbf{T}_c / \partial \Delta$ é a matriz constitutiva que relaciona as forças e os deslocamentos relativos na superfície de fratura.

O modelo constitutivo pode ser definido diretamente em termos da lei de tensão-separação. A tensão no elemento de coesivo na zona de processo de fraturamento consiste na componente normal τ_n e cisalhante τ_s , que são relacionadas a separação normal Δ_n e cisalhante Δ_s por meio das seguintes equações constitutivas.

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \tau_s \\ \tau_n \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}] \begin{Bmatrix} \Delta_s \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

onde $\mathbf{D} = [k_s \quad 0; 0 \quad k_n]$ é a matriz constitutiva tangente do elemento coesivo, k_s é a rigidez elástica de cisalhamento e k_n é a rigidez elástica normal do elemento de interface.

A relação entre tensão e deslocamento relativo assume um comportamento elástico linear até o ponto crítico de início do dano. O início do processo de amolecimento segue um critério de falha quadrático, que considera a interação das componentes de tensão normal e cisalhante conforme a relação

$$\left(\frac{\tau_s}{\tau_{so}} \right)^2 + \left(\frac{\langle \tau_n \rangle}{\tau_{no}} \right)^2 = 1 \quad (4.27)$$

onde τ_{no} é a resistência normal, τ_{so} é a resistência ao cisalhamento e $\langle \bullet \rangle$ é o operador de Macaulay, definido como $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$.

A separação efetiva no início do dano Δ_o corresponde ao ponto de máxima tração coesiva $\tau_o = \sqrt{\tau_s^{*2} + \tau_n^{*2}}$. Aqui, τ_n^* e τ_s^* representam a tensão normal e cisalhante que atendem ao critério de iniciação de dano dado em (4.27). Dessa forma, a resistência máxima coesiva τ_o considera indiretamente os efeitos das componentes normal e cisalhante.

O comportamento de amolecimento ocorre na zona pós-crítica, apresentando progressiva degradação da rigidez do material. A Figura 4.3 apresenta o modelo de dano com amolecimento linear.

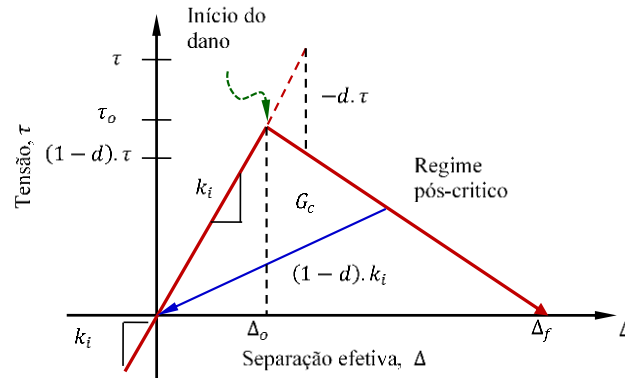


Figura 4.3 – Modelo de dano com amolecimento linear (MEJIA; PAULLO; ROEHL, 2020)

A área sob o a curva de tensão-separação representa a energia de fratura $G_f = \tau_o \Delta_f / 2$. No regime pós-crítico, a tensão coesiva $\mathbf{T}_c = (\bar{\tau}_s \quad \bar{\tau}_n)^T$ pode ser definida como

$$\bar{\tau}_s = (1-d)\tau_s \quad , \quad \text{com} \quad \bar{\tau}_n = \begin{cases} (1-d)\tau_n & , \text{ se } \Delta_n > 0 \\ \tau_n & , \text{ se } \Delta_n \leq 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

onde d é a variável de dano.

A variável de dano para o amolecimento linear pode ser definida como

$$d = \frac{\Delta_f (\Delta_m - \Delta_o)}{\Delta_m (\Delta_f - \Delta_o)} \quad (4.29)$$

onde Δ_o é a separação efetiva no início do dano, Δ_f é a separação efetiva crítica para a falha do material e $\Delta_m = \sqrt{\Delta_n^2 + \Delta_s^2}$ é o deslocamento efetivo. Dessa forma, a matriz constitutiva no regime pós-crítico é função da variável de dano e é dada por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (1-d)K_s & 0 \\ 0 & (1-d)K_n \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Outros modelos podem ser adaptados mudando a lei de evolução do dano dada pela equação (4.29), como por exemplo o modelo de amolecimento exponencial. Maiores detalhes de modelagem de dano e fraturas utilizando elementos de interface coesiva podem ser encontrados em trabalhos como os de Camanho *et al.* (2002), Dávila *et al.* (2007) e Turon *et al.* (2007).

4.3. Implementação computacional

Em uma análise não linear ou inelástica realizada por meio do Método dos Elementos Finitos, deve-se empregar uma solução de forma incremental. Neste caso, faz-se necessária a atualização das tensões. Mais ainda, a solução do sistema de equações não lineares através do Método de Newton-Raphson requer o emprego do tensor tangente consistente conforme apresentado na equação (4.19). O modelo viscoelástico em sua forma incremental apresentado no Quadro 4.1 foi implementado e validado. Para a realização de análises a nível local (ponto de Gauss) utilizou-se a plataforma MATLAB (2019). Para o uso do material no Método dos Elementos Finitos, foi utilizado o *framework* GeMA.

4.3.1. O *framework* GeMA

Proposto na tese de doutorado de Mendes (2016) e atualmente desenvolvido pelo grupo de Modelagem e Simulação Multifísica do Instituto Tecgraf/PUC-Rio, o *framework* GeMA (*Geo Modelling Annalysis*) é uma biblioteca na linguagem C++ que tem por objetivo apoiar o desenvolvimento de simuladores multifísicos. Sua estrutura é planejada para que os engenheiros se concentrem na programação da simulação física, enquanto o *framework* fica responsável pelo gerenciamento dos dados e pelas funções de apoio necessárias (TECGRAF/PUC-RIO, 2018).

O GeMA possui três componentes básicos para a definição de uma simulação: os dados do modelo, o método de solução e o monitor de resultados. Os dados do modelo compreendem, entre outros itens, a malha, as variáveis de estado, as propriedades dos materiais e condições de contorno. O método de solução é composto pelo *script* de orquestração, os processos, as físicas e os resolvedores numéricos. O monitor de resultados é formado pelo *script* de configuração e os

processos de *input* e *output*. Todos esses dados são apresentados em um conjunto de arquivos na linguagem Lua e utiliza-se a técnica de orquestração para definir o processo da simulação, como ilustra a Figura 4.4.

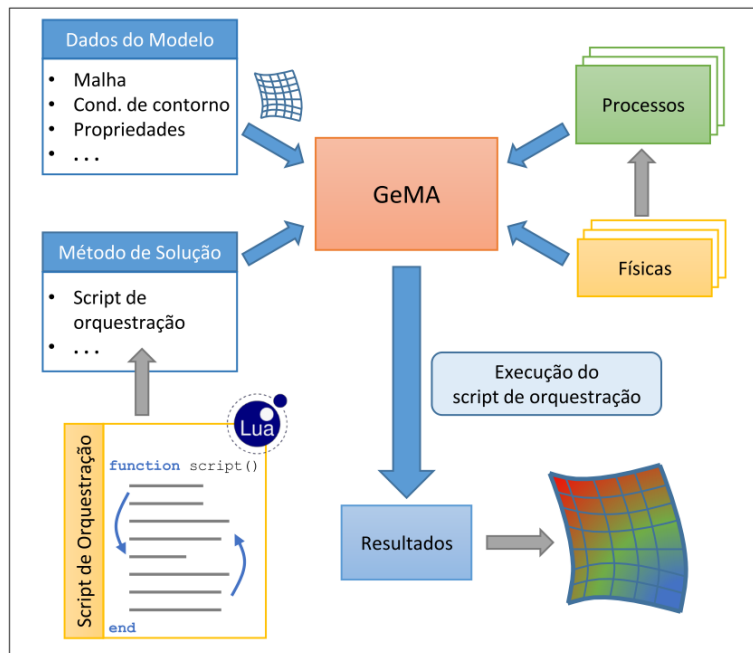


Figura 4.4 – Passos principais de uma simulação no GeMA (MENDES, 2016)

O GeMA possui um módulo nativo de Elementos Finitos, que oferece suporte para modelos bi e tridimensionais. A discretização pode ser feita com elementos contínuos e de interface. Atualmente, é possível de realizar análises de diferentes fenômenos físicos, como mecânica, hidráulica, térmica e química. Os resolvedores numéricos disponíveis contam as opções de solução de problemas estáticos e transientes. Os resultados são gerenciados de forma flexível, podendo o usuário escolher um formato pré-definido ou criar o seu próprio.

4.3.2. Estratégia numérica

Para o desenvolvimento deste trabalho, realiza-se a implementação do modelo constitutivo no módulo de Elementos Finitos do *framework* GeMA. Para tal, utiliza-se a integração numérica do material viscoelástico com envelhecimento conforme apresentado na Seção 4.1.2, aproveitando-se a implementação já existente das demais ferramentas necessárias.

Para a solução das análises abordadas neste trabalho, utiliza-se a física mecânica em regime de pequenas deformações. São utilizados os esquemas de

solução estático não linear e o transiente não linear com passo adaptativo de tempo (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2013). Nas análises desenvolvidas, utilizam-se os tipos de elementos listados a seguir.

Elementos contínuos:

- *tri3*: Elemento triangular, linear com três nós.
- *quad4*: Elemento quadrilátero, bilinear com quatro nós.
- *hex8*: Elemento hexaédrico, linear com oito nós

Elementos de interface:

- *int2dl4*: Elemento de interface, linear com quatro nós.

Em relação aos materiais, utiliza-se a implementação do autor para o modelo de fluência com os elementos contínuos e o modelo de dano coesivo existente no GeMA com os elementos de interface.

Maiores detalhes sobre a implementação de um algoritmo de material inelástico em um programa de Elementos Finitos são apresentados por Kojic e Bathe (2005) e Simo e Hughes (1998).

5 Aplicações e Resultados

5.1. Validação do algoritmo de integração

A seguir, realizam-se simulações numéricas a fim de validar a resposta do algoritmo de integração numérica proposto neste trabalho. São avaliados casos unidimensionais e tridimensionais. Para tal, utiliza-se a seguinte metodologia:

1. Define-se um histórico de tensão;
2. Arbitra-se as propriedades do material viscoelástico: a função $v(t)$ e a função de fluência $\Phi(t-t')$;
3. A partir do princípio da superposição de Boltzmann e das expressões analíticas apresentadas na Seção 4.1.1, calcula-se o histórico de deformação correspondente;
4. Realiza-se a integração numérica com as propriedades definidas no item 2 e os incrementos de deformação calculados a partir da resposta analítica do item 3; e
5. Por fim, compara-se o histórico de tensão definido no item 1 com o obtido pela integração numérica.

5.1.1. Caso uniaxial

5.1.1.1. Teste utilizando função de envelhecimento exponencial

Como primeiro teste para o caso uniaxial, o algoritmo de integração é baseado na equação (4.17). Adota-se o histórico de tensão apresentado no trabalho de

Grasley e Lange (2007), composto por dois carregamentos e um descarregamento, conforme a definição a seguir:

$$\sigma(t) = 100H(t-3) + 100H(t-30) - 200H(t-60) \quad (5.1)$$

onde $H(x)$ é a função degrau unitário. As tensões são dadas em kPa e o tempo em dias.

Para a função de fluência, adota-se uma cadeia de Kelvin com três unidades conforme a equação (2.36). Os tempos de retardo τ_i e os módulos de elasticidade E_i são apresentados na Tabela 5.1. É importante notar que esses parâmetros não apresentam um significado físico claro além da interpretação da cadeia de Kelvin, podendo assumir valores com diferentes magnitudes.

Tabela 5.1 – Parâmetros adotados na cadeia de Kelvin

i	τ_i (dia)	E_i (GPa)
0	-	43,26
1	1	224,90
2	10	78,63
3	100	16,36

Adota-se a função de envelhecimento com a forma (3.8) definida por

$$\frac{1}{v(t)} = 1,169e^{-0.00027t} + 0,729e^{-0.10084t} \quad (5.2)$$

O histórico de deformação analítico obtido a partir da expressão (4.3) pode ser observado na Figura 5.1.

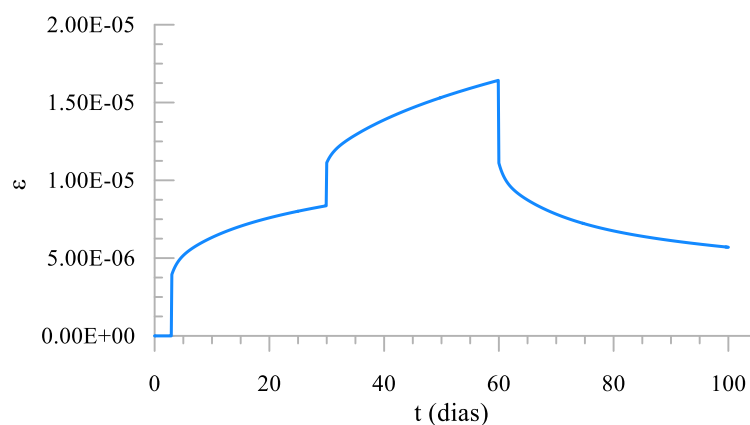


Figura 5.1 – Primeiro teste uniaxial: histórico de deformação analítico

Nesta etapa, a integração numérica é realizada com incrementos de tempo Δt constantes. Para avaliar a influência do tamanho do passo, são realizados testes com diferentes valores de Δt . Bažant (1995) indica que a rigidez instantânea do material viscoelástico é bem aproximada para $\Delta t = 0,1$ dia. A Figura 5.2 apresenta o resultado da integração numérica para incrementos de tempo iguais a 0,01, 0,1 e 1 dia.

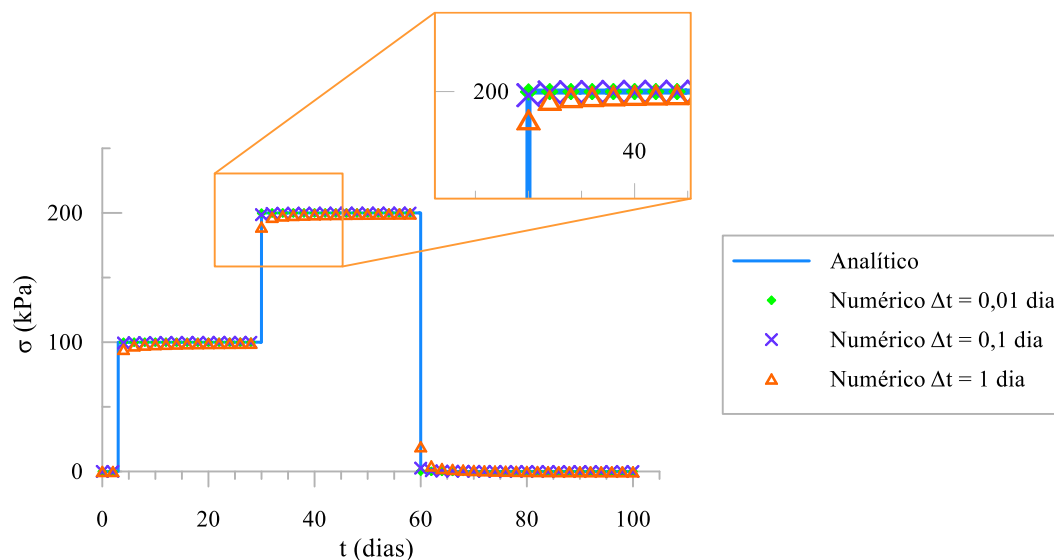


Figura 5.2 – Primeiro teste unidimensional: resultado da integração numérica para diferentes incrementos de tempo

Pode-se observar que o resultado da integração numérica se afasta do valor esperado quanto maior o incremento de tempo. Essa diferença se mostra mais proeminente nos instantes em que ocorrem carregamentos ou descarregamentos de forma instantânea. Isso se deve ao fato de que matematicamente Δt deve ser nulo para esses casos. Quando se utiliza um incremento não nulo para a avaliação da resposta instantânea, erros são introduzidos. Entretanto, espera-se que esse erro se aproxime de zero conforme $\Delta t \rightarrow 0$. A diferença relativa máxima $\Delta_{rel,max}$ entre o resultado da integração numérica e o valor analítico esperado considerando função de envelhecimento exponencial é apresentada na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Diferenças relativas máximas para diferentes incrementos de tempo no primeiro teste uniaxial.

Δt (dia)	$\Delta_{rel,max}$ (%)
0,01	0,15
0,1	1,48
1	11,41

5.1.1.2. Teste utilizando função de envelhecimento potencial

Como segundo teste, utiliza-se o mesmo carregamento definido em (5.1) e a mesma função de fluência com os parâmetros da Tabela 5.1. Adota-se, entretanto, a função de envelhecimento com a forma (3.10), com $\alpha = 0,7564$, definida por:

$$\frac{1}{v(t)} = \frac{t^{-0,5}}{0,7564} + 1 \quad (5.3)$$

Calcula-se histórico de deformação analítico a partir da expressão (4.6). Como as funções de envelhecimento definidas em (5.2) e (5.3) apresentam um comportamento semelhante no intervalo de interesse, a representação gráfica do histórico de deformação para o segundo teste é muito semelhante à apresentada na Figura 5.1. Realiza-se a integração para os mesmos incrementos de tempo adotados no teste anterior e o resultado é apresentado na Figura 5.3.

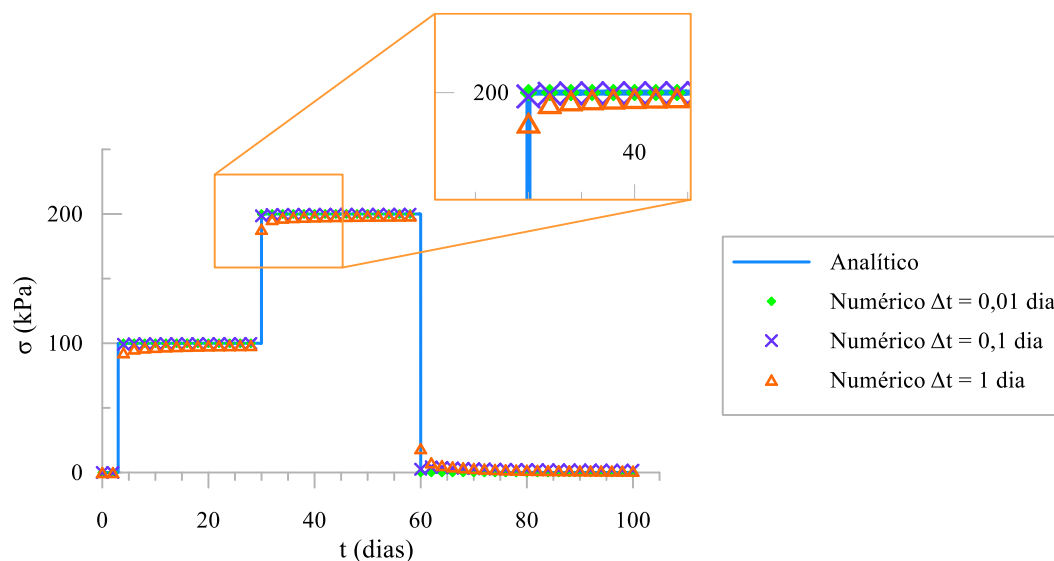


Figura 5.3 – Segundo teste unidimensional: resultado da integração numérica para diferentes incrementos de tempo

De forma análoga ao primeiro teste, calcula-se a diferença relativa máxima $\Delta_{rel,max}$ entre o resultado da integração numérica e o valor analítico esperado. O resultado para a integração considerando função de envelhecimento potencial é apresentado na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Diferenças relativas máximas para diferentes incrementos de tempo no segundo teste uniaxial

Δt (dia)	$\Delta_{rel,max}$ (%)
0.01	0,17
0.1	1,68
1	13,52

É possível observar nesses testes que a sugestão de incremento de tempo $\Delta t = 0,1$ dia apresenta por Bažant (1995) gera uma boa aproximação da resposta instantânea. Entretanto, $\Delta t = 0,01$ dia pode gerar resultados com uma diferença percentual máxima menor que 2%.

5.1.2. Caso multiaxial

5.1.2.1. Teste multiaxial utilizando função de envelhecimento exponencial

No primeiro teste do caso multiaxial, a integração numérica é realizada conforme a equação (4.18). Admite-se um comportamento isotrópico e adota-se o coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$. Arbitra-se o seguinte histórico de tensão multiaxial

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = [\sigma_{11}(t) \quad \sigma_{22}(t) \quad \sigma_{33}(t) \quad \sigma_{12}(t) \quad \sigma_{23}(t) \quad \sigma_{13}(t)]^T \quad (5.4)$$

com

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(t) &= -100H(t-3) - 100H(t-30) + 200H(t-60) \\ \sigma_{22}(t) &= -50H(t-3) - 25H(t-30) + 75H(t-60) \\ \sigma_{12}(t) &= 150H(t-40) - 150H(t-50) \\ \sigma_{33}(t) &= \sigma_{23}(t) = \sigma_{13}(t) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde, as tensões são dadas em kPa e o tempo em dias.

Adota-se a função de fluência com os parâmetros apresentados na Tabela 5.1 e a função de envelhecimento definida em (5.2). A Figura 5.4 apresenta as componentes não nulas do histórico de deformação $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ correspondente. O seu

cálculo é realizado a partir da expressão (4.3) com as premissas apresentadas na Seção 2.6.

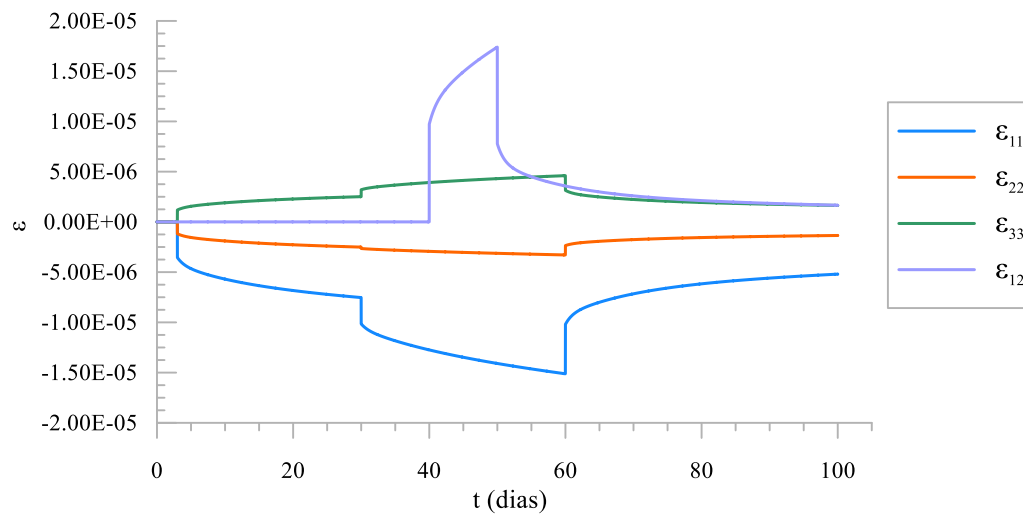


Figura 5.4 – Primeiro teste multiaxial: histórico de deformação

A integração numérica é realizada com passo constante igual a 0,01 dia e obtém-se a resposta apresentada na Figura 5.5. Pode ser observado a concordância entre os valores analíticos e os valores obtidos pela integração numérica.

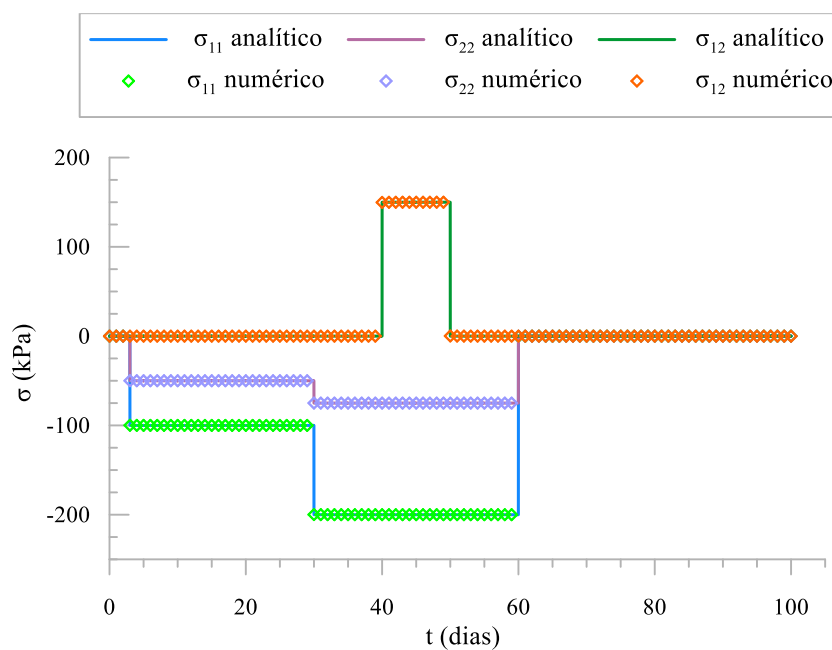


Figura 5.5 – Primeiro teste multiaxial: histórico de tensão obtido por integração numérica

5.1.2.2. Teste multiaxial utilizando função de envelhecimento potencial

O segundo teste multiaxial é realizado de maneira semelhante ao caso anterior, alterando-se somente a função de envelhecimento, adotando-se a expressão definida em (5.3). O histórico de deformação é calculado a partir da expressão (4.6) com as premissas apresentadas na Seção 2.6. O resultado da integração com incrementos de tempo constantes e iguais a 0,01 dia são apresentados na Figura 5.6. Pode ser observada a concordância dos resultados numéricos e analíticos.

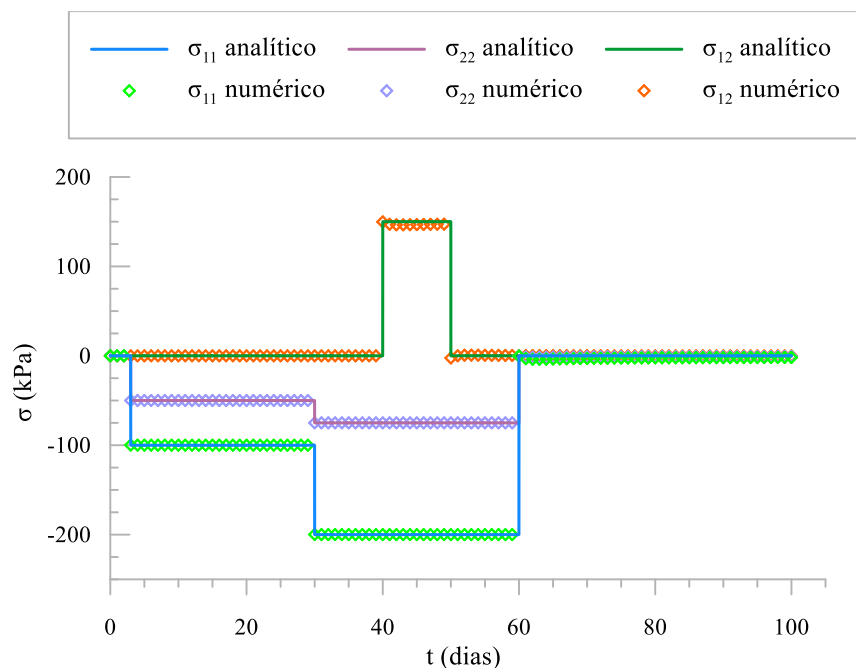


Figura 5.6 – Segundo teste multiaxial: histórico de tensão obtido por integração numérica

Como pode ser observado, todos os testes apresentados na Seção 5.1 exibiram boa concordância entre os resultados obtidos pela integração numérica e as soluções analíticas. Isso mostra a capacidade da integração numérica para representar de maneira adequada a formulação de viscoelasticidade a través de cadeias de Kelvin ao mesmo tempo que validam as implementações computacionais.

5.2. Validação da implementação no GeMA

O esquema de integração para o caso multiaxial é implementado no *framework* GeMA. Foram realizados todos os tratamentos necessários para a

análise de modelos tridimensionais, axissimétricos, em estado plano de tensão e estado plano de deformação. Testes de validação foram realizados para cada tipo de análise e a seguir são apresentados dois casos. A metodologia adotada nesses testes segue os seguintes passos:

1. Define-se um histórico de tensão;
2. Arbitra-se as propriedades do material viscoelástico: a função $v(t)$ e a função de fluência $\Phi(t-t')$;
3. A partir do princípio da superposição de Boltzmann (Quadro 2.1), das considerações para o estado multiaxial de tensão (Seção 2.6) e das expressões analíticas da função de fluência (Seção 4.1.1), calcula-se o histórico de deformação analítico correspondente;
4. Realiza-se uma análise em Elementos Finitos com o histórico de tensão definido no item 1 e as propriedades do material definidas no item 2. O modelo é ajustado de tal forma que o comportamento de um pondo de Gauss seja equivalente à resposta analítica do item anterior; e
5. Por fim, compara-se o histórico de deformação analítico obtido no item 3 com o obtido pela análise em Elementos Finitos.

A seguir, são apresentados os exemplos de validação para o estado plano de tensão e o caso tridimensional. No caso do estado plano de tensão, apresentado na Figura 5.7a, considera-se uma chapa quadrada com lado igual a 1,0 m. Para sua modelagem, considera-se uma malha com apenas um elemento “quad4” com 4 pontos de integração. No caso tridimensional, apresentado na Figura 5.7b, considera-se um cubo com lado igual a 1,0 m. Na sua modelagem é considerada uma malha com apenas um elemento “hex8” com oito pontos de integração.

Em ambos os casos, assumem-se as mesmas propriedades da cadeia de Kelvin apresentadas na Tabela 5.1 e para a função de envelhecimento, adota-se apenas função potencial, definida em (5.3). Para cada tipo de análise, escolhem-se os eixos a fim de facilitar a comparação com a resposta analítica.

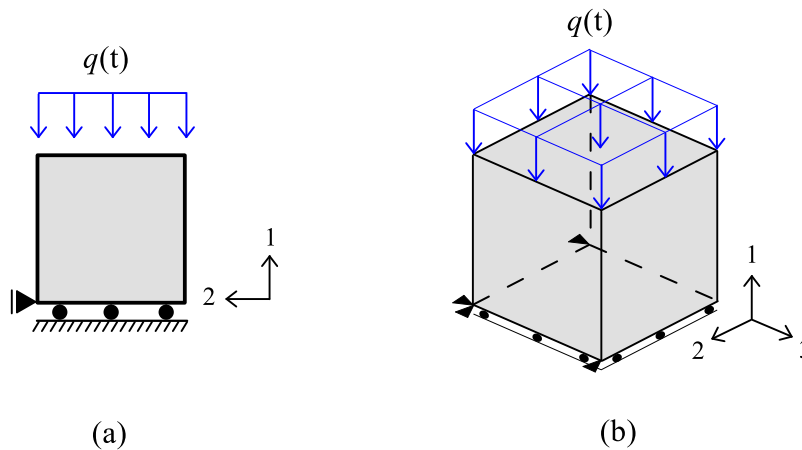


Figura 5.7 – Modelos para validação: (a) modelo para o estado plano de tensão e (b) modelo para o caso tridimensional

O carregamento utilizado em ambos os exemplos é definido pela expressão

$$q(t) = 100H(t-3) + 100H(t-30) - 200H(t-60) \quad (5.6)$$

onde, o instante t é dado em dias e o carregamento q em kPa/m para o exemplo bidimensional e em kPa/m² para o exemplo tridimensional.

Nos instantes de carregamento/descarregamento instantâneo ($t = 3, 30$ e 60 dias), adota-se um incremento de tempo inicial $\Delta t_0 = 0,01$. É empregado um esquema de adaptação de passo de tempo no qual dobra-se o tamanho do incremento adotado no passo anterior. Essa adaptação é feita para incrementos que atendam as condições de controle de erro, as quais são pré-definidas pelo solucionador transiente implementado no GeMA. A Figura 5.8 mostra comparação dos resultados analíticos e numéricos mostrando boa concordância entre os mesmos. Esse comportamento demonstra a validade da implementação numérica do modelo viscoelástico no GeMA.

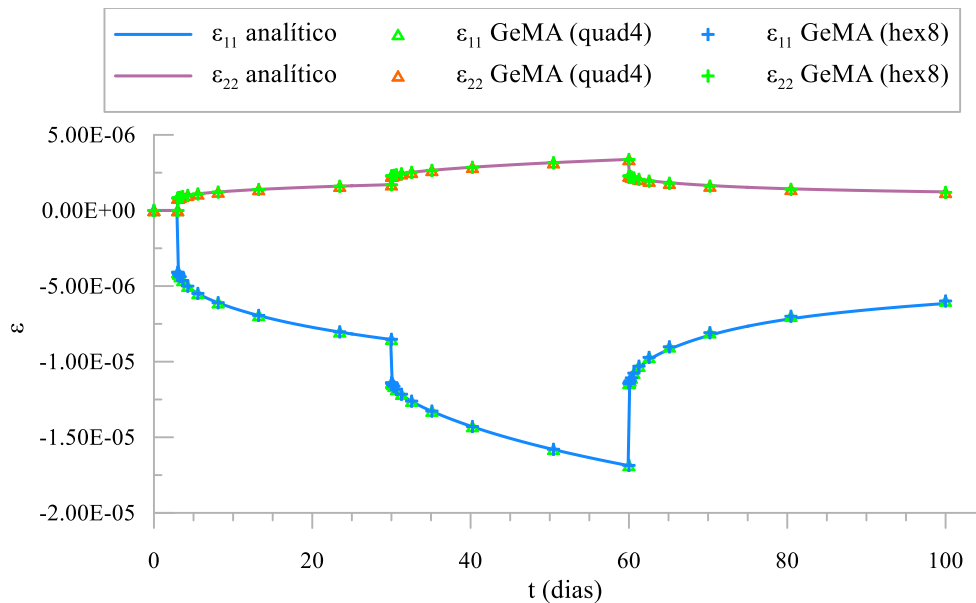


Figura 5.8 – Teste multiaxial: Comparação do histórico de deformação obtido com a implementação no GEMA e com a solução analítica.

5.3. Calibração de parâmetros

A capacidade de previsão de um modelo depende não somente da física representada, mas também da qualidade de sua calibração. Modelos que consideram diferentes fenômenos físicos costumam apresentar um elevado número de parâmetros. Por consequência, o processo de calibração muitas vezes apresenta múltiplas soluções, sendo possível obter diferentes conjuntos de parâmetros que realizam o ajuste de um mesmo conjunto de dados experimentais. Dessa forma, o processo de calibração desses tipos de modelos pode se tornar complexo e deve seguir um procedimento adequado.

No caso da modelagem do comportamento viscoelástico, é possível de fazer uma redução de parâmetros a serem calibrados simultaneamente. Para isso, é realizado o desacoplamento de alguns fenômenos físicos. Abdellatef *et al.* (2019) sugerem que o processo de calibração nesses casos deve ser baseado no tipo de dado experimental e nos fenômenos físicos que dominam a resposta. No presente trabalho, considera-se o desacoplamento dos efeitos de dano, de viscoelasticidade e do envelhecimento do concreto.

O modelo de dano deve ser calibrado a partir de ensaios destrutivos para replicar o comportamento do concreto submetido à elevados níveis de tensão e

deformação. Nesta primeira etapa de calibração, considera-se constante o módulo de elasticidade aparente $E(t)$ na idade do teste. Essa é uma hipótese válida desde que o ensaio de resistência tenha sido realizado no intervalo de minutos e os efeitos da viscoelasticidade com envelhecimento possam ser desprezados. No processo de calibração do modelo viscoelástico, os parâmetros presentes na equação (3.5) devem ser calibrados de maneira a produzir exatamente o mesmo valor de $E(t)$ utilizado nesta primeira etapa.

O comportamento viscoelástico sem dano caracterizado pela função $J(t, t')$ deve ser calibrado com ensaios de fluência submetidos a carregamentos inferiores a 40% da carga máxima suportada no ensaio de ruptura, garantindo assim a linearidade da fluência do concreto. Com a teoria da solidificação, a calibração do comportamento viscoelástico com envelhecimento é composta por dois problemas separados (BAŽANT, 1995). O primeiro consiste na determinação dos parâmetros que descrevem a fração de volume solidificado descrito pela função de envelhecimento $v(t)$, enquanto o segundo consiste na determinação dos parâmetros que caracterizam a função de fluência $\Phi(t)$ definida pela cadeia de Kelvin.

5.3.1. Calibração da função de envelhecimento

A calibração dos parâmetros da função de envelhecimento $v(t)$ é realizada de forma iterativa com o método dos mínimos quadrados não lineares (KEMMER; KELLER, 2010). Ajusta-se a curva do módulo de elasticidade instantâneo $E_0(t')$ para uma cadeia de Kelvin com envelhecimento (equação (2.53)) adotando-se

$$E_0(t') = E_0^{(\infty)} v(t') \quad (5.7)$$

onde $E_0^{(\infty)}$ é o valor final do módulo de elasticidade instantâneo ao final do processo de solidificação.

Utiliza-se na calibração a função de Graslay e Lange (2007), conforme a equação (3.8), e a função de Bažant e Jirásek (2018), conforme a equação (3.10). A Figura 5.9 apresenta o resultado da calibração com base nos dados experimentais

de Neville (2012). Para este caso, adota-se o comportamento de concretos com classe normal, agregados com formato angular e relação água/cimento igual a 0,5. Os detalhes da determinação da curva média de evolução do módulo de elasticidade são apresentados no Apêndice A.

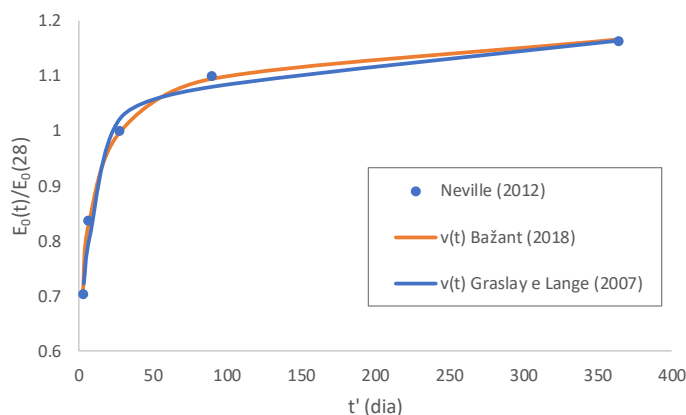


Figura 5.9 – Resultado da calibração para os dados de Neville (2012)

Os valores calibrados com as funções de fluência e os respectivos coeficientes de correlação r são apresentados na Tabela 5.4. Adota-se para esses casos em que se considera $E_0(28) = E_0^{(28)}$.

Tabela 5.4 – Calibração da função de envelhecimento para os dados de Neville (2017)

	Bažant e Jirásek (2018)	Graslay e Lange (2007)
$E_0^{(\infty)} / E_0^{(28)}$	1,247	1,232
Parâmetros do modelo	$\alpha = 0,7564$	$\beta_1 = 1,169$
		$\beta_2 = 0,729$
		$\omega_1 = 0,00027$
		$\omega_2 = 0,10084$
r	0,9997	0,9925

O mesmo processo de calibração é realizado para os dados apresentados por Kocab (2017), em que se considera concretos de classe normal, com relação água/cimento igual a 0,43. Os resultados podem ser observados na Figura 5.10 e na Tabela 5.5.

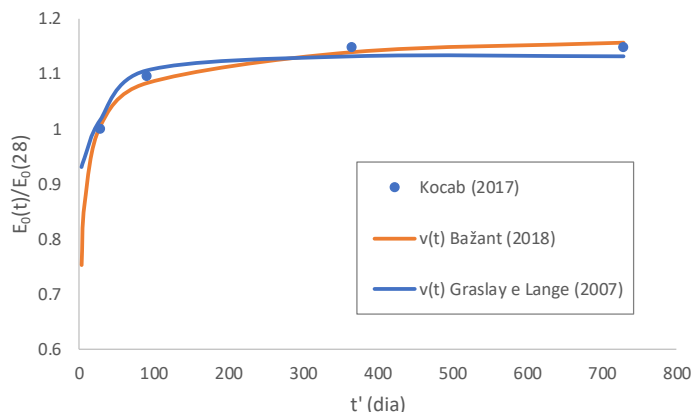


Figura 5.10 – Resultado da calibração para os dados de Kocab (2017)

Tabela 5.5 – Resultado da Calibração da função de envelhecimento para os dados de Kocab (2017)

	Bažant (2018)	Graslay e Lange (2007)
$E_0^{(\infty)} / E_0^{(28)}$	1,203	1,424
Parâmetros do modelo	$\alpha = 0,9678$	$\beta_1 = 1,257$
		$\beta_2 = 0,297$
		$\omega_1 = 0,00000$
		$\omega_2 = 0,02560$
r	0,9891	0,9895

Cabe observar que as duas funções de envelhecimento são capazes de representar adequadamente o comportamento de $E(t)$ no intervalo de tempo considerado nos dados experimentais. Entretanto, como observado na Seção 3.3.2, a função apresentada por Bažant e Jirásek (2018) apresenta uma melhor previsão do comportamento para valores de tempo fora do intervalo de calibração. Para ilustrar esse fenômeno, realiza-se novamente a calibração com os dados experimentais de Neville (2012), considerando apenas os três primeiros dados experimentais, que são medidos nos instantes $t' = 3, 7$ e 28 dias. Observa-se na Figura 5.11 que a função potencial de Bažant e Jirásek (2018) é capaz de prever com boa acurácia os valores experimentais para os instantes de tempo $t' = 90$ e 365 dias. Já a calibração feita com a função de serie exponencial de Graslay e Lange (2007) mostra divergência evidente para dados fora da faixa de calibração.

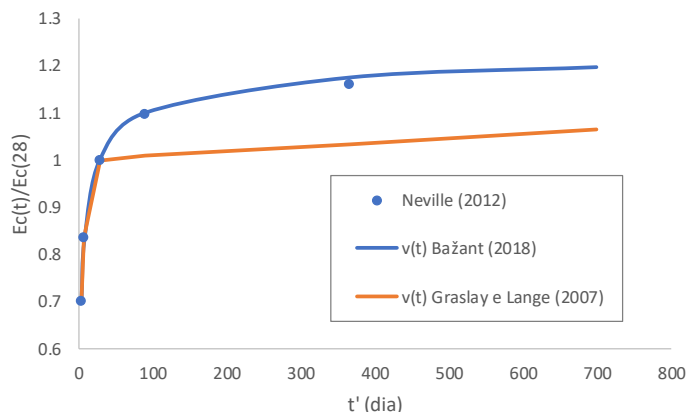


Figura 5.11 – Comparação do comportamento das funções de envelhecimento para instantes fora do intervalo de calibração

Os valores calibrados nessa condição são apresentados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Calibração da função de envelhecimento com os dados experimentais de Neville (2012) utilizando apenas os instantes de tempo $t' = 3, 7$ e 28 dias.

	Bažant (2018)	Graslay e Lange (2007)
$E_0^{(\infty)} / E_0^{(28)}$	1,260	1,300
Parâmetros do modelo	$\alpha = 0,7330$	$\beta_1 = 1,298$
		$\beta_2 = 0,987$
		$\omega_1 = 0,00009$
		$\omega_2 = 0,19232$
r	0,9996	0,9712

Comparando os resultados apresentados nas Tabelas 5.4 e 5.6 pode-se observar também que houve uma menor variação nos parâmetros da função de envelhecimento de Bažant e Jirásek (2018). Além disso, foi notado que a função do Graslay e Lange (2007) apresentou maior sensibilidade em relação ao conjunto de valores iniciais arbitrados no início do processo iterativo de calibração. Neste trabalho, portanto, adota-se a função $v(t)$ definida pela lei de potência dupla, conforme sugerido por Bažant (2018).

5.3.2. Calibração da função de fluência

A calibração da função de fluência $\Phi(t-t')$ também é realizada de forma iterativa com o método dos mínimos quadrados não linear. Ajusta-se a função de fluência analítica apresentada na Seção 4.1.1, considerando fixos os parâmetros calibrados na etapa anterior.

Sabe-se que a determinação de parâmetros para modelos reológicos a partir de dados experimentais é um problema mal condicionado, uma vez que diferentes tempos de retardo podem ajustar de forma quase idêntica a curva desejada (BAŽANT, 1995). Para superar esse problema, deve-se escolher valores fixos para os tempos de retardo antes do processo de calibração. Bažant e Jirásek (2018) recomendam que os tempos de retardo estejam em uma progressão geométrica com razão igual a 10 e a escolha dos tempos de retardo seja de tal forma que $\tau_1 \leq 3t_{\min}$ e $\tau_M \geq 0,5t_{\max}$, onde t_{\min} e t_{\max} são, respectivamente, o menor e o maior tempo de carregamento de interesse.

A obtenção de dados experimentais é feita a partir do trabalho de Hubler, Wendner e Bažant (2015), que reúne de maneira compreensível em um único banco de dados os resultados de diversos ensaios de fluência e retração presentes na literatura. Todos os ensaios de fluência básica são realizados em corpos de prova selados, expostos a condições constantes de umidade H e temperatura T , e submetidos a um carregamento uniaxial de compressão menor que 40% da resistência à compressão f_c . Escolhe-se os ensaios de Hilsdorf (1994, apud HUBLER; WENDNER; BAŽANT, 2015) identificados pelas etiquetas “c_099_04” e “c_099_08” para realização da calibração da função de fluência. Na Tabela 5.7 são apresentadas as características principais desses ensaios.

Tabela 5.7 – Características principais dos ensaios adotados na calibração da função de fluência

Propriedade	c_099_04	c_099_08	Unidade
f_c	40,0	40,0	MPa
a/c	0,55	0,55	-
$E^{(28)}$	30200	30200	MPa
T	20,0	20,0	°C
t'	28	28	dia
H	65,0	99,0	%

Para o processo de calibração, utiliza-se a função de fluência $\Phi(t-t')$ definida por uma cadeia de Kelvin com três elementos. Adota-se a função $v(t)$ do Bažant e Jirásek (2018) com os parâmetros apresentados na Tabela 5.4. O módulo de elasticidade ao final do processo de solidificação $E_0^{(\infty)}$ é determinado pela relação $E_0^{(\infty)}/E_0^{(28)}$ obtida na calibração da função $v(t)$ e os tempos de retardo são fixados com valores iguais a $\tau_1=1$, $\tau_2=10$ e $\tau_3=100$ dias. Determinam-se, portanto, os parâmetros $E_1^{(\infty)}$, $E_2^{(\infty)}$ e $E_3^{(\infty)}$ da função de fluência com o auxílio da expressão analítica apresentada em (4.6). A Figura 5.12 e a Tabela 5.8 apresentam o resultado da calibração com os dados do ensaio c_099_04.

Tabela 5.8 – Resultado da calibração da função de fluência com o ensaio c_099_04

Propriedade	Valor	Unidade
$E_0^{(\infty)}$	37665	MPa
α	0,7564	-
$E_1^{(\infty)}$	69205	MPa
$E_2^{(\infty)}$	323697	MPa
$E_3^{(\infty)}$	25497	MPa
r	0.9956	-

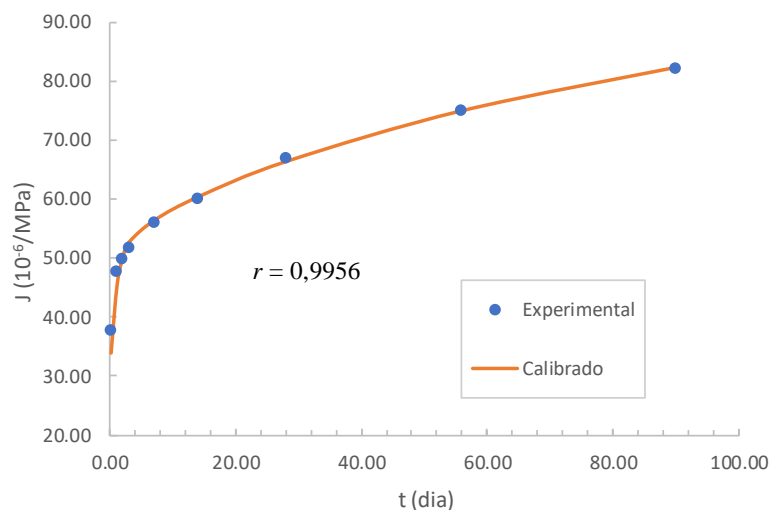


Figura 5.12 – Calibração da função de fluência com o ensaio c_099_04

Realiza-se o mesmo processo com o ensaio c_099_04 e obtém-se os resultados apresentados na Tabela 5.10 e na Figura 5.13

Tabela 5.9 – Resultado da calibração da função de fluência com o ensaio c_099_08

Propriedade	Valor	Unidade
-------------	-------	---------

$E_0^{(\infty)}$	37665	MPa
α	0,7564	-
$E_1^{(\infty)}$	148626	MPa
$E_2^{(\infty)}$	168615	MPa
$E_3^{(\infty)}$	25444	MPa
r	0,9981	-

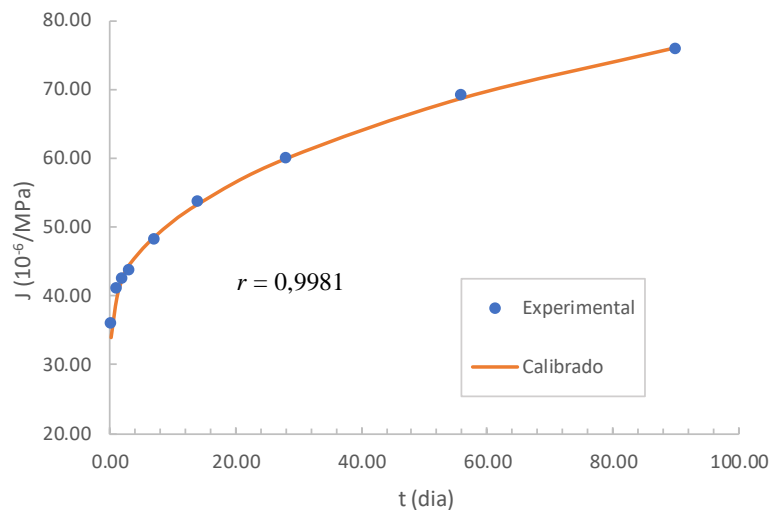


Figura 5.13 – Calibração da função de fluência ensaio c_099_08

Como pode ser observado nas Figuras 5.13 e 5.12, os parâmetros obtidos no processo de calibração pelo método não linear dos mínimos quadrados conseguiram representar de forma bastante próxima a tendência dos ensaios experimentais. Isso pode ser constatado com o coeficiente de correlação que em ambos os casos foi superior a 0.99. Tais indicativos mostram a capacidade do modelo viscoelástico implementado para a boa representação do comportamento da fluência em concreto em ensaios unidimensionais.

5.4. Fluência na flexão

As estruturas de concreto podem estar sujeitas a diversos tipos de carregamento. O estado de serviço dessas estruturas é um problema que envolve fluência e dano. Para avaliar o modelo apresentado neste trabalho, escolhe-se estudar a fluência na flexão de vigas de concreto. Para tal, escolhe-se um ensaio experimental na literatura e desenvolve-se uma metodologia para a sua modelagem numérica.

5.4.1. Exemplo de aplicação

O trabalho de Omar *et al.* (2009) estuda o comportamento da fluência e do dano em vigas de concreto sujeitas à flexão. Nele, estudam-se vigas com entalhe no meio do vão e realizam-se ensaios de flexão de três pontos com diferentes níveis de intensidade de carga. A Figura 5.12a apresenta a geometria da viga, que para o caso estudado no presente trabalho, apresenta os seguintes parâmetros geométricos: $D = 100 \text{ mm}$, $l = 300 \text{ mm}$, $L = 350 \text{ mm}$ e $b = 100 \text{ mm}$. O entalhe possui profundidade $a_0 = 15 \text{ mm}$ e espessura igual a 3 mm .

Os ensaios de flexão foram realizados com controle da abertura da fissura “Crack Mouth Opening Displacement” (CMOD) e medição da flecha no ponto central da viga, conforme o esquema apresentado na Figura 5.14b.

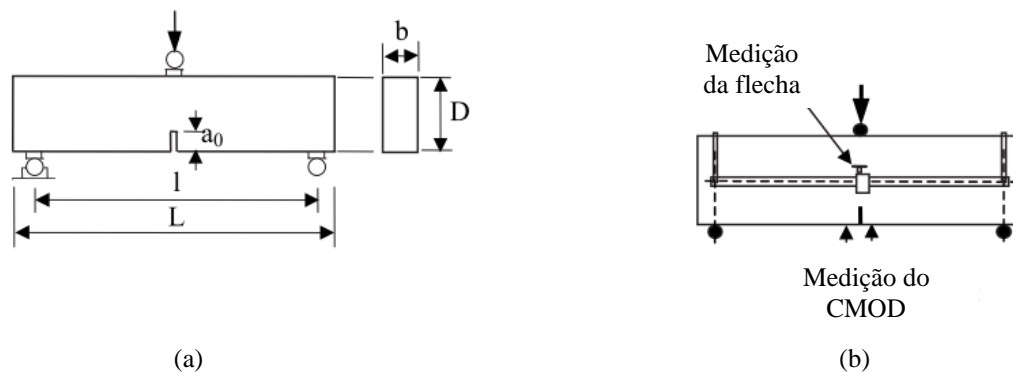


Figura 5.14 – (a) Geometria do modelo de viga a ensaiar (b) esquema do ensaio de flexão. (OMAR *et al.*, 2009)

O concreto utilizado na moldagem dos corpos de prova possui relação água/cimento igual a 0,56 e *slump* de 40 mm. Na referência, são realizados ensaios específicos para determinar a resistência a compressão f_c , a resistência a tração f_t e o módulo de elasticidade dinâmico E_d . A carga máxima F_{\max} suportada pela viga e a energia de fratura G_f foram determinadas por ensaios de flexão de três pontos realizados até a ruptura. A referência também indica que os ensaios foram realizados com taxa de carregamento constante em três amostras idênticas, adotando-se como resultado a média dos valores obtidos. A Tabela 5.10 apresenta tais propriedades, considerando a idade do concreto igual a 28 dias.

Tabela 5.10 – Propriedades mecânicas aos 28 dias determinadas por Omar *et al.* (2009)

Propriedades	Valor médio de três amostras	Unidade
--------------	------------------------------	---------

f_c	41,5	MPa
f_t	3,5	MPa
E_d	39000	MPa
F_{\max}	8,634	kN
G_f	33,1	N/m

As amostras utilizadas nos ensaios descritos foram curadas por 28 dias em condições de umidade e temperatura constantes. A Figura 5.15 apresenta a relação média de carga-deslocamento no centro do vão obtida no ensaio de flexão até a ruptura, obtendo $F_{\max} = 8,634$ kN.

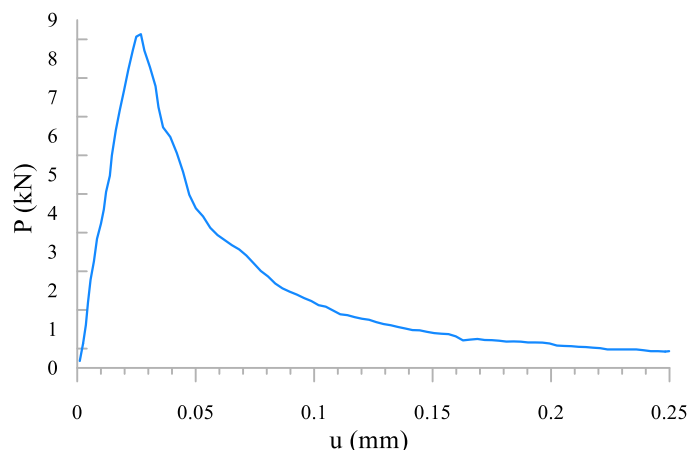


Figura 5.15 – Carga-deslocamento para o ensaio de flexão até a ruptura (OMAR *et al.*, 2009)

Nos ensaios de fluência, os carregamentos foram aplicados no instante $t' = 28$ dias. A duração do carregamento ($t - t'$) foi igual a 60 dias para todos os testes. Foram aplicadas cargas constantes com valores iguais a 3,108 kN, 5,180 kN e 6,907 kN, que correspondem respectivamente a 36, 60 e 80% da carga máxima F_{\max} do ensaio de ruptura (Figura 5.15). As amostras foram protegidas da secagem por uma camada dupla de papel alumínio autoadesivo e as condições de cura foram ajustadas para evitar a retração autógena. Dessa forma, buscava-se medir nos ensaios apenas a fluência básica do concreto. A Figura 5.16 apresenta os deslocamentos de fluência básica, que foram determinados subtraindo a deformação elástica instantânea do deslocamento total medido no ponto central da viga.

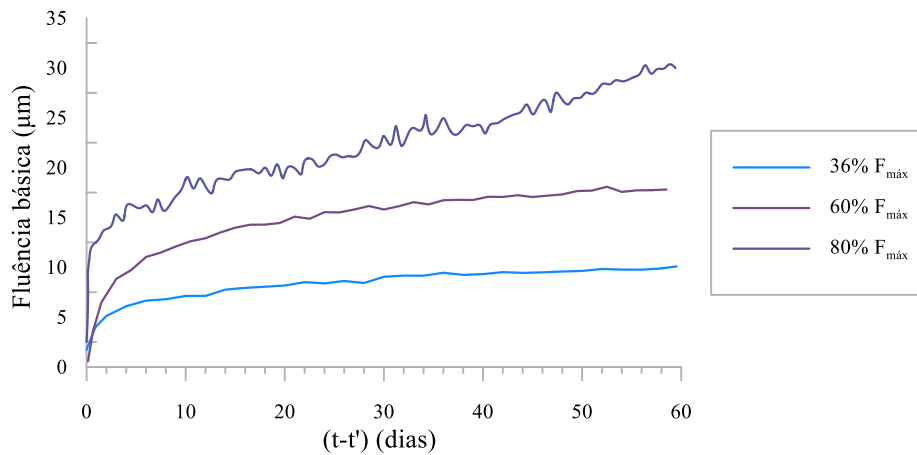


Figura 5.16 – Deslocamento de fluência básica para os carregamentos de 36, 60 e 80% de F_{\max}
(Omar *et al.*, 2009 apud SALIBA *et al.*, 2014)

5.4.2. Modelagem numérica

Com a finalidade de representar os ensaios de fluência de Omar *et al.* (2009) desenvolve-se um modelo de Elementos Finitos em estado plano de tensão. A seguir, são descritas as etapas de construção do modelo.

5.4.2.1. Malha de Elementos Finitos

São consideradas duas malhas de Elementos Finitos. A primeira, possui apenas elementos contínuos, sendo composta por um total de 2282 nós e 4198 elementos, sendo 3958 elementos triangulares de três nós (tri3) com um ponto de Gauss e 240 elementos quadrangulares de quatro nós (qua4) com quatro pontos de Gauss. A segunda, possui os mesmos elementos contínuos, adicionados 4418 elementos de interface de quatro nós (int2dl4) com dois pontos de Gauss, totalizando 9583 nós e 8616 elementos. É importante destacar que os elementos de interface possuem 4 nós e, portanto, a compatibilidade com os elementos contínuos que os circundam é mantida. A geometria de ambas as malhas pode ser observada na Figura 5.17. A primeira malha é utilizada para modelar apenas o efeito da fluência linear, enquanto a segunda é utilizada para modelar o efeito da fluência não linear.

A representação da danificação do material é realizada pelo modelo de dano coesivo aplicado aos elementos de interface, que são inseridos nas arestas dos

elementos contínuos localizados na região central da viga, destacadas de vermelho na Figura 5.17. Nessa região se espera a maior concentração de tensões e, conseqüentemente, a propagação das fraturas geradas pelo processo de dano. Isso justifica a sua escolha.

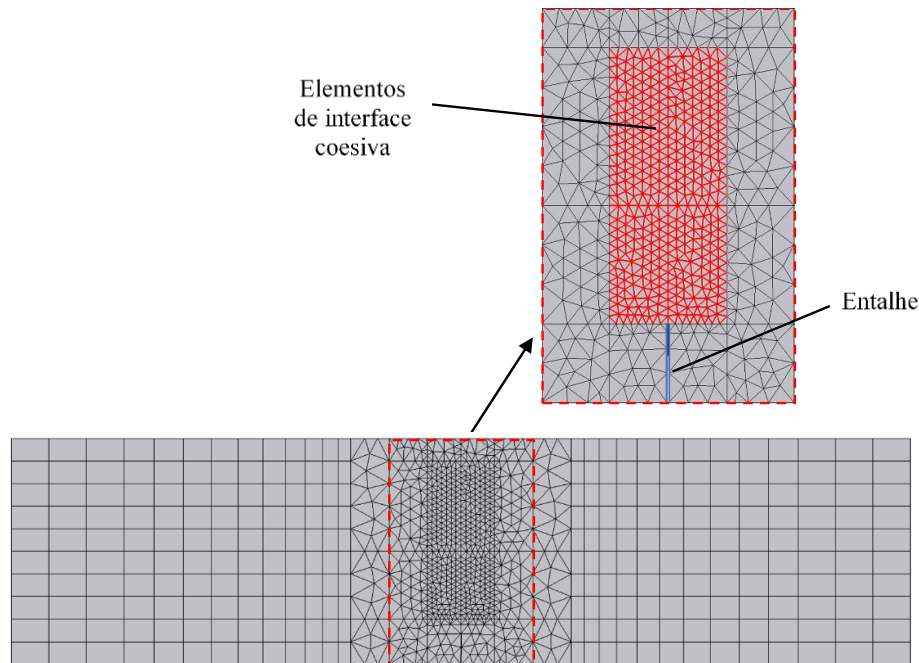


Figura 5.17 – Malha de elementos finitos e região central com elementos de interface coesiva.

5.4.2.2. Propriedades do material de interface coesiva

Os parâmetros do comportamento do dano são calibrados a partir de uma análise estática, com controle misto de arco e energia (MEJIA; PAULLO; ROEHL, 2020). Os elementos contínuos são considerados elásticos e suas propriedades são baseadas nos valores experimentais apresentados na Tabela 5.10. Adota-se o coeficiente de Poisson igual a $\nu = 0,2$ e a aproximação do módulo de elasticidade estático E_c é realizada a partir do seu valor dinâmico E_d com a expressão $E_c = 0.83E_d$ proposta por Lydon e Balendran (1986, apud NEVILLE, AM., 2012).

Adotam-se as rigidezes normal e cisalhante quatro ordens acima do módulo de elasticidade estático ($K_n = K_s = E_c \times 10^4$) e a resistência normal do modelo coesivo igual à resistência do concreto à tração ($\tau_{no} = f_t = 3,5$ MPa). Os valores da resistência ao cisalhamento τ_{so} e da separação efetiva crítica para a falha do

material Δ_f são calibrados buscando alcançar uma adequada representação da carga máxima F_{\max} e da energia de fratura G_f apresentadas na Tabela 5.10.

Ao final do processo de calibração, são obtidos os parâmetros apresentados na Tabela 5.11. A curva de carga-deslocamento numérica é comparada com o resultado experimental na Figura 5.18, mostrando proximidade nos valores de carga máxima.

Tabela 5.11 – Parâmetros adotados para o modelo de interface coesiva

Propriedade	Valor	Unidade
K_n	32370×10^4	MPa/m
K_s	32370×10^4	MPa/m
τ_{no}	3,5	MPa
τ_{so}	5,3	MPa
G_f	33,1	N/m
Δ_f	2.5×10^{-5}	m

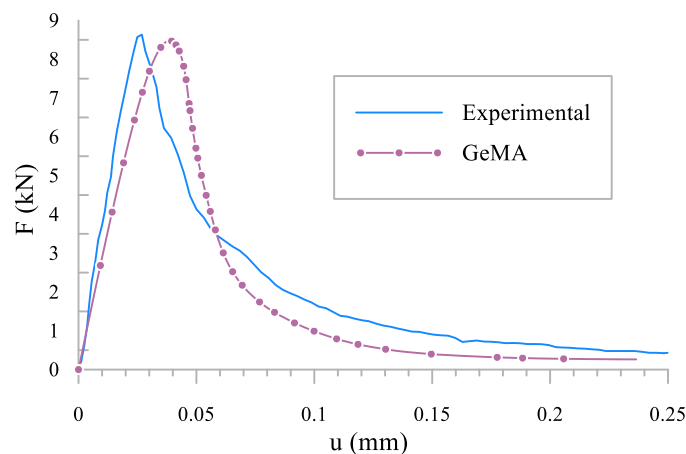


Figura 5.18 – Comparação entre o resultado do modelo numérico no GeMA com o resultado experimental obtido por Omar *et al.* (2009)

O ensaio experimental apresenta carga máxima F_{\max} igual a 8,634 kN quando o deslocamento u atinge aproximadamente 0,027 mm. O modelo numérico ajustado apresenta carga máxima F_{\max} igual a 8,478 kN quando o deslocamento u atinge 0,039 mm.

5.4.2.3.

Propriedades do modelo viscoelástico com envelhecimento

O trabalho de Omar *et al.* (2009) não teve como objetivo a caracterização unidimensional da fluência ou o estudo da evolução do módulo de elasticidade ao longo do tempo. Entretanto, a ausência dessas informações limita o caminho natural

de calibração, que consiste em utilizar os ensaios de caracterização do mesmo material empregado no ensaio de flexão. Por essa razão, são apresentadas duas alternativas para a estimativa das propriedades do modelo viscoelástico com envelhecimento.

Calibração com materiais semelhantes

1. Estima-se os parâmetros da função de envelhecimento $v(t)$ a partir de dados experimentais de concretos semelhantes. Adota-se a expressão de Bažant e Jirásek (2018) calibrada com os dados de Neville (2012) (Tabela 5.4); e
2. Fixados os parâmetros calculados no item anterior, estima-se os parâmetros da função de fluência $\Phi(t-t')$ a partir de dados experimentais de concretos semelhantes. Adota-se a função de fluência para cadeia de Kelvin calibrada com os dados do ensaio “c_099_08” (Tabela 5.9). Cabe salientar que o critério para escolher materiais semelhantes levou em conta a semelhança na relação água cimento, o tipo de agregado e a resistência nominal a compressão.

Calibração combinada com análise inversa

1. Estima-se os parâmetros da função de envelhecimento $v(t)$ a partir de dados experimentais de concretos semelhantes. Adota-se a expressão de Bažant e Jirásek (2018) calibrada com os dados de Neville (2012) (Tabela 5.4); e
2. Fixados os parâmetros calculados no item anterior, calibram-se os parâmetros da função de fluência $\Phi(t-t')$ a partir de técnicas da análise inversa utilizando os resultados experimentais do deslocamento vertical no meio do vão para o nível de carga que garante a linearidade da fluência ($F = 36\% F_{\max}$). Seguidamente, adota-se a função de fluência para cadeia de Kelvin calibrada com o programa de análise inversa Minerva (ABREU, 2019).

O programa Minerva foi desenvolvido por Abreu (2019) e tem como objetivo a solução de problemas de análise inversa. Sua estrutura é idealizada para o tratamento de problemas genéricos de otimização e conta com algoritmos determinísticos e meta-heurísticos. O Minerva está disponível no Portal Eras (LIMA *et al.*, 2018), que é um ambiente de apoio a pesquisadores e estudantes que

trabalham em projetos voltados à geomecânica. O portal é desenvolvido pelo Instituto Tecgraf/PUC-Rio e pode ser acessado em: <https://eras.tecgraf.puc-rio.br/>.

Para a calibração dos parâmetros do modelo viscoelástico do presente exemplo, o autor implementou a comunicação entre o *framework* GeMA e o programa Minerva. Como dados entrada, deve-se fornecer o domínio de pesquisa do algoritmo (definido por intervalos de valores máximos e mínimos para cada variável de interesse), o modelo de elementos finitos no GeMA e os dados da curva experimental. O Minerva executa a análise no GeMA para diversas combinações de parâmetros dentro do domínio de pesquisa e minimiza a raiz quadrada do erro quadrático médio entre o resultado numérico e experimental. Maiores detalhes sobre o processo de análise inversa empregado no Minerva são apresentados por Abreu (2019).

Para a calibração dos parâmetros com auxílio do Minerva, utilizou-se o modelo de elementos finitos sem elementos de interface e a curva de fluência básica para o carregamento de 36% da carga máxima F_{\max} . Utiliza-se o método de algoritmo genético com 100 indivíduos na população por geração, adota-se a tolerância empregada no critério de parada igual a 1×10^{-6} e número máximo de gerações igual a 50. O domínio de pesquisa utilizado e a resposta do algoritmo são apresentadas na Tabela 5.12. Os principais gráficos que descrevem o comportamento geral da análise do Minerva são apresentados no Apêndice B.

Tabela 5.12 – Parâmetros adotados para o modelo de interface coesiva

Propriedade	Limite inf.	Limite sup.	Valor calibrado	Unidade
$E_1^{(\infty)}$	1000	500000	76853	MPa
$E_2^{(\infty)}$	1000	500000	225514	MPa
$E_3^{(\infty)}$	1000	500000	65180	MPa

A determinação do domínio de pesquisa baseou-se na experiência obtida com a calibração uniaxial realizada na Seção 5.3, aliada com a execução do algoritmo diversas vezes.

5.4.3. Resultados da fluência na flexão

Após a determinação do conjunto de parâmetros, comparam-se os resultados experimentais de Omar *et al.* (2009) com os resultados do modelo de elementos finitos sem elementos de interface para representação da fluência linear (GeMA FL) e da fluência com elementos de interface para representação do efeito não linear do dano (GeMA FNL).

A Tabela 5.13 apresenta os valores adotados e calibrados considerando a abordagem de *calibração com materiais semelhantes*.

Tabela 5.13 – Parâmetros adotados com a abordagem de calibração com materiais semelhantes

Fase da calibração	Propriedade	Valor adotado	Unidade
Calibração do Dano coesivo	K_n	32370×10^4	MPa/m
	K_s	32370×10^4	MPa/m
	τ_{no}	3,5	MPa
	τ_{so}	5,3	MPa
	Δ_f	$2,5 \times 10^{-5}$	m
Calibração do Envelhecimento	α	0,7564	-
	$E_0^{(\infty)}$	37665	MPa
Calibração da Cadeia de Kelvin	$E_1^{(\infty)}$	164050	MPa
	$E_2^{(\infty)}$	130744	MPa
	$E_3^{(\infty)}$	26795	MPa
	τ_1	1	dia
	τ_2	10	dia
	τ_3	100	dia

A Figura 5.19a apresenta a comparação da fluência básica (deslocamento no meio do vão) experimental e os resultados numéricos obtidos com a malha de elementos contínuos viscoelásticos. A Figura 5.19b apresenta uma comparação semelhante, mas com os resultados numéricos obtidos com a malha composta por com elementos contínuos e elementos de interface coesiva.

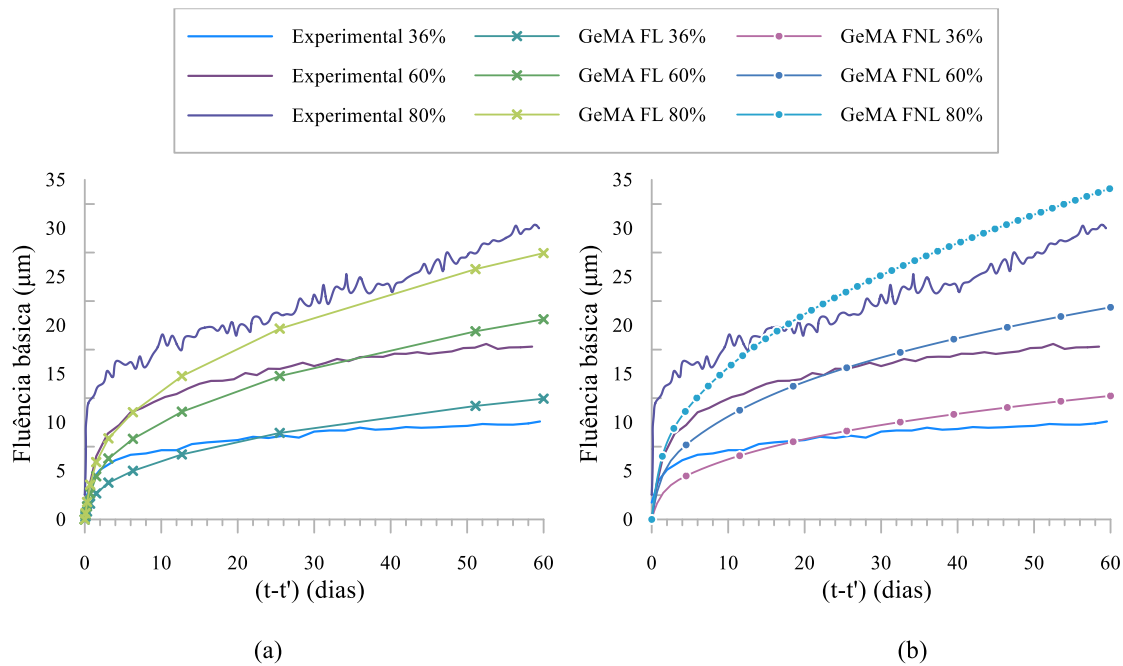


Figura 5.19 – Comparação da fluência básica do deslocamento no meio do vão Calibração com materiais semelhantes: (a) fluência linear (FL) e (b) fluência não linear (FNL)

As análises numéricas realizadas apenas com o modelo de fluência linear e calibração com material semelhante, Figura 5.19a, foram capazes de aproximar a tendência de comportamento da curva experimental de 36%. Entretanto, para maiores valores de carregamento, observa-se a diferença entre as respostas experimental e numérica, a qual acentua-se com o aumento da intensidade da carga. Pode ser observado que os deslocamentos experimentais para o caso de $F = 80\% F_{\max}$ superam os valores de deslocamento obtidos com o modelo numérico em todo o intervalo de tempo de análise, evidenciando a existência de deformações adicionais vindas do processo de dano durante a fluência, não consideradas no modelo de fluência linear.

Por outro lado, os modelos com elementos de interface coesiva apresentados na Figura 5.19b são capazes de representar a tendência da fluência básica com aproximação semelhante para os três casos de carregamento. Pode-se verificar, portanto, que a consideração do dano tem grande importância no estudo da fluência na flexão especialmente para níveis de carga elevados. Adicionalmente, pode ser destacado que a calibração de parâmetros de fluência através de dados experimentais de materiais com propriedades semelhantes pode representar uma alternativa para ter uma estimativa do comportamento de fluência quando não se tem ensaios unidimensionais apropriados para a caracterização de tais parâmetros.

A seguir, a Tabela 5.14 apresenta os valores dos parâmetros obtidos considerando a abordagem de *calibração combinada com análise inversa*.

Tabela 5.14 – Parâmetros obtidos com a abordagem de calibração combinada com análise inversa

Fase da calibração	Propriedade	Valor adotado	Unidade
Calibração do Dano coesivo	K_n	32370×10^4	MPa/m
	K_s	32370×10^4	MPa/m
	τ_{no}	3,5	MPa
	τ_{so}	5,3	MPa
	Δ_f	$2,5 \times 10^{-5}$	m
Calibração do Envelhecimento	α	0,7564	-
	$E_0^{(\infty)}$	43232	MPa
Calibração da Cadeia de Kelvin	$E_1^{(\infty)}$	76853	MPa
	$E_2^{(\infty)}$	225514	MPa
	$E_3^{(\infty)}$	65180	MPa
	τ_1	1	dia
	τ_2	10	dia
	τ_3	100	dia

A comparação da fluência do deslocamento no meio do vão para o conjunto de dados da tabela 5.14 com os resultados experimentais é apresentada na Figura 5.20.

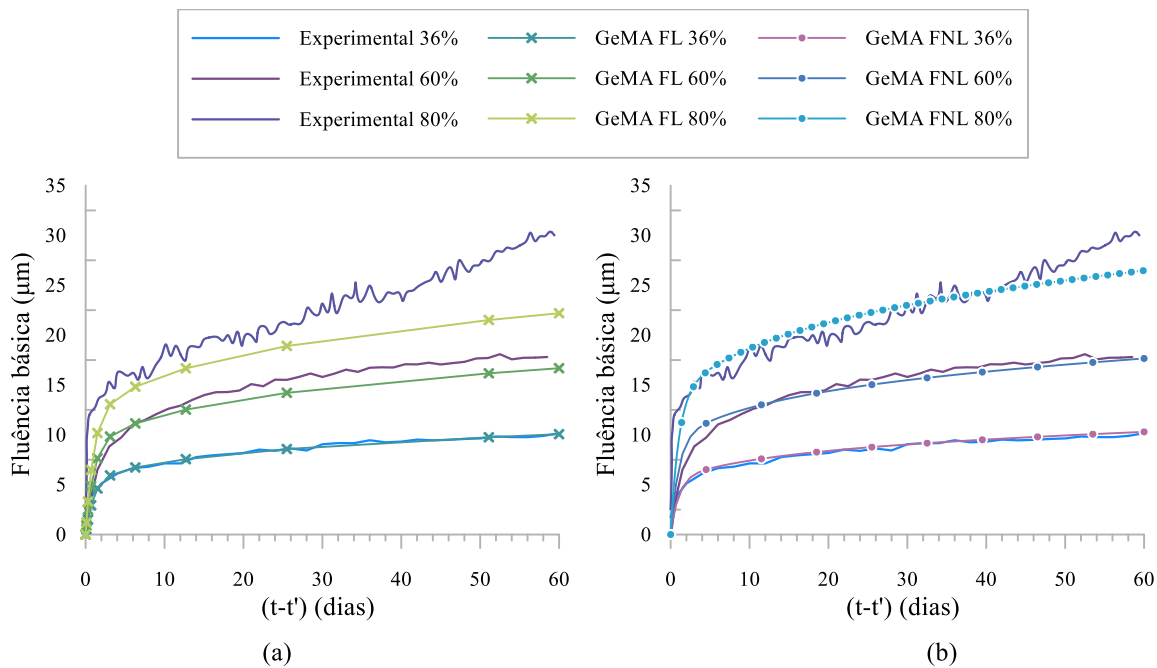


Figura 5.20 – Comparação da fluência básica do deslocamento no meio do vão. Calibração com materiais semelhantes e análise inversa: (a) fluência linear (FL) e (b) fluência não linear (FNL)

Observa-se na Figura 5.20 que a calibração combinada com análise inversa aproxima com muita acurácia o comportamento da curva experimental de 36% da carga máxima tanto no modelo com elementos contínuos, quanto no modelo com elementos contínuos e de interface. Esse resultado é esperado, uma vez que o estudo de análise inversa utilizou os dados da curva experimental de 36% da carga máxima e para esse nível de carregamento, não são esperados efeitos não lineares significativos.

Para os níveis de carregamento de 60% e 80% da carga máxima (Figura 5.20a), entretanto, há uma evidente diferença entre os resultados do modelo de fluência linear (sem elementos de interface) e as curvas experimentais. Da mesma forma que no exemplo anterior (Figura 5.19), fica clara a existência de deformações adicionais não consideradas no modelo de fluência linear vindas da continuação do processo de dano devido à fluência (efeito não linear). Por outro lado, os resultados dos modelos de fluência e dano (com elementos de interface) presentes na Figura 5.20b são capazes de representar o comportamento das três curvas experimentais com acurácia adequada. Isso evidencia que a combinação do modelo de fluência linear com os elementos de interface coesiva representa coerentemente o comportamento não linear de vigas de concreto submetidas a cargas elevadas e fluência.

Um fato importante a se notar é que a evolução do dano ocorre não somente no instante de aplicação da carga, mas continua com o acréscimo das deformações devido à fluência. Como pode ser observado na Figura 5.21, a região fraturada aumenta com o incremento do tempo.

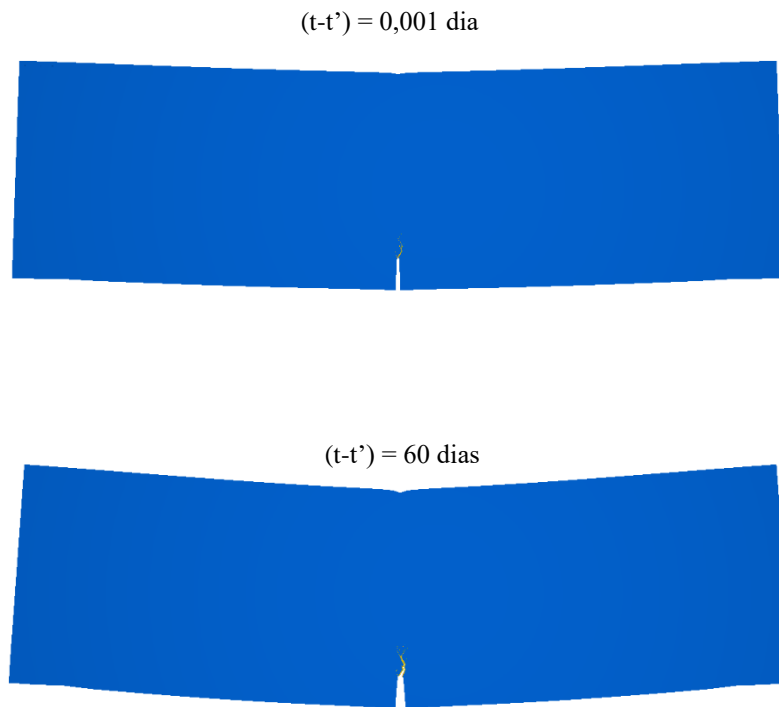


Figura 5.21 – Configuração deformada da viga com elementos de interface ao final da aplicação da carga e depois de 60 dias. Deslocamentos ampliados em 200 vezes.

A evolução da região danificada devido à fluência pode ser vista de forma mais clara na Figura 5.22, a qual apresenta a evolução da fratura e do dano ao longo do ensaio de fluência para a carga de 80% da carga máxima. Nesse caso, os deslocamentos estão ampliados em 250 vezes.

Observa-se na Figura 5.22 que o desenvolvimento da fratura do modelo numérico pode apresentar bifurcações em sua ponta. Isso se deve ao fato de que o arranjo dos elementos da malha utilizada pode favorecer determinados caminhos. Quando há uma bifurcação, dois caminhos são concorrentes no equilíbrio do sistema e geralmente um deles é privilegiado ao longo da análise, dependendo do tamanho do passo, nível de carga e outros parâmetros envolvidos. No entanto, os diferentes modelos apresentam comportamento global e trajetórias de fratura muito semelhantes.

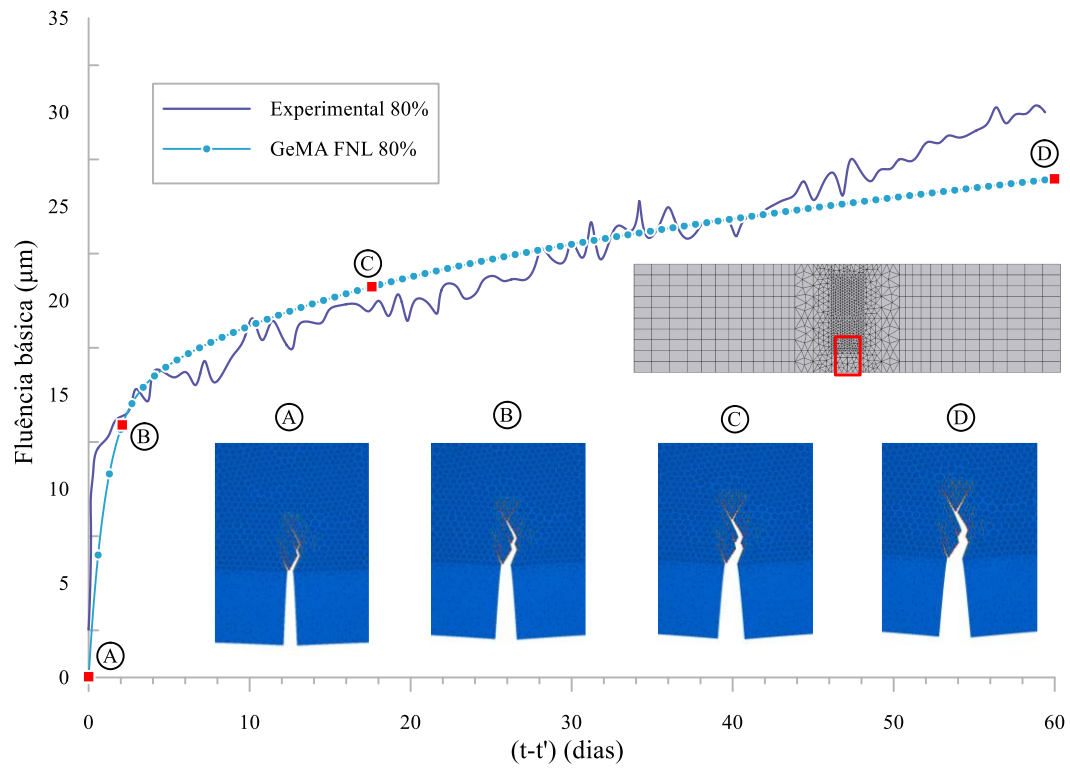


Figura 5.22 – Calibração combinada com análise inversa: Evolução da fratura ao longo do ensaio de fluência para o carregamento de 80% da carga máxima

6

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

6.1.

Conclusões

Este trabalho abordou o comportamento viscoelástico com envelhecimento do concreto, a implementação de um modelo constitutivo para simular esse comportamento, e seu uso combinado com elementos de interface coesiva para a representação da fluência básica não linear do concreto. Exploraram-se através do Método dos Elementos Finitos, os conceitos relacionados com a implementação, validação e calibração do modelo. A partir dos conceitos básicos e formulações apresentadas, desenvolveu-se um estudo de caso de fluência na flexão.

Foram explorados os conceitos relacionados aos materiais viscoelásticos lineares e a teoria da solidificação se mostrou eficaz na representação do envelhecimento do material. A função $v(t)$ apresentada por Grasley e Lange (2007) facilitou a obtenção das expressões analíticas, mas seu uso se mostrou bastante restrito ao intervalo de calibração utilizado. Quando avaliada em elevados valores de tempo, sua expressão diverge para o infinito, sugerindo que seu uso deve ser evitado em análises de longa duração. Por outro lado, a função $v(t)$ proposta por Bažant *et al.* (2018; 1989a) representou melhor a evolução do módulo de elasticidade ao longo do tempo, sendo capaz de prever com boa acurácia valores fora do intervalo de calibração. Além disso, sua expressão possui apenas um parâmetro a se determinar, ajudando a tornar o processo de calibração mais simples e eficiente.

O algoritmo de integração proposto apresentou estabilidade e boa concordância com as respostas analíticas. Nos testes realizados, ficou evidenciada a sua capacidade em representar adequadamente a formulação de viscoelasticidade baseada em cadeias de Kelvin com diferentes expressões para a função de

envelhecimento. Além disso, notou-se a necessidade de incrementos de passo menores na determinação da resposta instantânea do material. Nesses casos, a adoção de $\Delta t = 0,1$ dia, conforme a sugestão de Bažant (1995), mostrou-se efetiva, apresentando, em sua comparação com a resposta analítica, diferença relativa menor que 2%.

O algoritmo do modelo constitutivo foi implementado no módulo de elementos finitos do *framework* GeMA. Seu desenvolvimento em uma linguagem orientada a objetos permitiu um ambiente favorável para trabalho em equipe e possibilitou o uso conjunto de ferramentas de alto nível nas análises não lineares desenvolvidas neste trabalho.

Na calibração de parâmetros notou-se que o processo pode apresentar mau condicionamento, múltiplas soluções e dependência do valor inicial arbitrado para o processo iterativo. A consideração desacoplada dos fenômenos apresentada por Abdellatef *et al.* (2019) se mostrou eficaz, pois permite tornar o processo mais comportado a partir da diminuição do número de parâmetros a serem calibrados simultaneamente.

Com a finalidade de estudar a fluência na flexão de vigas de concreto, utilizaram-se os ensaios de Omar *et al.* (2009). Verificou-se que a calibração de parâmetros feita por ensaios uniaxiais de concretos semelhantes pode ser usada para aproximar o comportamento da viga em flexão. Por outro lado, a calibração do modelo viscoelástico linear com técnicas de análise inversa se mostrou uma alternativa viável, apresentando resultados com boa proximidade.

Além disso, verificou-se que o uso de elementos de interface coesiva para a representação da fluência não linear do concreto é uma abordagem muito eficaz. Com ela, foi possível a previsão com muita acurácia do comportamento da viga submetida a elevados níveis de carga. Além disso, observou-se o efeito que a fluência pode exercer na continuação do processo do dano, uma vez que a fratura continua a evoluir depois da aplicação da carga.

6.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

A fim de dar continuidade ao tema de pesquisa apresentado na presente dissertação, são apresentadas as seguintes sugestões:

- Adicionar as parcelas de deformação devido a outros fenômenos relevantes, como por exemplo, as deformações causadas pela retração, fluxo viscoso e a temperatura;
- Estudar o efeito da fluência para tempos de carregamento ($t-t'$) maiores que 100 dias, em que a deformação de fluxo viscoso apresenta maior relevância;
- Considerar diferentes valores para as propriedades do concreto (como por exemplo resistência à compressão, *slump*, relação água cimento e tipo de agregado) e sua influência no comportamento da fluência;
- Complementar os estudos de fluência na flexão considerando várias configurações de carga e descarga para distintos níveis de carregamento, incluindo estágio pós carga máxima;
- Comparar a formulação baseada em modelos reológicos com outras formulações, como por exemplo, os modelos GL2000 (GARDNER; LOCKMAN, 2001), B3 (BAŽANT; MURPHY, 1996) e B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT, 2013);
- Estudar o acoplamento do modelo de fluência adotado neste trabalho com um método de dano contínuo do material para a representação da fluência não linear em zonas de compressão e tração; e
- Considerar a adição de armadura na modelagem numérica, a fim de estudar e comparar o comportamento de estruturas de concreto armado com as estimativas previstas por normas.

7

Referências bibliográficas

ABDELLATEF, Mohammed *et al.* Lattice Discrete Particle Modeling of concrete coupled creep and shrinkage behavior: A comprehensive calibration and validation study. *Construction and Building Materials*, v. 211, p. 629–645, 30 jun. 2019. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2019.03.176. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061819306683>. Acesso em: 18 jun. 2019.

ABREU, Rafael Otavio Alves. *Algoritmos para integração e calibração de modelos elasto-plásticos com múltiplas superfícies de plastificação*. 2019. 163 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2019.

BARENBLATT, G.I. The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. *Advances in Applied Mechanics*, v. 7, n. C, p. 55–129, 1962. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70121-2. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0065215608701212>. Acesso em: 3 fev. 2020.

BAŽANT, Zdeněk P. Continuous retardation spectrum for solidification theory of concrete creep. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 121, p. 281–288, 1995. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281995%29121%3A2%28281%29>. Acesso em: 6 ago. 2019.

BAŽANT, Zdeněk P. Material Models for Structural Creep Analysis. *Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete*. Illinois: John Wiley & Sons Ltd, 1988. p. 99–215.

BAŽANT, Zdeněk P. *et al.* Microprestress-Solidification Theory for Concrete Creep. I: Aging and Drying Effects. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 123, n. 11, p. 1188–1194, nov. 1997. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:11(1188). Disponível em: <http://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281997%29123%3A11%281188%29>. Acesso em: 6 fev. 2020.

BAŽANT, Zdeněk P. Prediction of concrete creep and shrinkage: past, present and future. *Nuclear Engineering and Design*, v. 203, n. 1, p. 27–38, 1 jan. 2001. DOI: 10.1016/S0029-5493(00)00299-5. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0029549300002995>. Acesso em: 20 fev. 2020.

BAŽANT, Zdeněk P. Viscoelasticity of porous solidifying material – concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division - ACE*, v. 103, p. 1049–1067, 1977.

BAŽANT, Zdeněk P.; ASCE, M.; WU, Spencer T. Creep and shrinkage law for concrete at variable humidity. *Journal of the Engineering Mechanics Division - ACE*, v. 100, n. EM6, p. 1183–1209, 1974. Disponível em: <http://www.civil.northwestern.edu/people/bazant/PDFs/Papers/070.pdf>. Acesso em: 6 out. 2019.

BAŽANT, Zdeněk P.; JIRÁSEK, Milan. *Creep and hygrothermal effects in concrete structures*. 1ª ed. Dordrecht: Springer, 2018. v. 225. Disponível em: <https://www.doi.org/10.1007/978-94-024-1138-6>.

BAŽANT, Zdeněk P.; MURPHY, W. P. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures-model B3. *Materials and Structures*, v. 29, n. 2, p. 126–126, 1 mar. 1996. DOI: 10.1007/BF02486204. Disponível em: www.fsv.cvut.cz/kristek. Acesso em: 17 mar. 2020.

BAŽANT, Zdeněk P.; OSMAN, E. Double power law for basic creep of concrete. *Matériaux et Constructions*, v. 9, n. 1, p. 3–11, jan. 1976. DOI: 10.1007/BF02478522. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/BF02478522>. Acesso em: 20 fev. 2020.

BAŽANT, Zdeněk P.; PRASANAN, Santosh. Solidification Theory for Concrete Creep. I: Formulation. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 115, n. 8, p. 1691–1703, ago. 1989a. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:8(1691). Disponível em: [http://www.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1989\)115:8\(1691\)](http://www.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:8(1691)). Acesso em: 29 jan. 2019.

BAŽANT, Zdeněk P.; PRASANAN, Santosh. Solidification Theory for Concrete Creep. II: Verification and Application. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 115, n. 8, p. 1704–1725, ago. 1989b. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:8(1704). Disponível em: [http://www.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1989\)115:8\(1704\)](http://www.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:8(1704)). Acesso em: 29 jan. 2019.

BAŽANT, Zdeněk P.; YU, Qiang; LI, Guang-Hua. Excessive Long-Time Deflections of Prestressed Box Girders. I: Record-Span Bridge in Palau and Other Paradigms. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v. 138, p. 676–686, 2012. DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X. .

BRANDÃO, Nuno Bandarrinha *et al.* The impact of cement slurry aging creep on the construction process of oil wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 157, p. 422–429, 1 ago. 2017. DOI: 10.1016/j.petrol.2017.07.051. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0920410517305995>. Acesso em: 30 nov. 2018.

CAMANHO, Pedro P; DÁVILA, Carlos G. Mixed-Mode Decohesion Finite Elements for the Simulation of Delamination in Composite Materials. *NASA Langley Research Center*, 2002. Disponível em: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20020053651.pdf>. Acesso em: 4 nov. 2019.

CREUS, Guillermo J. *Viscoelasticity - Basic Theory and Applications to Concrete Structures*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1986.

DÁVILA, Carlos G; CAMANHO, Pedro P; TURON, Albert. Cohesive Elements for Shells. *NASA Langley Research Center*, 2007. Disponível em: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20070018344.pdf>. Acesso em: 4 nov. 2019.

DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 8, n. 2, p. 100–104, 1960. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2. .

ESCOBAR, Renato *et al.* Numerical modeling of fracture containment in multi-layered formations using a cohesive zone model. 2016, *Anais [...]* [S.l.: s.n.], 2016. DOI: 10.20906/CPS/SBMR-04-0011. Disponível em: <http://www.swge.inf.br/proceedings/paper/?P=SBMR-04-0011>.

FARAH, M. *et al.* Experimental approach to investigate creep-damage bilateral effects in concrete at early age. *Cement and Concrete Composites*, - Literature review, v. 96, p. 128–137, 1 fev. 2019. DOI: 10.1016/J.CEMCONCOMP.2018.11.022. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0958946517307722>. Acesso em: 18 jun. 2019.

FIRME, Pedro A.L.P.; ROEHL, Deane; ROMANEL, Celso. An assessment of the creep behaviour of Brazilian salt rocks using the multi-mechanism deformation model. *Acta Geotechnica*, v. 11, n. 6, p. 1445–1463, 2016. DOI: 10.1007/s11440-016-0451-y. .

FIRME, Pedro A L P *et al.* Enhanced double-mechanism creep laws for salt rocks. *Acta Geotechnica*, v. 13, n. 6, p. 1329–1340, 2018. DOI: 10.1007/s11440-018-0689-7. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11440-018-0689-7>.

FLÜGGE, Wilhelm. *Viscoelasticity*. 2. ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1975. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-02276-4>.

GARDNER, N. J.; LOCKMAN, M. J. Design provisions for drying shrinkage and creep of normal-strength concrete. *ACI Materials Journal*, v. 98, n. 2, p. 159–167, 1 mar. 2001. DOI: 10.14359/10199. .

GOEL, Rajeev; KUMAR, Ram; PAUL, D K. Comparative Study of Various Creep and Shrinkage Prediction Models for Concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 19, n. 3, p. 249–260, mar. 2007. DOI: 10.1061/(ASCE)0899-1561(2007)19:3(249). Disponível em: <http://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%290899-1561%282007%2919%3A3%28249%29>. Acesso em: 17 fev. 2020.

GRASLEY, Zachary C; LANGE, David A. Constitutive modeling of the aging viscoelastic properties of portland cement paste. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, v. 11, n. 3–4, p. 175–198, 12 dez. 2007. DOI: 10.1007/s11043-007-9043-4. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s11043-007-9043-4>. Acesso em: 30 nov. 2018.

HARANKI, Boris. *Strength, modulus of elasticity, creep and shrinkage of concrete used in florida*. 2009. 176 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Civil and Coastal Engineering Department, University of Florida, 2009. Disponível em: <https://ufdc.ufl.edu/UFE0024506/00001>.

HATT, W. K. Notes on the effect of time element in loading reinforced concrete beams. *Proceedings of ASTM*, v. 7, p. 421–433, 1907. .

HUBLER, Mija H.; WENDNER, Roman; BAŽANT, Zdeněk P. Comprehensive Database for Concrete Creep and Shrinkage: Analysis and Recommendations for Testing and Recording. *ACI Materials Journal*, v. 112, n. 4, p. 547–558, 1 ago. 2015. DOI: 10.14359/51687453. Disponível em: <https://www.doi.org/10.14359/51687452>.

KEMMER, Gerdi; KELLER, Sandro. Nonlinear least-squares data fitting in Excel spreadsheets. *Nature Protocols*, v. 5, n. 2, p. 267–281, 2010. DOI: 10.1038/nprot.2009.182. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/nprot.2009.182>.

KOCAB, Dalibor *et al.* Development of the Elastic Modulus of Concrete under Different Curing Conditions. *Procedia Engineering*, v. 195, p. 96–101, 2017. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.04.529. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2017.04.529>.

KOJIC, Milos; BATHE, Klaus-Jürgen. *Inelastic Analysis of Solids and Structures*. [S.l.: s.n.], 2005. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/b137717>.

LEE, Chang Joon. *Response of concrete structures subject to material aging and volume instability*. 2007. 194 f. University of Illinois at Urbana-Champaign, Ann Arbor, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/2142/83361>. Acesso em: 4 fev. 2019.

LIMA, Maria Julia *et al.* Functional Requirements for Developing ERAS - A Portal to Support Collaborative Geomechanical Simulations*. 6 jul. 2018, *Anais [...]* [S.l.]: Sociedade Brasileira de Computação - SBC, 6 jul. 2018. DOI: 10.5753/bresci.2018.3270. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/bresci/article/view/3270>. Acesso em: 19 fev. 2020.

MACKENZIE-HELNWEIN, Peter; HANHIJÄRVI, Antti. Computational Analysis of Quality Reduction during Drying of Lumber due to Irrecoverable Deformation. I: Orthotropic Viscoelastic-Mechanosorptive-Plastic Material Model for the Transverse Plane of Wood. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 129, n. 9, p. 996–1005, 2003a. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:9(996). Disponível em: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:9\(996\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:9(996)). Acesso em: 23 jan. 2019.

MACKENZIE-HELNWEIN, Peter; HANHIJÄRVI, Antti. Computational Analysis of Quality Reduction during Drying of Lumber due to Irrecoverable Deformation. II: Algorithmic Aspects and Practical Application. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 129, n. 9, p. 1006–1016, set. 2003b. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:9(1006). Disponível em: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:9\(1006\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:9(1006)).

9399(2003)129:9(1006). Acesso em: 23 jan. 2019.

MARKOVITZ, Hershel. Boltzmann and the Beginnings of Linear Viscoelasticity. *Citation: Transactions of the Society of Rheology*, v. 21, p. 381, 1977. DOI: 10.1122/1.549444. Disponível em: <https://doi.org/10.1122/1.549444>. Acesso em: 17 jan. 2020.

MATLAB. Natick, Massachusetts: Mathworks, 2019

MEJIA, Cristian; PAULLO, L. F.; ROEHL, D. Discrete Fracture Propagation Analysis using a Robust Combined Continuation Method. 2020. .

MEJIA, Cristian; PAULLO, L. F.; ROEHL, Deane. Continuation Methods for the Simulation of Rock Fracture with Cohesive Elements. *International Society for Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2015.

MENDES, Carlos Augusto Teixeira. *GeMA, um novo framework para a prototipação, desenvolvimento e integração de simulações multifísicas e multiescalas em grupos multidisciplinares*. 2016. 168 f. Tese (Doutorado em Informática) - Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/27217/27217.PDF>. Acesso em: 28 out. 2019.

NEVILLE, A M. The relation between creep of concrete and the stress-strength ratio. *Applied Scientific Research*, v. 9, n. 1, p. 285–292, jan. 1960. DOI: 10.1007/BF00382207. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/BF00382207>. Acesso em: 7 out. 2019.

NEVILLE, AM. *Properties of Concrete - 5th Edition*. 5^a ed. Edinburgh Gate, Harlow, England: Pearson Education Limited, 2012.

OMAR, Mirvat *et al.* Creep Damage Coupled Effects: Experimental Investigation on Bending Beams with Various Sizes. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 21, n. 2, p. 65–72, 2009. DOI: 10.1061/(ASCE)0899. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006708>. Acesso em: 12 jul. 2019.

RUEDA CORDERO, Julio Alberto; MEJIA SANCHEZ, Eleazar Cristian; ROEHL, Deane. Hydromechanical modeling of unrestricted crack propagation in fractured formations using intrinsic cohesive zone model. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 221, p. 106655, 1 nov. 2019. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2019.106655. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S001379441930997X>. Acesso em: 20 fev. 2020.

SALIBA, Jacqueline *et al.* Numerical Investigation of the Size Effects on the Creep Damage Coupling. *Procedia Materials Science*, v. 3, n. 2, p. 1038–1043, 2014. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.169. Disponível em: www.sciencedirect.com. Acesso em: 12 jul. 2019.

SIMO, J. C.; HUGHES, T.J.R. *Computational Inelasticity*. Pasadena: Springer, 1998. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fb98904>.

pdf. Acesso em: 4 dez. 2018.

SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L.; PISTER, K. S. Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 51, n. 1–3, p. 177–208, 1985. DOI: 10.1016/0045-7825(85)90033-7.

TECGRAF/PUC-RIO. *The GeMA main application*. 2018. Disponível em: <https://web.tecgraf.puc-rio.br/gema/gema/doxygen/html/index.html>. Acesso em: 28 jan. 2020.

THOMAS, Jeffrey J.; JENNINGS, Hamlin M. A colloidal interpretation of chemical aging of the C-S-H gel and its effects on the properties of cement paste. *Cement and Concrete Research*, v. 36, n. 1, p. 30–38, jan. 2006. DOI: 10.1016/j.cemconres.2004.10.022. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0008884604004594>. Acesso em: 22 nov. 2019.

TURON, A. *et al.* Simulation of delamination in composites under high-cycle fatigue. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, v. 38, n. 11, p. 2270–2282, nov. 2007. DOI: 10.1016/j.compositesa.2006.11.009. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1359835X0600337X>.

ULM, Franz Josef; COUSSY, Olivier. Modeling of thermochemomechanical couplings of concrete at early ages. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 121, n. 7, p. 785–794, jul. 1995. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1995)121:7(785). Disponível em: <http://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281995%29121%3A7%28785%29>. Acesso em: 20 fev. 2020.

WENDNER, R.; HUBLER, M. H.; BAŽANT, Zdeněk P. The B4 Model for Multi-decade Creep and Shrinkage Prediction. 23 set. 2013, *Anais [...]* Reston, VA: American Society of Civil Engineers, 23 set. 2013. p. 429–436. DOI: 10.1061/9780784413111.051. Disponível em: <http://ascelibrary.org/doi/10.1061/9780784413111.051>. Acesso em: 22 fev. 2020.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.; ZHU, J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7^a ed. Kidlington: Elsevier, 2013.

Apêndice

A. Determinação da curva média de evolução do módulo de elasticidade

A seguir, apresenta-se a preparação dos dados utilizados na Seção 5.3.1.

A.1. Neville (2012)

Neville (2012, p. 288) apresenta a relação entre a resistência à compressão e a idade para concretos com diversos tipos de agregados. Considera-se neste caso, concretos com relação água/cimento igual a 0,50. Estima-se a evolução do módulo de elasticidade secante do concreto E_c ao longo do tempo a partir da expressão recomendada pelo ACI-318-02 definida por

$$E_c = 4,73(f'_c)^{0,5} \quad (\text{A.1})$$

onde f'_c é a resistência a compressão do concreto em MPa. A Figura A.0.1 apresenta graficamente as curvas obtidas.

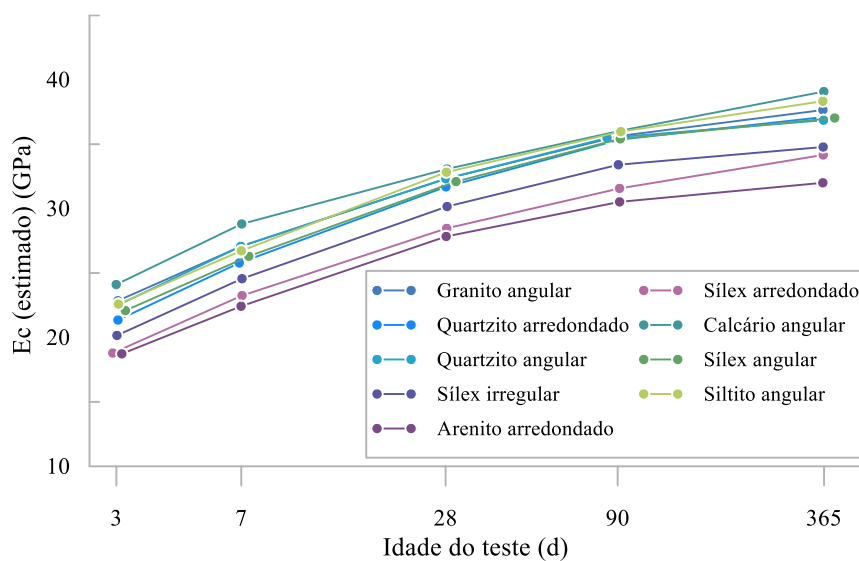


Figura A.0.1 – Estimativa da evolução do módulo de elasticidade secante por tipo de agregado para os dados Neville (2012)

Os ensaios experimentais costumam apresentar o módulo de elasticidade do concreto E_c aos 28 dias. Com o objetivo facilitar o processo de calibração, obtém-se a estimativa da evolução E_c com base nesse dado. A Figura A.0.2 apresenta o comportamento para cada tipo de agregado.

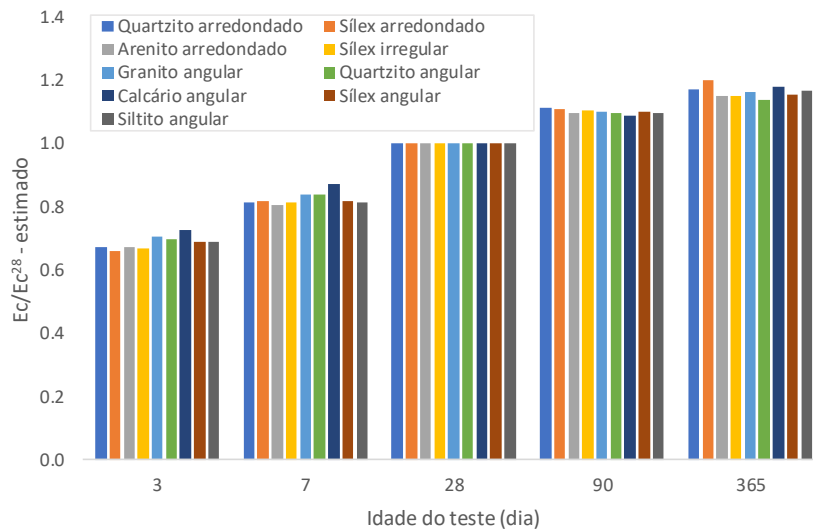


Figura A.0.2 – Estimativa da evolução do módulo de elasticidade secante com base na medição aos 28 dias por tipo de agregado para os dados Neville (2012)

Com a finalidade de se obter um comportamento unificado, realiza-se a média geral e a média para os agregados angulares (Figura A.0.3).

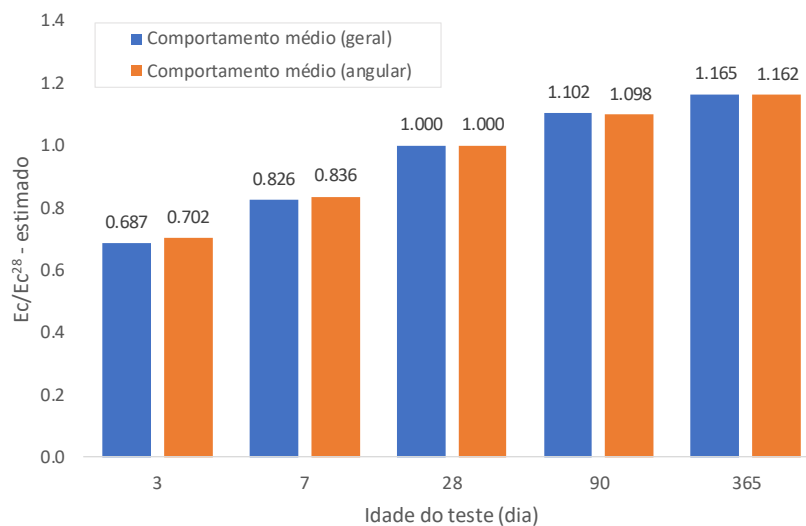


Figura A.0.3 – Estimativa média da evolução do módulo de elasticidade secante com base na medição aos 28 dias para os dados Neville (2012)

Para fins de calibração realizada na Seção 5.3.1, utiliza-se os dados de comportamento médio para os agregados com forma angular.

A.2. Kocab *et al.* (2017)

Kocab *et al.* (2017) apresentam a evolução dos módulos de elasticidade estático e dinâmico para amostras de concreto com relação água/cimento igual a 0,43. Dois tipos de concretos, nomeados A e B, possuem a mesma composição, diferindo-se apenas na inclusão de aditivo para aeração presente primeiro. Metade das amostras são submersas na água, enquanto a outra metade fica exposta às condições de umidade e temperatura do laboratório.

Para fins de calibração, os módulos de elasticidade das amostras imersas foram divididos pelos valores correspondentes medidos aos 28 dias, obtendo a relação E/E^{28} , apresentada nas Figuras A.4 e A.5.

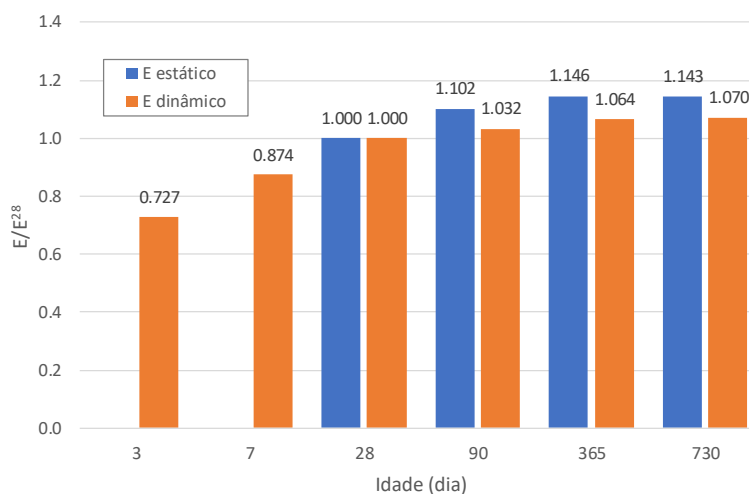


Figura A.0.4 – Evolução dos módulos de elasticidade estático e dinâmico para o concreto A

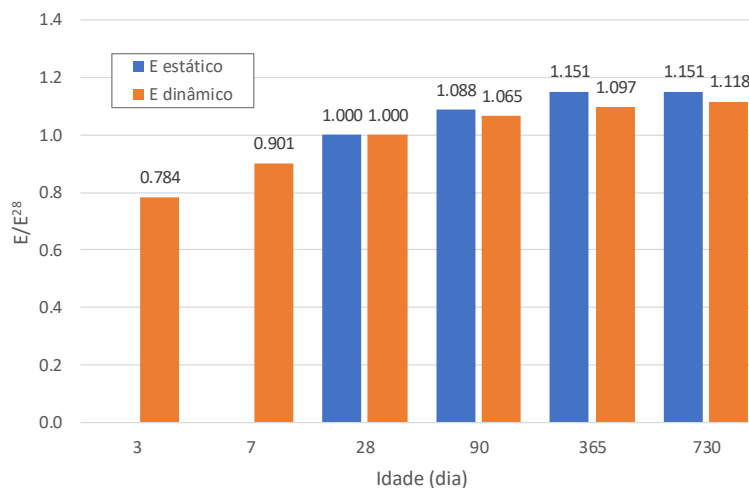


Figura A.0.5 – Evolução dos módulos de elasticidade estático e dinâmico para o concreto B

Para obtenção de um comportamento único, desconsidera-se o efeito do aditivo para aeração do concreto e realiza-se a média do comportamento dos concretos A e B. O resultado obtido é apresentado na Figura A.0.6.

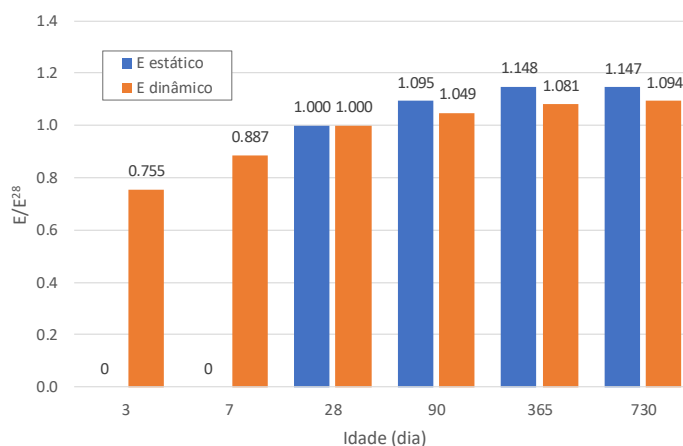


Figura A.0.6 – Evolução média dos módulos de elasticidade estático e dinâmico para os concretos A e B

Para fins de calibração realizada na Seção 5.3.1, utilizam-se os dados de comportamento médio do módulo de elasticidade estático.

B.
Evolução da calibração dos parâmetros da cadeia de Kelvin por análise inversa

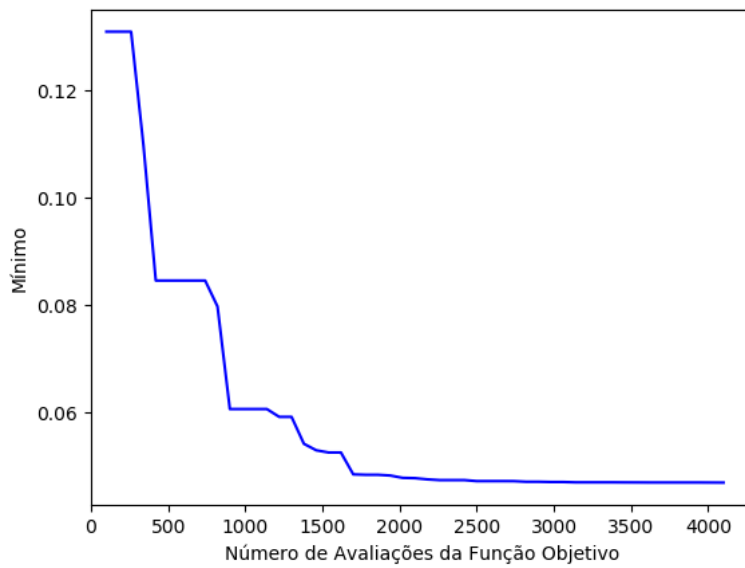


Figura B.0.7 – Valor mínimo da função objetivo por iteração para a calibração no Minerva

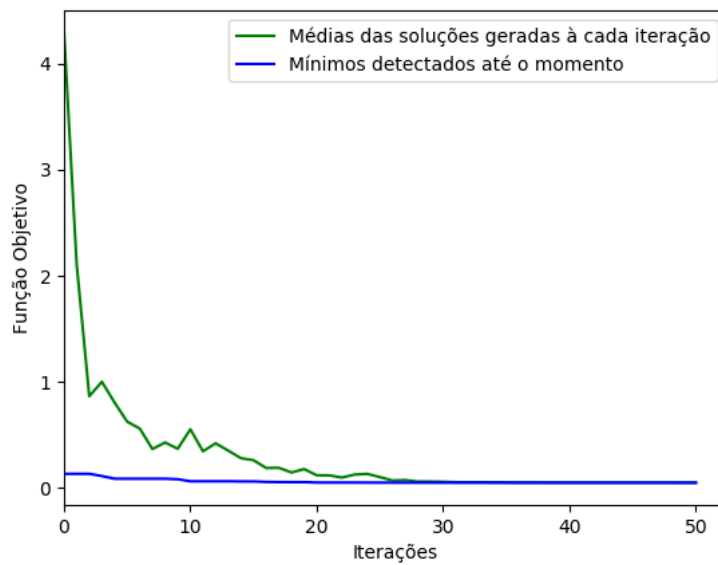


Figura B.0.8 – Médias e valores mínimos por iteração no Minerva

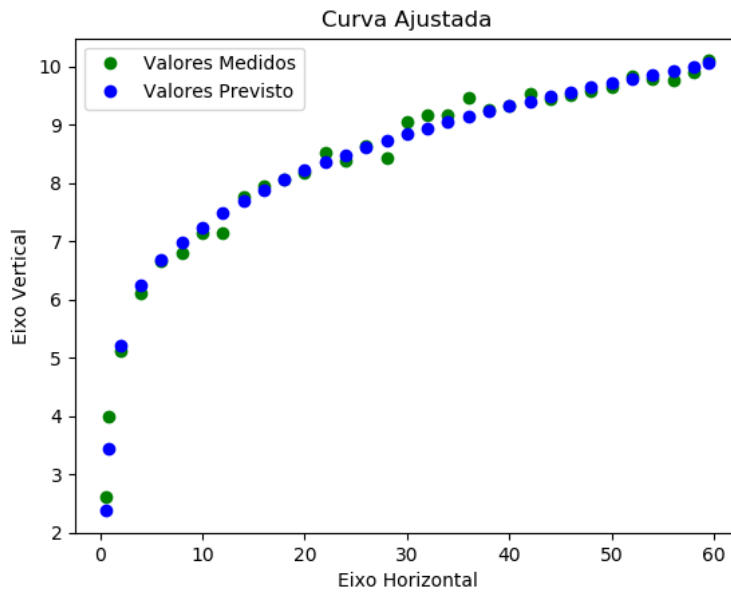


Figura B.0.9 – Resultado do ajuste de curva no Minerva