



Daniel Santos de Carvalho

**Estudo de elementos simplificados para a análise estática
e dinâmica de estruturas origami**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil do
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da
PUC-Rio.

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro

Março de 2020



Daniel Santos de Carvalho

**Estudo de elementos simplificados para a análise estática
e dinâmica de estruturas origami**

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Ney Augusto Dumont

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental– PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental– PUC-Rio

Prof. Ivan Fabio Mota de Menezes

Departamento de Engenharia Mecânica– PUC-Rio

Prof. Gláucio Hermógenes Paulino

Georgia Tech

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Daniel Santos de Carvalho

Graduou-se em Engenharia de Civil na Universidade Pontifícia Católica do Rio de Janeiro - Brasil, em 2017. No ano 2017 ingressou no curso de Mestrado em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, na área de Estruturas, onde vem desenvolvendo investigações na linha de pesquisa em Estruturas Origami.

Ficha Catalográfica

De Carvalho, Daniel Santos

Estudo de elementos simplificados para a análise estática e dinâmica de estruturas origami / Daniel Santos de Carvalho; orientador: Ney Augusto Dumont. – Rio de Janeiro PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2020

v., 106 f.; il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

Inclui referências bibliográficas

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Elementos finitos híbridos;. 3. Teoria de placa fina;. 4. Elementos de placa e casca;. 5. Elementos de barra e dobradiça;. I. Dumont,. II. Pontifícia Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. III. Título.

CDD: 620.11

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus amados pais, Jorge e Milza, que sempre me apoiaram e me incentivaram ao longo dessa trajetória com palavras de amor e carinho.

Aos meus irmãos, Gustavo e Rafael, que sempre me aconselharam e mostraram como ser uma pessoa melhor.

Aos meus amigos, Antonyony, Caio, João e Antônio que, mesmos distantes, me incentivaram e proporcionaram momentos felizes.

Aos amigos que fiz na PUC-Rio, em especial, Ewerton, Manuel, Osmar e Renan, que se aventuraram comigo ao longo dessa jornada do mestrado, me ajudando a lidar com as dificuldades no trabalho de pesquisa.

Aos meus professores que são parte da construção do meu caráter acadêmico e entusiastas pelo conhecimento.

Ao meu orientador, Prof. Ney Augusto Dumont, pelo conhecimento e ensinamentos transmitidos ao longo do desenvolvimento deste trabalho, por contribuir com a minha formação crítica no desenvolvimento da ciência.

À PUC-Rio pelos auxílios concedidos, sem os quais esta dissertação não poderia ter sido realizada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Resumo

De Carvalho, Daniel Santos; Dumont, Ney. **Estudo de elementos simplificados para a análise estática e dinâmica de estruturas origami.** Rio de Janeiro, 2020. 106p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O campo de estudo com estruturas origami tem crescido nos últimos anos como soluções inovadoras para problemas em ciência e engenharia. As primeiras aplicações aproveitaram a ideia de que um sistema estrutural pode ser dobrado de forma compacta e subsequentemente estendido, ou que a automontagem pode ser usada para construir uma estrutura tridimensional inspirada em uma folha fina. O presente trabalho apresenta comparações entre o modelo de barra e dobradiça com os modelos mais simples possíveis de elementos finitos híbridos de placa e casca para a representação de painéis de estruturas origami. O modelo de barra e dobradiça traz uma abordagem baseada na modelagem do estado parcialmente dobrado de painéis com uma estrutura de treliça articulada, onde as dobras são as barras, e os vértices as articulações. Os modelos de casca e placa utilizam a formulação híbrida dos elementos finitos, que tem como base o potencial de Hellinger-Reissner, que permite a aproximação dos campos de tensões satisfazendo a equação de equilíbrio do problema de elasticidade, e campos de deslocamento que atendem a compatibilidade no contorno. Exemplos numéricos mostram o comportamento mecânico dessas estruturas e a energia para realização das dobras através de autovalores dos respectivos automodos. É feita também uma avaliação dinâmica dos modelos para montagens estruturais com uma, duas e quatro células.

Palavras-chave

Elementos finitos híbridos, modelo de placa e casca; modelo de barra e dobradiça.

Abstract

De Carvalho, Daniel Santos; Dumont, Ney. **Study of simplified elements for static and dynamic analysis of origami structures**. Rio de Janeiro, 2020. 106p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Research works involving structural origami have grown in recent years, especially applied to science and engineering problems. Early applications took advantage of the idea that a system can be folded compactly and subsequently deployed, and that self-assembly can be used to construct a three dimensional structure by starting from a thin sheet. The present work compares bar and hinge models with the simplest hybrid finite element models for plate and shell in order to represent origami structure panels. The hybrid finite element formulation is based on the Hellinger-Reissner potential for an approximation of the stress field, thus satisfying the equilibrium equation of the elasticity problem in the domain. The bar and hinge model approach, as given in the literature, is based on folded patterns as pin-jointed truss frameworks. Each vertex in the folded sheet is represented by a pin-joint, and every fold line by a bar element. Numerical examples show the mechanical behavior of these structures and the folding energy using eigenvalues of the respective eigenmodes. Dynamic analysis of the models is also carried out for structure assemblages with one, two and four cells.

Keywords

Hybrid finite element, bar and hinge model, plate and shells models.

Sumário

1	Introdução	17
1.1.	Colocação do problema	17
1.2.	Revisão bibliográfica	18
1.3.	Objetivo	25
1.4.	Organização do texto	26
2	Conceitos gerais	27
2.1.	Potencial de Hellinger-Reissner	27
2.2.	Processo de superposição modal convencional	29
2.3.	Soluções fundamentais não singulares	30
3	Modelo de barra e dobradiça	32
3.1.	Matriz de Rigidez das barras (\mathbf{K}_S)	34
3.2.	Rigidez a flexão das barras internas da célula (\mathbf{K}_B)	35
3.3.	Rigidez da linha da dobra (\mathbf{K}_F)	39
3.4.	Autovalores	40
3.5.	Implementação computacional	42
3.5.1.	Implementação da matriz \mathbf{K}_B	42
3.5.2.	Implementação da matriz \mathbf{K}_F	45
3.6.	Análise matricial da estrutura no plano $z = 0$	46
3.7.	Matriz de massa do modelo de barra e dobradiça	48
3.8.	Teste para o modelo de barra	50
4	Formulação dos elementos finitos híbridos	52
4.1.	Elemento híbrido triangular de membrana	53
4.1.1.	Matriz de massa para o elemento híbrido de membrana	56
4.2.	Formulação híbrida de placa fina	56
4.2.1.	Matriz de massa do elemento triangular de placa	61
4.2.2.	Rigidez do vinco adaptado ao elemento de placa	62
4.3.	Elemento híbrido triangular de casca HS3	63

4.3.1. Matriz de massa do elemento de casca	66
5 Avaliação numérica	67
5.1. Comparação entre os modelos para uma célula	67
5.1.1. Análise dos deslocamentos fora do plano	68
5.1.2. Autovalores para estrutura no plano	70
5.1.3. Autovalores para estrutura fora do plano	73
5.1.4. Análise dinâmica	74
5.2. Comparação entre os modelos para duas células	77
5.2.1. Análise de deslocamentos assimétricos	77
5.2.2. Autovalores para estrutura no plano	79
5.2.3. Autovalores para estrutura fora do plano	81
5.2.4. Análise dinâmica	83
5.3. Comparação entre os modelos para 4 células	88
5.3.1. Autovalores para estrutura no plano	88
5.3.2. Autovalores para estrutura fora do plano	89
5.3.3. Análise dinâmica	91
6 Conclusões	98
6.1. Sugestões para trabalhos futuros	98
Referências bibliográficas	100

Lista de figuras

- Figura 1.1 Representação do Miura-ori utilizando, para cada painel, o modelo de barras ou o modelo com quatro placas híbridas de Kirchorff. Adaptado de Liu e Paulino (2018). 17
- Figura 1.2 Processo de desdobramento de um protótipo de uma matriz solar de origami. Fonte: Aguirre (2018) 19
- Figura 1.3 Bateria de lítio dobrada pelo padrão Miura-ori. Fonte: Song et.al 2014 20
- Figura 1.4 Padrão de vincos do “Waterbomb base”. b) Primeira posição de equilíbrio estável. c) Segunda posição de equilíbrio estável. Fonte: Hanna (2014). 20
- Figura 1.5 a) Origami com padrão de dobra de um único vértice. b) Origami acordeom. Fonte: Stellman, 2007 21
- Figura 1.6 À esquerda estrutura com zero graus de liberdade onde as linhas vermelhas representam vincos em vale e as linhas azuis vincos em montanha. À direita os vincos ocultos que aparecem após aplicação de forças. Fonte: Silverberg, 2015 21
- Figura 1.7 Estrutura Sandwich metálica construída por Gattas and You (2015). 22
- Figura 1.8 Parabolóide hiperbólico pregueado, em que o pontilhado vermelho mostra os vales e em azul as elevações chamadas de montanhas. 23
- Figura 1.9 Tubos de paredes finas em formato origami. Fonte: Zhou et al. 2016 24
- Figura 1.10 Quatro estágios de implantação de um modelo de uma estrutura retangular com barras. 24

Figura 1.11 a) Profundidade de indentação durante a dobra. b) Teste de flexão em papel pré amassado. Fonte: Giampieri et al.(2011)	25
Figura 3.1 Evolução dos modelos de barra e dobradiça utilizados para representar uma célula de uma estrutura origami. A nomenclatura dos modelos foi proposta por Filipov et al. (2017), com N referindo-se à quantidade de nós, e B a quantidade de barras da estrutura.	32
Figura 3.2 (a) Modelo de 4 nós e 5 barras (N4B5). (b) Representação das rigidezes da barra, flexão e a linha de dobra dos modelos N5B8 e N4B5. (c) Celula de um estrutura Miura-ori formada por barras e dobradiça. Fonte: Liu e Paulino (2018) e Phanisri et al. (2018).	33
Figura 3.3 Teste de tração realizado aplicando uma carga distribuída uniforme na borda superior de um painel ($F = 1$) e restringindo a borda inferior. Fonte: Filipov et al. (2017)	35
Figura 3.4 Representação de um elemento de 4 nós e 5 barras (N4B5) a partir do origami Miura-ori. Fonte: Liu e Paulino (2017)	37
Figura 3.5 Rotação θ_B gerada por pequenos deslocamentos Δz	38
Figura 3.6 Disposição dos ângulos referentes à geometria do papel	39
Figura 3.7 A escala de comprimento com respeito a espessura para nove experimentos listados. Adaptado de Filipov et al. (2017).	40
Figura 3.8 Verificação do “bandgap” para uma estrutura de tubo com zíper acoplado. Fonte: Filipov et al. (2015)	41
Figura 3.9 a) Disposição dos vetores \mathbf{r}_{kl} , \mathbf{r}_{kj} , \mathbf{r}_{ij} responsáveis pela formulação do ângulo θ nas 4 direções. b) Rotação do nó i saindo do plano referente a uma parte do modelo N5B8.	43
Figura 3.10 Alocação de matriz bidimensional e tridimensional.	44
Figura 3.11 Representação do deslocamento fora do plano e do comprimento da linha de dobra LF .	45

Figura 3.12 Linha de dobra entre dois modelos N5B8 com a devida representação dos vetores no plano	45
Figura 3.13 Matriz de rigidez de uma célula no plano $z = 0$ antes e depois da adição das dobradiças	46
Figura 3.14 Montagem da matriz de rigidez \mathbf{K}_B considerando somente os graus de liberdade em z .	47
Figura 3.15 Procedimento de montagem da matriz \mathbf{K}_F e disposição para os graus de liberdade z da matriz de rigidez.	47
Figura 3.16 Representação da distribuição da massa para cada nó do elemento de barra.	48
Figura 3.17 Célula quadrada com as dimensões das barras.	49
Figura 3.18 Comparação para pequenos deslocamentos entre o modelo N5B8s com os apresentados em Filipov et al. (2017).	51
Figura 3.19 Comparação para grandes deslocamentos entre o modelo N5B8s e os apresentados por Filipov et al. (2017)	51
Figura 4.1 Graus de liberdade dos a) Elemento de membrana HMT3 com suas projeções; b) Elemento de placa HKPT6; c) Elemento de casca HS3.	52
Figura 4.2 Contorno de um trecho Γ_i do elemento triangular	55
Figura 4.3 Contorno do elemento de placa e seus respectivos graus de liberdade	58
Figura 4.4 Contorno do elemento com indicação do grau de liberdade de rotação e o ângulo θ_n formado entre a normal e o eixo x .	60
Figura 4.5 Elemento de placa com graus de liberdade no sistema local e global	62
Figura 4.6 Projeção do elemento HS3	65

- Figura 5.1 a) Graus de liberdade para o modelo de barra (N5B8s). b) Graus de liberdade para o modelo de placa (HKPT6). c) Graus de liberdade para o modelo de casca (4HS3). 67
- Figura 5.2 Deslocamento em z nó 3 e graus de liberdade do modelo de placa. 68
- Figura 5.3 Deslocamento do nó 5 com a variação da distorção da célula pelo ângulo α . 69
- Figura 5.4 a) Automodos referentes ao primeiro e segundo autovalores de deformação. 70
- Figura 5.5 a) Célula de lado L. b) e c) Mostram os gráficos da variação do tamanho L da célula em relação aos autovalores 1 e 2 para os modelos 4HKPT6 e N5B8s com K_B dividido por 2 e usado integralmente. 71
- Figura 5.6 a) célula com valores de ângulo α . b) e c) Mostram gráficos da distorção de uma célula pelo ângulo α para os autovalores 1 e 2 dos modelos de placa 4HKPT6 e barra N5B8s para valores de K_B dividido por 2 e usado integralmente. 72
- Figura 5.7 Única célula N5B8s com configuração inicial deformada para fora do plano. À direita está uma demonstração real de uma célula se deformando fora do plano (Filipov et al., 2017). 73
- Figura 5.8 a) e b) Mostram a variação do primeiro e segundo autovalores de deformação para uma célula considerando os modelos de casca e barra para valores de $\theta \in [0 15^\circ]$ e espessura $t = 8, 10$ e 12 milímetros. 74
- Figura 5.9 a) Força unitária constante ao longo do tempo . b) Força aplicada no grau de liberdade z do nó 1 com a deformada em pontilhado 75
- Figura 5.10 a), b) e c) Mostram os gráficos do deslocamento em função do tempo do nó 3 e nó 5 ao aplicar uma força constante e unitária no nó 3 na direção z nos modelos de barra e placa. 76

Figura 5.11 Teste de deslocamento assimétrico mostrando os ângulos θF e θB . Fonte: Filpov et al. (2017)	77
Figura 5.12 Graus de liberdade dos modelos de placa e de barra e dobradiça.	78
Figura 5.13 Variação dos ângulos θF e θB para os modelos de placa e de barra. Para o modelo de barra considerou-se a constante KB tanto dividida para cada mola, quanto integralmente para cada mola.	78
Figura 5.14 Variação dos ângulos θF e θB para os modelos de placa e de barra. Para o modelo de barra considerou-se a constante KB tanto dividida para cada mola quanto integralmente para cada mola.	79
Figura 5.15 Automodos referentes aos autovalores de deformação 1, 2 e 3.	80
Figura 5.16 Variação dos autovalores no plano $z = 0$ com a variação da escala de comprimento.	80
Figura 5.17 Automodos referentes aos autovalores de deformação 4 e 5.	81
Figura 5.18 Variação dos autovalores 4 e 5 com a escala de comprimento.	81
Figura 5.19 Gráfico dos autovalores 1,2 e 3 variando com o ângulo θ para os modelo de barra N5B8s e casca 4HS3.	82
Figura 5.20 Autovalores 4 e 5 variando em cada configuração espacial de $\theta \in [0 \ 180^\circ]$.	82
Figura 5.21 Análise de autovalores com a variação do comprimento de escala para o modelo de placa e para o modelode barra utilizando as três distribuições da massa na estrutura.	83
Figura 5.22 Autovalor 5 variando com a escala de comprimento para uma problema dinâmico	84

Figura 5.23 Representação dos deslocamentos ao realizar uma força unitária e constante no nó 6 da estrutura com duas células	85
Figura 5.24 a), b) e c) mostram a variação dos deslocamentos no tempo dos nós 5, 6, 7 e 8 com uma força unitária na direção z do nó 6, para as três distribuições de massa do modelo de barra.	86
Figura 5.25 Aplicação de força unitária na direção x nos nós superiores (1 e 2) de uma estrutura com duas células . As células formam um ângulo de 90 graus entre si.	86
Figura 5.26 Gráfico do deslocamento em função do tempo ao aplicar uma força constante e unitária nas estruturas de casca (4HS3) e de barra (N5B8s) considerando as três distribuições de massa a) Barra1, b) Barra 2 e c) Barra 3.	87
Figura 5.27 Automodos do modelo com 4 células alinhadas no plano.	88
Figura 5.28 Automodos de deformação 6 e 7 para estruturas com quatro células alinhadas	89
Figura 5.29 Autovalores variando o comprimento de escala, L^* , para estruturas com 4 células alinhadas	89
Figura 5.30 Variação dos autovalores 1, 2, 3, 4 e 5 para cada configuração espacial da estrutura variando ângulo θ de 0 a 90°.	90
Figura 5.31 Variação dos autovalores 6 e 7 para cada configuração espacial da estrutura variando ângulo θ de 0 a 90°.	91
Figura 5.32 a) b) e c) mostram os autovalores para variação do comprimento de escala para quatro células utilizando a as três abordagens da matriz de massa do modelo de barra 1, barra 2 e barra 3.	93
Figura 5.33 Deslocamento horizontal dos nós 1,2, 3 e 4 da estrutura de 4 células com configuração espacial de $\theta = 60^\circ$ com restrição nos nós 6 e 7.	94

Figura 5.34 Deslocamento vertical dos nós 3 e 4 no tempo.	95
Figura 5.35 Deslocamento horizontal dos nós 1,2, 3 e 4 da estrutura de 4 células com configuração espacial de $\theta = 60^\circ$ com restrição nos nós 6 e 7 e nos G.L x e y de 1, 2, 12 e 13.	96
Figura 5.36 Deslocamento vertical dos nós 3 e 4 no tempo.	97
Figura 6.1 Elemento finito híbrido quadrilateral de placa com oito graus de liberdade (4 de rotação no contorno e quatro de deslocamentos fora do plano). Fonte: Sales (2018).	99

Lista de tabelas

Tabela 4.1 Convenção dos sinais para o grau de liberdade de rotação do sistema. Fonte: Sales (2018)	60
Tabela 5.1 Propriedades de origami para uma célula	68
Tabela 5.2 Valores de deslocamentos no nó 5 para células quadradas do modelo de placa e barra	68
Tabela 5.3 Deslocamentos dos graus de liberdade de rotação com o deslocamento unitário no nó 3 para células quadradas para o modelo de placa e barra	69
Tabela 5.4 Primeiro e segundo autovalor de deformação para os modelos de barra (N5B8s) e de placa (4HKPT6).	70
Tabela 5.5 Autovalores do sistema linear dinâmico para uma célula.	75
Tabela 5.6 Propriedades utilizadas nos modelos de barra e placa	78
Tabela 5.7 Propriedades para uma análise dinâmica de duas células	83
Tabela 5.8 Tabela do terceiro autovalores de deformação utilizando o sistema linear dinâmico	84

1

Introdução

1.1. Colocação do problema

Para representar estruturas dobráveis foram criados na literatura técnica modelos com elementos estruturais que simulam painéis de diversas formas de origami. Os modelos estudados neste trabalho são compostos por elementos de barra e dobradiça, e elementos de placa e casca montados a partir do método híbrido dos elementos finitos.

O modelo de barra e dobradiça foi proposto por Shenk e Guest (2011) e traz uma abordagem baseada na modelagem do estado parcialmente dobrado de dois painéis como uma estrutura de treliça articulada. Cada vértice na folha dobrada é representado por uma articulação e cada linha de dobra por um elemento de barra. Além disso, as facetas são trianguladas e fornecem uma aproximação de primeira ordem à flexão. Filipov et al. (2017) estenderam esta ideia, criando um modelo mais complexo, com uma célula simulada por uma estrutura composta por 5 nós e 8 barras (N5B8), em que cada nó representa uma articulação, as barras internas simulam a flexão e as quatro barras externas representa a linha de dobra do papel.

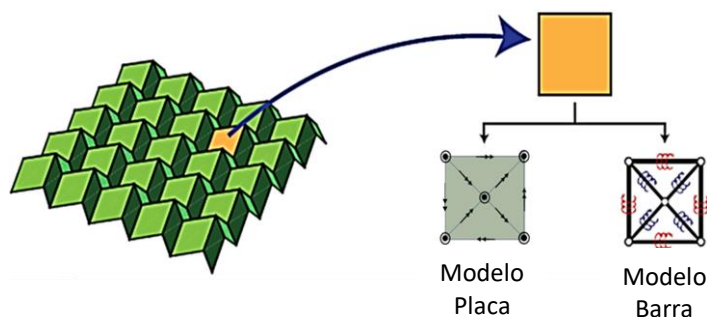


Figura 1.1 Representação do Miura-ori utilizando, para cada painel, o modelo de barras ou o modelo com quatro placas híbridas de Kirchhoff. Adaptado de Liu e Paulino (2018).

A Figura 1.1 mostra o protótipo de um origami do tipo Miura-ori em que a célula (em amarelo) pode ser simulada tanto pelo modelo de barra e dobradiça

quanto pelo modelo com quatro placas finas híbridas com formato triangular, conforme proposto no presente trabalho.

O método híbrido dos elementos finitos de placas e cascas, nasceu concomitantemente com o desenvolvimento do método híbrido dos elementos de contorno (Dumont, 1987), baseado nos trabalhos desenvolvidos por Reissner (1950) e Pian (1983).

A formulação do método híbrido dos elementos finitos é parecida com a do método híbrido dos elementos de contorno, mas utiliza apenas soluções fundamentais não-singulares. Esse método é mais preciso que o método dos elementos finitos de deslocamentos, devido à utilização no domínio de soluções que satisfazem exatamente a equação diferencial que governa o problema (Prazeres 2005).

1.2.

Revisão bibliográfica

O estudo de estruturas origami tem crescido nos últimos anos, com soluções inovadoras para problemas em ciência e engenharia. As primeiras aplicações aproveitaram a ideia de que um sistema pode ser dobrado de forma compacta e subsequentemente estendido, ou que a automontagem pode ser usada para construir uma estrutura tridimensional partindo de uma folha fina (Filipov et al., 2017). Inúmeros estudos estão sendo realizados nas áreas de arquitetura, design, matemática e, principalmente, em estruturas aeroespaciais.

Com o objetivo de criar uma estrutura que competisse em rigidez e peso com a *Honeycomb structure* (estrutura de colmeia), Miura (1972) estudou um protótipo chamado *zeta core sandwich*. Esse protótipo viria inspirá-lo futuramente a estudar o comportamento de dobras de membranas no espaço para representação de estruturas espaciais como plataformas, satélites e antenas espaciais (Miura, 1985). Esse estudo foi um dos precursores para a elaboração do modelo geométrico Miura-ori, muito estudado até hoje, que pode ser montado a partir de uma folha de papel, como mostrado por Nishiyama (2012).

Uma das estruturas inspiradas no Miura-ori é o modelo matemático *Hanaflex* (Flor dobrável) desenvolvido por Zirbel et al. (2013) e usado para painéis solares

dobráveis, com o potencial de coletar enorme quantidade de energia solar para sustentar missões espaciais de longa distância. Protótipos desenvolvidos mostram uma relação do diâmetro 9,2 vezes maior do que o tamanho dobrado (1,25m de diâmetro reduzido a 0,136m).

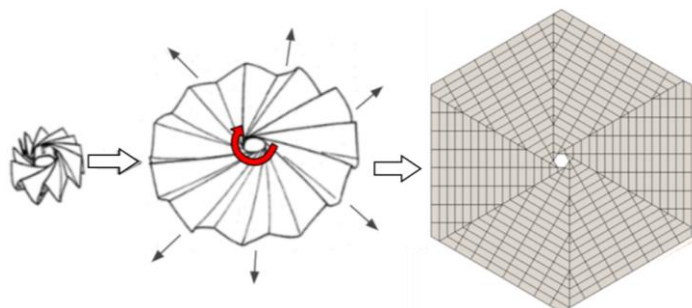


Figura 1.2 Processo de desdobramento de um protótipo de uma matriz solar de origami. Fonte: Aguirre (2018)

A primeira oportunidade para testar a aplicabilidade do Miura-ori no espaço veio quando os Japoneses planejaram uma plataforma espacial chamada *Space Flyer Unit* na década de 1980. A plataforma idealizada por Miura e Natori (1985) tinha o objetivo de demonstrar a possibilidade de placas solares do satélite coletarem energia no espaço e enviá-las para a Terra. A manta fotovoltaica foi dobrada utilizando o padrão Miura-ori, permitindo uma implantação de painéis rígidos interconectados por linhas de dobra flexíveis. Desse modo, o design ficou muito mais adaptável aos requisitos de um formato de sistema empacotado (Straubel, 2016). O *Space Flyer Unit* foi lançado por um foguete japonês HII em 18 de março de 1995 e foi recuperado por um ônibus espacial dos Estados Unidos em 13 de janeiro de 1996.

Outra utilidade prática do padrão de dobra Miura-ori foi demonstrada por Song et al. (2014) através de uma bateria de lítio que pode ser deformada a um nível elevado, incluindo dobragem, flexão e torção. A deformabilidade no nível do sistema é ativada usando origami rígido com padrão de Miura-ori, que prescreve um padrão de vinco tal que os materiais não gerem grandes tensões. Com isso, é possível aumentar o armazenamento de energia por área de ocupação da bateria.

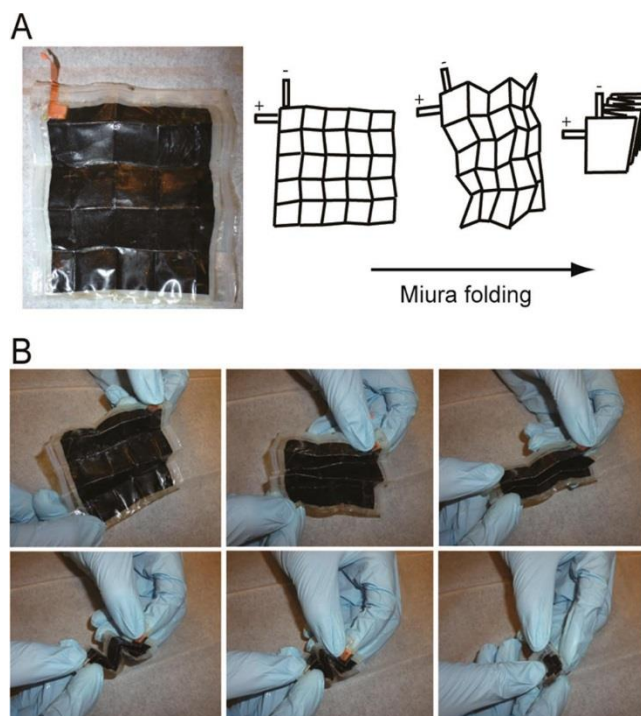


Figura 1.3 Bateria de lítio dobrada pelo padrão Miura-ori. Fonte: Song et al. (2014)

Visando simular a rigidez de estruturas com a geometria do Miura-ori, Tachi (2009) utilizou um modelo com placas conectadas a dobradiças para representar as dobras e os ângulos formados entre as duas faces de um papel (ângulo diedro). Entretanto, sua abordagem visava gerar movimentos de dobras através de um único vértice central, usando aproximações lineares. Nessa mesma linha, Hanna (2014) desenvolveu uma estrutura chamada “*Waterbomb base origami*” (Figura 1.4), um mecanismo de origami biestável de único vértice. Essa estrutura leva à compreensão quantitativa do comportamento cinético de base simétrica.

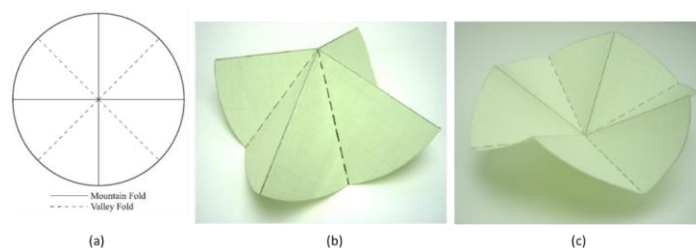


Figura 1.4 a) Padrão de vincos do “Waterbomb base”. b) Primeira posição de equilíbrio estável. c) Segunda posição de equilíbrio estável. Fonte: Hanna (2014).

Um protótipo físico foi construído e testado para validar os resultados das análises, explorando as localizações das posições de equilíbrio.

Stellman et al. (2005) apresentaram duas abordagens para a modelagem cinemática e dinâmica de estruturas de origami dobráveis. A primeira abordagem trata da cinemática do desdobramento do origami de um único vértice (Figura 1.5-a) baseado em pesquisas conduzidas na comunidade matemática de origami. Assim, cada configuração da estrutura, à medida que ela se desdobra, pode receber um valor de energia. A segunda é a abordagem dinâmica de estruturas com segmentos dobrados, estilo acordeom (Figura 1.5-b), cujas junções das placas são feitas por dobradiças.

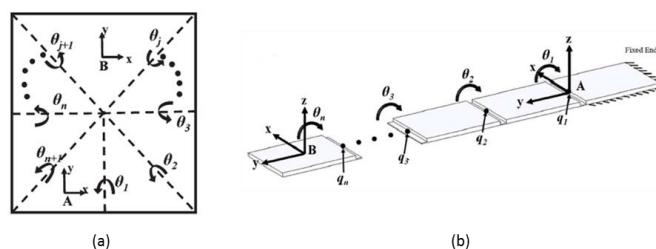


Figura 1.5 a) Origami com padrão de dobra de um único vértice. b) Origami acordeom. Fonte: Stellman, 2007

Silverberg et al. (2015) mostraram que os graus de liberdade de flexão ocultos foram separados dos que possuem vincos por apresentarem diferenças de energia. A Figura 1.6 mostra a estrutura antes e depois de sofrer a torção.

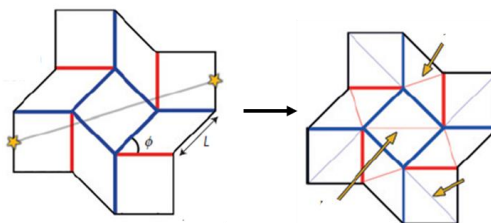


Figura 1.6 À esquerda estrutura com zero graus de liberdade onde as linhas vermelhas representam vincos em vale e as linhas azuis vincos em montanha. À direita os vincos ocultos que aparecem após aplicação de forças. Fonte: Silverberg, 2015

Gattas et al. (2013) exploraram a relação entre padrões Miura-ori para cinco características alteráveis: orientação do vinco, alinhamento do vinco, desenvoltura, dobrabilidade plana e retilinearidade. Uma parametrização consistente é apresentada para esses cinco padrões, onde verifica-se a modificação de cada característica utilizando protótipos físicos para validar a geometria. Gattas e You (2015) fizeram um protótipo alternativo de aço com placas e dobradiças soldadas para avaliar um modelo de estrutura sanduíche e, mesmo sem demonstrar um estudo

cinemático, concluíram que a rigidez é altamente dependente do material de construção e da maneira com que a dobra do material é feita.

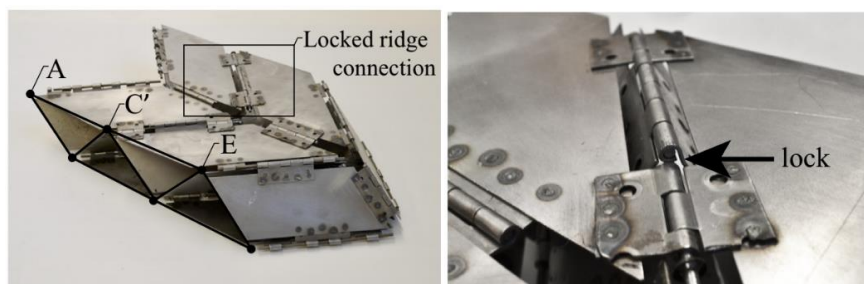


Figura 1.7 Estrutura Sandwich metálica construída por Gattas and You (2015).

Wei et al. (2013) caracterizaram a geometria e a resposta elástica efetiva planar e não-planar de uma estrutura Miura-ori periodicamente dobrada e composta de células unitárias idênticas, com dobras em vale e em montanha. Além disso, Wei et al. (2013) sugeriram que a energia elástica de uma célula seja armazenada nas dobradiças caracterizadas por molas de rigidez constante, permitindo às placas de seu experimento rotacionarem isometricamente.

Dudte et al. (2016) partiram do padrão de origami periódico mais simples, com estruturas em que cada célula apresenta apenas um grau de liberdade. São mostradas formulações geométricas que podem ser usadas para determinar padrões modulados espacialmente, gerando aproximações para determinadas superfícies de curvatura constante ou variável.

Demanine et al. (2011) mostraram o comportamento do parabolóide hiperbólico pregueado, cujo padrão de prega da Figura 1.8 não segue exatamente os vincos dados, ou seja, gera vincos extras. Eles fornecem um teorema que visa provar as propriedades fundamentais sobre a dobragem do papel, por exemplo, que vincos retos no pedaço de papel devem permanecer retos após as dobras. Liu et al. (2019) usaram um modelo teórico, que conecta geometria à mecânica, provando que esta estrutura exhibe biestabilidade entre duas configurações simétricas, sendo aproveitada para codificar metassuperfícies multiestáveis com geometrias não euclidianas programáveis.

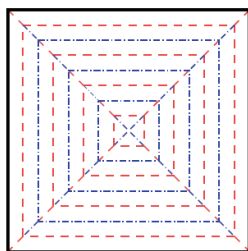


Figura 1.8 Parabolóide hiperbólico pregueado, em que o pontilhado vermelho mostra os vales e em azul as elevações chamadas de montanhas.

Na otimização, Fuchi (2016) apresentou um projeto de origami envolvendo dobragem sequenciada para estruturas treliçadas ajustadas por valores de rigidez de dobra advindos da formulação de Shenk e Guest (2011). Usando várias etapas de carregamento, ele mostra que é possível levar a estrutura dobrada a uma pequena deflexão fora de um estado plano, gerando movimentos dobráveis.

Gilewski (2014) fez um estudo comparativo de quatro modelos de origami inspirado em estruturas de placa dobráveis: longitudinal, Miura-ori, facetado, caixa de ovos, concluindo que essas estruturas são atraentes do ponto de vista mecânico. Foram avaliados o deslocamento e a tensão de Von Mises em modelos baseados na teoria da casca com o uso do método dos elementos finitos.

Ario e Nakazawa (2009) apresentaram a base teórica para abordagens numéricas estáticas e dinâmicas para a estabilidade elástica e elastoplástica de uma treliça de multicamada dobrável, em que o comportamento de dobra é mostrado como sendo uma função da geometria inicial e da velocidade da carga dinâmica. As análises são baseadas na teoria da bifurcação e incluem a não linearidade geométrica.

Namiki e Yokosawa (2015) propuseram um sistema robótico que pode realizar uma tarefa de dobragem de papel, integrando dinâmicas primitivas com controle sensorial. Eles mostraram que, ao dobrar o vale de uma folha de papel duas vezes seguidas, o vinco da primeira dobra perturba a precisão da segunda dobra. Com isso eles criaram um modelo físico para estimar o comportamento da curvatura do papel na sucessão de dobras.

Carlsson et al. (1983) avaliaram experimentalmente a flexão nas regiões que apresentam vincos de um modelo de viga de papelão com feixes paralelos. É

mostrado que o momento fletor e os níveis de força são fortemente dependentes da geometria e das propriedades elásticas na região amassada.

Pradier (2016) propôs uma abordagem para caracterizar o comportamento da dobra de papel, a fim de extrair os dados de material que serão necessários para a simulação de dobra. Seu modelo, a partir de experiências, depende de uma dobradiça local representada por uma mola de torção não linear. O experimento mostrou que o comprimento de dobra e o ângulo apresentam, respectivamente, uma dependência linear e não linear com o torque aplicado.

Zhou et al. (2016) realizaram testes dinâmicos de cargas axiais em tubos de paredes finas, incluindo tubos quadrados convencionais e dois tipos de caixas de colisão em formato origami, com espessura e área de superfície idênticas, e confirmaram que as caixas de colisão de origami têm melhor desempenho de resistência do que os tubos quadrados convencionais.

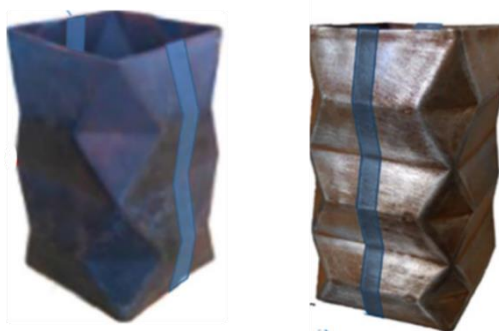


Figura 1.9 Tubos de paredes finas em formato origami. Fonte: Zhou et al. 2016

Temmerman et al. (2006), visando compreender o comportamento cinemático de estruturas tesouras, criaram um modelo construído a partir de conectores de polímeros poliacetais (como mostrado na Figura 1.10) e barras de alumínio, que podem incorporar uma membrana flexível. Essas estruturas são biestáveis e requerem entrada de energia para superar as incompatibilidades geométricas típicas de sua morfologia.

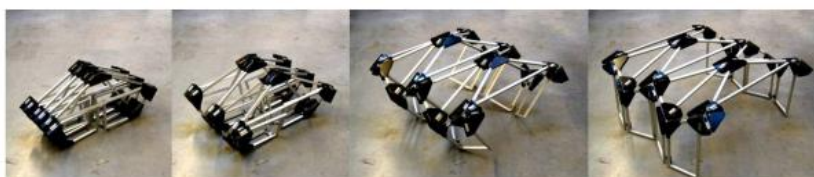


Figura 1.10 Quatro estágios de implantação de um modelo retangular com barras.

Nagasawa et al. (2003) relatam um comportamento fundamental de deformação de modelos vincados de papelão revestido. As características do vinco foram investigadas variando-se a profundidade do vinco e o desvio lateral do modelo. Foi analisada a resistência do momento fletor e discutiu-se a variação das características do momento fletor do modelo amassado ao se observar o teste de dobra. Giampieri et al. (2011) fizeram uma simulação com elementos finitos para validar o experimento.

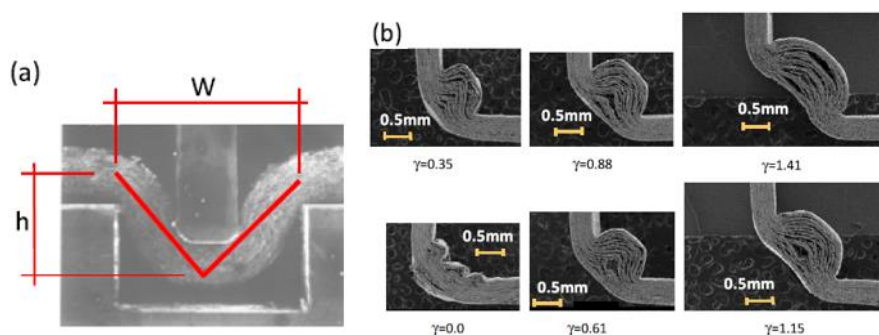


Figura 1.11 a) Profundidade de indentação durante a dobra. b) Teste de flexão em papel pré amassado. Fonte: Giampieri et al.(2011)

1.3. Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo o aprendizado das características estruturais básicas de uma construção do tipo origami, conforme desenvolvida na literatura. Pretende-se fazer uma verificação linear estática e dinâmica do comportamento de painéis origami, utilizando os modelos de barra e dobradiça da literatura e os modelos compostos por placas e cascas desenvolvidos pelo método híbrido dos elementos finitos. Essa verificação pretende analisar os autovalores como representação de energia para diferentes automodos e avaliar o comportamento mecânico dos modelos, para que se tenha mais confiança nos modelos estruturais desenvolvidos.

1.4. Organização do texto

Esta dissertação é dividida em 6 capítulos: *Introdução*, *Conceitos teóricos*, *Formulação dos elementos de barra e dobradiça*, *Formulação do método híbrido dos elementos finitos*, *Avaliação numérica* e *Conclusão*.

No capítulo 1, *Introdução*, são apresentados os objetivos deste trabalho, um breve histórico dos diferentes estudos de estruturas origami.

No capítulo 2, *Conceitos gerais*, é apresentado o princípio variacional generalizado de Hellinger-Reissner; a formulação da superposição modal convencional; e as soluções fundamentais não singulares obtidas das equações diferenciais do problema de elastostática e problema geral de placa.

No capítulo 3, *Elementos de barra e dobradiça*, é desenvolvida a formulação dos modelos de barra e dobradiça para problemas lineares.

No capítulo 4, *Formulação dos elementos finitos híbridos*, é apresentada a formulação geral para o desenvolvimento dos elementos triangulares de membrana, placa e casca.

No capítulo 5, *Avaliação Numérica*, apresenta-se a comparação dos modelos de barra e dobradiça com os modelos utilizando os elementos híbridos.

No capítulo 6, *Conclusão*, são descritas as conclusões da comparação dos modelos apresentados no capítulo 5, assim como sugestões para trabalhos futuros.

2

Conceitos gerais

2.1.

Potencial de Hellinger-Reissner

O potencial de Hellinger-Reissner é mais geral do que o tradicionalmente utilizado no método convencional de elementos finitos, pois é constituído por campos de deslocamentos u_i^d no contorno Γ e campos de tensões σ_{ij}^f e deslocamentos u_i^f no domínio Ω , que podem ser definidos por uma superposição da solução particular (b) com uma solução homogênea (*)

$$\sigma_{ij}^f = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^b \quad (2.1.1)$$

$$u_i^f = u_i^* + u_i^b \quad (2.1.2)$$

Dumont e Oliveira (2001) mostram que, para chegar a uma formulação híbrida dos elementos finitos, deve-se relaxar a equação de compatibilidade entre deformações e deslocamentos, levando a uma versão generalizada do princípio de Hamilton

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij}^f) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f}_i u_i^d d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{t}_i u_i^d d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i^f \dot{u}_i^f d\Omega + \right) dt + \\ & \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(- \int_{\Omega} \lambda_{ij} \left(\varepsilon_{ij}^f - \frac{1}{2} (u_{i,j}^d + u_{j,i}^d) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_i (u_i^f - u_i^d) d\Omega \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

em que Dumont e Marón (2011) atribuem a hipótese de sentidos físicos estritos a λ_i e λ_{ij} como forças dinâmicas $-\rho \ddot{u}_i^f$ e tensões σ_{ij}^f , respectivamente. Os campos de tensões σ_{ij}^f , com as consequentes deformações ε_{ij}^f e os deslocamentos u_i^f , satisfazem as equações de equilíbrio no domínio Ω , e o campo de deslocamentos u_i^d satisfaz as condições de compatibilidade no contorno Γ .

Considerando um problema no domínio da frequência, tal que $\ddot{u}_i^d = -\omega^2 u_i^d$ e a discretização numérica feita no domínio pelas expressões

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^* \quad (2.1.4)$$

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* \quad (2.1.5)$$

$$u_i^d = u_{im}^d d_m \quad (2.1.6)$$

é possível, como mostram Dumont e Prazeres (2005), chegar à forma mais adequada do potencial de Hellinger-Reissner

$$\begin{aligned} -\Pi_{HR} = & \delta p_m^* \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j (u_{in}^* p_n^* - u_{in}^d d_n + u_i^b) d\Gamma dt \right] + \\ & + \left[\int_{t_0}^t \int_{\Gamma} [(\sigma_{ijm}^* p_m^* - \sigma_{ij}^b) \eta_j - t_i^-] u_{in} d\Gamma dt - \omega^2 d_m \int_{\Omega} u_{in} u_{im} d\Omega dt \right] \delta d_n \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

que pode ser escrito matricialmente como

$$-\delta \Pi_{HR} = \delta \mathbf{p}^{*T} (\mathbf{F} \mathbf{p}^* - \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{b}) - \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* + \mathbf{p}^b - \mathbf{p} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{d}) = 0 \quad (2.1.8)$$

Para um determinado instante de tempo e valores arbitrários de $\delta \mathbf{p}^*$ e $\delta \mathbf{d}$ a equação (2.1.8) decompõe-se em duas novas equações:

$$\mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H} \mathbf{d} - \mathbf{b} \quad (2.1.9)$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{d} = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2.1.10)$$

onde \mathbf{H}^T é a matriz de equilíbrio, que transforma forças nodais \mathbf{p}^* no sistema interno em forças nodais equivalentes $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ do sistema externo. A matriz \mathbf{H} tem dimensão $n^s \times n^d$, onde n^s é o número de soluções fundamentais e n^d é o número de graus de liberdade; \mathbf{F} é a matriz simétrica de flexibilidade que transforma parâmetros nodais de forças \mathbf{p}^* em deslocamentos nodais \mathbf{d}^* no sistema interno de coordenadas e apresenta dimensão $n^s \times n^s$; \mathbf{b} é um vetor de deslocamentos nodais equivalente às forças de corpo; \mathbf{p} são forças nodais equivalentes atuantes na superfície do elemento; e \mathbf{p}^b são forças de corpo. As matrizes e vetores apresentados podem ser escritos como

$$\mathbf{b} = \int_{\Gamma} u_i^b \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma \quad (2.1.11)$$

$$\mathbf{F} = [F_{mn}] = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^* \mathbf{T}^T \mathbf{U}^* d\Gamma \quad (2.1.12)$$

$$\mathbf{H} = [H_{mn}] = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^* \mathbf{T}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (2.1.13)$$

$$\mathbf{p} = [p_n] = \int_{\Gamma} t_i u_{in} d\Gamma \quad (2.1.14)$$

$$\mathbf{p}^b = [p_n^b] = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^b \eta_j u_{in} d\Gamma \quad (2.1.15)$$

$$\mathbf{M} = [M_{mn}] = \int_{\Omega} u_{in} u_{im} d\Omega \quad (2.1.16)$$

Escrevendo a expressão (2.1.9) em função de \mathbf{p}^* e substituindo na expressão (2.1.10) tem-se

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{d} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{d} = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b + \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{b} \quad (2.1.17)$$

onde a matriz de rigidez é dada $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$ e desprezando as forças de corpo, chega-se à expressão demonstrada por Dumont e Aguilar (2009)

$$\mathbf{K} \mathbf{d} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (2.1.18)$$

A matriz \mathbf{K} é positiva semidefinida e transforma deslocamentos nodais em forças nodais equilibradas.

2.2.

Processo de superposição modal convencional

Para a hipótese de um sistema com n graus de liberdade, uma matriz de massa, amortecimento nulo e forças aplicadas a estrutura, pode-se escrever a equação diferencial de movimento como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.2.1)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa; \mathbf{K} a matriz de rigidez; \mathbf{u} o vetor deslocamento; e \mathbf{f} o vetor de forças. Para um sistema acoplado, procuram-se soluções linearmente independentes, cuja combinação linear permita obter a solução geral. Com isso, utiliza-se a matriz modal Φ de maneira que

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{x} \quad (2.2.2)$$

e a multiplicação da matriz modal transposta, Φ^T , de ambos os lados da equação (2.2.1), gera um sistema desacoplado

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{x}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{x} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (2.2.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b &= \Phi^T \mathbf{M} \Phi \\ \mathbf{K}_b &= \Phi^T \mathbf{K} \Phi \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

são matrizes diagonais de massa e de rigidez geradas como consequência das condições de ortogonalidade da matriz modal. Após aplicar a normalização em relação à matriz de massa à matriz modal, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^T \mathbf{K} \tilde{\Phi} &= \Omega^2 \\ \tilde{\Phi}^T \mathbf{M} \tilde{\Phi} &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade e Ω^2 é uma matriz diagonal que contém, na sua diagonal principal, o quadrado dos valores da frequência natural associada a cada modo de vibração.

2.3. Soluções fundamentais não singulares

A equação diferencial de equilíbrio da elastostática, sem considerações da força de corpo, é escrita na forma

$$u_{im,jj}^* + \frac{1}{1-2\nu} u_{jm,ji}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.1)$$

Uma possível solução para essa equação é a proposição de que o campo de deslocamentos u_{im}^* possa ser expresso em termos de uma função potencial Φ , como (Marguerre, 1955)

$$u_{im}^* = \Phi_{im,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{km,ik} \quad (2.3.2)$$

Após fazer as derivações e os desenvolvimentos matemáticos, Dumont (1996) mostra que a expressão (2.3.1) resulta em uma equação biarmônica cuja solução é dada por (Dumont e Prazeres, 2005; Prazeres, 2005)

$$\Phi_0 = r^n \left[C_{1n} \sin(n\theta) + C_{2n} \cos(n\theta) + C_{3n} \sin((n-2)\theta) + C_{4n} \cos((n-2)\theta) \right] \quad (2.3.3)$$

As soluções fundamentais de deslocamentos u_{im}^* são obtidas por meio da equação (2.3.2) transformando as coordenadas polares em cartesianas e podem ser escritas, para casos bidimensionais, como

$$u_{im}^* = \frac{1}{1-\nu} \left[\begin{array}{cc|cc} 3-4\nu & 0 & (5-8\nu)x & -y \\ 0 & 3-4\nu & -y & (7-8\nu)x \end{array} \right] \quad (2.3.4)$$

Para problemas de placas finas, Sales (2018) mostra que a solução fundamental de flexão é dada por

$$w_m^* = \left[1 \mid x \ y \mid 2xy \ x^2 - y^2 \ x^2 + y^2 \mid 3x^2 y - y^3 \ x^3 - 3xy^2 \ x^2 y + y^3 \ x^3 + xy^2 \mid \dots \right] \quad (2.3.5)$$

3

Modelo de barra e dobradiça

Este capítulo apresenta a evolução da construção do modelo de barra e dobradiça e sua formulação linear, como apresentada na literatura técnica.

O modelo de barra e dobradiça foi criado por Shenk e Guest (2011) com uma célula formada por 4 nós e 5 barras (N4B5), cujo objetivo era simular a flexão interna através da barra diagonal do modelo, sendo as arestas articuladas (Figura 3.1). Ao tentar capturar um comportamento isotrópico de um painel origami, Filipov et al. (2016) propuseram a adição de mais uma barra ao modelo anterior, levando ao N4B6 (4 nós e 6 barras). Entretanto, Filipov et al. (2017) perceberam que o modelo N4B6, por ter barras ligadas em cruz, dificultaria a proposta de grandes deslocamentos e adicionaram uma rótula no centro do modelo, criando o modelo de 5 nós e 8 barras (N5B8).

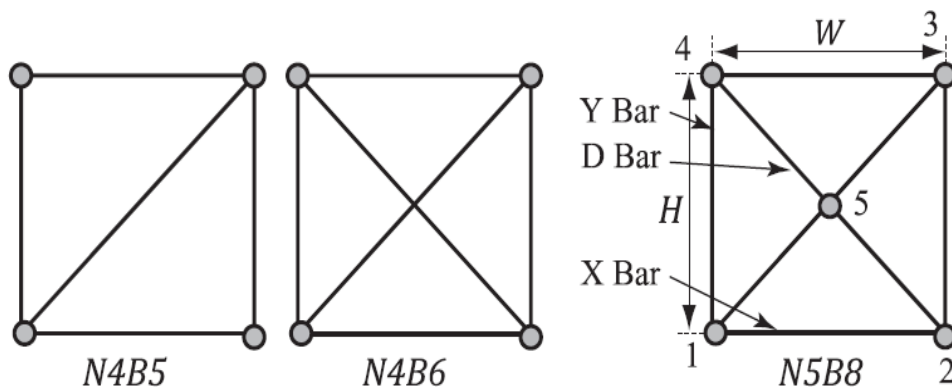


Figura 3.1 Evolução dos modelos de barra e dobradiça utilizados para representar uma célula de uma estrutura origami. A nomenclatura dos modelos foi proposta por Filipov et al. (2017), com N referindo-se à quantidade de nós, e B a quantidade de barras da estrutura.

Com a evolução dos modelos de barra e dobradiça também houve uma evolução na formulação criada por Shenk e Guest (2011) para representar a matriz de rigidez desses modelos. Filipov et al. (2016) fizeram um aperfeiçoamento na formulação, também utilizada por Filipov et al. (2017), onde a matriz de rigidez total de um estrutura N5B8 seria a contribuição da rigidez das barras (\mathbf{K}_s), com a

rigidez à flexão no interior de uma célula (\mathbf{K}_B) e a rigidez na linha de dobra, ou seja, entre duas células (\mathbf{K}_F). Essa formulação pode ser escrita matricialmente como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T \\ \mathbf{J}_B^T \\ \mathbf{J}_F^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}_S & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_B & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{J}_B \\ \mathbf{J}_F \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}_S \mathbf{T} + \mathbf{J}_B^T \mathbf{D}_B \mathbf{J}_B + \mathbf{J}_F^T \mathbf{D}_F \mathbf{J}_F = \mathbf{K}_S + \mathbf{K}_B + \mathbf{K}_F \quad (3.1.1)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transformação cinemática, \mathbf{J} o jacobiano da transformação e \mathbf{D}_S , \mathbf{D}_B , \mathbf{D}_F são as matrizes de rigidez local das barras, da flexão no interior da célula e das linhas de dobra, que serão abordadas nas seções 3.1, 3.2 e 3.3.

A representação dos elementos estruturais e um esquema da simulação das rigidezes da barra, da flexão e da linha de dobra nos modelos N4B5 e N5B8 são mostrados na Figura 3.2. Como os elementos de barra têm somente graus de liberdade de deslocamento x , y e z , o capítulo 3.6 mostra um exemplo de como são construídas as matrizes \mathbf{K}_B e \mathbf{K}_F para um modelo contido no plano $z = 0$.

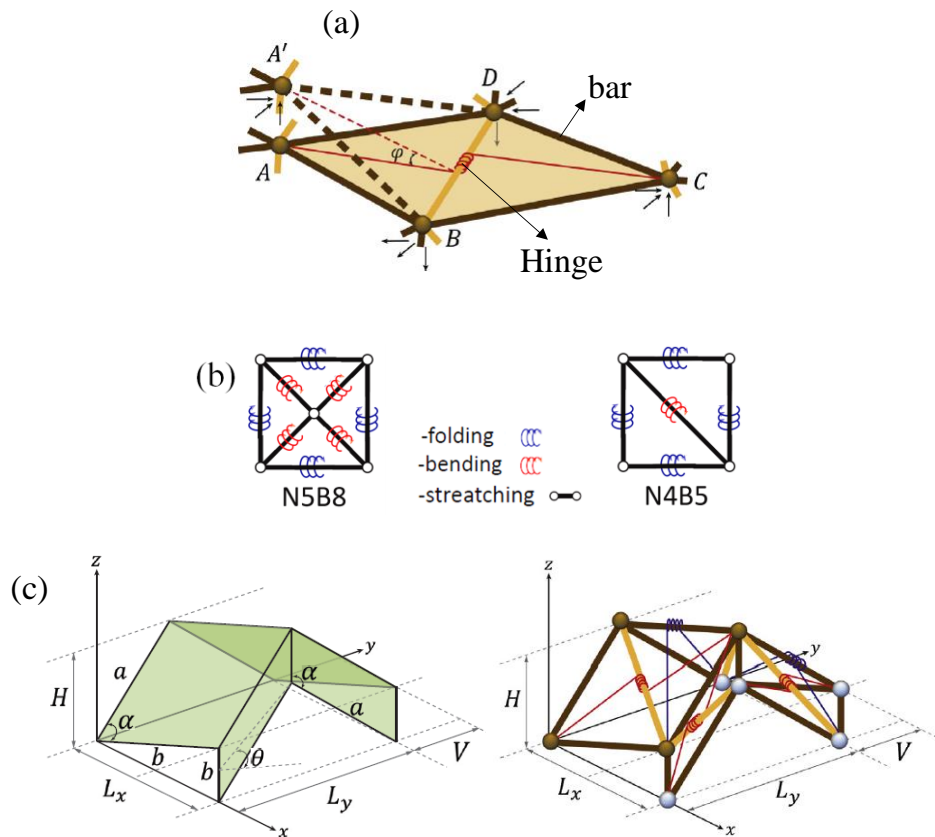


Figura 3.2 (a) Modelo de 4 nós e 5 barras (N4B5). (b) Representação das rigidezes da barra, flexão e a linha de dobra dos modelos N5B8 e N4B5. (c) Celula de um estrutura Miura-ori formada por barras e dobradiça. Fonte: Liu e Paulino (2018) e Pratapa et al. (2018).

3.1. Matriz de Rigidez das barras (K_s)

A proposta da rigidez das barras ($K_s = T^T D_s T$) foi feita pelo método da rigidez direta, partindo de um problema tridimensional. A formulação geral utiliza a matriz de equilíbrio (A) que relaciona forças internas de barra (t) a forças nodais (f); a matriz de compatibilidade (T) relaciona deslocamentos nodais de barra (u) a extensões de barra (e); e a matriz diagonal (D_s) relaciona as extensões às forças da barra (Filipov et al., 2017). Essa formulação pode ser escrita em três equações lineares como

$$At = f, \quad Tu = e, \quad D_s e = t \quad (3.1.2)$$

Tem-se, de acordo com o princípio dos trabalhos virtuais, que $A^T = T$. Os parâmetros de rigidez da barra são definidos como

$$k_s = \frac{EA_e}{L_e} \quad (3.1.3)$$

sendo E o módulo de elasticidade, L_e comprimento da barra e A_e a área da barra.

Supondo que o efeito de Poisson ao tracionar uma célula seja o mesmo em ambas direções, Filipov et al. (2017) formularam as áreas das barras de uma célula com um comportamento isotrópico, escrevendo

$$A_x = t \frac{(H^2 - \nu W^2)}{2H(1 - \nu^2)}, \quad A_y = t \frac{W^2 - \nu H^2}{2W(1 - \nu^2)}, \quad A_D = t \frac{\nu(H^2 + W^2)^{3/2}}{2HW(1 - \nu^2)} \quad (3.1.4)$$

sendo A_x , A_y , e A_D as áreas das barras no eixo x , y , e na diagonal, respectivamente, t a espessura do painel, ν o coeficiente de Poisson, H e W as dimensões das barras na horizontal e na vertical, como mostrado na Figura 3.1. O comportamento isotrópico para uma carga de tração em um painel quadrado é mostrado na Figura 3.3. Segundo Filipov et al. (2017), para cargas de tração, uma estrutura N5B8 retangular terá uma rigidez equivalente a um bloco sólido de material, isto é $EA/L = EWt/H$.

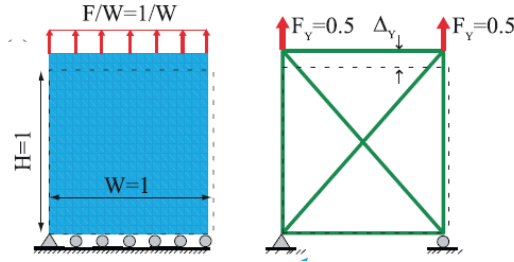


Figura 3.3 Teste de tração realizado aplicando uma carga distribuída uniforme na borda superior de um painel ($F = 1$) e restringindo a borda inferior. Fonte: Filipov et al. (2017)

3.2.

Rigidez a flexão das barras internas da célula (K_B)

Para a simulação da rigidez de flexão interna dos painéis do elemento ($\mathbf{K}_B = \mathbf{T}^T \mathbf{D}_B \mathbf{T}$), Shenk e Guest (2011) fazem uma representação cinemática da linearização do ângulo θ entre as duas faces de uma célula, chamado de ângulo diedro (Figura 3.4), produzindo o Jacobiano \mathbf{J}_B , que pode ser calculado fazendo

$$\mathbf{J}_B \mathbf{u} = \sum \frac{\partial \theta}{\partial p_j} dp_j = d\theta_i \quad (3.2.1)$$

onde o vetor \mathbf{u} contém os deslocamentos nodais.

A partir da variação das coordenadas dp_j , no sistema cartesiano tridimensional, obtém-se a derivada do ângulo diedro, que pode ser calculado a partir de uma abordagem vetorial em que Liu e Paulino (2017), para um intervalo de $[0 \ 180^\circ]$, apresentam o ângulo diedro como produto interno das normais \mathbf{m} e \mathbf{n} de cada painel da Figura 3.4 escrito como

$$\theta = \mu \arccos \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{m}\| \cdot \|\mathbf{n}\|} \right) \quad (3.2.2)$$

onde as normais $\mathbf{m} = \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{r}_{jk}$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}_{kj} \times \mathbf{r}_{kl}$ são calculadas considerando os vetores criados a partir das coordenadas dos nós entre dois painéis, como mostrado na Figura 3.4. A constante μ é um indicador de sinal definido como

$$\mu = \begin{cases} \text{sign}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{kl}) & \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{kl} \neq 0 \\ 1 & \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{kl} = 0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

uma vez que $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{kl} = 0$ ocorre quando o ângulo diedro é 0 ou π .

A diferenciação, utilizando a regra da cadeia, do ângulo diedro da equação (3.2.2) em relação às coordenadas pode ser escrita fazendo

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_i^{(r)}} = \frac{-1}{\sin(\theta)} \mathbf{r}_{ij} \times \frac{\|\mathbf{m}\|^2 \mathbf{n} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}}{\|\mathbf{m}\|^3 \|\mathbf{n}\|}, \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_l^{(r)}} = \frac{-1}{\sin(\theta)} \mathbf{r}_{lj} \times \frac{\|\mathbf{n}\|^2 \mathbf{m} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^3 \|\mathbf{m}\|}, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_j^{(r)}} = \frac{-1}{\sin(\theta)} \left((\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{kj}) \times \frac{\|\mathbf{m}\|^2 \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{n}}{\|\mathbf{m}\|^3 \|\mathbf{n}\|} - \mathbf{r}_{kl} \times \frac{\|\mathbf{n}\|^2 \mathbf{m} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^3 \|\mathbf{m}\|} \right), \quad (3.2.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_k^{(r)}} = \frac{-1}{\sin(\theta)} \left((\mathbf{r}_{kl} - \mathbf{r}_{kj}) \times \frac{\|\mathbf{n}\|^2 \mathbf{m} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^3 \|\mathbf{m}\|} - \mathbf{r}_{ij} \times \frac{\|\mathbf{m}\|^2 \mathbf{n} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}}{\|\mathbf{m}\|^3 \|\mathbf{n}\|} \right), \quad (3.2.7)$$

Como essas expressões apresentam termos que produzem singularidade quando o ângulo se aproxima de 0 ou π , são apresentadas algumas transformações com a identidade vetorial

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (3.2.8)$$

e a definição de produto vetorial

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\beta) \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} \quad (3.2.9)$$

que possibilitam simplificar essas expressões (Liu e Paulino, 2017), chegando a expressões livres de singularidade como

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_i^{(r)}} = \frac{\|\mathbf{r}_{kj}\|}{\|\mathbf{m}\|^2} \mathbf{m}, \quad (3.2.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_l^{(r)}} = -\frac{\|\mathbf{r}_{kj}\|}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n}, \quad (3.2.11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_j^{(r)}} = \left(\frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{kj}}{\|\mathbf{r}_{kj}\|^2} - 1 \right) \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_i^{(r)}} - \frac{\mathbf{r}_{kl} \cdot \mathbf{r}_{kj}}{\|\mathbf{r}_{kj}\|^2} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_l^{(r)}}, \quad (3.2.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_k^{(r)}} = \left(\frac{\mathbf{r}_{kl} \cdot \mathbf{r}_{kj}}{\|\mathbf{r}_{kj}\|^2} - 1 \right) \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_l^{(r)}} - \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{kj}}{\|\mathbf{r}_{kj}\|^2} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_i^{(r)}} \quad (3.2.13)$$

O Jacobiano da transformação mostrada na equação (3.2.1) é um vetor composto pelas equações acima,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_i^{(r)}} & \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_l^{(r)}} & \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_j^{(r)}} & \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_k^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (3.2.14)$$

onde cada variação $\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_n^{(r)}}$ é um vetor de coordenadas x , y e z .

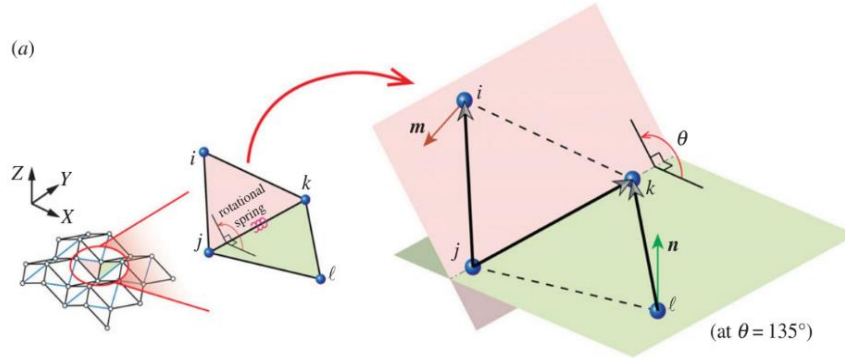


Figura 3.4 Representação de um elemento de 4 nós e 5 barras (N4B5) a partir do origami Miura-ori. Fonte: Liu e Paulino (2017)

Ainda na simulação da flexão interna da célula, a matriz \mathbf{D}_B é composta pelas rigidezes K_B em sua diagonal. Para uma abordagem da rigidez da dobradiça para o modelo N4B6, adota-se a base do estudo experimental de Lobkovisk (1995) a respeito de deformações de uma folha de papel, mostrando que a concentração de energia nas dobras aumenta conforme

$$f_e = k \left(\frac{D_s}{t} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.2.15)$$

onde

$$k = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.2.16)$$

é o módulo de elasticidade da placa, t a espessura da folha e D_s o comprimento da menor diagonal do elemento, onde há maior captura de energia devido à maior flexibilidade.

Tentando aproximar-se dos resultados experimentais citados, Filipov et al. (2016) propõem uma constante C_B que multiplica essa expressão para representar pequenos e grandes deslocamentos

$$K_B = C_B \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{D_s}{t} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.2.17)$$

onde utilizaram $C_B = 0.441$ para todas as análises.

Filipov et al. (2017), visando estudar pequenos deslocamentos, modelaram uma estrutura em elementos finitos com a geometria do modelo N5B8 restringindo 3 nós externos da célula.

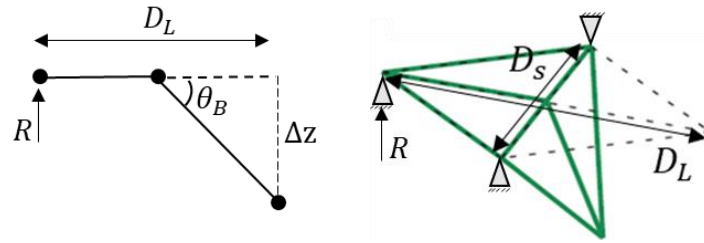


Figura 3.5 Rotação θ_B gerada por pequenos deslocamentos Δz

Aplicando um pequeno deslocamento Δz (Figura 3.5), gera-se uma rotação θ_B na estrutura e uma reação vertical R no apoio mais distante, que foi utilizada para calcular o momento de flexão no centro da célula como

$$M_B = R D_L / 2 \quad (3.2.18)$$

onde D_L é a maior diagonal. Com esse momento M_B e a rotação θ prescrita, pôde-se chegar a valores de rigidez K_B utilizando

$$M_B = \theta_B K_B \quad (3.2.19)$$

A partir dos valores de rigidez K_B encontrados, foi possível formular empiricamente para o modelo N5B8 uma expressão para pequenos deslocamentos como

$$K_B = \left(0.55 - 0.42 \frac{\sum \alpha}{\pi} \right) \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{D_s}{t} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.2.20)$$

onde o $\sum \alpha$ é gerado a partir dos ângulos formados pelas geometrias da folha, como mostra a Figura 3.6.

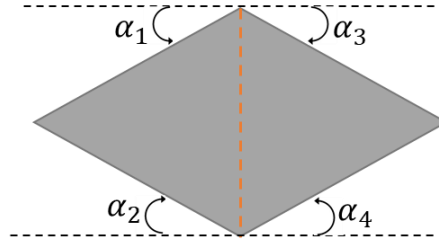


Figura 3.6 Disposição dos ângulos referentes à geometria da célula

3.3. Rigidez da linha da dobra (K_F)

A linha de dobra tem como definição a linha que separa duas ou mais células de uma estrutura origami. A matriz de rigidez da linha de dobra ($\mathbf{K}_F = \mathbf{T}^T \mathbf{D}_F \mathbf{T}$) segue o mesmo padrão da rigidez das flexões internas do painel para a matriz jacobiana, segundo Filipov et al. (2017). A matriz \mathbf{D}_F também é diagonal, composta por constantes de rigidez K_F descritas de maneira a considerar a rigidez de duas células conectadas em série, de forma que

$$K_F = \frac{1}{\frac{1}{k_l} + \frac{1}{k_m}} \quad (3.3.1)$$

sendo k_l a representação da rigidez rotacional na linha de dobra estudada experimentalmente por Pradier (2016) e Lechenaut (2014) e k_m a máxima rigidez de flexão interna gerada segundo a equação (3.2.20) quando $\sum \alpha = 0$. As duas expressões são

$$k_l = \frac{L_F}{L^*} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (3.3.2)$$

$$k_m = (0.55) \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{L_F}{t} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.3.3)$$

onde L_F é o comprimento da linha de dobra, que se mantém constante, e L^* é um fator relacionado à rigidez do material de fabricação e suas propriedades geométricas, chamado de escala de comprimento. Lechenault et al. (2014) mostraram, através de experimentos, que seu valor tem um crescimento aproximadamente linear com a espessura, em uma relação de $L^* \approx 200t$. Embora para Filipov et al. (2017) esses valores ainda precisem ser estudados melhor, a

Figura 3.7, retirada de seu trabalho, mostra a variação da escala de comprimento com a espessura para nove experimentos deduzida a partir da equação (3.3.2).

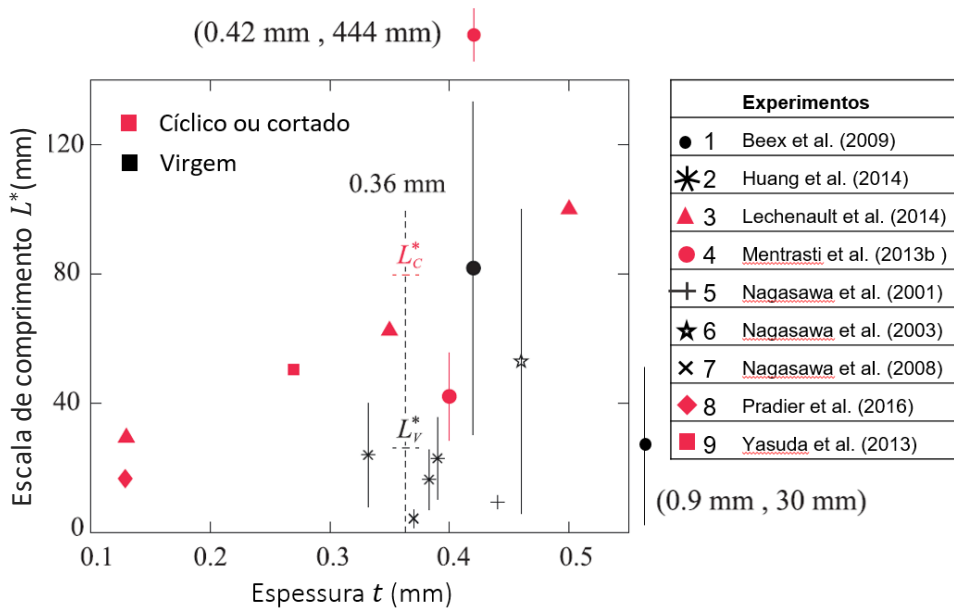


Figura 3.7 A escala de comprimento com respeito a espessura para nove experimentos listados. Adaptado de Filipov et al. (2017).

A Figura 3.7 mostra em vermelho os experimentos em que as linhas de dobra já sofreram ciclos de dobra ou o material foi cortado. Em preto estão os experimentos em que são aplicados carregamentos em um material virgem, para sofrer dobras. Além disso, são mostrados alguns experimentos para espessuras de $t = 0.36\text{mm}$, comprimentos cíclicos L_c^* e para comprimentos com material virgem L_v^* . Outros experimentos relacionados foram colocados do lado de fora do gráfico por facilidade. Contudo, os estudos experimentais ainda não mostram uma forte correlação com a espessura, nem como o processo de fabricação, e as propriedades tem influência do material (Filipov et al., 2017).

3.4. Autovalores

Após os estudos para elaboração da matriz de rigidez dos modelos de barra e dobradiça, deve-se verificar os autovalores como representantes da energia elástica de deformação. Autovalores nulos significam que o corpo se move sem resistência, enquanto, para estruturas origami com módulo de elasticidade na ordem de 1MPa,

autovalores na ordem de 10^2 ou 10^3 precisam de muita energia para se deformar (Filipov et al., 2015).

A energia gerada para movimentar uma estrutura é dada pelos seus autovalores λ_i e o modo como ela se movimenta pelos seus respectivos automodos v_i . Utilizando a matriz de massa \mathbf{M} , pode-se resolver problemas dinâmicos e encontrar novos autovalores, cujas raízes representam a frequência natural de vibração da estrutura. As equações lineares estáticas e dinâmicas são escritas como

$$\mathbf{K} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (3.4.1)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{M} \mathbf{v}_i \quad (3.4.2)$$

Filipov et al. (2015) fazem um estudo de autovalores para uma estrutura tubular de origami com um zíper acoplado. Além disso, eles analisam a rigidez dessa estrutura tubular em balanço, aplicando cargas nas direções x , y e z . Nessa mesma linha, Filipov et al. (2017) trazem os autovalores para os referentes automodos de dobras do Miura-ori.

Outro conceito estudado é o de “bandgap”, que é a diferença entre autovalores de dois automodos responsáveis pela dobra da estrutura de origami, mostrando que a estrutura gasta menos energia para se dobrar do que para se deformar. O aumento do “bandgap” quer dizer que a estrutura fica mais rígida. Filipov et al. (2015) mostraram os autovalores de uma estrutura de tubo único e uma com tubo acoplado com zíper, em que o “bandgap” é dado pela diferença entre o sétimo e o oitavo autovalores como mostrado na figura 3.8.

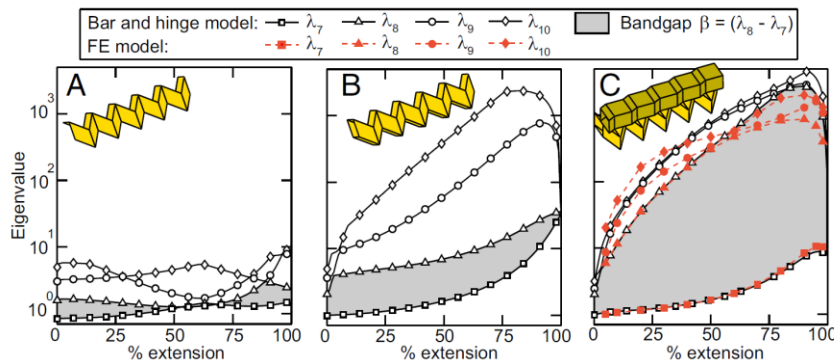


Figura 3.8 Verificação do “bandgap” para uma estrutura de tubo com zíper acoplado. Fonte: Filipov et al. (2015)

3.5. Implementação computacional

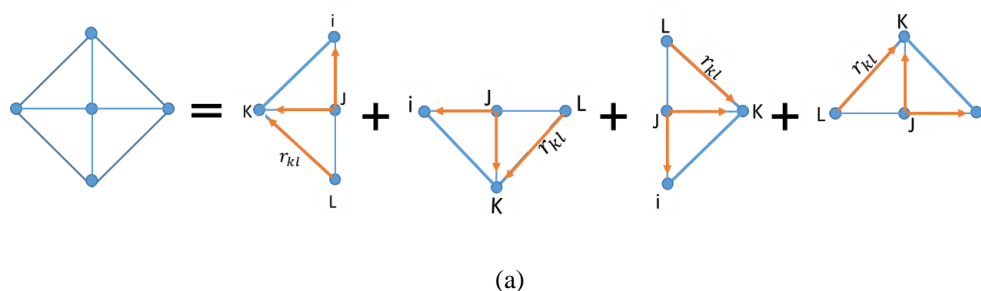
Fuch (2016) apresenta uma implementação com várias etapas de carregamento para conduzir a pequenos movimentos, utilizando o elemento N4B5 (Figura 3.4) com poucas modificações. Com cada incremento de uma carga pré-definida, modifica-se a matriz de rigidez para cada nova configuração, em um processo sucessivo.

Liu e Paulino (2016) apresentam uma maneira de implementação de estruturas com o modelo N4B5, onde são utilizadas matrizes para alocar as posições na estrutura que apresentam flexão interna na célula, as linhas de dobra, as barras que representam o contorno da estrutura e uma lista que contém todas as barras. Esse modelo foi inspirado para o desenvolvimento do software Merlin versão 2, exemplificado em Liu e Paulino (2018), utilizado como base para o entendimento e implementação das matrizes \mathbf{K}_B e \mathbf{K}_F deste trabalho.

3.5.1. Implementação da matriz \mathbf{K}_B

Liu e Paulino (2018) ampliaram o desenvolvimento de 2016 para estruturas com o modelo N5B8, baseado na implementação anterior. A diferença é que cada célula N5B8 apresenta 5 nós ($n=5$), gerando uma matriz de rigidez de dimensão $3n \times 3n$, e oito barras, sendo quatro referentes a simulações de flexão interna (Figura 3.2).

Como o modelo pode rotacionar internamente, fazendo qualquer um dos quatro nós externos sair do plano, foi utilizada a ideia de que uma célula N5B8 é representada como a superposição de 4 modelos N4B5, como mostra Figura 3.9-a. A Figura 3.9-b mostra um dos nós saindo do plano e gerando o ângulo diedro θ .



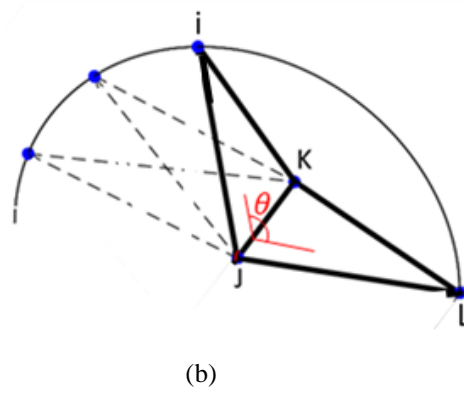


Figura 3.9 a) Disposição dos vetores \mathbf{r}_{ki} , \mathbf{r}_{kj} , \mathbf{r}_{ij} responsáveis pela formulação do ângulo θ nas 4 direções. b) Rotação do nó i saindo do plano referente a uma parte do modelo N5B8.

Os vetores, como mostrados na Figura 3.9-a, são responsáveis pela formulação do ângulo θ da equação (3.2.2) e do jacobiano da equação (3.2.14), que, para uma única célula do modelo N5B8 em questão, podem ser montados como

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{x}_i^{(r)}} & \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{x}_l^{(r)}} & \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{x}_j^{(r)}} & \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{x}_k^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (3.5.1)$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{x}_i^{(r)}} & \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{x}_l^{(r)}} & \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{x}_j^{(r)}} & \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{x}_k^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_3}{\partial \mathbf{x}_i^{(r)}} & \frac{\partial \theta_3}{\partial \mathbf{x}_l^{(r)}} & \frac{\partial \theta_3}{\partial \mathbf{x}_j^{(r)}} & \frac{\partial \theta_3}{\partial \mathbf{x}_k^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_4}{\partial \mathbf{x}_i^{(r)}} & \frac{\partial \theta_4}{\partial \mathbf{x}_l^{(r)}} & \frac{\partial \theta_4}{\partial \mathbf{x}_j^{(r)}} & \frac{\partial \theta_4}{\partial \mathbf{x}_k^{(r)}} \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

com vetores gerados pelas equações (3.2.4) a (3.2.7) e escritos aqui de forma genérica como

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial \mathbf{x}_n^{(r)}} = [x_n, y_n, z_n] \quad (3.5.5)$$

onde n são os nós representados na Figura 3.9-b e o índice m representa os 4 ângulos que poderiam ser gerados pelo modelo mostrado na Figura 3.9-a, levando cada vetor a ter dimensão 1×12 .

A matriz \mathbf{K}_B , responsável pela contribuição da flexão interna dos painéis, é alocada em uma matriz tridimensional (Figura 3.10), em que cada uma das 4 páginas dessa matriz é uma matriz 12x12 dada por

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{J}^T \mathbf{J} K_B \quad (3.5.6)$$

onde K_B é a rigidez da equação (3.2.20) para cada uma das 4 barras internas do modelo N5B8. Dessa forma, a matriz \mathbf{K}_B , para uma única célula N5B8, terá dimensão 12x12x4.

Para um problema generalizado, tem-se que uma estrutura com n células N5B8 possui $4n$ barras internas ($N_B = 4n$), gerando $4n$ flexões internas K_B . Com isso, na equação (3.5.6), m varia de 1 a N_B fazendo a matriz \mathbf{K}_B ter N_B páginas, ficando com dimensão 12x12x N_B e gerando uma matriz tridimensional exemplificada na Figura 3.10.

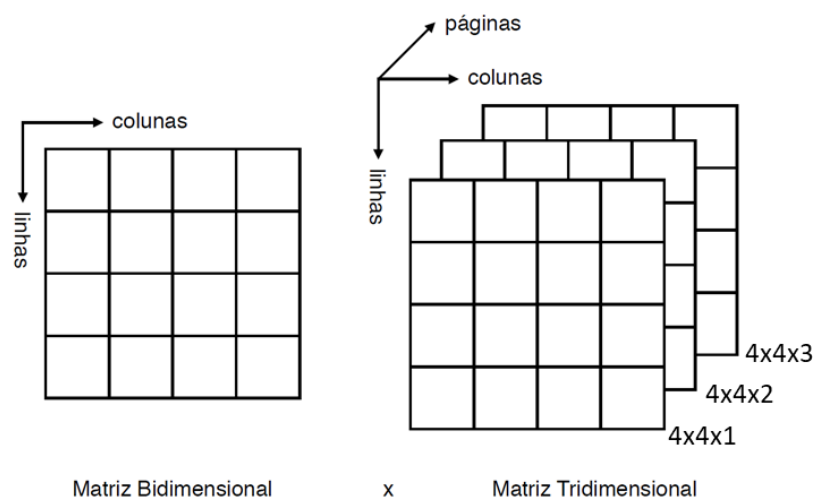


Figura 3.10 Alocação de matriz bidimensional e tridimensional.

Para somar a matriz de rigidez à flexão interna, \mathbf{K}_B , com a matriz de rigidez das barras, \mathbf{K}_S , são necessárias outras duas matrizes tridimensionais de dimensão 12x12x N_B contendo os graus liberdade de cada barra para alocar os elementos da matriz tridimensional \mathbf{K}_B nas devidas posições da matriz \mathbf{K}_S bidimensional. Logo, a soma das matrizes $\mathbf{K}_B + \mathbf{K}_S$ é feita de forma acoplada, gerando uma matriz bidimensional de dimensão $3n \times 3n$.

3.5.2. Implementação da matriz \mathbf{K}_F

A elaboração da matriz \mathbf{K}_F , responsável pela contribuição da rigidez na linha de dobra apresentada na seção 3.3, é análoga ao feito para \mathbf{K}_B . Entretanto, a barra que une duas células N5B8 será responsável por simular a rigidez K_F da equação (3.3.1). Os vetores para a elaboração do jacobiano da equação (3.2.14) são montados de acordo com a Figura 3.12.

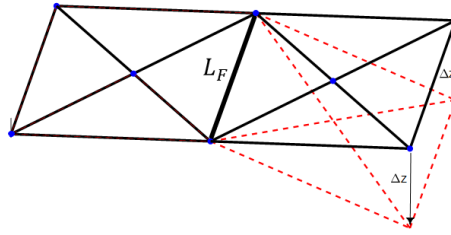


Figura 3.11 Representação do deslocamento fora do plano e do comprimento da linha de dobra L_F .

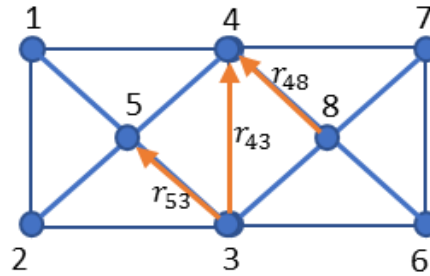


Figura 3.12 Linha de dobra entre dois modelos N5B8 com a devida representação dos vetores no plano

Assim, a matriz \mathbf{K}_F pode ser gerada fazendo

$$\mathbf{K}_F = \mathbf{J}^T \mathbf{J} K_F \quad (3.5.7)$$

onde a dimensão da matriz jacobiana é 12×1 e a matriz \mathbf{K}_F apresenta dimensão $12 \times 12 \times N_F$, sendo N_F o número de junção entre células N5B8. O mesmo conceito de matriz tridimensional da Figura 3.10 é aplicado. A soma da matriz \mathbf{K}_F com a matriz de rigidez das barras \mathbf{K}_S é análoga ao procedimento realizado para a matriz \mathbf{K}_B , gerando também uma matriz bidimensional de dimensão $3n \times 3n$ acoplada.

3.6.

Análise matricial da estrutura no plano $z = 0$

Com base no que foi discorrido nas seções 3.5.1 e 3.5.2, esta seção visa apresentar matricialmente a montagem das matrizes \mathbf{K}_B e \mathbf{K}_F para células contidas no plano $z = 0$. A Figura 3.13 mostra, esquematicamente, uma célula antes e depois da adição da matriz \mathbf{K}_B .

Adição de \mathbf{K}_B

2K	0	0	-K	-K	0	0	0	0	-K	K	0	0	-4K	0
0	6K	0	-K	-K	0	0	0	0	K	-K	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4K	0	0
-K	-K	0	6K	0	0	-K	K	0	0	0	0	0	0	0
-K	-K	0	0	2K	0	K	-K	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-K	K	0	2K	0	0	-K	-K	0	0	0	0
0	0	0	K	-K	0	0	6K	0	-K	-K	0	0	-4K	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-K	K	0	0	0	0	-K	-K	0	6K	0	0	-4K	0	0
K	-K	0	0	0	0	-K	-K	0	0	2K	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-4K	0	0	0	0	0	-4K	0	0	8K	0	0
0	-4K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8K	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2K	0	0	-K	-K	0	0	0	0	-K	K	0	0	-4K	0
0	6K	0	-K	-K	0	0	0	0	K	-K	0	0	0	0
0	0	X	0	0	0	0	0	X	0	0	0	-4K	0	-2X
-K	-K	0	6K	0	0	-K	K	0	0	0	0	0	0	0
-K	-K	0	0	2K	0	K	-K	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	X	0	0	-2X
0	0	0	-K	K	0	2K	0	0	-K	-K	0	0	0	0
0	0	0	K	-K	0	0	6K	0	-K	-K	0	0	-4K	0
0	0	X	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	-2X
-K	K	0	0	0	0	-K	-K	0	6K	0	0	-4K	0	0
K	-K	0	0	0	0	-K	-K	0	0	2K	0	0	0	0
0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	X	0	0	-2X
0	0	0	-4K	0	0	0	0	0	-4K	0	0	8K	0	0
0	-4K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8K	0
0	0	-2X	0	0	-2X	0	0	-2X	0	0	-2X	0	0	8X

Figura 3.13 Matriz de rigidez de uma célula no plano $z = 0$ antes e depois da adição das dobradiças

Os elementos de barra, que têm graus de liberdade de deslocamento nas direções x , y e z , inicialmente não apresentam rigidez na direção z . No processo de montagem da matriz de rigidez \mathbf{K}_B , para o plano $z = 0$, consideram-se somente os

graus de liberdade em z que são os locais onde os elementos recebem a rigidez. A Figura 3.14 esquematiza o procedimento do capítulo 3.5.1.

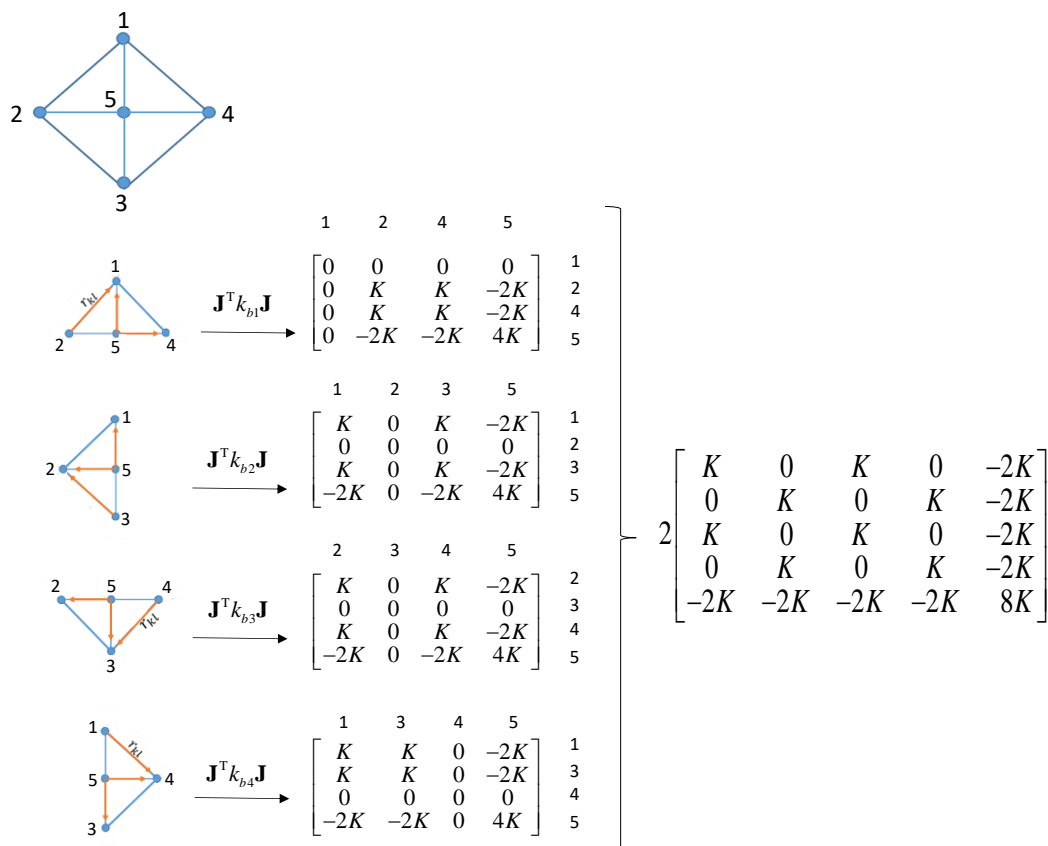


Figura 3.14 Montagem da matriz de rigidez \mathbf{K}_B considerando somente os graus de liberdade em z .

Analogamente, pode-se fazer o mesmo com a matriz \mathbf{K}_F , seguindo os procedimentos do capítulo 3.5.2, para estruturas com mais de uma célula, como pode ser visualizado na Figura 3.15.

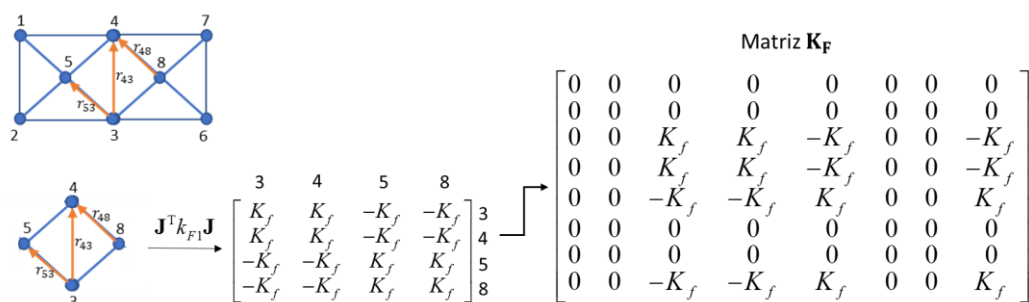


Figura 3.15 Procedimento de montagem da matriz \mathbf{K}_F e disposição para os graus de liberdade z da matriz de rigidez.

3.7.

Matriz de massa do modelo de barra e dobradiça

Para simular um comportamento dinâmico utilizando o modelo de barra e dobradiça, este trabalho menciona três possibilidades de elaborar a matriz de massa. Embora sem desenvolvimentos da parte dinâmica, Filipov et al. (2017) sugere, para trabalhos futuros, calcular a massa total de uma placa

$$m_p = \rho A t \quad (3.7.1)$$

onde ρ é a massa específica, A a área da placa, t a espessura, e distribuí-la igualmente nos nós da estrutura, gerando um sistema desacoplado, ou seja, uma matriz de massa escrita na diagonal como

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \quad (3.7.2)$$

onde n é o número de nós da estrutura e $(m_1 = m_2 = m_n)$.

A segunda maneira é a distribuição mais proporcional da massa da placa nos nós do modelo de barra, como esquematizado na Figura 3.16 com duas células quadradas. É possível perceber que os nós 5 e 8 recebem a massa do centro da célula; os nós 1, 2, 6 e 7 recebem os da ponta da célula; e os nós 3 e 4 da lateral das células. Esse modelo também gera uma matriz diagonal com mostrado na equação (3.7.2).

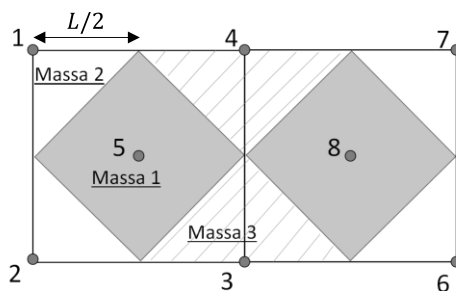


Figura 3.16 Representação da distribuição da massa para cada nó do elemento de barra.

A terceira maneira é a distribuição da massa da placa para os elementos de barra a partir da matriz

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} L_B \quad (3.7.3)$$

onde L_B é a massa de cada barra da estrutura, proporcional a seu comprimento. A soma dos comprimentos de todas as barras da estrutura deve ser igual à massa total da estrutura de placa, dada pela equação 3.7.1. Como exemplo, mostra-se a matriz de massa para uma célula quadrada de lado L com 5 nós e 8 barras como

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \frac{L}{6}(4+\sqrt{2}) & L/6 & 0 & L/6 & L\sqrt{2}/12 \\ & \frac{L}{6}(4+\sqrt{2}) & L/6 & 0 & L\sqrt{2}/12 \\ & & \frac{L}{6}(4+\sqrt{2}) & L/6 & L\sqrt{2}/12 \\ & & & \frac{L}{6}(4+\sqrt{2}) & L\sqrt{2}/12 \\ sym & & & & 2L\sqrt{2}/3 \end{bmatrix} \quad (3.7.4)$$

onde

$$4L + 2L\sqrt{2} = \rho A_p t_p \quad (3.7.5)$$

para um modelo de uma célula como apresentado na Figura 3.17.

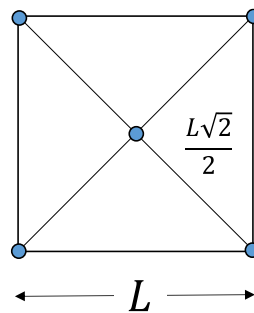


Figura 3.17 Célula quadrada com as dimensões das barras.

No capítulo 5, essas três distribuições da massa no modelo de barra são utilizadas para os cálculos dinâmicos das estruturas, onde a primeira, segunda e terceira distribuições são chamadas nos gráficos de barra 1, barra 2 e barra 3 respectivamente.

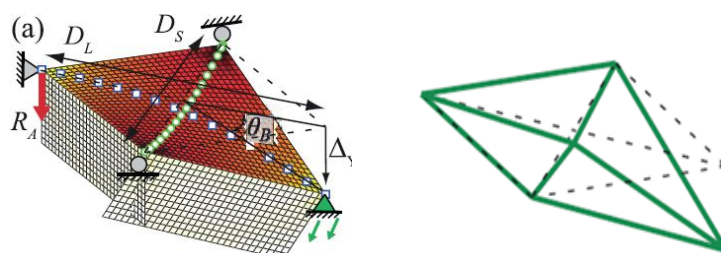
3.8. Teste para o modelo de barra

O modelo de 5 nós e 8 barras simplificado (N5B8s), utilizado neste trabalho, é composto por elementos de treliça tridimensionais com montagem pelo método da rigidez direta, e pelas dobradiças formuladas pela parte linear do software Merlin2 citado em Liu e Paulino (2018). A implementação segue o que foi descrito no capítulo 3.5 para a elaboração das matrizes \mathbf{K}_B e \mathbf{K}_F .

O modelo N5B8s é comparado aos modelos de elementos finitos e o de barra e dobradiça apresentados por Filipov et al. (2017) para estruturas com deslocamentos fora do plano.

Para o teste com apenas uma célula, Filipov et al. (2017) utilizaram para a menor diagonal $D_S = 1$, para a maior $D_L = 1,4$, espessura $t = 0,01$ e módulo de elasticidade, e $E = 10^6$, coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$. Um pequeno deslocamento no nó externo gera, com o plano, o equivalente a uma rotação $\theta_B = 0,1^\circ$ e para grandes deslocamentos gera um ângulo de $\theta_B = 70^\circ$, como apresentado nas Figura 3.18 e Figura 3.19.

Filipov et al. (2017) afirmam que a abordagem para pequenos deslocamentos também fornece boa aproximação para análises de grandes deslocamentos para uma única célula. O teste feito por Filipov et al. (2017) mostra que o comportamento do modelo de barra converge com sucesso quando comparado com modelo em elementos finitos discretizado com 30x30 elementos de casca de quatro nós, apresentando uma diferença de 0,12% para pequenos deslocamentos e 0,21% para grandes deslocamentos. Além dos modelos citados acima, a Figura 3.18 e a Figura 3.19 mostram o comportamento do modelo utilizado neste trabalho (N5B8s) juntamente com o modelo de barras de Filipov et al. (2017).



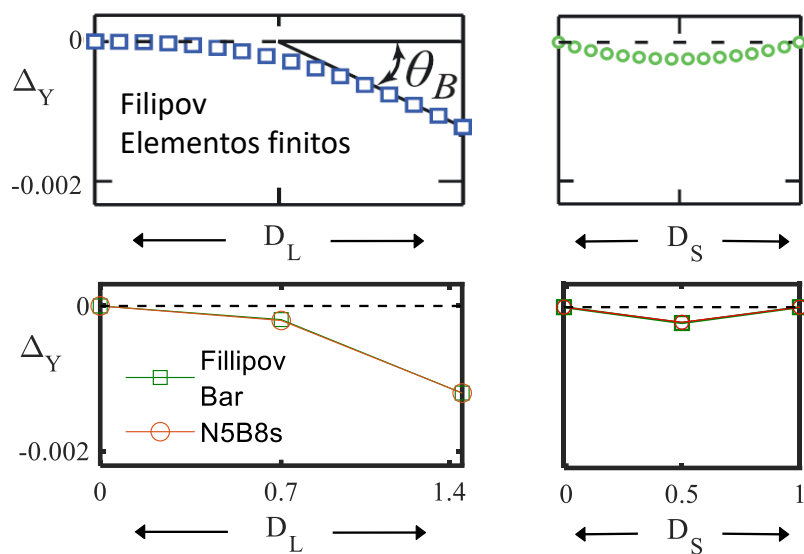


Figura 3.18 Comparação para pequenos deslocamentos entre o modelo N5B8s com os apresentados em Filipov et al. (2017).

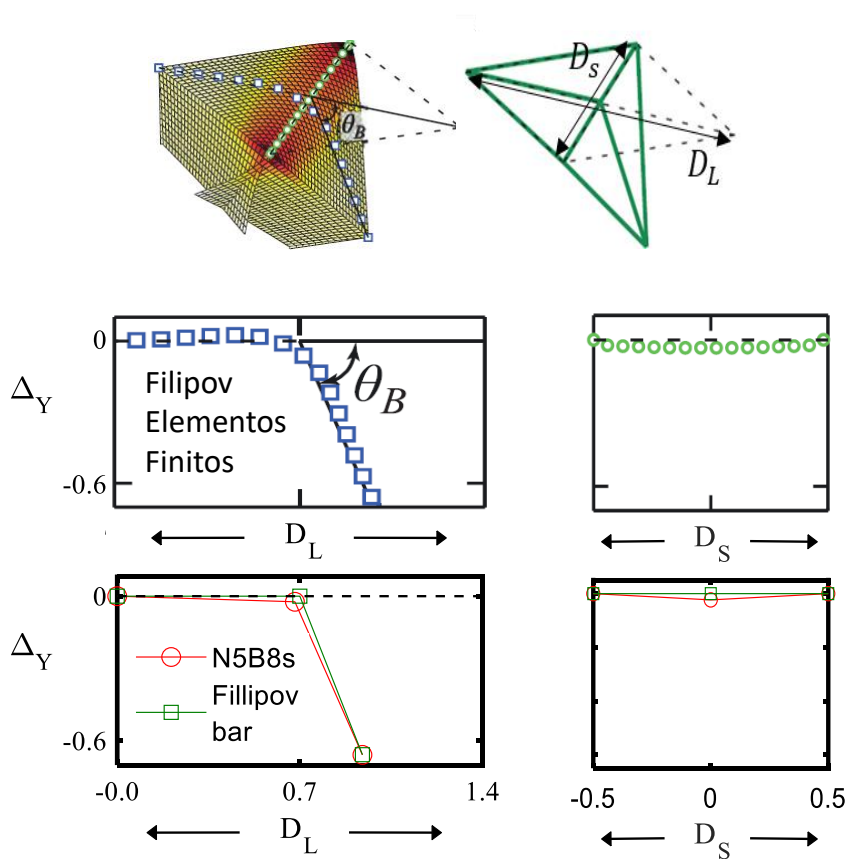


Figura 3.19 Comparação para grandes deslocamentos entre o modelo N5B8s e os apresentados por Filipov et al. (2017)

4

Formulação dos elementos finitos híbridos

Ao longo do capítulo é mostrada a formulação dos elementos utilizados neste trabalho.

1. **HMT3** - elemento híbrido triangular de membrana com 3 nós e 2 graus de liberdade de deslocamento por nó (direções x e y).

2. **HKPT6** - elemento híbrido triangular de placa de Kirchhoff de 3 nós com 6 graus de liberdade, sendo 3 deslocamentos na direção z em cada nó, e 3 rotações ao longo do contorno do elemento na direção perpendicular à normal;

3. **HS3** - elemento híbrido triangular de casca gerado pela junção desacoplada dos elementos HMT3 e HKPT6. O elemento tem 3 nós com 12 graus de liberdade, sendo 3 deslocamentos na direção x , y , z em cada nó, e 3 rotações ao longo do contorno do elemento na direção perpendicular à normal.

A Figura 4.1 mostra os graus de liberdade dos elementos finitos híbridos e a projeção no plano do elemento de membrana (HMT3), também usada para os demais elementos.

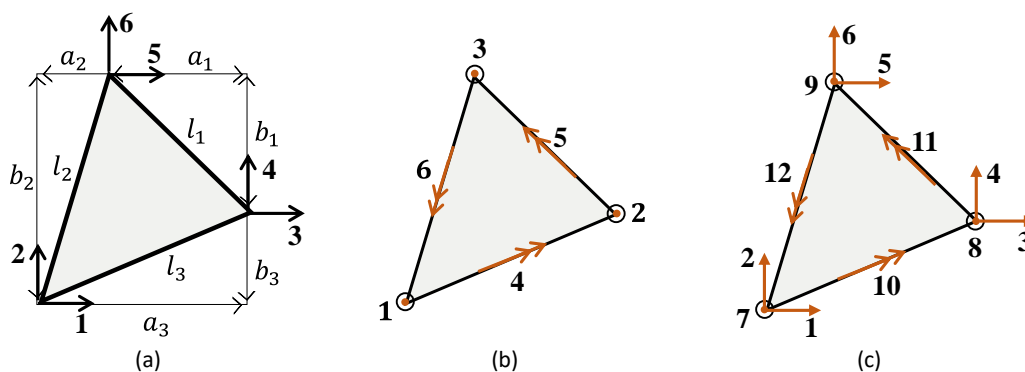


Figura 4.1 Graus de liberdade dos a) Elemento de membrana HMT3 com suas projeções; b) Elemento de placa HKPT6; c) Elemento de casca HS3.

4.1. Elemento híbrido triangular de membrana

Nesta seção é formulado o elemento híbrido de membrana triangular que será utilizado nos capítulos seguintes para a elaboração do elemento de casca híbrido. A matriz de rigidez desse elemento equivale à matriz de rigidez do elemento CST do método dos elementos finitos.

A geometria do elemento triangular em termos de suas projeções (a_i, b_i) e a indicação dos graus de liberdade de deslocamento em cada nó estão representados na Figura 4.1.

As projeções podem ser escritas em termos das coordenadas globais x e y

$$\begin{aligned} a_i &= x_k - x_i \\ b_i &= y_j - y_k \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

onde os índices i, j e k podem assumir os valores 1, 2 ou 3 em permutação cíclica.

A solução geral da equação de Navier foi determinada em termos de soluções fundamentais na seção 2.1. Assim, o campo de deslocamento no plano pode ser expresso como

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* \quad (4.1.2)$$

onde u_{im}^* são as soluções fundamentais do problema

$$u_{im}^* = \begin{bmatrix} \frac{(v-3)}{(v+1)} & 0 & | & -\left(\frac{3v-5}{v+1}\right)x & -y & -\left(\frac{v-7}{v+1}\right)y & -x & | & \dots \\ 0 & \frac{(v-3)}{(v+1)} & | & -y & -\left(\frac{v-7}{v+1}\right)x & -x & -\left(\frac{3v-5}{v+1}\right)y & | & \dots \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

Como o elemento HMT3 tem $n^d = 6$ graus de liberdade e está sujeito a três modos de deslocamento de corpo rígido $n^r = 3$ (dois de translação e um de rotação), o número de soluções fundamentais para que a matriz de rigidez tenha o devido posto e não apresente modos espúrios é $n^s = 3$ de acordo com a expressão (Sales, 2018)

$$n^s \geq n^d - n^r \quad (4.1.4)$$

Desse modo, o campo de deslocamentos escrito em termos de parâmetros de força é dado por

$$u_i^* = \begin{bmatrix} -\left(\frac{3\nu-5}{\nu+1}\right)x & y & -x \\ -y & x & -\left(\frac{3\nu-5}{\nu+1}\right)y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{bmatrix} \equiv \mathbf{U}_m^* \mathbf{p}^* \quad (4.1.5)$$

O campo de tensões σ_{ijm}^* obtidas a partir dos deslocamentos u_{im}^* é

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^* \\ \sigma_{yy}^* \\ \sigma_{xy}^* \end{Bmatrix} = \frac{E}{(\nu+1)} \begin{bmatrix} \frac{(\nu+5)}{(\nu+1)} & 0 & \frac{(3\nu-1)}{(\nu+1)} \\ \frac{(3\nu-1)}{(\nu+1)} & 0 & \frac{(\nu+5)}{(\nu+1)} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (4.1.6)$$

As funções de forma lineares \mathbf{N} , para cada trecho do contorno do elemento triangular, pode ser expressa como

$$u_{in}^1 \equiv \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_1 \quad (4.1.7)$$

$$u_{in}^2 \equiv \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-\xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & \xi \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_2 \quad (4.1.8)$$

$$u_{in}^3 \equiv \mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 1-\xi \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_3 \quad (4.1.9)$$

onde $\xi \in [0, 1]$ é a coordenada paramétrica, e juntamente com \mathbf{N}^* levam à matriz de transformação cinemática \mathbf{H} para o elemento HMT3 expressa de acordo com a equação (2.1.13) na forma

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{nl} \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^{*T} \mathbf{T}^T \mathbf{N}_i d\Gamma_i \quad (4.1.10)$$

com

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \eta_x & 0 & \eta_y \\ 0 & \eta_y & \eta_x \end{bmatrix} \quad (4.1.11)$$

onde η_x e η_y são as componentes das normais da superfície do elemento, como indicado na Figura 4.2.

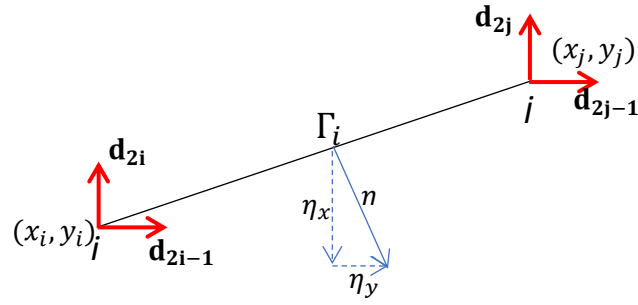


Figura 4.2 Contorno de um trecho Γ_i do elemento triangular

A integração da equação acima fornece a expressão analítica da matriz \mathbf{H} em termos das projeções do elemento triangular:

$$\mathbf{H}_m = \frac{Et}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \kappa_1 b_1 & -\kappa_2 a_1 & \kappa_1 b_2 & -\kappa_2 a_2 & \kappa_1 b_3 & -\kappa_2 a_3 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ -\kappa_2 b_1 & \kappa_1 a_1 & -\kappa_2 b_2 & \kappa_1 a_2 & -\kappa_2 b_3 & \kappa_1 a_3 \end{bmatrix} \quad (4.1.12)$$

onde $\kappa_1 = \frac{\nu+5}{\nu+1}$, $\kappa_2 = \frac{1-3\nu}{\nu+1}$ e A é a área do triângulo:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (4.1.13)$$

A matriz de flexibilidade é definida como

$$\mathbf{F}_m = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^* \mathbf{T}^T \mathbf{U}^* d\Gamma \quad (4.1.14)$$

segundo o capítulo 2.1, fornecendo

$$\mathbf{F}_m = \frac{2EA t}{1+2\nu} \begin{bmatrix} \frac{13-3\nu^2-6\nu}{1+\nu} & 0 & \frac{5-5\nu^2+6\nu}{1+\nu} \\ 0 & 1+\nu & 0 \\ \frac{5-5\nu^2+6\nu}{1+\nu} & 0 & \frac{13-3\nu^2-6\nu}{1+\nu} \end{bmatrix} \quad (4.1.15)$$

A inversa de \mathbf{F}_m é

$$\mathbf{F}_m^{-1} = \frac{1+2\nu}{2EA t} \begin{bmatrix} \frac{13-3\nu^2-6\nu}{16(1-\nu)(3-\nu)^2} & 0 & \frac{5-5\nu^2+6\nu}{16(1-\nu)(3-\nu)^2} \\ 0 & \frac{1}{1+\nu} & 0 \\ \frac{5-5\nu^2+6\nu}{16(1-\nu)(3-\nu)^2} & 0 & \frac{13-3\nu^2-6\nu}{16(1-\nu)(3-\nu)^2} \end{bmatrix} \quad (4.1.16)$$

Logo, a matriz de rigidez analítica para o elemento HMT3 é expressa fazendo $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}_m^{-1} \mathbf{H}$.

4.1.1.

Matriz de massa para o elemento híbrido de membrana

Do ponto de vista computacional, geralmente é preferível calcular as matrizes de massa usando o sistema local de coordenadas e posteriormente transformar para o sistema global de coordenadas. Para o elemento, foi utilizado a formulação da matriz de massa convencional, repetido aqui por conveniência como

$$\mathbf{M} = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (4.1.17)$$

onde as funções de forma \mathbf{N} foram descritas nas equações (4.1.7) a (4.1.9), gerando, para coordenadas locais

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A t}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.1.18)$$

4.2.

Formulação híbrida de placa fina

A solução homogênea do problema de elasticidade de placa fina é representada pelas soluções fundamentais da equação governante de placa ou equação bi-harmônica, formulada por

$$\nabla^4 w_m^* = 0 \quad (4.2.1)$$

onde w_m^* são as soluções fundamentais de deslocamento na direção z .

O elemento HKPT6 tem 6 graus de liberdade, sendo três correspondentes aos deslocamentos na direção z e três GDL de rotação ao longo do contorno do elemento. A construção do elemento triangular baseia-se nas projeções do elemento triangular, como mostrado na Figura 4.1.

A solução da equação bi-harmônica é mostrada na equação (2.3.5) e repetida aqui, por conveniência

$$w_m^* = \left[1 \mid x \ y \mid 2xy \ x^2 - y^2 \ x^2 + y^2 \mid 3x^2y - y^3 \ x^3 - 3xy^2 \ x^2y + y^3 \ x^3 + xy^2 \mid \dots \right] \quad (4.2.2)$$

Para que o elemento HKPT6 tenha o posto correto e não apresente modos espúrios, o número de soluções necessárias é $n^s \geq 6 - 3 \therefore n^s \geq 3$. Como as três soluções correspondem a um polinômio completo, as soluções fundamentais de deslocamento w^* em parâmetros de força p_m^* , desconsiderando a parcela de deslocamento de corpo rígido são

$$w^* = w_m^* p_m^* = \frac{1}{K} \left[2xy \ x^2 - y^2 \ x^2 + y^2 \right] \left\{ \begin{matrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{matrix} \right\} = \mathbf{w}^* \mathbf{p}^* \quad (4.2.3)$$

onde K é o módulo de rigidez de flexão da placa, fazendo o vetor \mathbf{p}^* representar força por unidade de comprimento. Essas três soluções correspondem à combinação dos três estados de curvatura constante da placa.

A matriz constitutiva para a placa, segundo a teoria de Kirchhoff, é

$$\left\{ \begin{matrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{matrix} \right\} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \\ \Phi_{,x} \\ \Phi_{,y} \end{matrix} \right\} \quad (4.2.4)$$

Assim, substituindo a equação (4.2.3) na equação (4.2.4), as soluções fundamentais de momentos em termos dos parâmetro internos de força \mathbf{p}^* resultam em

$$\begin{Bmatrix} M_{xx}^* \\ M_{yy}^* \\ M_{xy}^* \\ Q_x^* \\ Q_y^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2+2\nu & -2+2\nu \\ 0 & 2-2\nu & -2-2\nu \\ -2+2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (4.2.5)$$

As rotações e deslocamentos podem ser escritas como

$$\begin{Bmatrix} \beta_y^* \\ \beta_x^* \\ w^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial w_1^*}{\partial x} & -\frac{\partial w_2^*}{\partial x} & -\frac{\partial w_3^*}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1^*}{\partial y} & \frac{\partial w_2^*}{\partial y} & \frac{\partial w_3^*}{\partial y} \\ w_1^* & w_2^* & w_3^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* \quad (4.2.6)$$

A rotação ao longo do contorno é constante e unitária, uma vez que os deslocamentos w são interpolados linearmente segundo uma coordenada paramétrica $\xi \in [0, 1]$. Dessa forma, a interpolação genérica para os parâmetros nodais para um lado i do elemento é dada por

$$\begin{Bmatrix} \beta_y^d \\ \beta_x^d \\ w^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta_y/l_i & -\eta_y/l_i & \eta_x \\ -\eta_x/l_i & -\eta_x/l_i & -\eta_y \\ 1-\xi & \xi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_k \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_i \mathbf{d} \quad (4.2.7)$$

onde l_i é o comprimento de um trecho no contorno Γ_i sendo η_x e η_y as projeções da normal de cada lado do elemento, como mostrado na Figura 4.3.

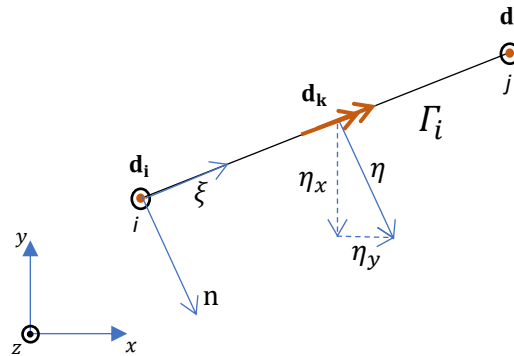


Figura 4.3 Contorno do elemento de placa e seus respectivos graus de liberdade

A expressão da matriz cinemática \mathbf{H} para o elemento HKPT6 é obtida por integração ao longo do contorno do elemento e é expressa, a partir do potencial de Hellinger-Reissner para placas, como

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{nl} \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^* \mathbf{T}^T \mathbf{N}_i d\Gamma_i \quad (4.2.8)$$

onde n_l é o número de lados do elemento e \mathbf{T} indica a matriz que transforma momentos e forças $(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y)$ no domínio para momentos e forças no contorno (M_{nx}, M_{ny}, Q_n) , dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \eta_x & 0 & \eta_y & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_y & -\eta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}. \quad (4.2.9)$$

Com isso, é possível montar a expressão analítica da matriz \mathbf{H} como

$$\mathbf{H} = 4(1-\nu) \begin{bmatrix} \frac{2A(a_2b_3 + a_3b_2)}{l_3^2 l_2^2} & \frac{2A(b_3b_2 + a_2a_3)}{l_3^2 l_2^2} & 0 \\ \frac{2A(a_1b_3 + a_3b_1)}{l_3^2 l_1^2} & \frac{2A(b_3b_1 + a_1a_3)}{l_3^2 l_1^2} & 0 \\ \frac{2A(a_1b_2 + a_2b_1)}{l_2^2 l_1^2} & \frac{2A(b_1b_2 - a_1a_2)}{l_2^2 l_1^2} & 0 \\ -\frac{a_3b_3}{l_3} & \frac{a_3^2 - b_3^2}{2l_3} & \frac{-l_3}{2} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \\ -\frac{a_1b_1}{l_1} & \frac{a_1^2 - b_1^2}{2l_1} & \frac{-l_1}{2} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \\ -\frac{a_2b_2}{l_2} & \frac{a_2^2 - b_2^2}{2l_2} & \frac{-l_2}{2} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \end{bmatrix}^T \quad (4.2.10)$$

A matriz de flexibilidade pode ser resolvida de maneira semelhante à matriz cinemática, como

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{nl} \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^* \mathbf{T}^T \mathbf{U}^* d\Gamma_i. \quad (4.2.11)$$

Resolvendo a expressão acima, encontra-se para o elemento de placa a expressão analítica da matriz de flexibilidade

$$\mathbf{F} = \frac{16A}{K} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \quad (4.2.12)$$

que pode ser invertida como

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{K}{16A} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\nu} \end{bmatrix} \quad (4.2.13)$$

Com objetivo de transformar os graus de liberdade de rotação do sistema local para o global entre dois elementos, a orientação do sinal para a rotação foi convencionada a partir do ângulo θ_n (Figura 4.4) no sistema global, o que pode ser observado na Tabela 4.1. A matriz de rigidez obtida fazendo $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$ corresponde numericamente ao mesmo elemento triangular de momento constante, o elemento de Morley (1971).

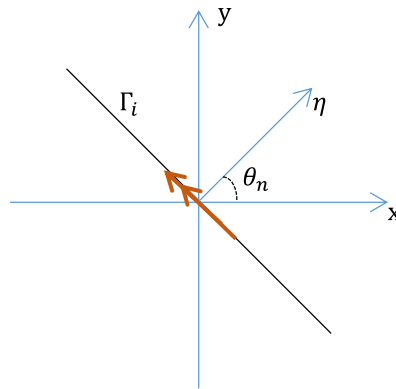






Figura 4.4 Contorno do elemento com indicação do grau de liberdade de rotação e o ângulo θ_n formado entre a normal e o eixo x.

Tabela 4.1 Convenção dos sinais para o grau de liberdade de rotação do sistema. Fonte: Sales (2018)

Direção da normal η	Intervalo de θ_n	Sinal da rotação ao longo do contorno
	$0 \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}$	+
	$\frac{\pi}{2} \leq \theta_n < \pi$	-
	$\pi \leq \theta_n < \frac{3\pi}{2}$	-
	$\frac{3\pi}{2} \leq \theta_n < 2\pi$	+

4.2.1.

Matriz de massa do elemento triangular de placa

Para a elaboração da matriz de massa de placa, não foi possível utilizar a função de interpolação apresentada na equação (4.2.7) porque essa não representa de forma consistente e fisicamente no domínio os graus de liberdade de rotação no contorno. Com isso, optou-se por utilizar as funções de forma de um elemento triangular de Morley reescritas por Abdalla e Hassan (1985) e corrigidas por Sales [Doutorado] como

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+e_2) & \frac{1}{2}(2+e_2-e_3) & \frac{1}{2}(1-e_3) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(1-e_1) & \frac{1}{2}(1+e_3) & \frac{1}{2}(2+e_3-e_1) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(2+e_1-e_2) & \frac{1}{2}(1-e_2) & \frac{1}{2}(1+e_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A/\ell_3 & 2A/\ell_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2A/\ell_1 & 0 & 2A/\ell_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2A/\ell_2 & 2A/\ell_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ \xi_3^2 \\ \xi_1\xi_2 \\ \xi_2\xi_3 \\ \xi_3\xi_1 \end{bmatrix} \quad (4.2.14)$$

onde a coordenada de triângulo, ξ_i , pode ser escrita em função das coordenadas cartesianas como

$$\xi_i = (c_i + b_i x + a_i y) / 2A \quad (4.2.15)$$

em que A é a área do triângulo e, de acordo com as projeções da Figura 4.1,

$$\begin{aligned} c_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ a_i &= x_k - x_j \\ b_i &= y_j - y_k \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

com os índices i, j e k assumindo os valores 1, 2 ou 3 em permutação cíclica. A excentricidade é calculada pelos lados do triângulo

$$e_i = \frac{\ell_k^2 - \ell_j^2}{\ell_i^2} \quad (4.2.17)$$

Logo, os deslocamentos e as rotações do elemento triangular de placa em termos das funções de forma podem ser escritos como

$$u_{in} = \begin{bmatrix} \beta_y^d \\ \beta_x^d \\ w^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_1}{\partial x} & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & -\frac{\partial N_5}{\partial x} & -\frac{\partial N_6}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \quad (4.2.18)$$

onde as derivadas das funções de formas são calculadas fazendo

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x} & \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.2.19)$$

Com isso, a matriz de massa pode ser obtida segundo a equação (4.1.18).

4.2.2.

Rigidez do vinco adaptado ao elemento de placa

Para adicionar a contribuição da rigidez do vinco entre duas células ao modelo híbrido de placa, foi adicionado um grau de liberdade referente a um elemento de mola com a constante de rigidez k_l mostrada na equação (3.3.2) responsável pela rigidez na linha de dobra. Em seguida, foi feita a condensação estática do grau de liberdade d_6 referente à localização da mola (Figura 4.5).

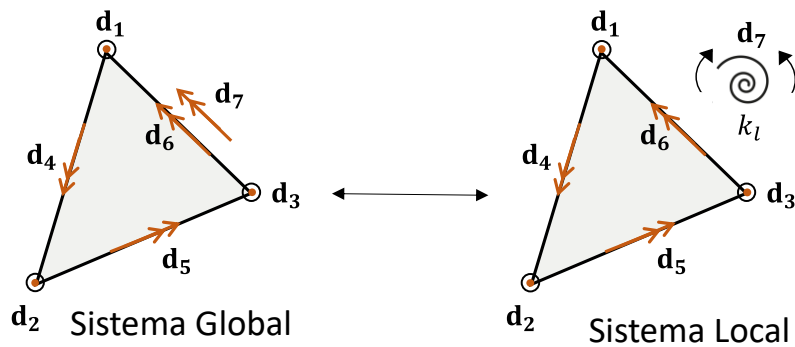


Figura 4.5 Elemento de placa com graus de liberdade no sistema local e global

A matriz A que transforma deslocamentos do sistema global para o sistema local pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.2.20)$$

e a matriz de rigidez do sistema local é escrita com a rigidez da placa e da mola desacoplada

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_l \end{bmatrix} \quad (4.2.21)$$

Logo, após fazer a transformação da nova matriz de rigidez do sistema local para o global ($\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_L \mathbf{A}$), aplica-se o processo de condensação estática do grau de liberdade de rotação onde a mola é utilizada, gerando a matriz de rigidez

$$\mathbf{K}_{plate} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} - \frac{1}{K_{ii} + k_l} \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ie} & \frac{k_l}{K_{ii} + k_l} \mathbf{K}_{ei} \\ \frac{k_l}{K_{ii} + k_l} \mathbf{K}_{ie} & \frac{K_{ii} k_l}{K_{ii} + k_l} \end{bmatrix} \quad (4.2.22)$$

Em que o índice ‘e’ representa os graus de liberdade de 1 a 5 do elemento e o índice ‘i’ o grau de liberdade 6 que foi condensado neste exemplo.

4.3.

Elemento híbrido triangular de casca HS3

O elemento híbrido de casca HS3 consiste em um elemento triangular plano com 3 nós e 12 graus de liberdade e se baseia na superposição dos elementos de membrana (HMT3) e de flexão de placa (HKPT6) desacoplados

$$\mathbf{K}_{local} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_p \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

onde \mathbf{K}_m e \mathbf{K}_p correspondem às matrizes de rigidez do elemento HMT3 e HKPT6, desenvolvidas nos capítulos 4.1 e 4.2, respectivamente. Os graus de liberdade do elemento são apresentados na Figura 4.1-c com relação ao sistema local de coordenadas.

Os deslocamentos \mathbf{d} referentes à matriz de rigidez do elemento de casca no sistema local de coordenadas são:

$$\mathbf{d}_{local} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad \theta_1^n \quad \theta_2^n \quad \theta_3^n]^T \quad (4.3.2)$$

É necessário determinar uma matriz que leve os deslocamentos do sistema global para o sistema local e vice-versa como

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{\Lambda} \begin{Bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{Bmatrix} \quad (4.3.3)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

Considerando um elemento triangular arbitrariamente orientado no espaço, torna-se mais conveniente determinar o valor dos cossenos diretores da matriz de transformação $\mathbf{\Lambda}$ a partir das propriedades da álgebra vetorial (Figura 4.6).

Seja o vetor \mathbf{V}_{21} definido como a direção entre os nós 1 e 2 no elemento triangular com respeito às coordenadas globais (Figura 4.6). A normalização deste vetor fornece as direções dos cossenos diretores com respeito ao eixo x , chamado de \mathbf{v}_x . Para o vetor dos cossenos diretores do eixo z (\mathbf{v}_z), sabendo que esta direção é perpendicular ao plano, pode-se obtê-lo através do produto vetorial das direções aos lados 1-2 e 1-3. Por fim, o vetor dos cossenos diretores do eixo y (\mathbf{v}_y) é obtido a partir do produto vetorial entre os vetores \mathbf{v}_x e \mathbf{v}_z . Portanto,

$$\mathbf{v}_x = \begin{Bmatrix} l_x \\ m_x \\ n_x \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{V}_{21}}{\|\mathbf{V}_{21}\|} \quad \mathbf{v}_z = \begin{Bmatrix} l_z \\ m_z \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{V}_{21} \times \mathbf{V}_{31}}{\|\mathbf{V}_{21} \times \mathbf{V}_{31}\|} \quad \mathbf{v}_y = \begin{Bmatrix} l_y \\ m_y \\ n_y \end{Bmatrix} = \mathbf{v}_z \times \mathbf{v}_x \quad (4.3.5)$$

Determinados os cossenos diretores da matriz $\mathbf{\Lambda}$, pode-se definir a matriz de transformação de forças e deslocamentos nodais do sistema global, \mathbf{p} e \mathbf{d} , respectivamente, para forças e deslocamentos no sistema local, \mathbf{p}_{local} e \mathbf{d}_{local} .

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{local} &= \mathbf{T}\mathbf{d} \\ \mathbf{p}_{local} &= \mathbf{T}\mathbf{p}\end{aligned}\quad (4.3.6)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_y & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_x & m_x & 0 & 0 & 0 & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_y & m_y & 0 & 0 & 0 & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & 0 & 0 & n_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & 0 & 0 & n_y & 0 & 0 & 0 \\ l_z & m_z & 0 & 0 & 0 & 0 & n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_z & m_z & 0 & 0 & 0 & n_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_z & m_z & 0 & 0 & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

Como a matriz de transformação \mathbf{T} é ortogonal, a matriz que transforma deslocamentos do sistema local para o global é dada pela sua transposta. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \mathbf{T}^T \mathbf{d}_{local} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{T}^T \mathbf{p}_{local}\end{aligned}\quad (4.3.8)$$

Deste modo, a matriz de rigidez global referente ao elemento HS3 é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{local} \mathbf{T} \quad (4.3.9)$$

A convenção para os graus de liberdade de rotação global ao longo do contorno do elemento se mantém a mesma estabelecida para o elemento de placa, com a exceção de que é definido no plano de referência (Tabela 4.1).

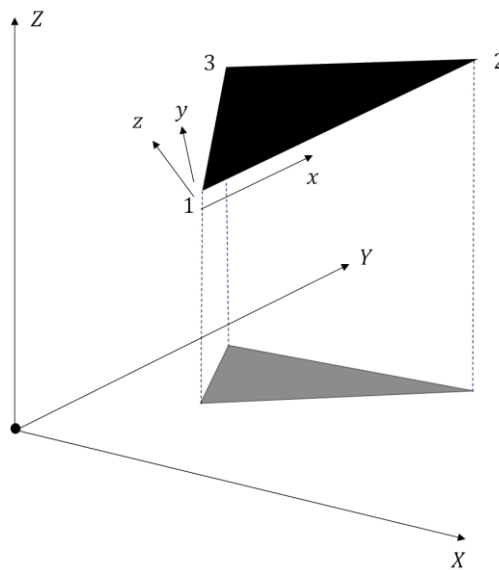


Figura 4.6 Projeção do elemento HS3

4.3.1.

Matriz de massa do elemento de casca

A matriz de massa do elemento de casca nas coordenadas locais é composta pela matriz de massa do elemento híbrido de membrana (capítulo 4.1.1) e a matriz de massa do elemento finito híbrido de placa (capítulo 4.2.1):

$$\mathbf{M}_{\text{loc}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

Logo, a matriz de massa global é dada utilizando a matriz de transformação da equação (4.3.7) :

$$\mathbf{M}_{\text{glob}} = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_{\text{loc}} \mathbf{T} \quad (4.3.11)$$

5 Avaliação numérica

Nessa seção são feitas avaliações estáticas e dinâmicas do modelo de barra-dobradiça e dos modelos de elementos finitos híbridos, analisando uma, duas e quatro células. A formulação do modelo de barra está desenvolvida no capítulo 3 e o modelo de elementos finitos híbridos no capítulo 4.

5.1. Comparação entre os modelos para uma célula

Para avaliar o comportamento mecânico das estruturas é importante destacar como os graus de liberdade estão dispostos em cada modelo. O modelo de barra (N5B8s) tem 15 graus de liberdade; o modelo de placa (4HKPT6) tem 13 graus de liberdade; e o modelo de casca (4HS3) tem 23 graus de liberdade, como mostrado na figura 5.1.

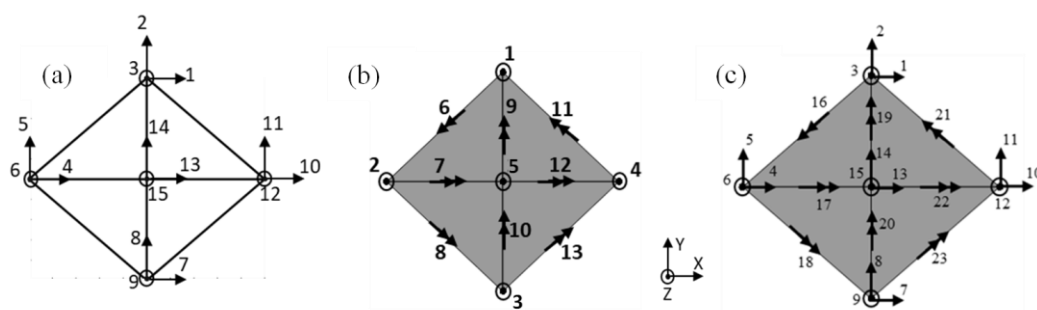


Figura 5.1 a) Graus de liberdade para o modelo de barra (N5B8s). b) Graus de liberdade para o modelo de placa (HKPT6). c) Graus de liberdade para o modelo de casca (4HS3).

Para avaliar o comportamento de uma única célula, Filipov et al. (2017) utilizaram valores unitários para descrever a sua geometria. Considerando a restrição geométrica, onde o comprimento sobre a espessura deve ser igual ou maior a 100, caracterizando uma placa fina, optou-se por utilizar as propriedades de um poliéster, mostradas na Tabela 5.1, para as análises estáticas e dinâmicas.

Filipov et al. (2017) mencionam que uma célula do modelo de barra teria que utilizar a constante K_B da equação (3.2.21) dividida por 2 por ter duas molas

diagonais. Neste trabalho foram mostrados os resultados dos autovalores utilizando, além do valor $K_B/2$, o valor de K_B integralmente para cada diagonal.

Tabela 5.1 Propriedades de origami para uma célula com material tipo poliéster.

E (GPa)	t (mm)	ν	ρ (kg/m ³)	F (N)	L (m)	$\sum \alpha$
1	10	1/3	1	1	1	180°

5.1.1. Análise dos deslocamentos fora do plano

Para analisar os deslocamentos fora do plano foi aplicado um deslocamento unitário na direção z do nó 3 e restringiram-se os graus de liberdade 1, 2 e 4, como mostra a Figura 5.2 em escala aumentada. A deformada do modelo está representada pelas linhas pontilhadas.

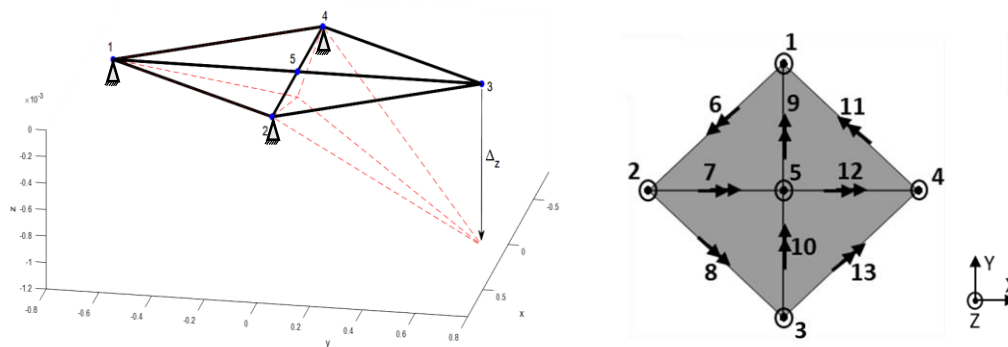


Figura 5.2 Deslocamento em z no nó 3 e graus de liberdade do modelo de placa.

O deslocamento Δ_z aplicado no nó 3 gera o mesmo deslocamento no nó 5 para ambos os modelos considerando células quadradas (Tabela 5.2). Além dos deslocamentos, são apresentadas as rotações da estrutura de placa na Tabela 5.3.

Tabela 5.2 Valores de deslocamentos no nó 5 para células quadradas do modelo de placa e barra

Nó deslocamento	Placa (4HKPT6)	Barra (N5B8s)
3	-1.0000	-1.0000
5	-0.2500	-0.2500

Tabela 5.3 Deslocamentos dos graus de liberdade de rotação com o deslocamento unitário no nó 3 para células quadradas para o modelo de placa e barra

GL. rotações	Placa (4HKPT6)	Barra (N5B8s)
6	1/2	-
7	$\sqrt{2}/2$	-
8	-1/2	-
9	0.0	-
10	0.0	-
11	-1/2	-
12	$\sqrt{2}/2$	-
13	1/2	-

Para células distorcidas com diferentes valores de α , percebe-se que o deslocamento gerado no nó 5 diverge entre os modelos à medida em que a distorção aumenta, sendo o modelo de placa mais rígido, como mostra a figura 5.3.

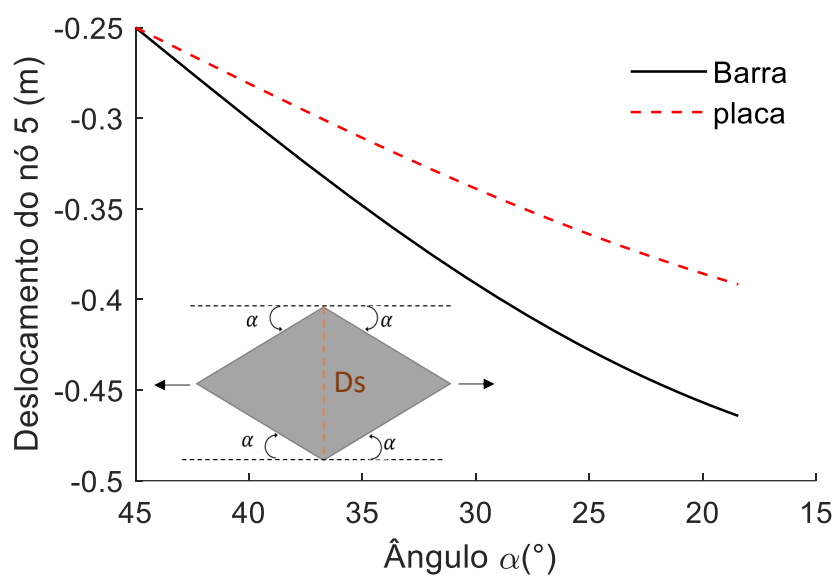


Figura 5.3 Deslocamento do nó 5 com a variação da distorção da célula pelo ângulo α .

5.1.2. Autovalores para estrutura no plano

Uma vez montada a matriz de rigidez para as estruturas com uma célula de barra e de placa, foi possível estabelecer uma comparação entre os dois modelos em relação aos autovalores. É importante lembrar que o modelo de barra (N5B8s) receberá apenas a contribuição das molas internas representadas pela matriz \mathbf{K}_B .

Convencionou-se chamar os dois primeiros autovalores, excluindo os modos referentes aos deslocamentos de corpo rígido, de primeiro e segundo autovalor de deformação (λ_1 e λ_2). Estes automodos são representados na Figura 5.4. A Tabela 5.4 mostra os valores da energia para deformar a estrutura nos modos citados por meio do primeiro e segundo autovalores para os modelos de barra e placa.

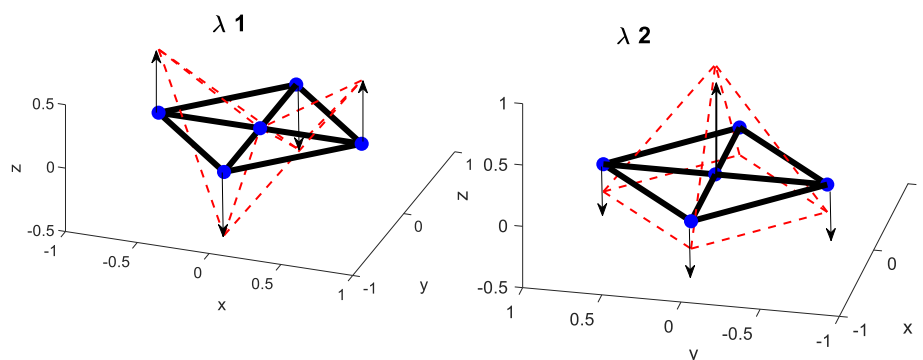


Figura 5.4 a) Automodos referentes ao primeiro e segundo autovalores de deformação.

Tabela 5.4 Primeiro e segundo autovalores de deformação para os modelos de barra (N5B8s) e de placa (4HKPT6).

Autovalor	Placa	Barra (kb)	Barra (kb/2)
λ_1	500,00	507,97	253,98
λ_2	2638,08	2539,87	1269,93

Analisaram-se também os autovalores para tamanhos variados de células quadradas de tamanho L (Figura 5.5-a) mantendo a espessura constante ($t = 10mm$), assim como para células distorcidas com alguns valores de α (Figura 5.6). Os resultados são mostrados nos gráficos da Figura 5.5 e da Figura 5.6 respectivamente.

É possível perceber que o modelo de barra com K_B utilizado integralmente para cada mola, para os gráficos considerando células quadradas de tamanhos diferentes, está mais próximo do modelo de placa para $L < 3\text{m}$ para o primeiro e segundo autovalores de deformação. No primeiro autovalor, para células deformadas, este apresenta-se mais próximo do modelo de placa.

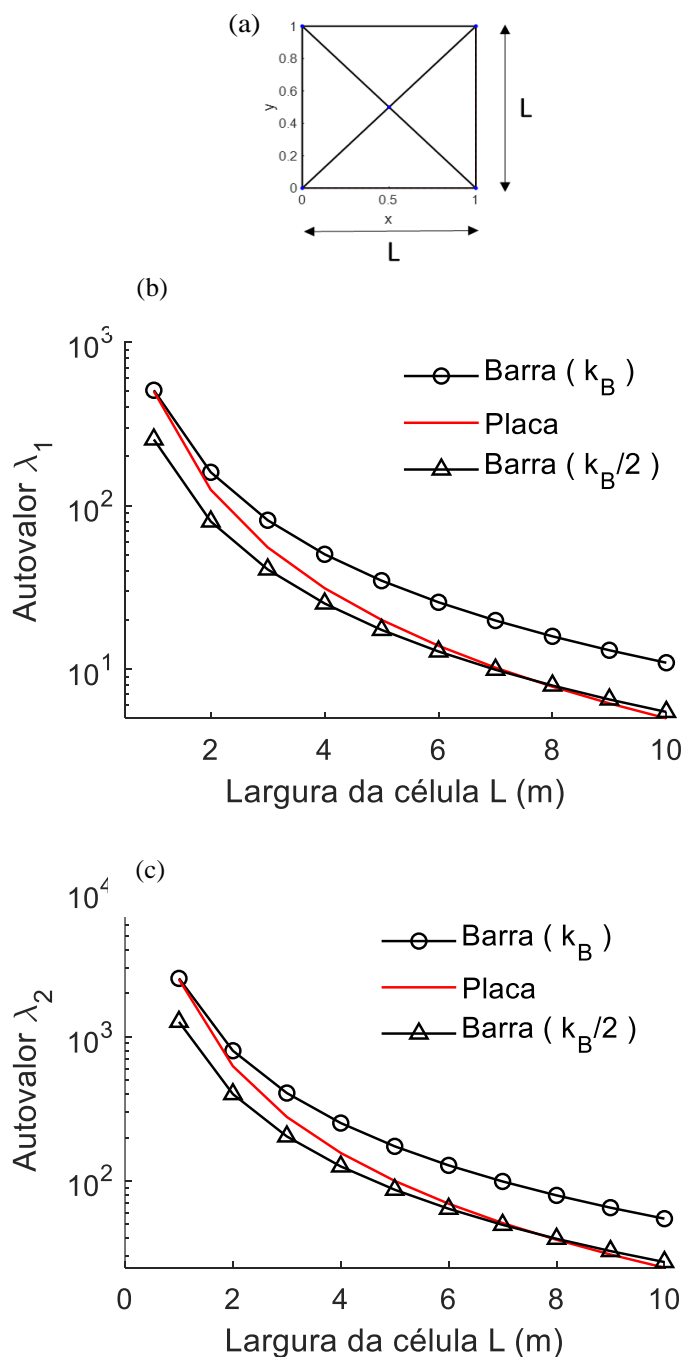


Figura 5.5 a) Célula de lado L . b) e c) Mostram os gráficos da variação do tamanho L da célula em relação aos autovalores 1 e 2 para os modelos Placa e barra com $K_B/2$ e usado integralmente.

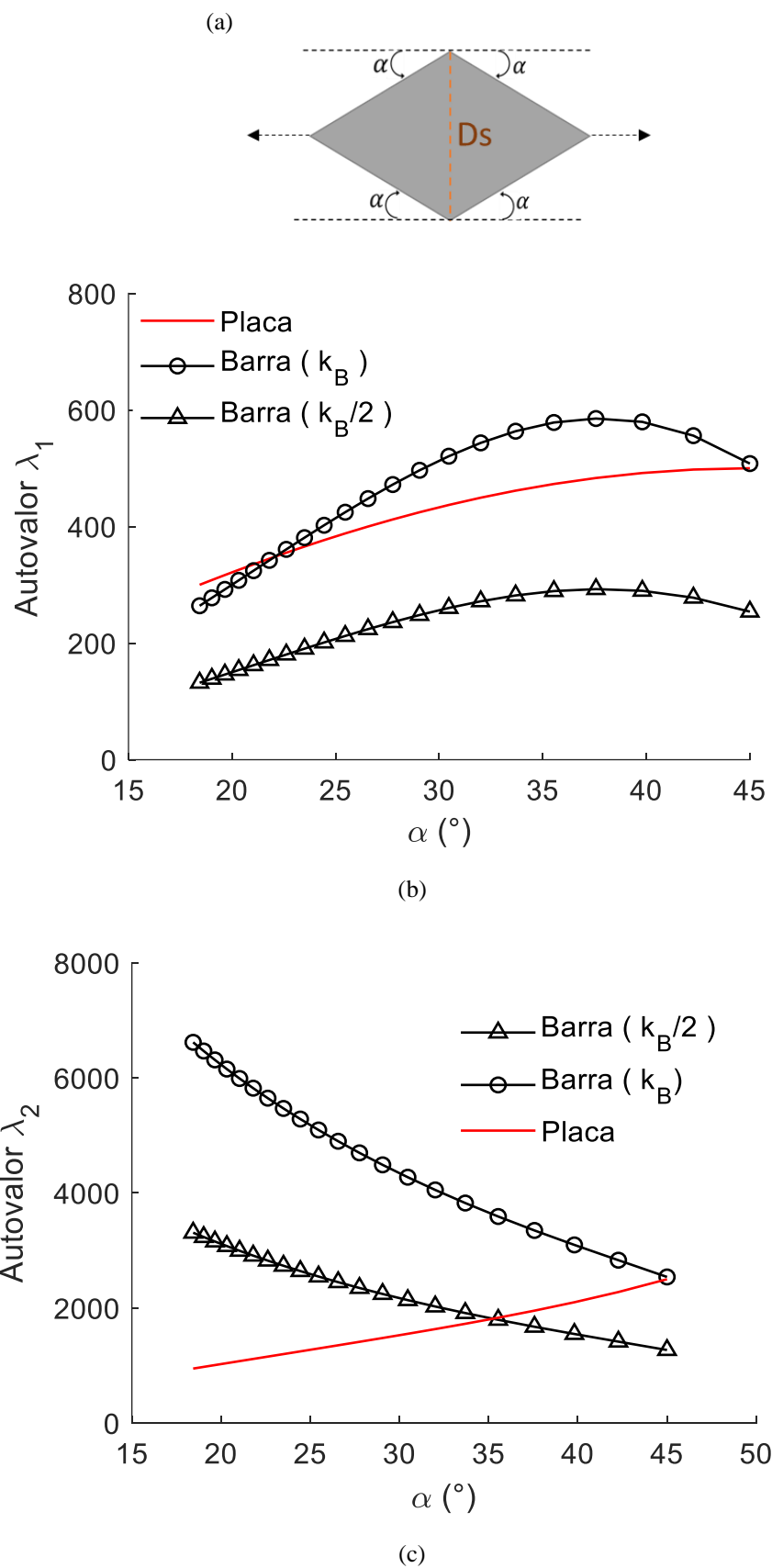


Figura 5.6 a) célula com valores de ângulo α . b) e c) Mostram gráficos da distorção de uma célula pelo ângulo α para os autovalores 1 e 2 dos modelos de placa 4HKPT6 e barra N5B8s para valores de K_B dividido por 2 e usado integralmente.

5.1.3. Autovalores para estrutura fora do plano

Calculam-se a energia por meio dos autovalores λ_1 e λ_2 para configurações espaciais relacionadas a um movimento de dobra intracelular, à medida que a estrutura do modelo de barra e dobradiça (N5B8s) e o modelo híbrido de casca (4HS3) têm o ângulo variando de 0 a 15° para espessuras de 8, 10 e 12 milímetros. As características do material são as mesmas apresentadas no início do capítulo 5.1, com K_B usado integralmente em cada mola e os lados permanecendo constantes e com valor unitário. Os gráficos da Figura 5.8 mostram os resultados.

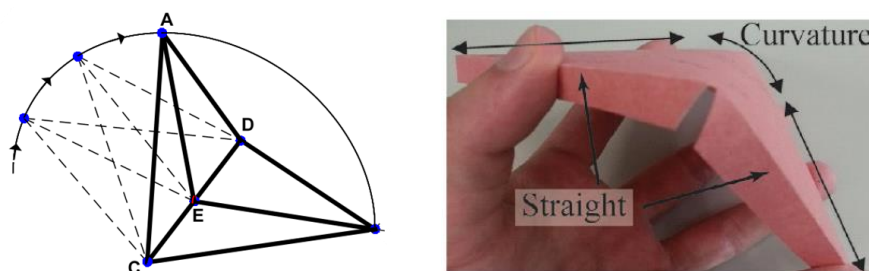
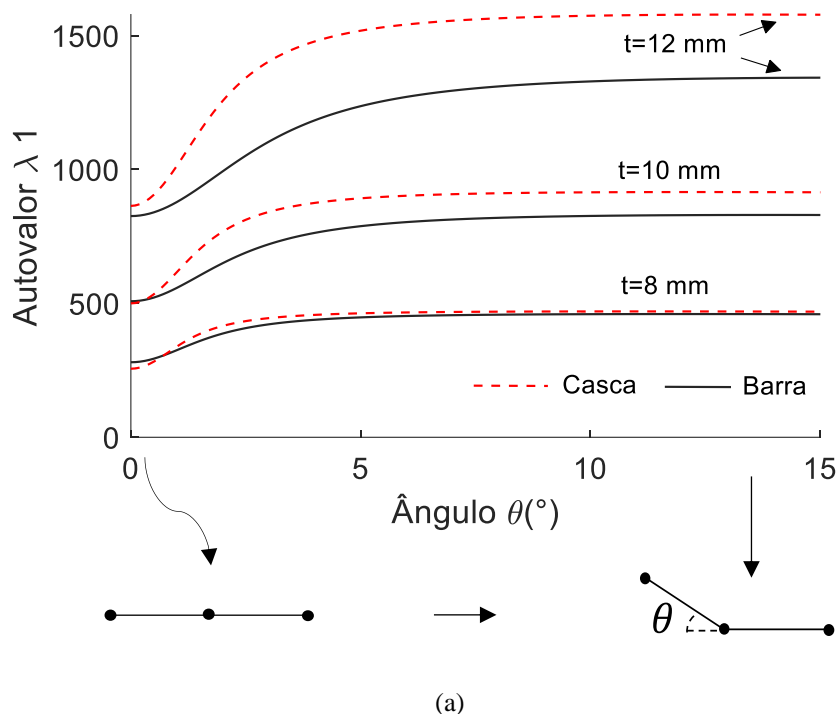
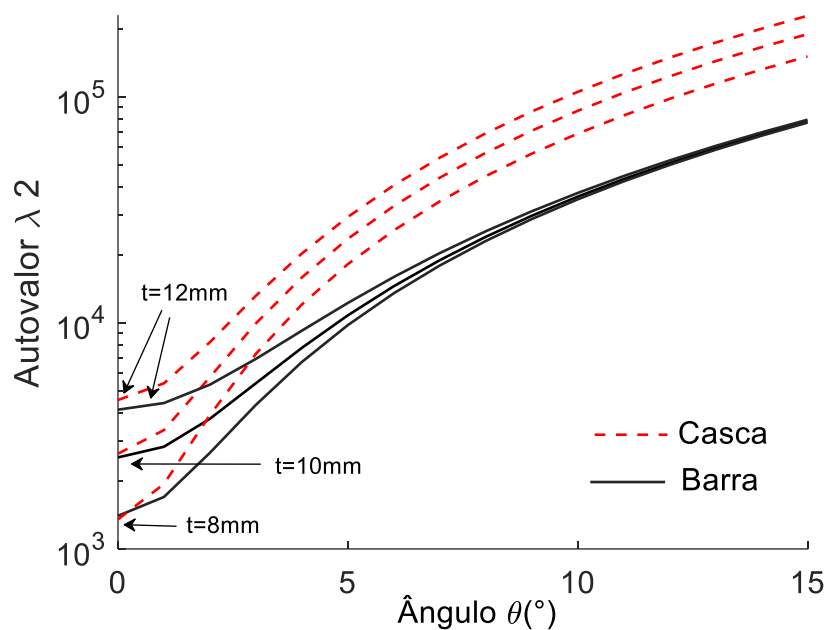


Figura 5.7 Única célula N5B8s com configuração inicial deformada para fora do plano. À direita está uma demonstração real de uma célula se deformando fora do plano (Filipov et al., 2017).





(b)

Figura 5.8 a) e b) Mostram a variação do primeiro e segundo autovalores de deformação para uma célula considerando os modelos de casca e barra para valores de $\theta \in [0\ 15^\circ]$ e espessura $t = 8, 10$ e 12 milímetros.

É possível perceber que a convergência entre os modelos, para o primeiro e segundo autovalores, diminui quando a espessura aumenta. Para o segundo autovalor os modelos aproximaram-se somente para configurações espaciais com $\theta \leq 1^\circ$.

5.1.4. Análise dinâmica

O modelo de barra apresenta três maneiras de se distribuir a massa na estrutura. A essas distribuições convencionou-se chamar nas tabelas e gráficos de barra 1, barra 2 e barra 3. A primeira, barra 1, é a condensação da massa de uma placa igualmente em cada nó da estrutura de barra. A segunda, barra 2, é a condensação da massa de uma placa de maneira mais proporcional a cada nó da estrutura, e a terceira, barra 3, é a utilização da massa da placa distribuída nas barras da estrutura. A explicação detalhada é apresentada no capítulo 3.7.

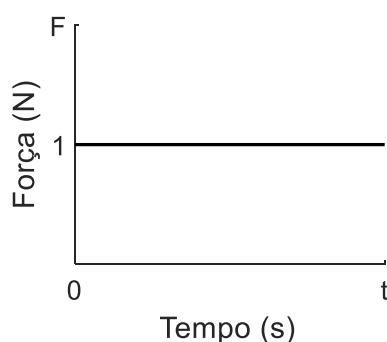
A Tabela 5.5 mostra os autovalores de deformação para uma estrutura no plano $z = 0$, onde percebe-se que o modelo de barra com a terceira distribuição

(Barra 3) se aproxima mais do modelo de placa, mas mesmo assim com muito erro. As propriedades utilizadas são as mesmas da Tabela 5.1.

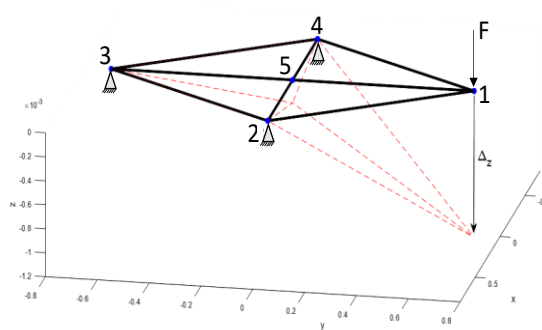
Tabela 5.5 Autovalores do sistema linear dinâmico para uma célula.

Autovalor	Barra 1	Barra 2	Barra 3	Placa
λ_1	2.54E+05	4.06E+05	6.10E+05	1.80E+06
λ_2	1.27E+06	8.13E+05	2.13E+06	4.10E+06

Para analisar o deslocamento das estruturas ao longo do tempo, aplica-se uma força F para fora do plano de valor unitário e constante no tempo no nó 1, e avaliam-se os deslocamentos nos nós 5 e 1 (Figura 5.9), gerando o gráfico da Figura 5.10. Os cálculos foram realizados pelo método da superposição modal descrito no capítulo 2.2, com deslocamento e velocidade iniciais nulos. A amplitude para os modelos de barra e placa apresentaram-se iguais. Entretanto, é possível perceber que à medida que a distribuição da massa na estrutura de barra vai aumentando de complexidade, gerando distribuições mais realísticas, estes modelos tendem a apresentar uma frequência de vibração mais próxima da do modelo de placa. Isso fica evidenciado nos gráficos da Figura 5.10, com a diferença de 27% com o modelo barra 1, mais simples, e 6% com barra 3, em relação ao modelo de placa.

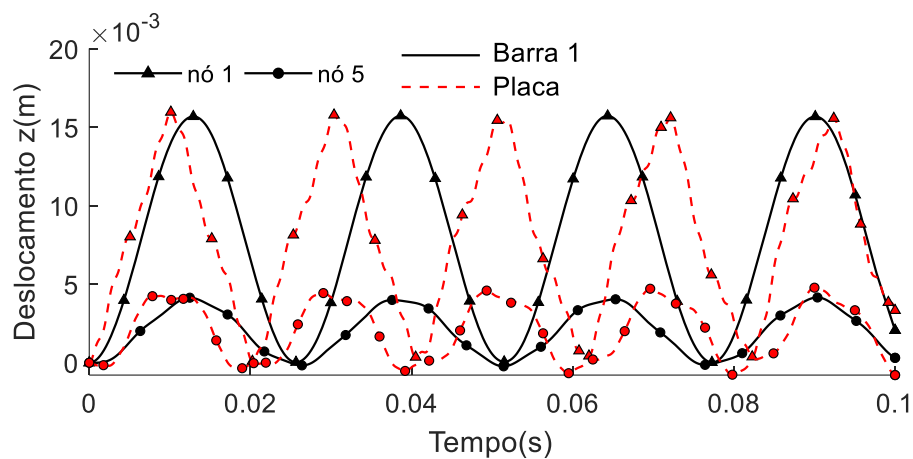


(a)

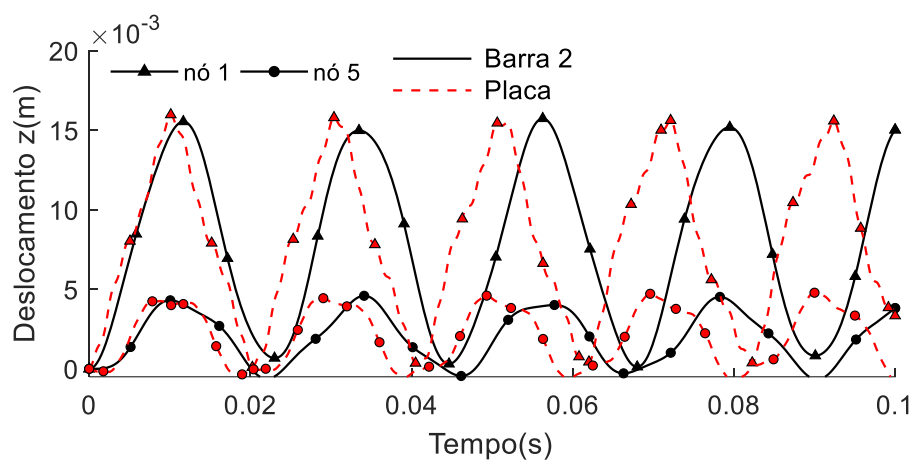


(b)

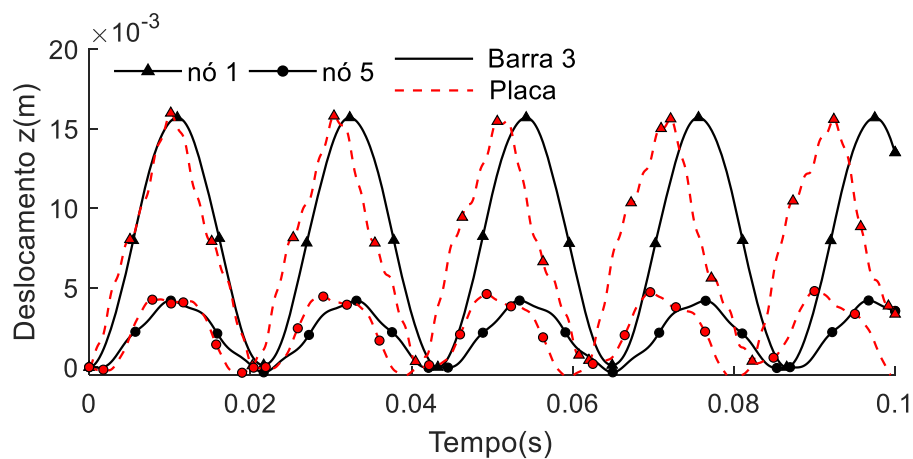
Figura 5.9 a) Força unitária constante ao longo do tempo . b) Força aplicada no grau de liberdade z do nó 1 com a deformada em pontilhado



(a)



(b)



(c)

Figura 5.10 a), b) e c) Mostram os gráficos do deslocamento em função do tempo do nó 3 e nó 5 ao aplicar uma força constante e unitária no nó 3 na direção z nos modelos de barra e placa.

5.2. Comparação entre os modelos para duas células

Quando se comparam duas células, o modelo de barra sofre influência da matriz \mathbf{K}_F (mola entre as células) e da matriz \mathbf{K}_B (mola intracélulas), como mencionado no capítulo 3, enquanto o modelo híbrido de elementos finitos recebe a rigidez do vinco apresentada no capítulo 4.2. Além da restrição da utilização de placa fina, mencionada na análise de uma célula, existe um fator chamado escala de comprimento mostrado na equação (3.3.2), que influencia diretamente a rigidez da matriz \mathbf{K}_F e o vinco dos modelos. Esse fator é mostrado em alguns experimentos na Figura 3.7 e, portanto, convencionou-se utilizar as mesmas propriedades mostradas nos experimentos de Filipov et al. (2017).

5.2.1. Análise de deslocamentos assimétricos

A primeira análise feita para estruturas com duas células foi com aplicação de deslocamentos assimétricos, segundo o experimento realizado por Filipov et al. (2017), onde são restringidos alguns graus de liberdade da primeira célula, como mostrado à frente. Em seguida, aplicando-se um pequeno deslocamento assimétrico no nó 6 da segunda célula, provoca-se uma pequena deformação na direção z da estrutura referente a um ângulo $\theta = 0.4^\circ$ com a horizontal, como exemplificado na Figura 5.11. Com isso, calculam-se os ângulos θ_F e θ_B para diferentes valores da escala de comprimento, L^* , apresentado na equação (3.2.3).

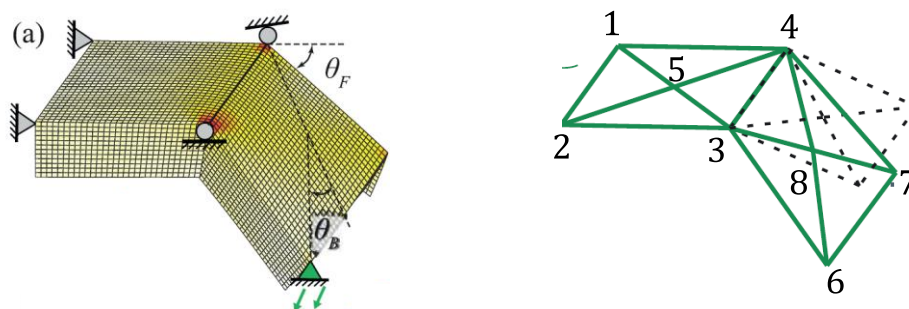


Figura 5.11 Teste de deslocamento assimétrico mostrando os ângulos θ_F e θ_B . Fonte: Filipov et al. (2017)

Para o teste foram analisados dois modelos: o modelo de placa, para diferentes restrições nos graus de liberdade, e o modelo de barra dividindo a rigidez interna da célula em duas molas ($K_B/2$) e usando integralmente a constante K_B para

cada mola. A Figura 5.12 ilustra como estão dispostos os graus de liberdade e as propriedades são descritas na Tabela 5.6 segundo Filipov et al. (2017), onde não há especificação do material utilizado.

Os gráficos da Figura 5.13 mostram o desempenho dessas estruturas para a restrição dos graus de liberdade 1, 2, 3 e 4 para o modelo de placa, e 3, 6, 9 e 12 para o modelo de barra. Os gráficos da Figura 5.14 mostram o desempenho dessas estruturas para a restrição dos graus de liberdade 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 do modelo de placa e 3, 6, 9, 12 e 15 para o modelo de barra.

Tabela 5.6 Propriedades utilizadas nos modelos de barra e placa

$L(mm)$	$t(mm)$	$E (Pa)$	Poisson ν	$\Sigma\alpha$
30	0.36	10^6	1/3	180°

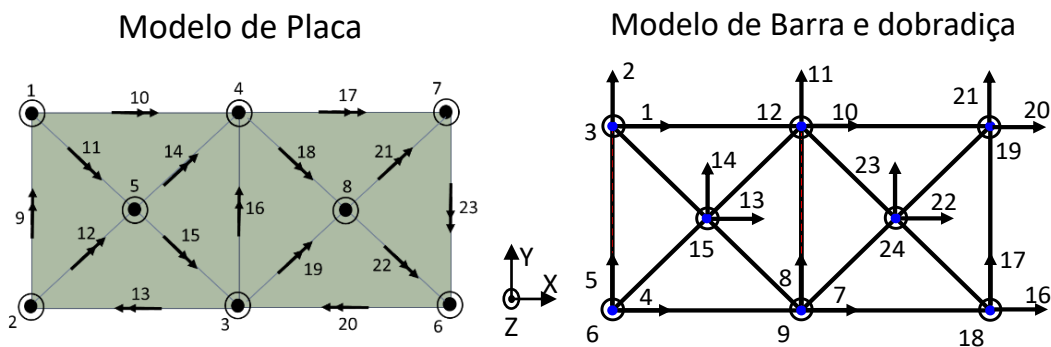


Figura 5.12 Graus de liberdade dos modelos de placa e de barra e dobradiça.

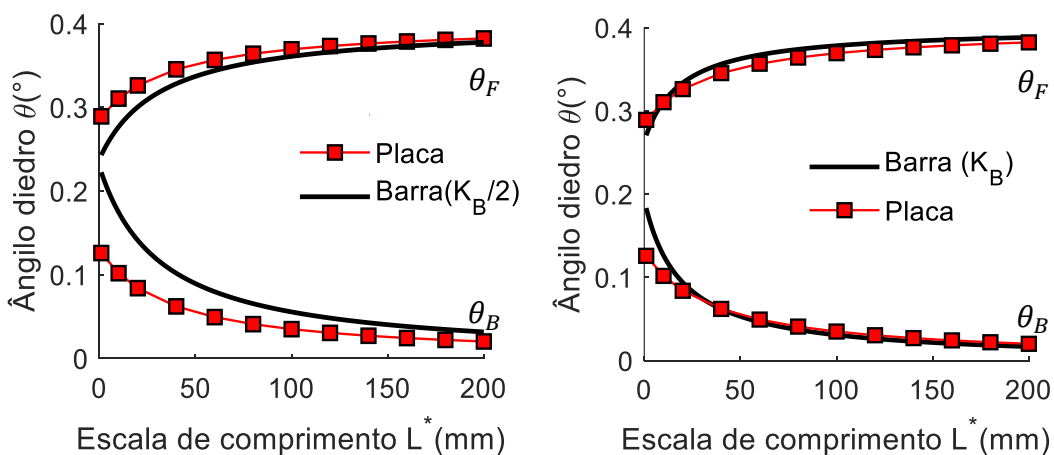


Figura 5.13 Variação dos ângulos θ_F e θ_B para os modelos de placa e de barra. Para o modelo de barra considerou-se a constante K_B tanto dividida para cada mola, quanto integralmente para cada mola.

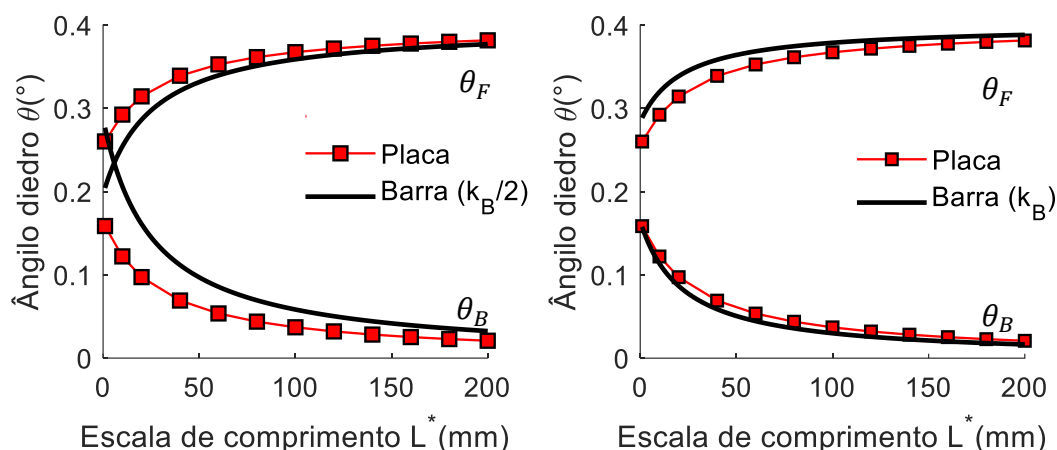
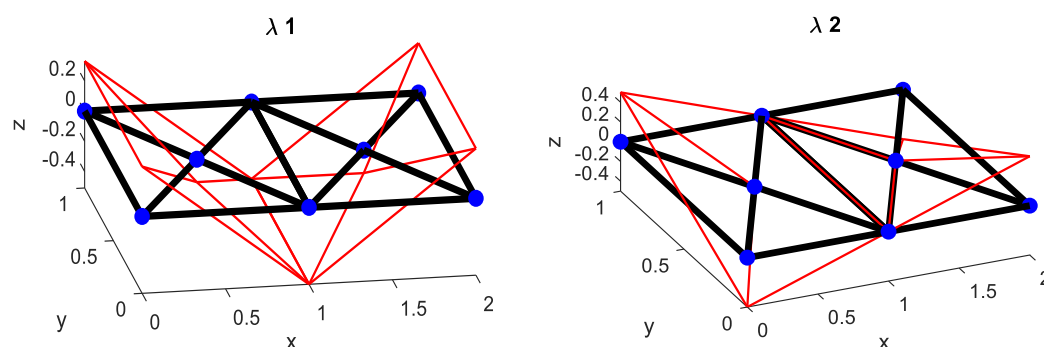


Figura 5.14 Variação dos ângulos θ_F e θ_B para os modelos de placa e de barra. Para o modelo de barra considerou-se a constante K_B tanto dividida para cada mola quanto integralmente para cada mola.

É possível perceber que o aumento da escala de comprimento equivale à diminuição da rigidez na linha da dobra, levando o ângulo θ_F a $0,4^\circ$ e o ângulo θ_B a 0° . Os resultados dos modelos convergiram melhor quando a constante K_B , criada por Filipov et al. (2017) no modelo de barra, foi utilizada integralmente, aumentando a rigidez no interior da célula.

5.2.2. Autovalores para estrutura no plano

Visando analisar o comportamento das dobras de estruturas origami para duas células, avaliaram-se os três autovalores de deformação dos modos de dobras ilustrados na Figura 5.16.



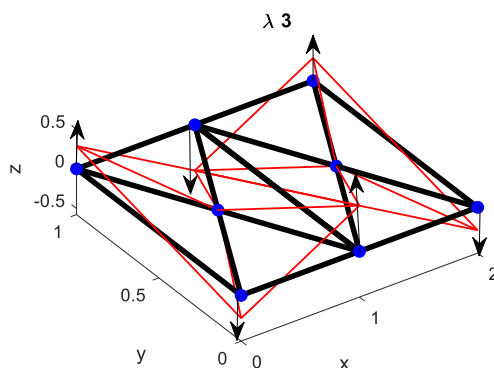


Figura 5.15 Autovetores referentes aos autovalores de deformação 1, 2 e 3.

A variação do primeiro autovalor de deformação referente ao modo de dobra está ligado diretamente à rigidez da contribuição da matriz \mathbf{K}_F para a modelo de barra, assim como a contribuição da mola na representação do vinco no modelo híbrido de elementos finitos (cap 4.2.3). Isso fica evidenciado na Figura 5.16, que mostra a diminuição do primeiro autovalor de deformação com a diminuição da rigidez na linha de dobra devido à variação da escala de comprimento, L^* , para uma estrutura no plano $z = 0$. É possível perceber que os demais autovalores permanecem constantes.

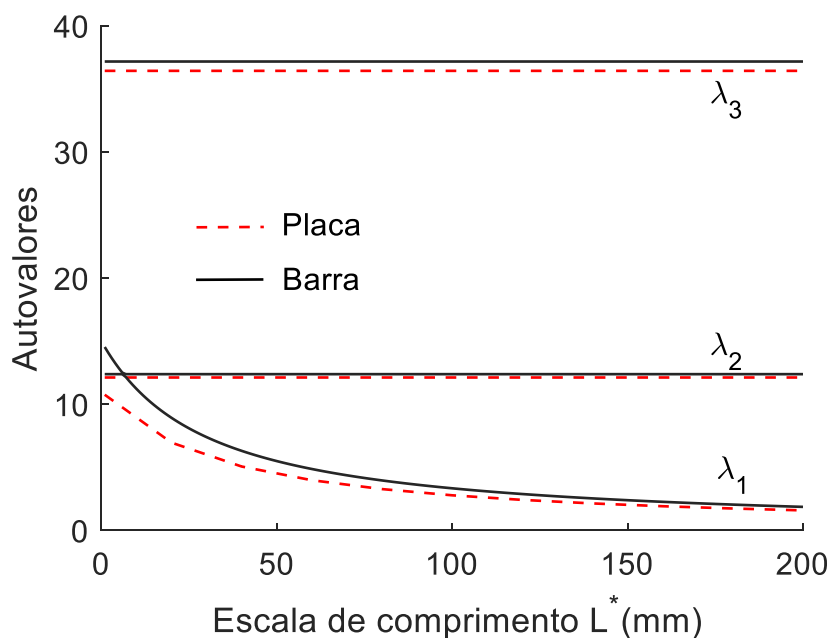


Figura 5.16 Variação dos autovalores no plano $z = 0$ com a variação da escala de comprimento.

Os autovalores 4 e 5 de deformação (λ_4 e λ_5) não apresentaram boa concordância entre os modelos com a variação do comprimento de escala como

mostrado no gráfico da Figura 5.18. Os automodos referentes aos autovalores λ_4 e λ_5 são apresentados na Figura 5.17.

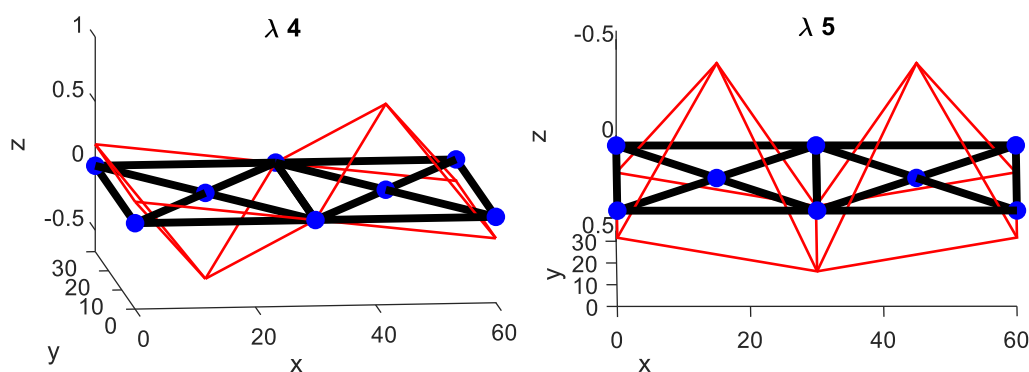


Figura 5.17 Automodos referentes aos autovalores de deformação 4 e 5.

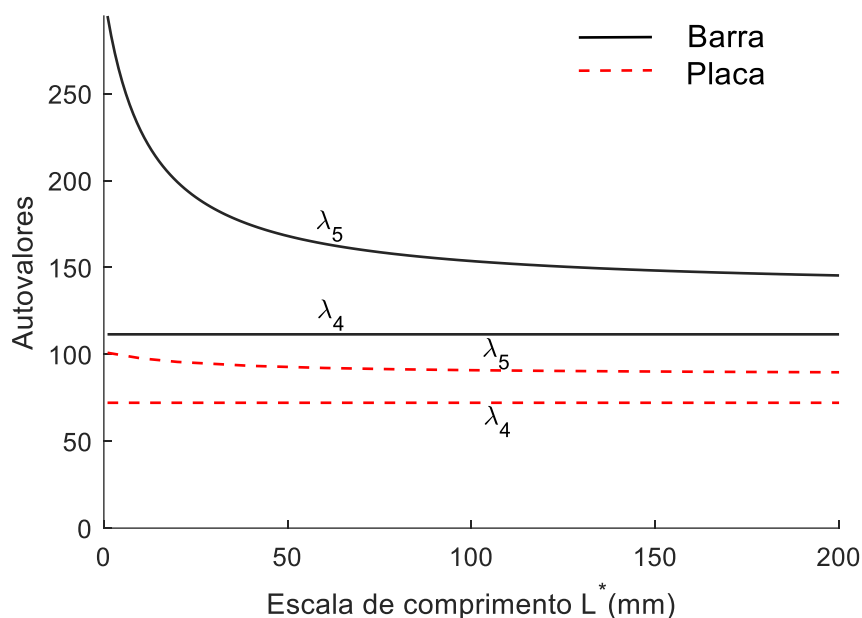


Figura 5.18 Variação dos autovalores 4 e 5 com a escala de comprimento.

5.2.3. Autovalores para estrutura fora do plano

Analizou-se o comportamento dos autovalores do modelo de barra e no modelo de casca para cada configuração espacial de uma dobra completa entre duas células variando o ângulo θ de 0 a 180°. Foram avaliados os primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto autovalores de deformação. Seus automodos podem ser visualizados na Figura 5.15 e na Figura 5.17. O gráfico da Figura 5.19 mostra os primeiro, segundo e terceiro autovalores (λ_1, λ_2 e λ_3) e o da Figura 5.20 o quarto e

o quinto (λ_4, λ_5) variando com o ângulo θ para células de barra e casca utilizando as mesmas propriedades apresentadas na Tabela 5.6 e mantendo $L^* = 80mm$. É possível perceber que os três primeiros autovalores de deformação ficaram próximos para o modelo de casca e barra, enquanto os autovalores 4 e 5 mostraram que o modelo de barra é mais rígido que o de casca para essas configurações espaciais.

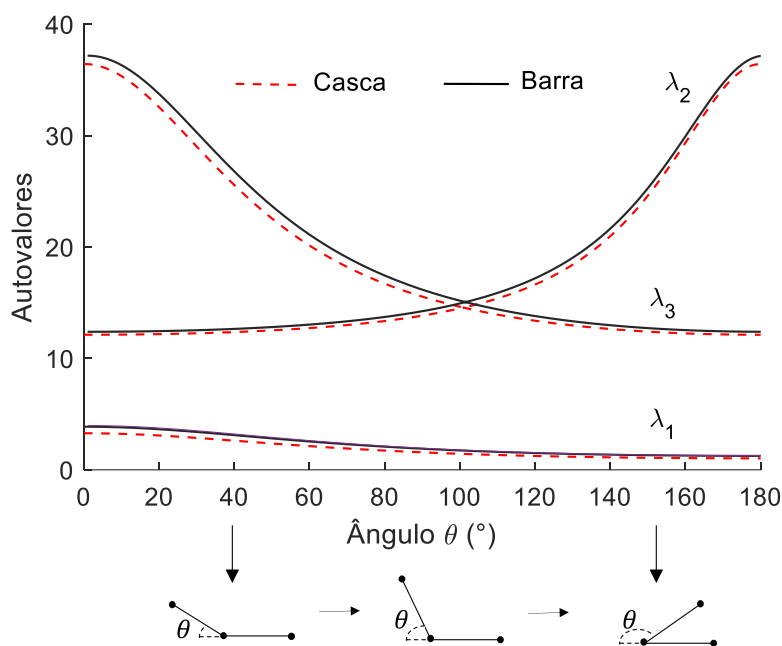


Figura 5.19 Gráfico dos autovalores 1,2 e 3 variando com o ângulo θ para os modelo de barra N5B8s e casca 4HS3.

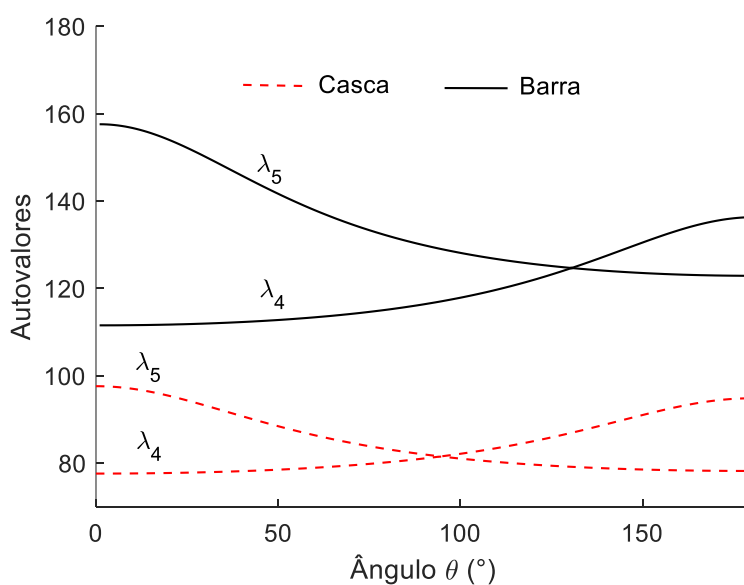


Figura 5.20 Autovalores 4 e 5 variando em cada configuração espacial de $\theta \in [0 \ 180^\circ]$.

5.2.4. Análise dinâmica

A primeira análise a ser considerada é para os autovalores de deformação calculados a partir da equação dinâmica, utilizando, além da matriz de rigidez, a contribuição das matrizes de massa dos modelos de placa e barra. Para o modelo de barra foram utilizadas as três distribuições de massa apresentadas no capítulo 3.7 e na seção 5.1.4, chamadas nos resultados de barra 1, barra 2 e barra 3. A Tabela 5.7 mostra as propriedades geométricas e mecânicas segundo Filipov et al. (2017).

Tabela 5.7 Propriedades para uma análise dinâmica de duas células

E (MPa)	t (mm)	ν	ρ (Kg/m ³)	F (N)	L_F (mm)
1	0.36	1/3	400	1	30

A massa específica foi tirada de uma amostra de papelão em um trabalho de resíduos orgânicos sólidos (Da Silva e Dos Santos, 2010).

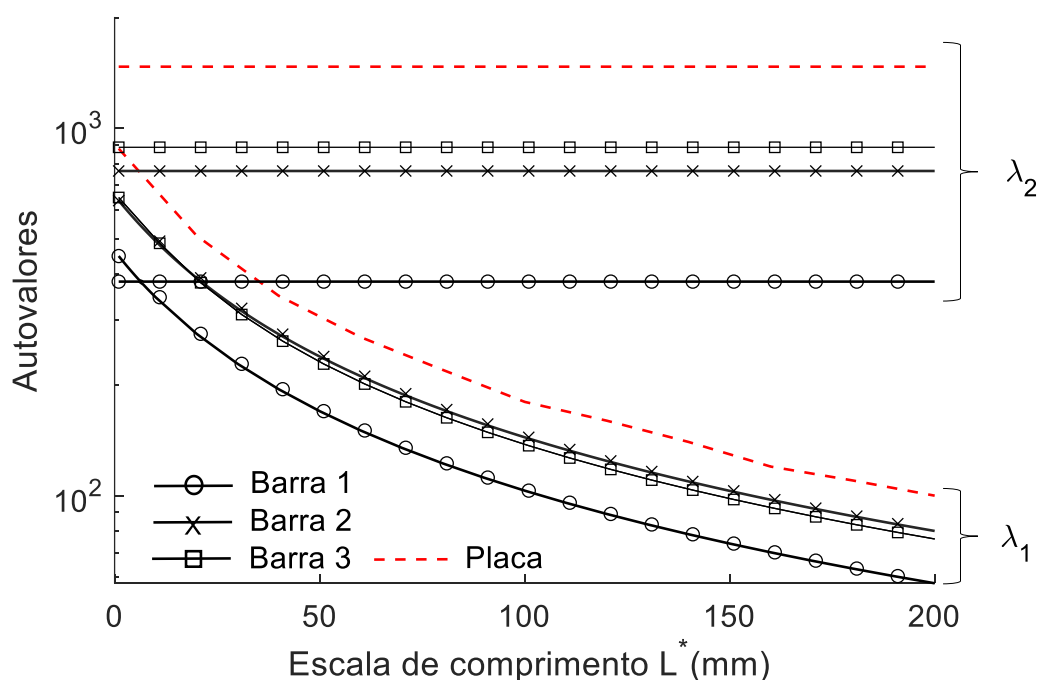


Figura 5.21 Análise de autovalores com a variação do comprimento de escala para o modelo de placa e para o modelo de barra utilizando as três distribuições da massa na estrutura.

A Figura 5.21 mostra o gráfico para os dois autovalores de deformação, com variação da escala de comprimento. O terceiro e o quarto autovalores dos modelos

são constantes com a variação do comprimento de escala e, por apresentarem valores distantes, optou-se por evidenciá-los na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 Tabela do terceiro autovalores de deformação utilizando o sistema linear dinâmico

Modelos	Autovalor 3 (λ_3)	Autovalor 4 (λ_4)
Barra 1	1147	3442
Barra 2	1529	2295
Barra 3	2294	6952
Placa	7200	4050

É possível perceber que a distribuição de massa, barra 3, apresentou resultados mais próximos com o modelo de placa para os modos 2 e 3, mas ainda com grandes diferenças, de 39% e 69%, respectivamente. Para o modo 5 (Figura 5.22) aproximaram-se com valores de comprimento de escala acima dos 100 mm. O modelo de barra 1 apresentou resultado mais próximo com o de placa para o modo 4, com diferença de 15%. Mas para o modo 1 os modelos de barra 2 e 3 apresentaram uma diferença média de aproximadamente 20%.

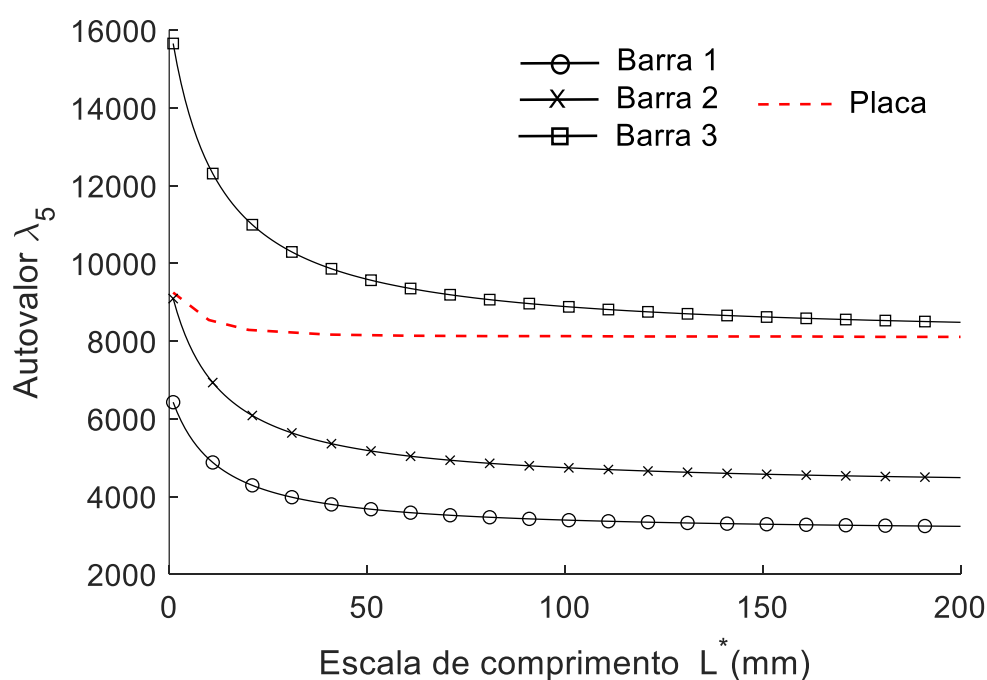


Figura 5.22 Autovalor 5 variando com a escala de comprimento para uma problema dinâmico

Outra análise feita foi aplicar uma força unitária constante no nó 6, restringir os graus de liberdade 1, 2, 3 e 4 e avaliar o deslocamento em função do tempo para os nós 5, 6, 7 e 8 de uma estrutura de duas células no plano $z = 0$, ilustrada na Figura 5.23, onde a deformada é mostrada em linha pontilhada. Os resultados são mostrados para os modelos de placa e as três distribuições de massa do modelo de barra (Barra 1, Barra 2, Barra 3) na Figura 5.24-a, b e c, respectivamente. O comprimento de escala utilizado foi de 80mm , valor, segundo Filipov et al. (2017), ideal para origami com vincos.

É possível perceber que os modelos de barra com as distribuições de massa dois e três (Barra 2 e Barra 3) apresentaram pouca diferença entre si e mostraram com amplitudes menores que 5% dos modelos de placa e casca para as análises no plano e para análises com células dispostas em 90° entre si.

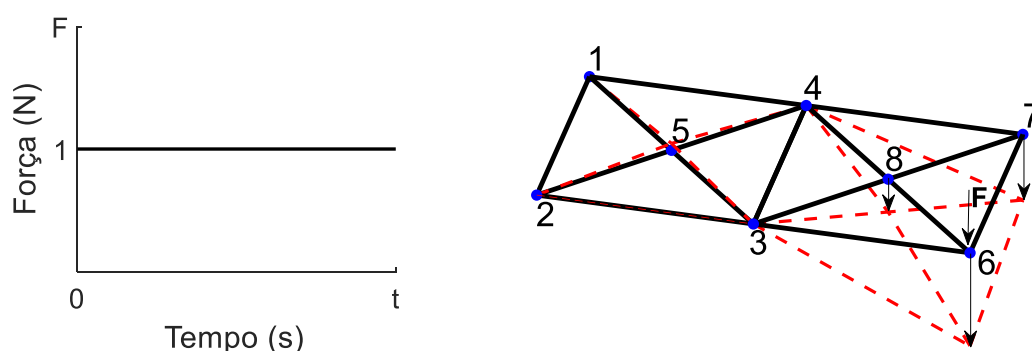
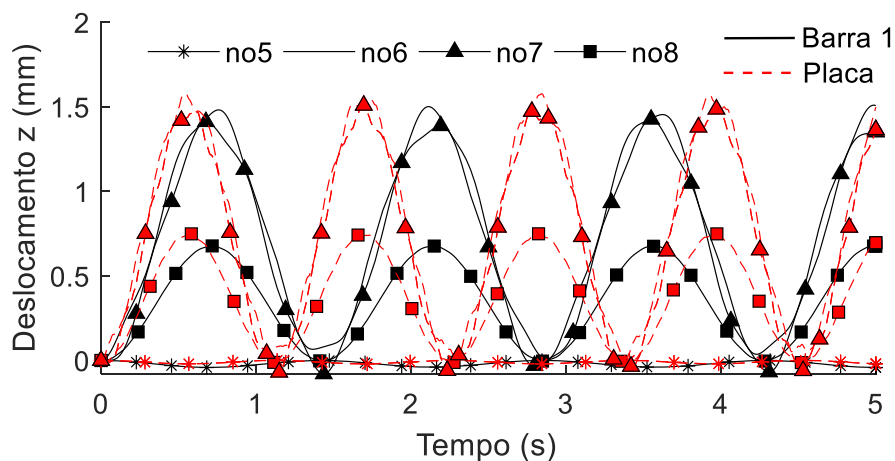


Figura 5.23 Representação dos deslocamentos ao realizar uma força unitária e constante no nó 6 da estrutura com duas células



(a)

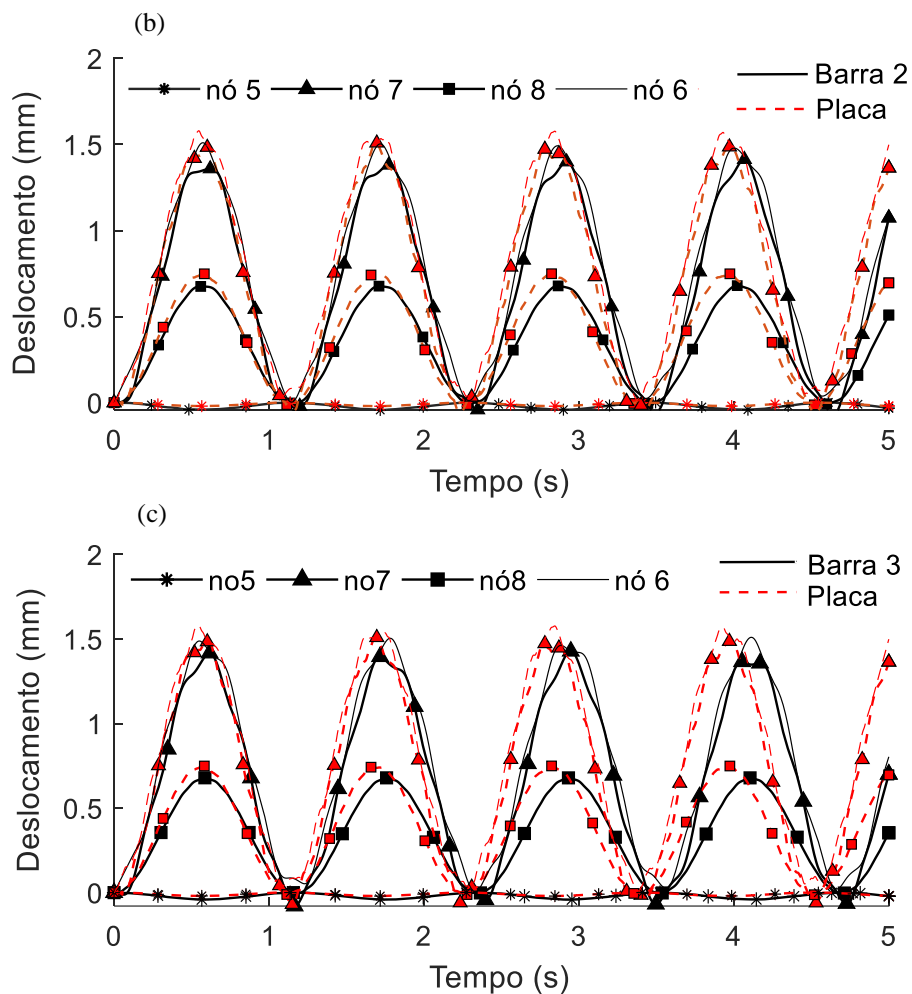


Figura 5.24 a), b) e c) mostram a variação dos deslocamentos no tempo dos nós 5, 6, 7 e 8 com uma força unitária na direção z do nó 6, para as três distribuições de massa do modelo de barra.

Mudando a configuração espacial, foram aplicadas forças unitárias em estruturas com as células dispostas com um ângulo de 90° entre si, como pode ser verificado na Figura 5.25. Os gráficos do deslocamento no tempo dos nós 1, 2, 5 e 8 são apresentados na Figura 5.26 para os modelos de barra e de casca.

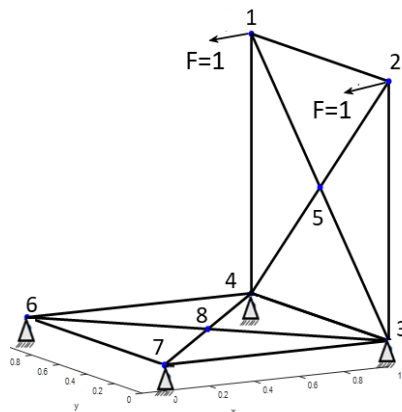
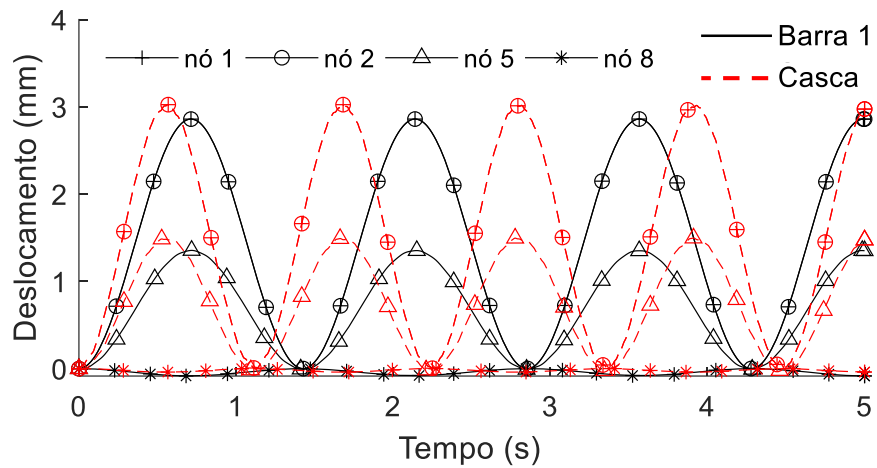
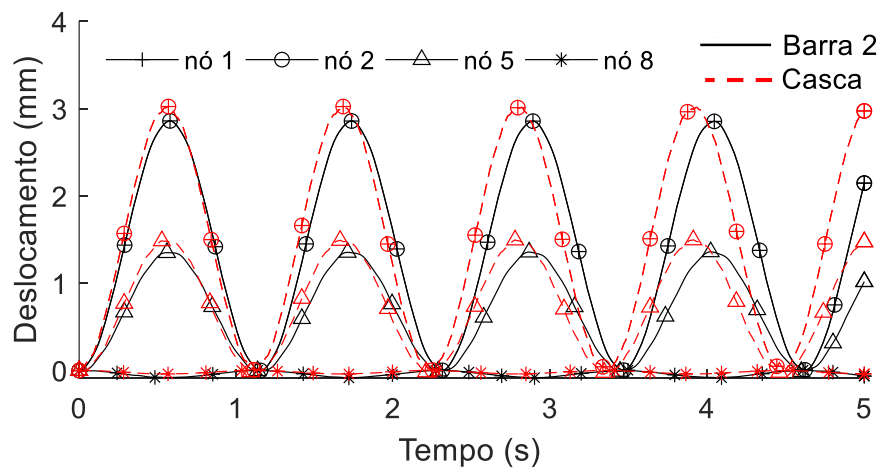


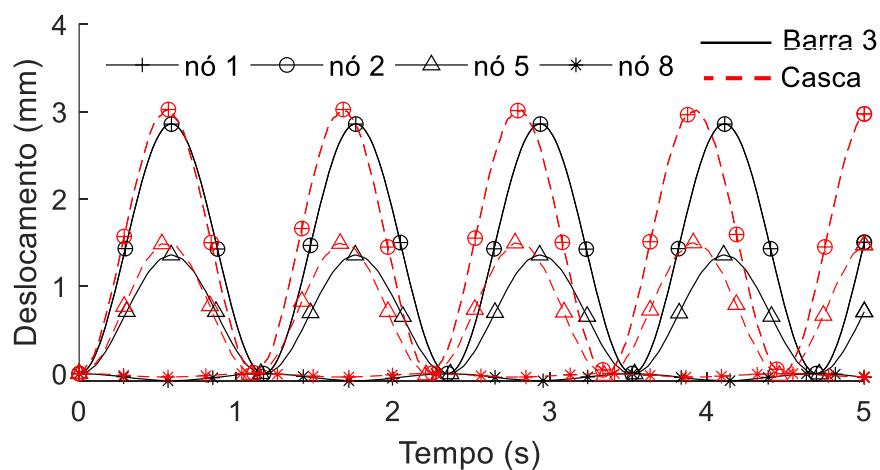
Figura 5.25 Aplicação de força unitária na direção x nos nós superiores (1 e 2) de uma estrutura com duas células. As células formam um ângulo de 90 graus entre si.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.26 Gráfico do deslocamento em função do tempo ao aplicar uma força constante e unitária nas estruturas de casca (4HS3) e de barra (N5B8s) considerando as três distribuições de massa a) Barra1, b) Barra 2 e c) Barra 3.

5.3. Comparação entre os modelos para 4 células

5.3.1. Autovalores para estrutura no plano

A estrutura analisada nesta seção é formada por 4 células no plano. A primeira investigação visa avaliar os autovalores com a variação do comprimento de escala, L^* . Os automodos são apresentados na Figura 5.27. As propriedades utilizadas são as mesmas da Tabela 5.7.

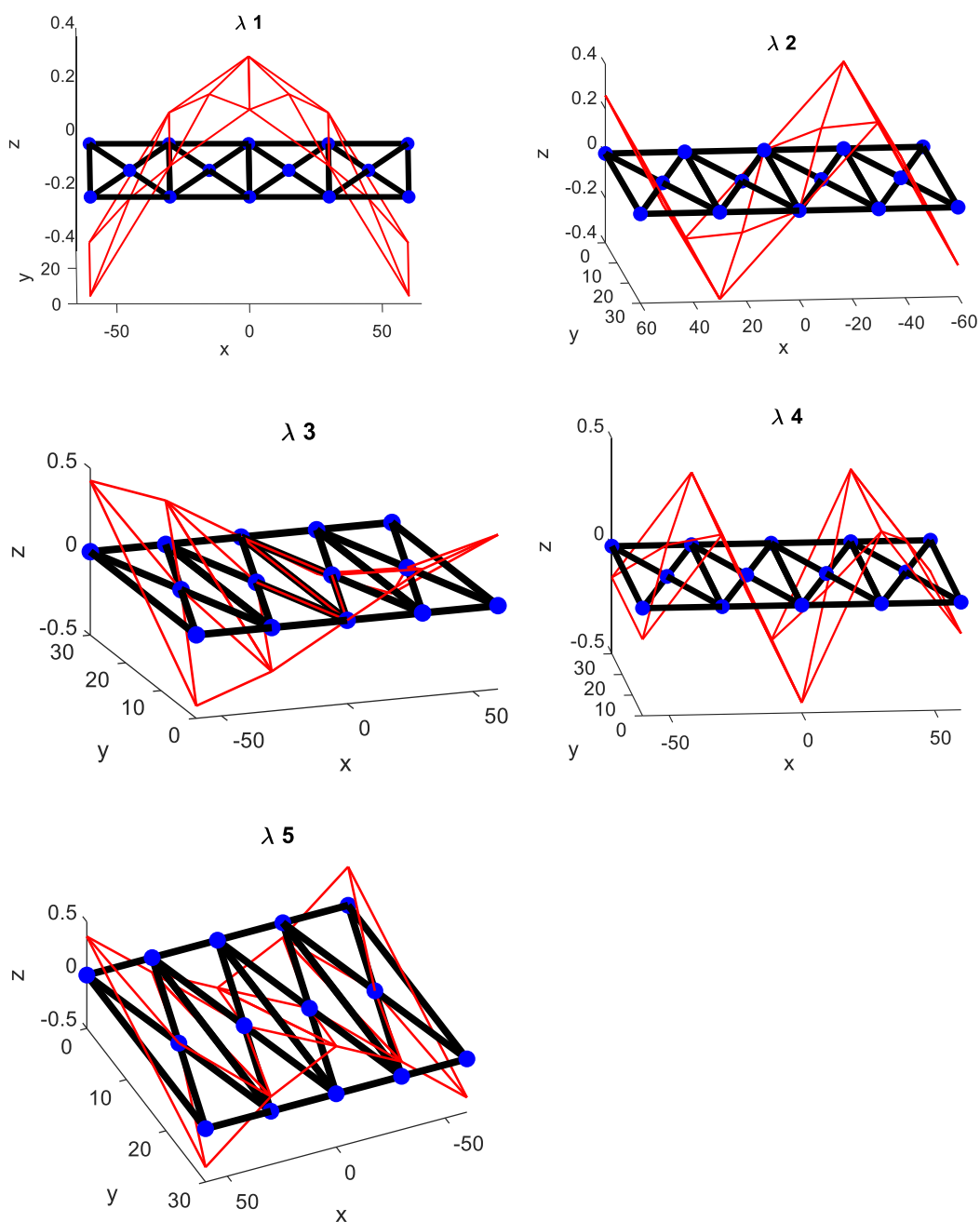


Figura 5.27 Automodos do modelo com 4 células alinhadas no plano.

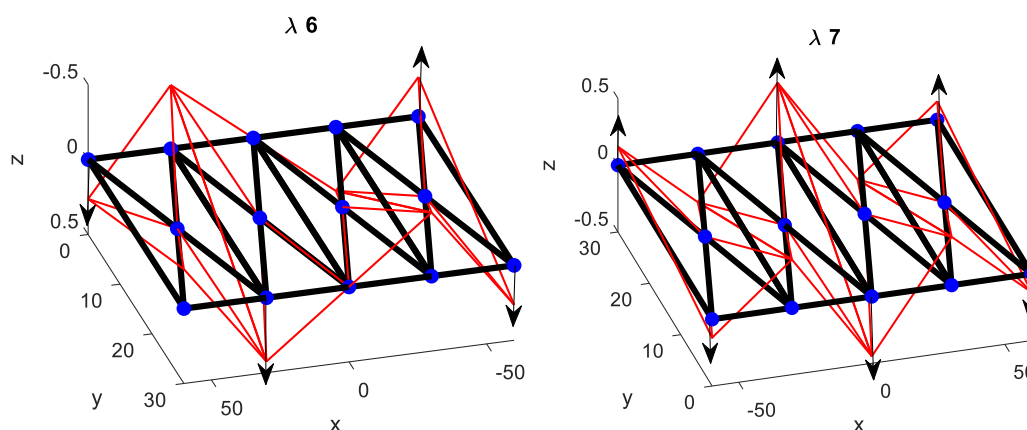


Figura 5.28 Automodos de deformação 6 e 7 para estruturas com quatro células alinhadas

O gráfico da Figura 5.29 mostra como os modelos de barra e placa apresentam convergência para os modos referentes a flexão, torção e dobra, mostrando que a matriz de rigidez dos modelos estão aptas a capturar esses comportamentos.

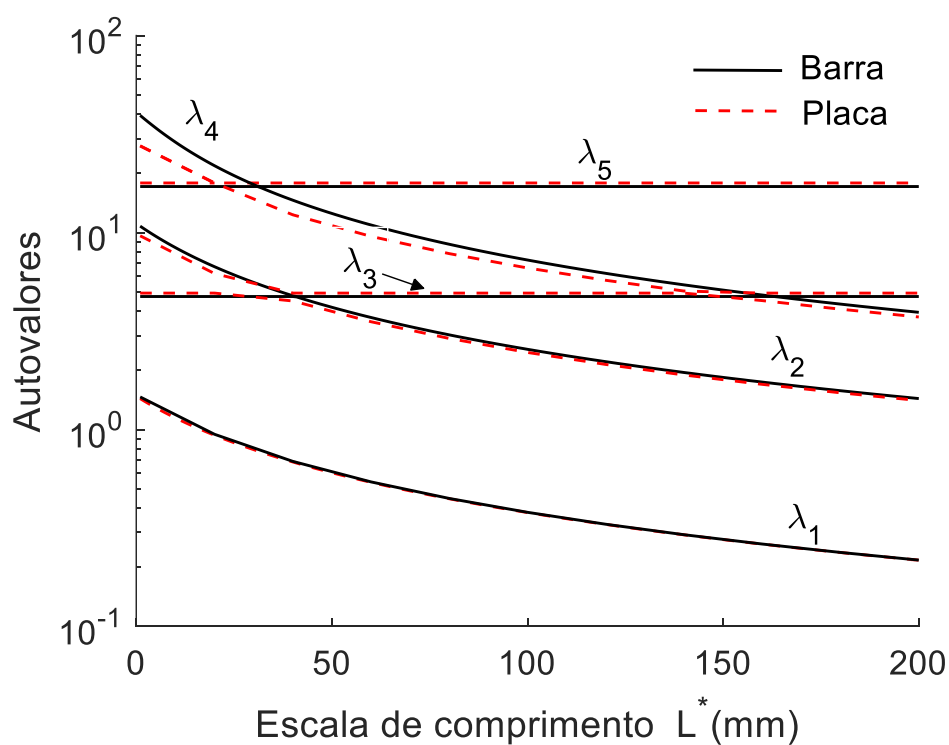


Figura 5.29 Autovalores variando o comprimento de escala, L^* , para estruturas com 4 células alinhadas

5.3.2. Autovalores para estrutura fora do plano

Os autovalores do modelo de barra e casca são representados para cada configuração estática variando o ângulo θ de 0 a 90°, como mostrado na parte de

baixo do gráfico da Figura 5.30. É possível perceber que as curvas do modelo de casca e barra apresentam-se próximos, com diferença máxima de 12% no autovalor 4, mostrando que os modelos conseguem capturar esses modos de deformações para configurações espaciais. A Figura 5.31 mostra dois autovalores que precisam de bem mais energia para se deformar, e por isso, ficaram em figuras separadas.

O autovalor 4 apresentou maior queda, mostrando que à medida que a configuração espacial se aproxima de dobrar totalmente a estrutura perde rigidez, diferentemente do caso dos autovalores 1 e 3 (flexão e torção), que cresceram com o fechamento da estrutura. O autovalor 6 apresentou uma queda acentuada nos primeiros 15 graus, enquanto o 7 apresentou grande crescimento nos últimos 15 graus.

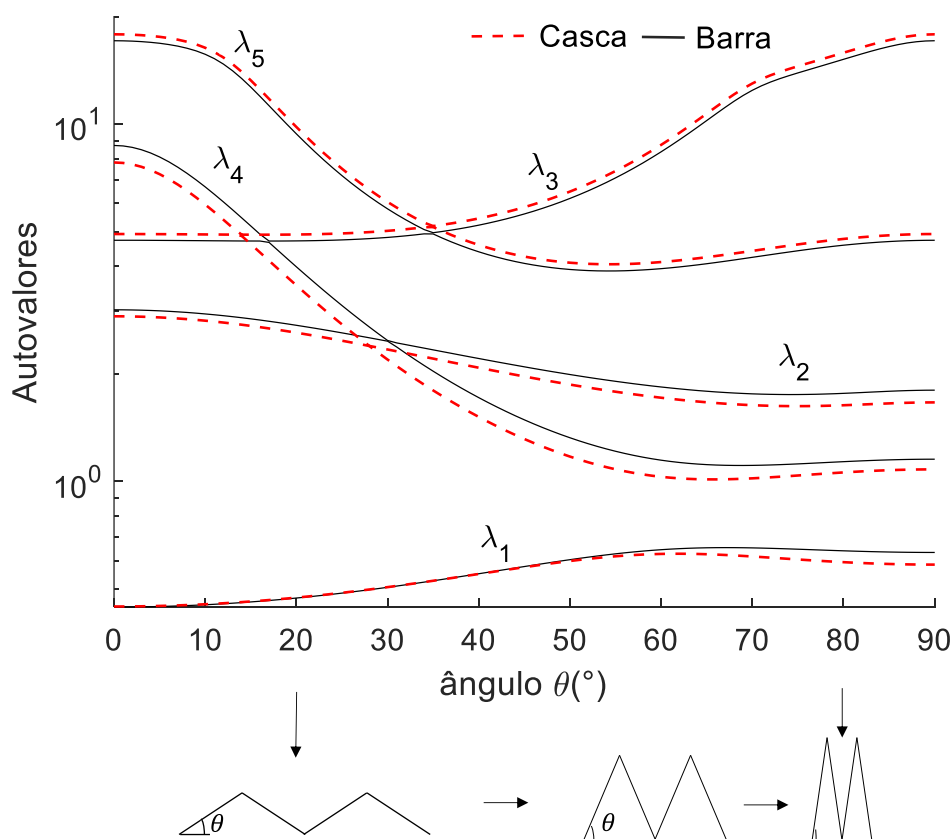


Figura 5.30 Variação dos autovalores 1, 2, 3, 4 e 5 para cada configuração espacial da estrutura variando ângulo θ de 0 a 90°.

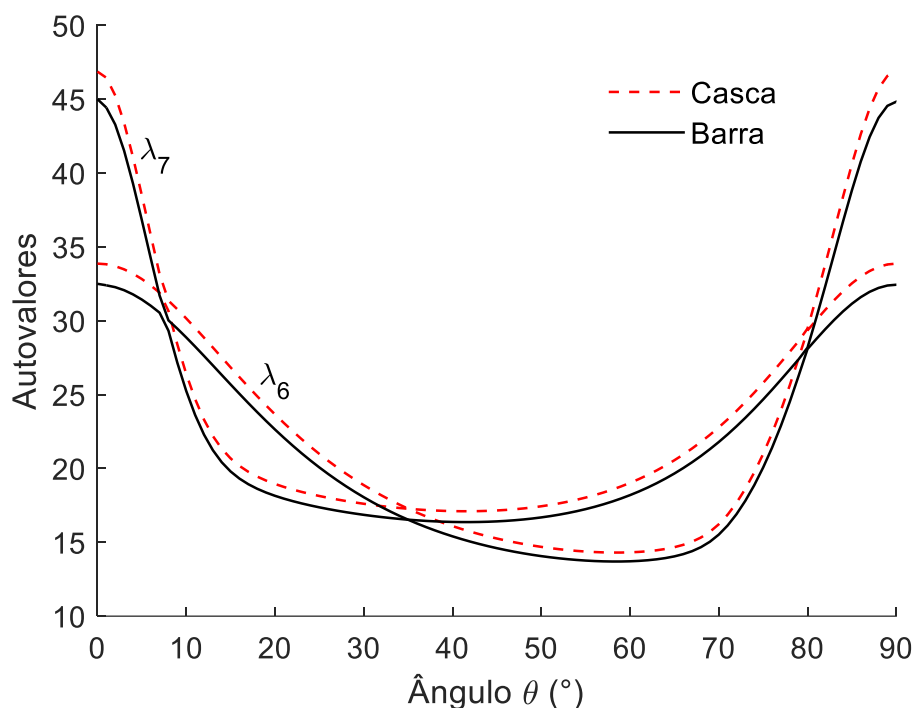
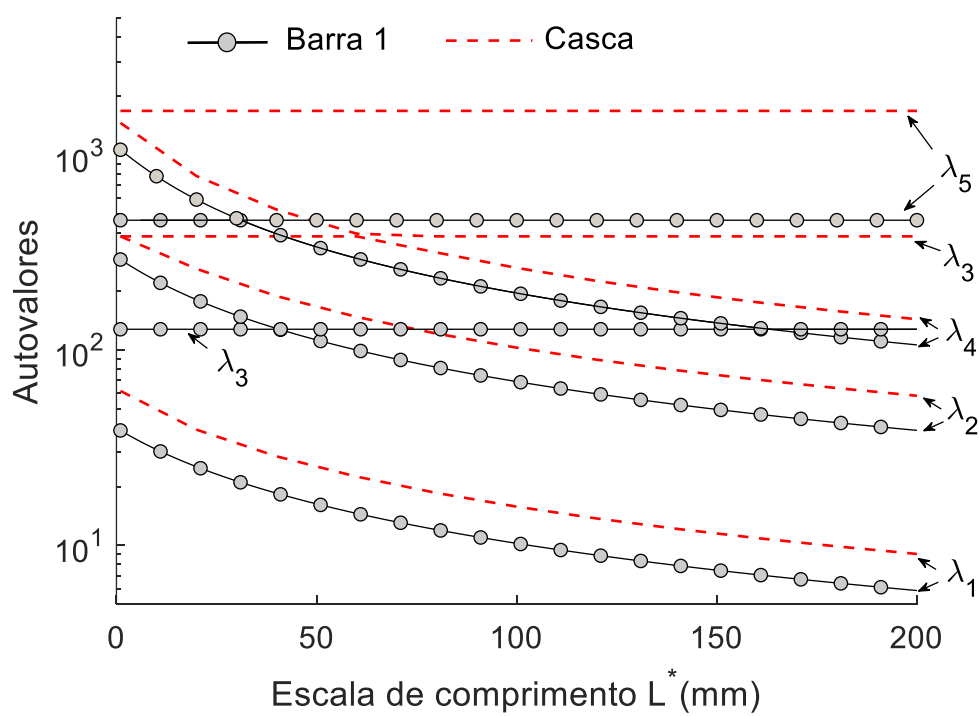


Figura 5.31 Variação dos autovalores 6 e 7 para cada configuração espacial da estrutura variando ângulo θ de 0 a 90°.

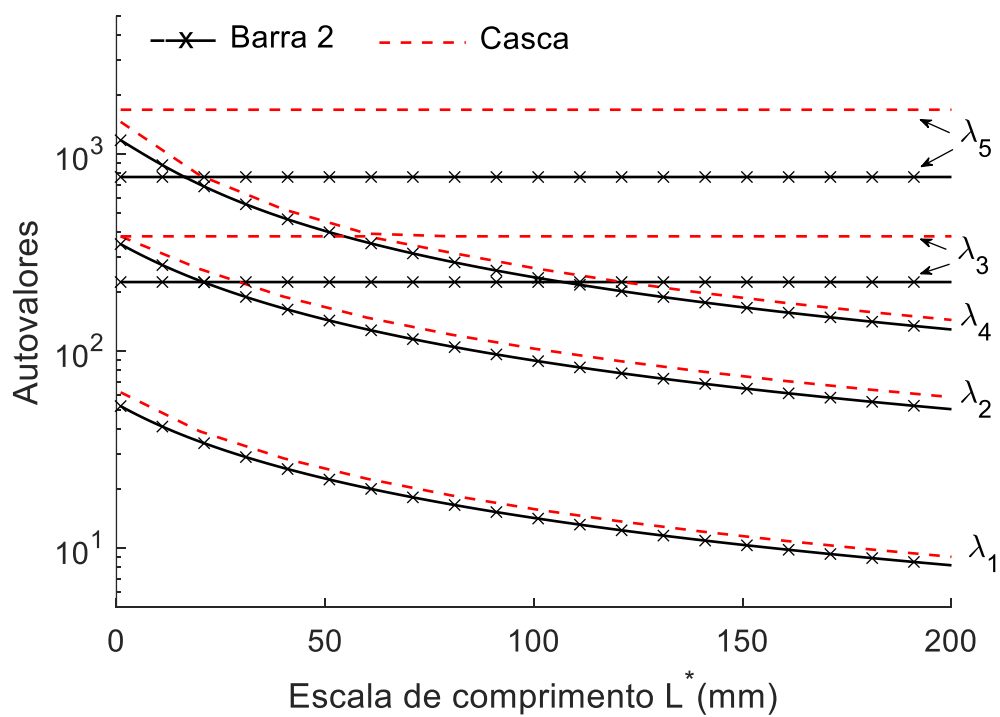
5.3.3. Análise dinâmica

Na avaliação dos autovalores de um problema dinâmico (com frequência $\lambda = \sqrt{\omega}$) dos modelos de barra e placa para uma estrutura no plano $z = 0$, é possível perceber que os autovalores relacionados ao cisalhamento da estrutura (λ_3 e λ_5) apresentam-se constantes com a variação do valor do comprimento de escala, L^* , e que os autovalores de deformação λ_1, λ_2 e λ_4 convergiram com o aumento da escala de comprimento, como é possível ver na Figura 5.32. Todas as propriedades utilizadas estão apresentadas na Tabela 5.7.

Em segunda análise, percebe-se que a primeira distribuição das massas para o modelo de barra (Barra 1) não concorda tão bem com os elementos de placa, com diferenças de 31% para λ_1 e 75% para λ_5 . É possível perceber que a terceira distribuição das massas para o elemento de barra (Barra 3) foi a que mais se aproximou com o modelo de placa, com diferença de aproximadamente 10% para λ_1 e diferença de 47% para λ_5 .



(a)



(b)

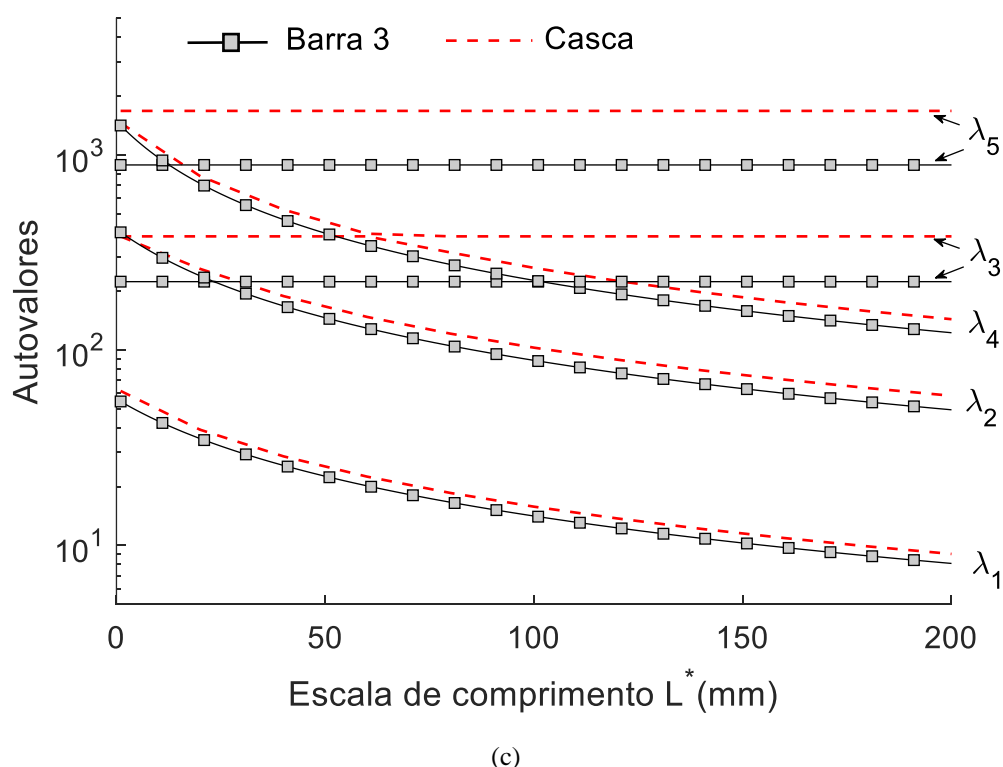


Figura 5.32 a) b) e c) mostram os autovalores para variação do comprimento de escala para quatro células utilizando as três abordagens da matriz de massa do modelo de barra 1, barra 2 e barra 3.

Para análise ao longo do tempo de quatro células foi utilizada uma configuração espacial com $\theta = 60^\circ$ e restringiram-se somente os nós 6 e 7 da estrutura (topo da Figura 5.33). Aplicaram-se forças unitárias constantes no tempo na direção x dos nós 1, 2, 12 e 13 e, como a estrutura é simétrica, avaliaram-se os deslocamentos no tempo na direção x para os nós 1, 2, 3 e 4, e na direção z para os nós 3 e 4.

A segunda estrutura com quatro células também apresenta uma configuração espacial com $\theta = 60^\circ$. Entretanto, optou-se por restringir, além dos nós 6 e 7, os graus de liberdade y e z dos nós 1, 2, 12, 13, topo da Figura 5.35. Aplicaram-se forças unitárias constantes na direção x dos nós 1, 2, 12 e 13 e, como a estrutura é simétrica, avaliaram-se os deslocamentos no tempo na direção x (horizontal) para os nós 1, 2, 3 e 4, e na direção z (vertical) para os nós 3 e 4.

Para todas as configurações as segunda e terceira distribuições de massa para o modelo de barra (Barra 2 e Barra 3) mostraram-se mais próximas do modelo de casca, com diferenças no comprimento de onda menores que 4%.

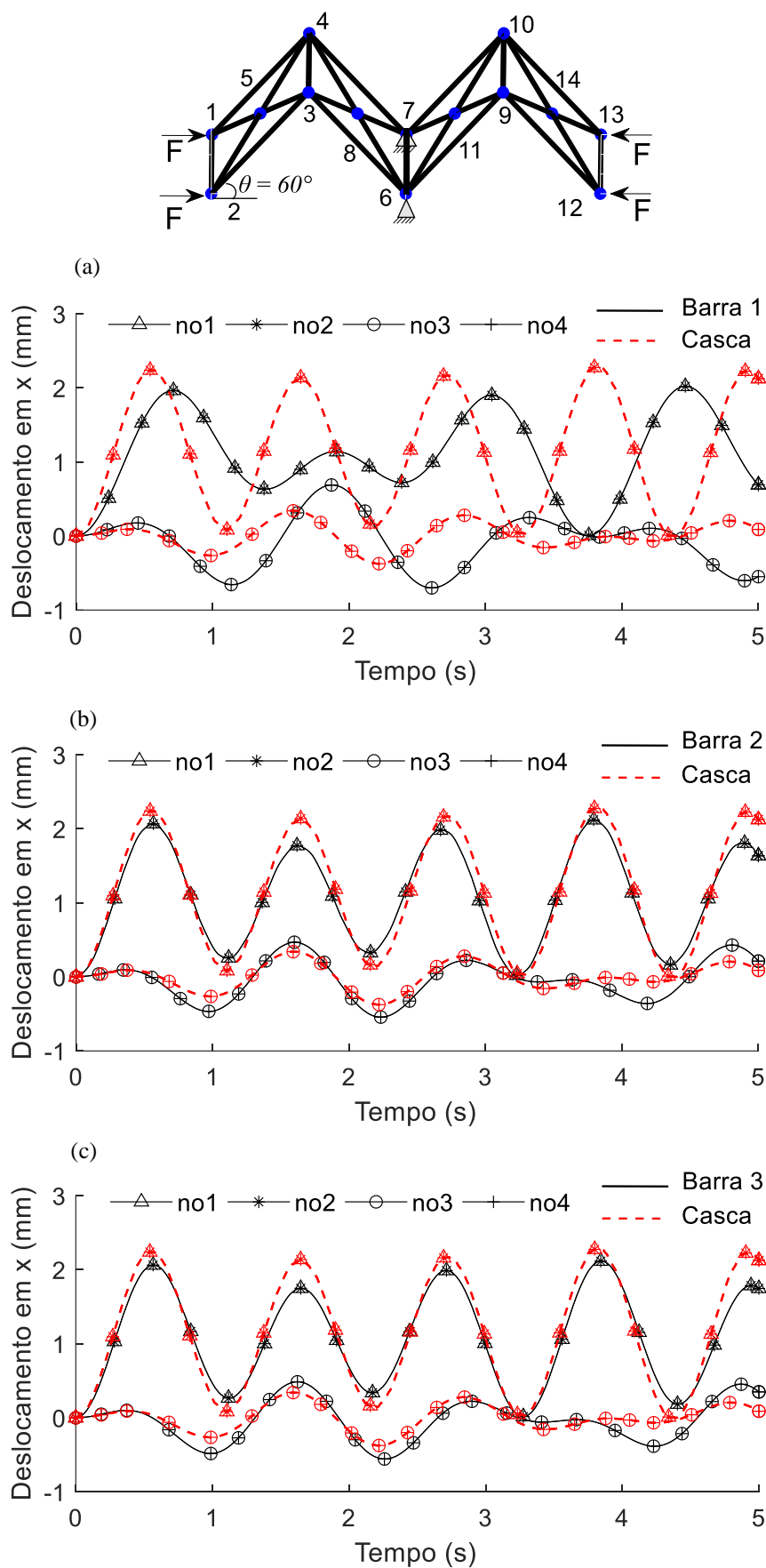
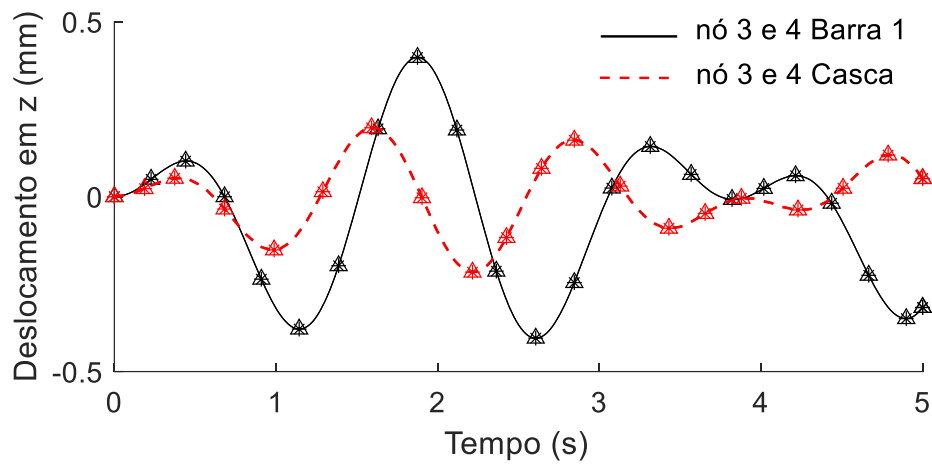
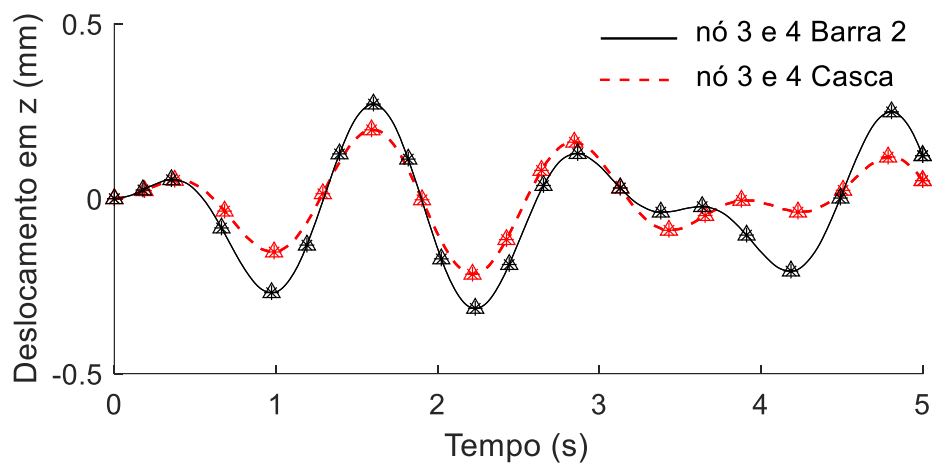


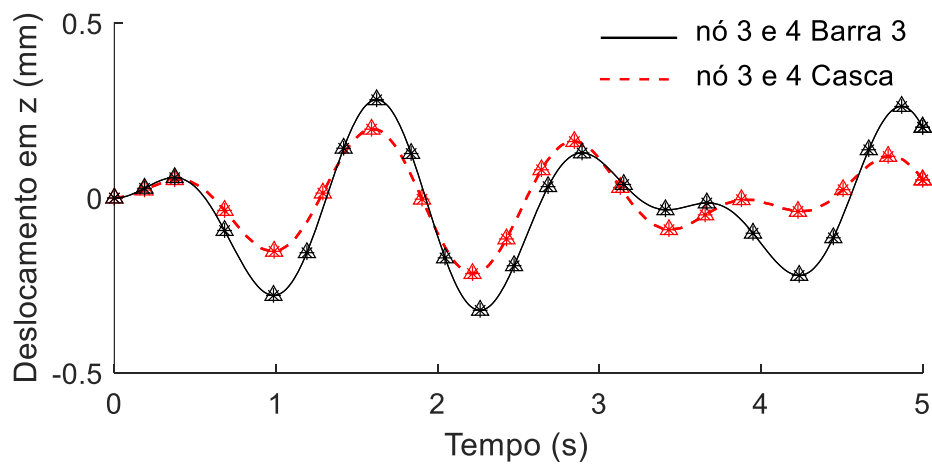
Figura 5.33 Deslocamento horizontal dos nós 1, 2, 3 e 4 da estrutura de 4 células com configuração espacial de $\theta = 60^\circ$ com restrição nos nós 6 e 7.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.34 Deslocamento vertical dos nós 3 e 4 no tempo.

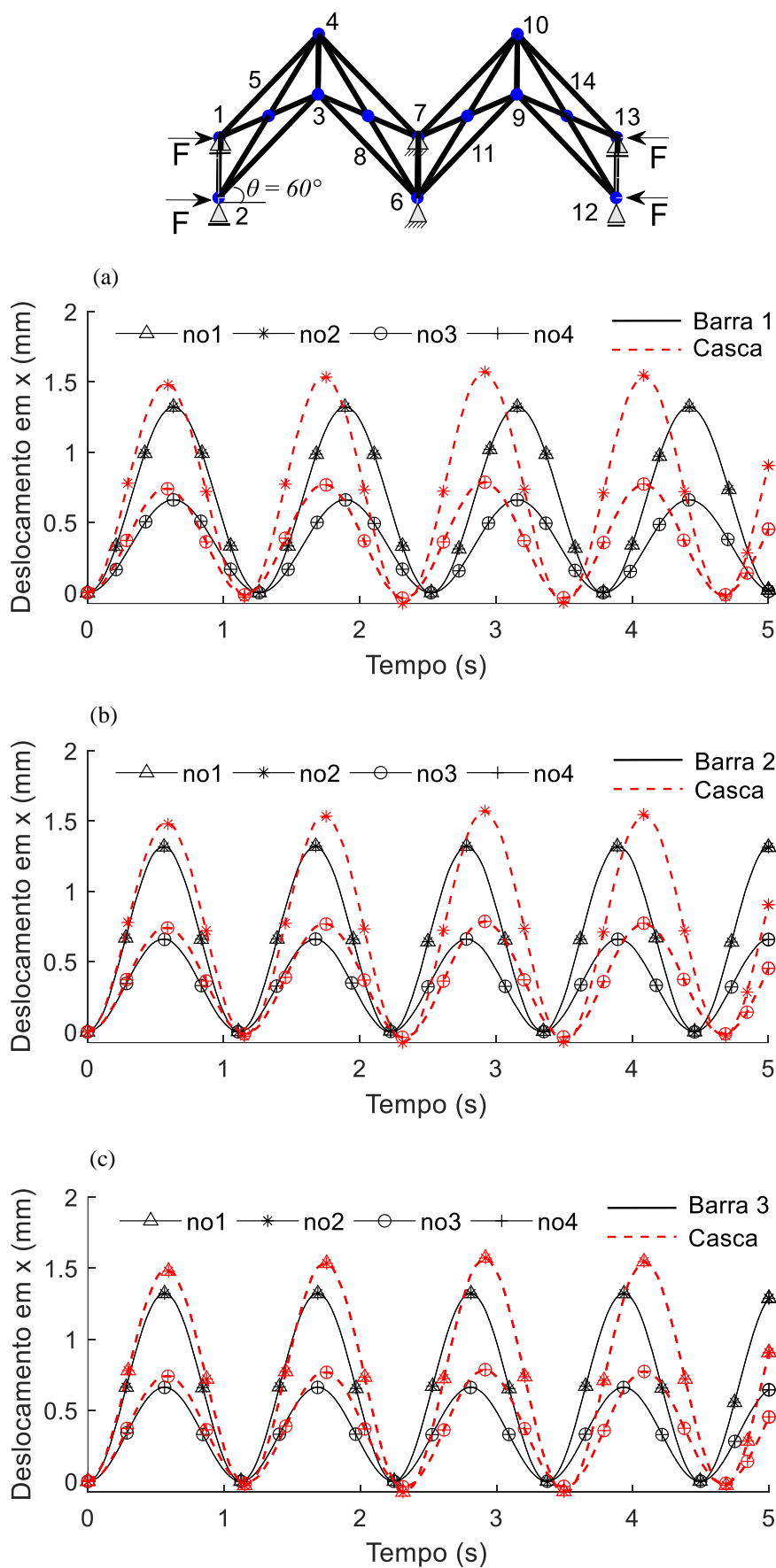
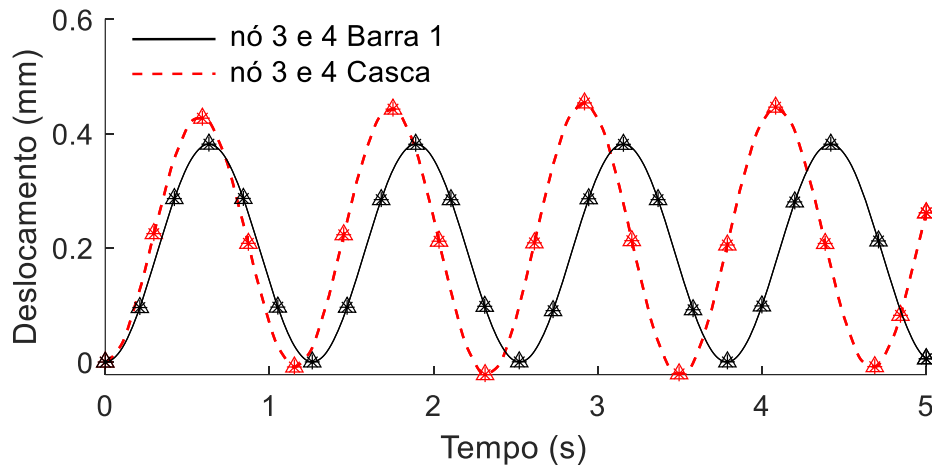
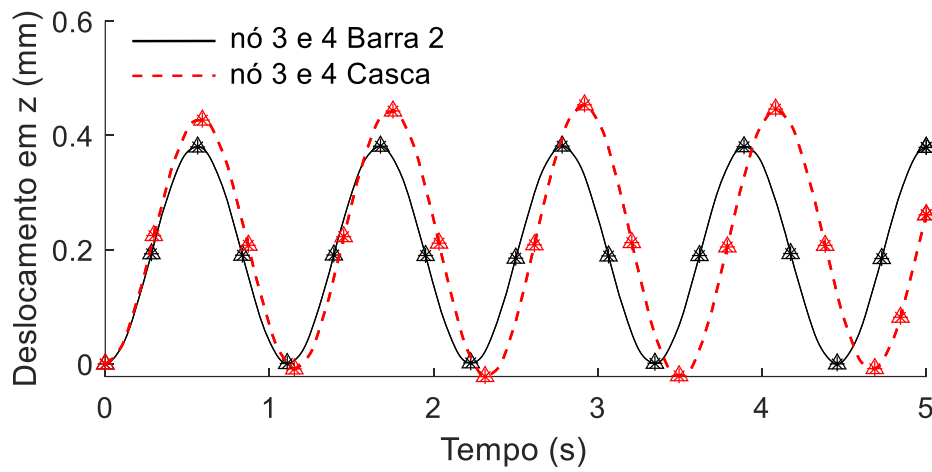


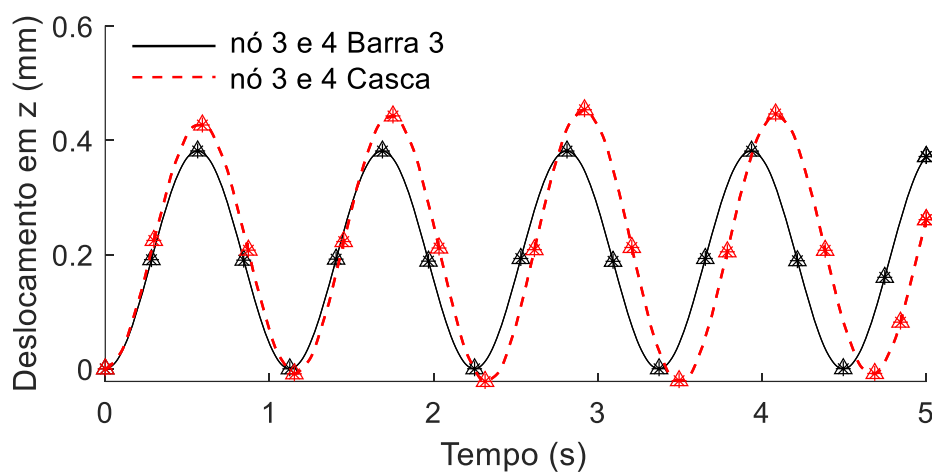
Figura 5.35 Deslocamento horizontal dos nós 1, 2, 3 e 4 da estrutura de 4 células com configuração espacial de $\theta = 60^\circ$ com restrição nos nós 6 e 7 e nos G.L x e y de 1, 2, 12 e 13.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.36 Deslocamento vertical dos nós 3 e 4 no tempo.

6 Conclusões

Os modelos híbridos de elementos finitos de placa e casca mostraram ser eficazes para se construir uma estrutura origami, pois além de apresentarem graus de liberdade de rotação, os modelos híbridos são de fácil compreensão e têm fundamentação teórica consistente, que atende a compatibilidade e equilíbrio do problema de elasticidade mesmo com poucos graus de liberdade. Para estruturas com uma, duas e quatro células foram utilizadas, para o modelo de placa, 13, 23 e 43 graus de liberdade e no modelo de casca 23, 39 e 71 graus de liberdade, respectivamente.

A análise linearmente estática mostrou que os modelos de barra e dobradiça e os modelos de elementos finitos híbridos concordaram quando analisaram os autovalores dos modos de flexão, torção e dobra para diferentes configurações espaciais para uma, duas e quatro células. Para as análises de deslocamento, o modelo de barra com células mais rígidas apresentou maior convergência com os modelos híbridos. Os autovalores de um sistema dinâmico apresentaram boas aproximações entre os modelos para os modos de dobras e flexão.

Entre as diferentes distribuições da massa nas estruturas do modelo de barra, a que apresentou resultados que mais concordaram com os modelos híbridos para análises dinâmicas foi a terceira distribuição de massa, que consiste na utilização da massa de cada barra da estrutura para representar a massa de uma placa rígida.

6.1. Sugestões para trabalhos futuros

Expandir a formulação híbrida dos elementos finitos para análises dependentes do tempo e da frequência utilizando mais de uma matriz de massa pelo método de superposição modal avançada [Dumont e Oliveira, 2001; Dumont e Marón, 2011].

Investigar questões de instabilidade estrutural com uso de elementos híbridos de placa e casca.

Criar estruturas mais realistas para análise.

A partir do desenvolvimento dos elementos de cascas em problemas dependentes do tempo, integrar na matriz de rigidez os aspectos geométricos e conceituais para a análise numérica de problemas que envolvam grandes deslocamentos, mas pequenas deformações.

Encontrar propriedades do modelo de barra que gerem resultados equivalentes aos modelos de elementos finitos híbridos.

Utilizar o modelo quadrilateral de elementos finitos híbridos, que já está desenvolvido (Sales 2018, 2021).

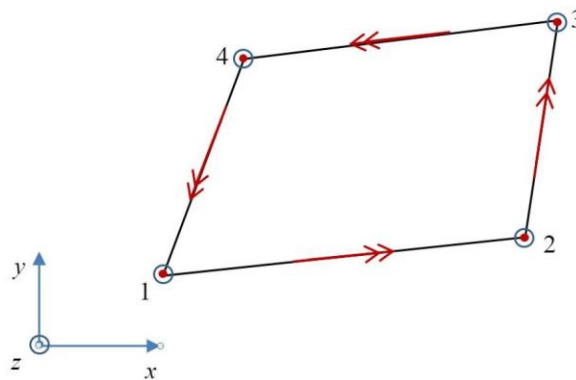


Figura 6.1 Elemento finito híbrido quadrilateral de placa com oito graus de liberdade (4 de rotação no contorno e quatro de deslocamentos fora do plano). Fonte: Sales (2018).

Referências bibliográficas

ABDALLA, H.; HASSAN, K. Shape effect on Morley's element. **Communications in Applied Numerical Methods**, v. 1, n. 5, pp. 255-259, 1985.

AGUIRRE, S. **Horus: An Origami-Unfolding Solar Array**. 2018. Tese de Doutorado. Princeton University.

ARIO, I.; NAKAZAWA, M. Dynamic Post-Buckling Analysis of the Micro-folding augusti 3D model with local symmetry-breakings. **AIMETA, Italian Theoretical and Applied Mechanics Society at ANCONA**, 2009.

CARLSSON, L.; DE RUVO, A.; FELLERS, C. Bending properties of creased zones of paperboard related to interlaminar defects. **Journal of Materials Science**, v. 18, n. 5, pp. 1365-1373, 1983.

DA SILVA, M. C.; DOS SANTOS, G. O. Densidade aparente de resíduos sólidos recém coletados. 2010.

DE TEMMERMAN, N. et al. Transformable structures in architectural engineering. **High Perform. Struct. Mater.** **VI**, v. 124, pp. 457-468, 2012.

DEMAINE, E. D. et al. (Non) existence of pleated folds: how paper folds between creases. In: **Graphs and Combinatorics**. Springer Japan, 2011. pp. 377-397.

DUDTE, L. H. et al. Programming curvature using origami tessellations. **Nature Materials**, v. 15, n. 5, pp. 583-589, 2016.

DUMONT, N. A. The hybrid boundary element method. In: **Mathematical and Computational Aspects**. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 117-130, 1987.

DUMONT, N. A.; MARÓN, C.A. Linear algebra issues in a family of advanced hybrid finite elements. In: **Computational Modelling and Advanced Simulations**. Springer, Dordrecht, pp. 255-275, 2011.

DUMONT, N. A.; DE OLIVEIRA, R. From frequency-dependent mass and stiffness matrices to the dynamic response of elastic systems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, n. 10-13, pp. 1813-1830, 2001.

DUMONT, N. A. Notas de Aula: Método Híbrido dos Elementos de Contorno, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 1996.

DUMONT, N. A.; PRAZERES, P. G. C. A family of advanced hybrid finite elements for the general analysis of time-dependent problems and non-homogeneous materials. In: **XXV CILAMCE – XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, p. 15 em CD, Recife, 10-12 Nov 2004.

DUMONT, N. A.; PRAZERES, P. G. C. Hybrid dynamic finite element families for the general analysis of time-dependent problems. In: **ICSSD 2005 - Third International Conference on Structural Stability and Dynamics**, Flórida (EUA), 19-22 Jun 2005. p. 10 em CD

FANG, H.; LI, S.; JI, H.; WANG, K. W. Dynamics of a bistable Miura-origami structure. **Physical Review E**, v. 95, n. 5, 2017.

FILIPOV, E. T.; LIU, K.; TACHI, T.; SCHENK, M.; PAULINO, G. H. Bar and hinge models for scalable analysis of origami. **International Journal of Solids and Structures**, v. 124, pp. 26-45, 2017.

FILIPOV, E. T.; TACHI, T.; PAULINO, G. H. Toward optimization of stiffness and flexibility of rigid, flat-foldable origami structures. In: **The 6th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education**, pp. 409-419, 2015.

FILIPOV, E. T.; TACHI, T.; PAULINO, G. H. Origami tubes assembled into stiff, yet reconfigurable structures and metamaterials. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 112, n. 40, pp. 12321-12326, 2015.

FILIPOV, E. T.; TACHI, T.; PAULINO, G. H. Deployable sandwich surfaces with high out-of-plane stiffness. **Journal of Structural Engineering**, v. 145, n. 2, pp. 04018244-1 to 15, 2019.

FUCHI, K.; BUSKOHL, P. R.; BAZZAN, G.; DURSTOCK, M. F.; REICH, G. W.; VAIA, R. A.; JOO, J. J. Design optimization challenges of origami-based mechanisms with sequenced folding. **Journal of Mechanisms and Robotics**, v. 8, n. 5, 2016.

GATTAS, J. M.; WU, W.; YOU, Z. Miura-base rigid origami: parameterizations of first-level derivative and piecewise geometries. **Journal of Mechanical Design**, v. 135, n. 11, 2013.

GATTAS, J. M.; YOU, Z. Geometric assembly of rigid-foldable morphing sandwich structures. **Engineering structures**, v. 94, pp. 149-159, 2015.

GIAMPIERI, A.; PEREGO, U.; BORSARI, R. A constitutive model for the mechanical response of the folding of creased paperboard. **International Journal of Solids and Structures**, v. 48, n. 16-17, pp. 2275-2287, 2011.

GILEWSKI, W.; PEŁCZYŃSKI, J.; STAWARZ, P. A comparative study of origami inspired folded plates. **Procedia Engineering**, v. 91, pp. 220-225, 2014.

HANNA, B. H.; LUND, J. M.; LANG, R. J.; MAGLEBY, S. P.; HOWELL, L. L. Waterbomb base: a symmetric single-vertex bistable origami mechanism. **Smart Materials and Structures**, v. 23, n. 9, 2014.

HULL, T. **Project origami: activities for exploring mathematics**. CRC Press, 2012.

LANG, R. J. **Twists, stilings, and tessellations: Mathematical methods for geometric origami**. CRC Press, 2017.

LECHENAULT, F.; THIRIA, B.; ADDA-BEDIA, M. Mechanical response of a creased sheet. **Physical Review Letters**, v. 112, n. 24, 2014.

LIU, K.; PAULINO, G. H. Nonlinear mechanics of non-rigid origami: an efficient computational approach. **Proc. R. Soc. A**, v. 473, n. 2206, pp. 1- 28, 2017.

LIU, K.; PAULINO, G. H. MERLIN: A MATLAB implementation to capture highly nonlinear behavior of non-rigid origami. In: **Proceedings of IASS Annual Symposia**. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), pp. 1-10, 2016.

LIU, K; TACHI, T; PAULINO, G. H. Invariant and smooth limit of discrete geometry folded from bistable origami leading to multistable metasurfaces. **Nature Communications**, v. 10, n. 4238, pp. 1-10, 2019.

LOBKOVSKY, A.; GENTGES, S.; LI, H., MORSE, D.; WITTEN, T. A. Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet. **Science**, v. 270, n. 5241, pp. 1482-1485, 1995.

MARGUERRE, K. Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 35, n. 6-7, p. 242-263, 1955.

MIURA, K. Method of packaging and deployment of large membranes in space. **The Institute of Space and Astronautical Science Report**, v. 618, pp. 1-9, 1985.

MIURA, K. Zeta-core sandwich-its concept and realization. **ISAS report**, v. 37, n. 6, pp. 137-164, 1972.

MIURA, K; NATORI, M. 2-D array experiment on board a space flyer unit. **Space Solar Power Review**, v. 5, n. 4, pp. 345-356, 1985.

MORLEY, L. S. D. The constant-moment plate-bending element. **Journal of Strain Analysis**, v. 6, n. 1, pp. 20-24, 1971.

NAGASAWA, S.; ENDO, R.; FUKUZAWA, Y.; UCHINO, S.; KATAYAMA, I. Creasing characteristic of aluminum foil coated paperboard. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 201, n.1-3: pp. 401-407, 2008.

NAGASAWA, S.; ENDO, R.; FUKUZAWA, Y.; UCHINO, S.; KATAYAMA, I. Deformation characteristics on creasing of paperboard under shallow indentation. In: **ICF10**, Honolulu (USA) 2001.

NAGASAWA, S.; FUKUZAWA, Y.; YAMAGUCHI, T.; TSUKATANI, S.; KATAYAMA, I. Effect of crease depth and crease deviation on folding deformation characteristics of coated paperboard. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 140, n. 1-3, pp. 157-162, 2003.

NAMIKI, A.; YOKOSAWA, S. Robotic origami folding with dynamic motion primitives. In: **2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)**. IEEE, pp. 5623-5628, 2015.

NISHIYAMA, Y. Miura folding: Applying origami to space exploration. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 79, n. 2, pp. 269-279, 2012.

O'ROURKE, J. **How to Fold It: The mathematics of Linkages, Origami, and Polyhedra**. Cambridge University Press, 2011.

PIAN, T. H.; TONG, P. Basis of finite element methods for solid continua. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 1, n. 1, p. 3-28, 1969.

PRADIER, C.; CAVORET, J.; DUREISSEIX, D.; JEAN-MISTRAL, C.; VILLE, F. An experimental study and model determination of the mechanical stiffness of paper folds. **Journal of Mechanical Design**, v. 138, n. 4, 2016.

PRATAPA, P. P.; SURYANARAYANA, P.; PAULINO, G. H. Bloch wave framework for structures with nonlocal interactions: Application to the design of origami acoustic metamaterials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 118, pp. 115-132, 2018.

PRAZERES, P. G. C. Desenvolvimento de elementos finitos híbridos para a análise de problemas dinâmicos usando superposição modal avançada. Dissertação Mestrado em Engenharia Civil - Estruturas, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, 2005.

PYDAH, A.; BATRA, R. C. Crush dynamics and transient deformations of elastic-plastic Miura-ori core sandwich plates. **Thin-Walled Structures**, v. 115, pp. 311-322, 2017.

QIU, C.; ZHANG, K.; DAI, J. S. Repelling-screw based force analysis of origami mechanisms. **Journal of Mechanisms and Robotics**, v. 8, n. 3, 2016.

REISSNER, E. On a variational theorem in elasticity. **Journal of Mathematics and Physics**, v. 29, n. 1-4, p. 90-95, 1950.

SALES, R.C. Implementação de elementos finitos híbridos planos para a análise de placas e cascas finas ou moderadamente espessas. Dissertação de Mestrado-Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2018. 94p.

SALES, R.C. Implementação avançada de elementos finitos híbridos planos para a análise de placas e cascas finas ou moderadamente espessas. Tese de Doutorado em andamento-Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

SCHENK, M.; GUEST, S. D. Origami folding: A structural engineering approach. In: **Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education**. CRC Press, Boca Raton, FL, pp. 291-304, 2011.

SILVERBERG, J. L.; NA, J. H.; EVANS, A. A.; LIU, B.; HULL, T. C.; SANTANGELO, C. D.; COHEN, I. Origami structures with a critical transition to bistability arising from hidden degrees of freedom. **Nature Materials**, v. 14, n. 4, pp. 389-393, 2015.

SONG, Z., MA, T.; TANG, R.; CHENG, Q.; WANG, X.; KRISHNARAJU, D.; JIANG, H. Origami lithium-ion batteries. **Nature Communications**, v. 5, pp. 31-40, 2014.

STELLMAN, P.; ARORA, W.; TAKAHASHI, S.; DEMAINE, E. D.; BARBASTATHIS, G. Kinematics and dynamics of nanostructured Origami™. In: **Proceedings of IMECE 2005, 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, November 5-11, 2005, Orlando, Florida USA**, pp. 541-548, 2005.

STRAUBEL, M.; HILLEBRANDT, M.; HÜHNE, C. Evaluation of different architectural concepts for huge deployable solar arrays for electric propelled space crafts. In: **14th European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Environmental Testing**. 2016.

TACHI, T. Simulation of rigid origami. **Origami**, v. 4, pp. 175-187, 2009.

WEI, Z. Y.; GUO, Z. V.; DUDTE, L.; LIANG, H. Y.; MAHADEVAN, L. Geometric mechanics of periodic pleated origami. **Physical review letters**, v. 110, n. 21, 2013.

ZHOU, C.; WANG, B.; MA, J.; YOU, Z. Dynamic axial crushing of origami crash boxes. **International journal of mechanical sciences**, v. 118, pp. 1-12, 2016.

ZIRBEL, S. A.; LANG, R. J.; THOMSON, M. W.; SIGEL, D. A.; WALKEMEYER, P. E.; TREASE, B. P.; HOWELL, L. L. Accommodating thickness in origami-based deployable arrays. **Journal of Mechanical Design**, v. 135, n. 11, 2013.