



**Mariana Gomes Dias dos Santos**

**Análise do custo computacional do método de  
Monte Carlo: uma abordagem estocástica  
aplicada a um problema de vibrações com  
stick-slip**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica PUC-Rio.

Orientador : Profa. Roberta de Queiroz Lima  
Co-orientador: Prof. Rubens Sampaio Filho

Rio de Janeiro  
Março de 2023



**Mariana Gomes Dias dos Santos**

**Análise do custo computacional do método de  
Monte Carlo: uma abordagem estocástica  
aplicada a um problema de vibrações com  
stick-slip**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Profa. Roberta de Queiroz Lima**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. Rubens Sampaio Filho**

Co-orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. Anderson Pereira**

Pontifícia Universidade Católica – PUC-RIO

**Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes**

Pontifícia Universidade Católica – PUC-RIO

**Prof. Daniel Alves Castello**

Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

**Dr. Victor Fernando Deorsola Sacramento**

Delta Mais Engenharia Ltda – Delta

Rio de Janeiro, 31 de Março de 2023

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Mariana Gomes Dias dos Santos**

Ficha Catalográfica

Santos, Mariana Gomes Dias dos

Análise do custo computacional do método de Monte Carlo: uma abordagem estocástica aplicada a um problema de vibrações com stick-slip / Mariana Gomes Dias dos Santos; orientador: Roberta de Queiroz Lima; co-orientador: Rubens Sampaio Filho. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2023.

v., 95 f: il. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui bibliografia

1. Método de Monte Carlo;. 2. Quantificação de incertezas;. 3. Aproximações analíticas;. 4. Aproximações numéricas;. 5. Custo computacional;. 6. Tempo de execução;. 7. Vibrações com stick-slip..

I. Lima, Roberta. II. Sampaio, Rubens. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 621

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha orientadora, Professora Roberta de Queiroz Lima, e ao meu coorientador, Professor Rubens Sampaio, pela dedicação e ensinamentos durante esses anos. Agradeço também à todos os professores do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, aos funcionários do departamento, e em especial ao Wagner, técnico do Laboratório de vibrações, por sempre estar disposto a ajudar.

Meu especial agradecimento aos meus pais, Carlucio Souza e Ana Cristina Gomes, e à minha madrinha, Carmelucia Souza, por todo amor e apoio incondicional que me deram durante toda a minha vida, e por sempre acreditarem em mim.

Desejo igualmente agradecer aos colegas do laboratório, que se tornaram grandes amigos, Hector Eduardo Goicoechea e Ingrid Pires. Gostaria de agradecer em especial à Ingrid, pela amizade, por sempre me encorajar e tornar os dias mais leves. Ao Hector Eduardo, por toda ajuda nesses últimos anos, pelo companheirismo e pelas palavras de incentivo.

Agradeço também o apoio dos meus amigos Ana Luiza Barchilon, Audrey Monlevade, Julia Liz, Paloma Rodrigues e Pedro Caldas.

Ao CNPq, gostaria de agradecer pelo suporte financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Resumo

Santos, Mariana Gomes Dias dos; Lima, Roberta; Sampaio, Rubens. **Análise do custo computacional do método de Monte Carlo: uma abordagem estocástica aplicada a um problema de vibrações com stick-slip**. Rio de Janeiro, 2023. 95p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Um dos objetivos desta tese é analisar o custo computacional do método de Monte Carlo aplicado a um problema modelo de dinâmica, considerando incertezas na força de atrito. O sistema mecânico a ser estudado é composto por um oscilador de um grau de liberdade que se desloca sobre uma esteira em movimento. Considera-se a existência de atrito seco entre a massa do oscilador e a esteira. Devido a uma descontinuidade na força de atrito, a dinâmica resultante pode ser dividida em duas fases que se alternam, chamadas de *stick* e *slip*. Neste estudo, um parâmetro da força de atrito dinâmica é modelado como uma variável aleatória. A propagação de incerteza é estudada por meio da aplicação do método de Monte Carlo, considerando três abordagens diferentes para calcular aproximações da resposta dos problemas de valor inicial que modelam a dinâmica do problema: NV) aproximações numéricas calculadas usando método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens com passo de integração variável; NF) aproximações numéricas calculadas usando método de Runge-Kutta de 4º ordem com passo de integração fixo; AN) aproximação analítica obtida com o método de múltiplas escalas. Nas abordagens NV e NF, para cada valor de parâmetro, uma aproximação numérica foi calculada. Já para a AN, apenas uma aproximação analítica foi calculada e avaliada para os diferentes valores usados. Entre as variáveis aleatórias de interesse associadas ao custo computacional do método de Monte Carlo, encontram-se o tempo de execução e o espaço em disco consumido. Devido à propagação de incertezas, a resposta do sistema é um processo estocástico com uma sequência aleatória de fases de stick e slip. Essa sequência pode ser caracterizada pelas seguintes variáveis aleatórias: instantes de transição entre as fases de stick e slip, suas durações e o número de fases. Para estudar as variáveis associadas ao custo computacional e ao processo estocástico foram construídos modelos estatísticos, histogramas normalizados e gráficos de dispersão. O objetivo é estudar a dependência entre as variáveis do processo estocástico e o custo computacional. Porém, a construção destas análises não é simples devido à dimensão do problema e à impossibilidade de visualização das distribuições conjuntas de vetores aleatórios de três ou mais dimensões.

## Palavras-chave

Método de Monte Carlo; Quantificação de incertezas; Aproximações analíticas; Aproximações numéricas; Custo computacional; Tempo de execução; Vibrações com stick-slip.

## Abstract

Santos, Mariana Gomes Dias dos; Lima, Roberta (Advisor); Sampaio, Rubens (Co-Advisor). **Analysis of the computational cost of the Monte Carlo method: a stochastic approach applied to a vibration problem with stick-slip**. Rio de Janeiro, 2023. 95p. Tese de doutorado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

One of the objectives of this thesis is to analyze the computational cost of the Monte Carlo method applied to a toy problem concerning the dynamics of a mechanical system with uncertainties in the friction force. The system is composed by an oscillator placed over a moving belt. The existence of dry friction between the two elements in contact is considered. Due to a discontinuity in the frictional force, the resulting dynamics can be divided into two alternating phases, called stick and slip. In this study, a parameter of the dynamic friction force is modeled as a random variable. Uncertainty propagation is analyzed by applying the Monte Carlo method, considering three different strategies to compute approximations to the initial value problems that model the system's dynamics: NV) numerical approximations computed with the Runge-Kutta method of 4th and 5th orders, with variable integration time-step; NF) numerical approximations computed with the Runge-Kutta method of 4th order, with a fixed integration time-step; AN) analytical approximation obtained with the multiple scale method. In the NV and NF strategies, for each parameter value, a numerical approximation was calculated, whereas for the AN strategy, only one analytical approximation was calculated and evaluated for the different values of parameters considered. The run-time and the storage are among the random variables of interest associated with the computational cost of the Monte Carlo method. Due to uncertainty propagation, the system response is a stochastic process given by a random sequence of stick and slip phases. This sequence can be characterized by the following random variables: the transition instants between the stick and slip phases, their durations and the number of phases. To study the random processes and the variables related to the computational costs, statistical models, normalized histograms and scatterplots were built. Afterwards, a joint analysis was performed to study the dependence between the variables of the random process and the computational cost. However, the construction of these analyses is not a simple task due to the impossibility of viewing the distribution of joint distributions of random vectors of three or more dimensions.

## Keywords

Monte Carlo method;    Uncertainty quantification;    Analytical approximations;    Numerical approximations;    Computacional cost;    Run-time; Stick-slip vibrations.



# Sumário

1	Introdução	15
1.1	Métodos de aproximação	17
1.2	Custo Computacional: método de Monte Carlo combinado com métodos de aproximação	18
1.2.1	Tempos de execução	21
1.3	Problema modelo e objetivos	22
1.3.1	Problema modelo: sistema com vibrações de <i>stick-slip</i>	22
1.3.2	Objetivos	23
1.4	Organização da tese	24
2	Problema modelo: oscilador com atrito seco	25
2.1	Atrito seco	25
2.1.1	Atrito de Coulomb	26
2.1.2	Atrito de Coulomb modificado	26
2.1.3	Atrito de Coulomb modificado não linear	27
2.2	Problema modelo: Oscilador com vibrações de <i>stick-slip</i>	28
3	Métodos de aproximação	32
3.1	Métodos de perturbação	32
3.1.1	Método de Lindstedt-Poincaré	33
3.1.2	Método de múltiplas escalas	34
3.1.3	Cálculo de um aproximação analítica para fases de <i>slip</i>	35
3.1.4	Previsão dos instantes de transição	38
3.2	Aproximação numérica	41
3.2.1	Validação das aproximações analíticas	45
4	Método de Monte Carlo: custo computacional	48
4.1	Método Monte Carlo	48
4.2	Estratégias	51
4.2.1	Abordagem AN	51
4.2.2	Abordagem NV	53
4.2.3	Abordagem NF	53
4.3	Modelagem da variável aleatória $F_d$	54
5	Análise dos resultados	56
5.1	Validação da aproximação analítica	57
5.2	Construção dos modelos estatísticos das variáveis associadas ao processo estocástico	59
5.3	Construção dos modelos estatísticos do tempo de execução e espaço em disco	64
5.3.1	Modelos estatísticos dos tempos de execução	64
5.3.2	Modelo estatístico de espaço em disco	68
5.4	Relação entre as variáveis de tempo de execução e do processo estocástico	70

5.4.1	Transformação de coordenadas	78
5.4.2	Análise de independência das variáveis aleatórias	80
6	Considerações finais	87
	Referências bibliográficas	90

## Lista de figuras

Figura 2.1	Representação do modelo de Coulomb com $f_d = 2$ N.	26
Figura 2.2	Representação do modelo de Coulomb modificado com $f_e = 2$ N e $f_d = 1$ N.	27
Figura 2.3	Representação do modelo de Coulomb modificado não linear com $a = 0.1$ e $f_d = 0.5$ N.	28
Figura 2.4	Oscilador com atrito seco entre as superfícies da massa e da esteira.	28
Figura 2.5	Esquema da dinâmica de uma resposta com vibração de <i>stick-slip</i> .	30
Figura 3.1	Velocidade e deslocamento do sistema usando as aproximações analíticas e reduzida.	39
Figura 3.2	Esquema ilustrativo de como calcular os instantes de transição com uma aproximação analítica.	41
Figura 3.3	Discretização de um intervalo de integração.	41
Figura 3.4	Esquema ilustrativo de como calcular uma aproximação numérica.	42
Figura 3.5	Simulação das aproximações da resposta de $\dot{y}(t)$ calculada usando aproximações numéricas com a) passo variável e b) passo constante.	43
Figura 3.6	Instantes de transição entre as fases de <i>stick</i> e <i>slip</i> com passo de tempo de 2.	44
Figura 3.7	Instantes de transição entre as fases de <i>stick</i> e <i>slip</i> com passo de tempo de 0.0002.	44
Figura 3.8	Aproximações do deslocamento e velocidade do sistema usando os métodos de múltiplas escalas e de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens.	46
Figura 3.9	Diagrama de fase das aproximações da resposta do problema modelo usando os métodos de múltiplas escalas e de Runge-Kutta de 4º e 5º ordem.	47
Figura 4.1	Algoritmo para as simulações de Monte Carlo.	48
Figura 4.2	Histogramas normalizados construídos com a) 500 e b) $10^5$ realizações de uma variável aleatória com distribuição normal com média igual a um e variância zero.	49
Figura 4.3	Histogramas normalizados construídos com a) 100.000 e b) 10.000.000 realizações de duas variáveis aleatórias independentes com distribuição normal com média igual a um e variância igual a zero.	50
Figura 4.4	Parte do algoritmo usado na abordagem AN.	52
Figura 4.5	Parte do algoritmo usado na abordagem NV.	53
Figura 4.6	Parte do algoritmo usado na abordagem NF.	54
Figura 4.7	FDP de $F_d$ e um histograma normalizado com $10^5$ realizações.	55

Figura 5.1	A velocidade $\dot{y}(t)$ para uma realização ao longo das primeiras fases de <i>stick</i> e <i>slip</i> .	58
Figura 5.2	Histograma normalizado do erro e a tolerância definida.	59
Figura 5.3	Esquema de uma realização do processo estocástico.	59
Figura 5.4	Histograma normalizado do número de fases de <i>stick</i> e <i>slip</i> , respectivamente, $N^{stick}$ e $N^{slip}$ .	60
Figura 5.5	Histograma normalizado das durações totais das fases de <i>stick</i> e <i>slip</i> , respectivamente, $\bar{D}^{stick}$ e $\bar{D}^{slip}$ .	61
Figura 5.6	Gráfico de dispersão entre as variáveis em a) do total da duração das fases de <i>stick</i> e <i>slip</i> e $f_d$ e em b) do número de fases de <i>slip</i> e $f_d$ .	62
Figura 5.7	Diagrama de fase de uma realização com $f_d = 0,8$ .	63
Figura 5.8	Diagrama de fase de uma realização com $f_d = 0,8$ .	63
Figura 5.9	Histogramas normalizados para dos tempos de execução total associados a abordagem a) AN, b) NV e c) NF.	66
Figura 5.10	Histogramas normalizados dos tempos de execução de a) <i>stick</i> , b) <i>slip</i> , c) total associados a abordagem AN.	66
Figura 5.11	Histogramas normalizados dos tempos de execução de a) <i>stick</i> , b) <i>slip</i> , c) total associados a abordagem NV.	67
Figura 5.12	Histogramas normalizados dos tempos de execução de a) <i>stick</i> , b) <i>slip</i> , c) total associados a abordagem NF.	68
Figura 5.13	Histogramas normalizados do espaço em disco.	69
Figura 5.14	Gráfico de dispersão das variáveis dos tempos de execução associados à abordagem a) AN; b) NV; e c) NF com a variável de entrada $F_d$ .	71
Figura 5.15	Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados a) dos tempos de execução total com a força de atrito $f_d$ associado à abordagem a) AN; b) NV; e c) NF.	72
Figura 5.16	Gráfico de dispersão referente a abordagem AN entre as realizações das variáveis a) $r_{AN}^{stick}$ e $n^{stick}$ ; b) $r_{AN}^{stick}$ e $d^{stick}$ ; c) $r_{AN}^{slip}$ e $n^{slip}$ ; e d) $r_{AN}^{slip}$ e $n^{slip}$ .	73
Figura 5.17	Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados das variáveis aleatórias referente à abordagem AN sendo em a) $r_{AN}^{stick}$ e $n^{stick}$ ; b) $r_{AN}^{stick}$ e $d^{stick}$ ; c) $r_{AN}^{slip}$ e $n^{slip}$ ; e d) $r_{AN}^{slip}$ e $n^{slip}$ .	74
Figura 5.18	Gráfico de dispersão referente a abordagem NV entre as realizações das variáveis a) $r_{NV}^{stick}$ e $n^{stick}$ ; b) $r_{NV}^{stick}$ e $d^{stick}$ ; c) $r_{NV}^{slip}$ e $n^{slip}$ ; e d) $r_{NV}^{slip}$ e $n^{slip}$ .	75
Figura 5.19	Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados das variáveis aleatórias referente à abordagem NV sendo em a) $r_{NV}^{stick}$ e $n^{stick}$ ; b) $r_{NV}^{stick}$ e $d^{stick}$ ; c) $r_{NV}^{slip}$ e $n^{slip}$ ; e d) $r_{NV}^{slip}$ e $n^{slip}$ .	76
Figura 5.20	Gráfico de dispersão referente a abordagem NF entre as realizações das variáveis a) $r_{NF}^{stick}$ e $n^{stick}$ ; b) $r_{NF}^{stick}$ e $d^{stick}$ ; c) $r_{NF}^{slip}$ e $n^{slip}$ ; e d) $r_{NF}^{slip}$ e $n^{slip}$ .	77
Figura 5.21	Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados das variáveis aleatórias referente à abordagem NF sendo em a) $r_{NF}^{stick}$ e $n^{stick}$ ; b) $r_{NF}^{stick}$ e $d^{stick}$ ; c) $r_{NF}^{slip}$ e $n^{slip}$ ; e d) $r_{NF}^{slip}$ e $n^{slip}$ .	77

- Figura 5.22 Gráfico de dispersão das realizações das variáveis  $R_{NF}^{slip}$  e  $D^{slip}$  em a) com as coordenadas originais e em b) com as novas coordenada da transformação  $\pi_3$ ; e os histogramas conjuntos normalizados das variáveis  $R_{NF}^{slip}$  e  $D^{slip}$  em c) com as coordenadas originais e em d) com as novas coordenada da transformação  $\pi_3$ . 79
- Figura 5.23 Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{2,AN}^{stick}$  com  $N_2^{stick}$  e c) e d)  $\bar{R}_{2,AN}^{stick}$  com  $D_2^{stick}$ , respectivamente, para a abordagem AN. 81
- Figura 5.24 Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{2,AN}^{slip}$  com  $N_2^{slip}$  e c) e d)  $\bar{R}_{2,AN}^{slip}$  com  $D_2^{slip}$ , respectivamente, para a abordagem AN. 82
- Figura 5.25 Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{3,NV}^{stick}$  com  $N_3^{stick}$  e c) e d)  $\bar{R}_{3,NV}^{stick}$  com  $D_2^{stick}$ , respectivamente, para a abordagem NV. 83
- Figura 5.26 Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{3,NV}^{slip}$  com  $N_3^{slip}$  e c) e d)  $\bar{R}_{3,NV}^{slip}$  com  $D_2^{slip}$ , respectivamente, para a abordagem NV. 84
- Figura 5.27 Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{3,NF}^{stick}$  com  $N_3^{stick}$  e c) e d)  $\bar{R}_{3,NF}^{stick}$  com  $D_3^{stick}$ , respectivamente, para a abordagem NF. 85
- Figura 5.28 Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{3,NF}^{slip}$  com  $N_3^{slip}$  e c) e d)  $\bar{R}_{3,NF}^{slip}$  com  $D_3^{slip}$ , respectivamente, para a abordagem NF. 86

## Lista de tabelas

Tabela 3.1	Valor dos parâmetros usados nas simulações.	39
Tabela 3.2	Custos computacionais das aproximações.	47
Tabela 5.1	Valor dos parâmetros usados nas simulações.	57
Tabela 5.2	Estatísticas amostrais das variáveis $N^{stick}$ e $N^{slip}$ .	60
Tabela 5.3	Estatísticas amostrais das variáveis $\bar{D}^{stick}$ e $\bar{D}^{slip}$ .	62
Tabela 5.4	Estatísticas de primeira ordem das variáveis $R_{AN}$ , $R_{NV}$ e $R_{NF}$ .	66
Tabela 5.5	Estatísticas para $S_{AN}$ e $S_{NV}$ .	69

# 1

## Introdução

O método de Monte Carlo (MC), utilizado na construção de modelos estatísticos (uma aproximação para modelos probabilísticos), em integração numérica e em otimização de funções objetivo, se tornou muito popular devido a sua aplicabilidade e simplicidade de implementação [1]. O método pode ser aplicado em diversas áreas como pesquisa operacional, previsão climática, mercado financeiro e engenharia. Nesta tese, o método MC será usado como uma ferramenta para construir modelos estatísticos da resposta de um sistema com uma entrada estocástica. Na construção de tais modelos, o MC pode ser dividido em três etapas: a geração das realizações de entrada, a transformação do objeto aleatório e a obtenção das realizações de saída. Na primeira etapa, as realizações do objeto aleatório de entrada são geradas de acordo com um modelo probabilístico conhecido. Na segunda etapa, o método transforma um problema estocástico em vários problemas determinísticos, onde em cada um é utilizado uma realização do objeto aleatório de entrada. Devido à propagação de incertezas, os resultados obtidos pela transformação também são objetos aleatórios, conforme mostrado em [2, 3]. Na última etapa, para cada amostra do objeto aleatório de saída é construído um modelo estatístico. Um critério de convergência é usado para determinar se as estatísticas amostrais atendem a um erro pré-definido. Se o critério não for atendido, deve-se aumentar o tamanho da amostra de entrada até que o critério seja cumprido, isto quando a variável tiver estatísticas definidas. Em [4, 5] são tratados os conceitos de probabilidades que baseiam o método, sua descrição e algumas aplicações numéricas em um ambiente MATLAB.

Em geral, a construção de um modelo estatístico com acurácia exige uma amostra composta por um número grande de realizações. Por isso, trabalhar com este método significa lidar com uma grande quantidade de dados [6]. Vale observar que o método de MC é baseado na Lei dos Grandes Números [5]. O tamanho da amostra também influencia na qualidade da construção de histogramas normalizados que podem ser construídos para os objetos aleatórios de saída. Além disso, mensurar se o tamanho da amostra é suficiente torna-se mais complexo quando o problema implica em trabalhar com espaços de dimensão superior a dois, onde aparece uma dificuldade extra na visualização

das distribuições de probabilidade.

A medida que o número de realizações aumenta, o histograma normalizado tende a se aproximar da distribuição de probabilidade do objeto aleatório de interesse. Para o caso de vetores aleatórios, cuja distribuição de probabilidade conjunta é dada por uma superfície (ou hipersuperfície), normalmente um número ainda maior de realizações é necessário, em comparação com o que seria utilizado para aproximar a distribuição para uma variável aleatória. O tamanho da amostra do objeto aleatório está relacionado com a acurácia tanto dos modelos estatísticos quanto dos histogramas normalizados, que são ferramentas importantes para analisar os objetos aleatórios de saída. Porém, em alguns casos não é possível gerar o tamanho de amostra necessário devido a limitações computacionais de *hardware* (como memória e processador) e a uma limitação temporal (como o tempo de execução para tratar todas as realizações). Em contrapartida, geralmente, o método de Monte Carlo é paralelizável, ou seja, é possível dividir um problema em várias partes e executá-las de forma independente, contribuindo para a diminuição do tempo de execução. Outro ponto importante relacionado ao custo computacional é o tipo de transformação à qual as realizações são submetidas. Estas transformações podem ser simples, como no caso da soma de duas variáveis aleatórias, ou complexas, como por exemplo um problema de valor inicial (PVI).

Nesta tese, o método de Monte Carlo foi aplicado para construir o modelo estatístico de um processo aleatório associado à dinâmica de um sistema. O sistema a ser estudado é composto por um oscilador de um grau de liberdade que se desloca sobre uma esteira em movimento. Considera-se a existência de atrito seco entre a massa do oscilador e a esteira. Devido a uma descontinuidade na força de atrito, a dinâmica resultante pode ser dividida em duas fases que se alternam, chamadas de *stick* e *slip*. O objeto aleatório de entrada é uma variável aleatória que modela um dos parâmetros da força de atrito seco. A transformação à qual cada realização será submetida é o PVI que modela a dinâmica do sistema. A saída é um processo estocástico associado à dinâmica do sistema e às variáveis aleatórias associadas ao custo computacional. Foram usados três métodos de aproximação diferentes para calcular aproximações para a resposta de cada realização. Nesta tese, o custo computacional consumido para executar cada método foi modelado como uma variável aleatória. Estudou-se a distribuição conjunta do custo e de variáveis aleatórias associadas ao processo estocástico da resposta do sistema.



## 1.1

### Métodos de aproximação

Sistemas dinâmicos, em geral, são modelados por problemas de valor inicial compostos por equações diferenciais ordinárias (EDO) ou parciais (EDP), com condições iniciais e/ou de contorno. Em [7–9] alguns dos métodos utilizados para modelar sistemas dinâmicos podem ser encontrados.

No contexto de problemas dinâmicos estocásticos estudados através do método de Monte Carlo, a etapa de transformação das realizações exige resolver problemas de valor inicial. Isto implica que, para cada realização, um PVI deve ser resolvido. Ou seja, é preciso integrar uma equação diferencial de acordo com suas condições iniciais e/ou de contorno. Quando um PVI não tem solução analítica conhecida ou calculá-la é uma tarefa complexa, métodos de aproximação podem ser usados. Os métodos mais populares são os analíticos [10–13] e numéricos [14–17]. Ambos podem fornecer aproximações com tanta precisão como for desejada, porém com custos diferentes.

Os métodos numéricos foram muito desenvolvidos nos últimos anos e amplamente aplicados em problemas de diversas áreas da engenharia. Pacotes computacionais de fácil utilização foram criados e hoje fazem parte dos mais tradicionais programas de simulação numérica. Segundo Atkinson [14] e Savi [17], o método de Runge-Kutta é um dos métodos numéricos mais populares por aliar simplicidade de implementação e precisão. De forma geral, para a aplicação desse método, é preciso definir um intervalo de integração e posteriormente discretizá-lo. Assim, é criada uma malha, cuja partição pode ser uniforme ou não, onde o incremento entre dois pontos contíguos é chamado de passo de integração. Usando uma integração numérica no domínio do tempo, uma aproximação para a resposta do sistema é calculada para cada ponto da malha usando informações dos pontos anteriores. Por isto, a acurácia de uma aproximação está relacionada com a discretização da malha, quanto mais refinada uma malha, mais próximo serão os pontos e menor o erro de uma aproximação. Porém, isto acarreta um número maior de cálculos, o que por consequência aumenta o custo computacional, tanto em relação ao tempo de execução, quanto em espaço em disco. Em compensação, com um passo de integração grande, a integração pode perder precisão e não conseguir identificar características importantes da resposta. Adicionalmente, como aproximações numéricas são calculadas ponto a ponto de acordo com as informações dos pontos anteriores, este tipo de aproximação não permite o entendimento direto de como a dinâmica depende dos parâmetros do problema. Por isso, ao mudar o valor de algum parâmetro, é necessário fazer uma nova integração numérica, ou seja, para a mesma quantidade de valores analisados, a mesma quantidade

de integrações numéricas devem ser calculadas.

Os métodos analíticos também podem ser usados para calcular aproximações de respostas de PVIs. Dispondo de uma expressão analítica para fazer uma análise paramétrica, ao invés de integrações numéricas para cada valor de parâmetro, seria necessário fazer apenas substituições de valores. Uma vez que com aproximações analíticas é possível explicitar como a resposta depende dos parâmetros do sistema. Na literatura encontra-se alguns tipos de métodos analíticos como o método do balanço harmônico [18, 19] e os métodos de perturbação [20–23].

Os métodos de perturbação são uma família de técnicas analíticas amplamente aplicadas para calcular aproximações para PVIs. O objetivo dos métodos de perturbação é transformar um PVI em uma família de PVI lineares, os quais as soluções analíticas são conhecidas. Assim, solucionando hierarquicamente toda família de PVIs, uma solução do problema pode ser encontrada. Porém, esta nova família de PVIs é formada por uma quantidade infinita de problemas, o que torna a tarefa de resolução impossível de ser concluída. Como alternativa, pode-se calcular uma aproximação, calculando hierarquicamente a solução de alguns destes PVIs. Um inconveniente dos métodos analíticos é definir quantos PVIs precisam ser resolvidos para obter-se uma aproximação com acurácia. Se um número insuficiente de PVIs for utilizado, pode-se obter resultados incoerentes. E pelo contrário, se um número excessivo for usado, o custo é desnecessariamente aumentado. Alguns dos métodos de perturbação mais usados são Lindstedt-Poincaré (MLP) [24–26] e múltiplas escalas (MME) [27–29]. Nesta tese, o método usado para calcular uma aproximação da solução do PVI do problema modelo é o método de múltiplas escalas.

## 1.2

### **Custo Computacional: método de Monte Carlo combinado com métodos de aproximação**

No artigo [30], os autores fizeram uma análise paramétrica de um PVI não linear considerando incertezas. O método de Monte Carlo foi utilizado com o objetivo de construir um modelo estatístico da resposta do PVI. Nesse problema foi estudada a influência de dois parâmetros, um deles assumia 40 valores diferentes e o outro 8, totalizando 320 combinações a serem analisadas. Para cada combinação foram geradas 2 mil realizações totalizando 640000 integrações numéricas. Para efetuar todas essas integrações de forma sequencial, seriam necessários 2,5 anos. Como alternativa, os autores escolheram utilizar a estratégia de paralelização. As integrações foram divididas em 16 computadores, reduzindo o tempo de simulação para 55 dias. Deve-se notar que, mesmo

com a paralelização, o tempo de execução continuou relativamente longo e demandou quase 2 meses.

No artigo [31], os autores tinham como objetivo estudar a resposta de um sistema eletromecânico com vibrações com *stick-slip* considerando incertezas. *Stick-slip* é um tipo particular de vibração que se caracteriza por apresentar uma dinâmica dividida em duas fases, uma delas chamada de *stick* e a outra de *slip*, que se alternam. Nesse trabalho, o método de Monte Carlo também foi usado para construir um modelo estatístico para as variáveis de saída da resposta do sistema. Para calcular aproximações para a solução dos PVI foi usado o método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens. Nesse estudo, foram considerados dois valores para o coeficiente de atrito, além de duas fontes de incertezas, que foram modeladas como variáveis aleatórias na entrada do sistema. Para cada um dos valores do coeficiente de atrito, foram geradas 10 mil realizações das variáveis aleatórias de entrada. No total foram feitas 20 mil integrações numéricas. Com o objetivo de diminuir o tempo de execução total das integrações numéricas, os cálculos foram paralelizados, o que reduziu o tempo de execução total para 30 horas. Outra estratégia adotada no problema para facilitar o pós processamento foi dividir os 20GB de dados gerados através das integrações numéricas em 40 arquivos com 500 MB cada um. Essa estratégia, de dividir em vários arquivos de tamanho menor, foi escolhida dado que tratar vários arquivos de 500MB é mais eficiente computacionalmente do que um único arquivo com 20GB.

O alto custo computacional de executar o método de Monte Carlo combinado com integrações numéricas e a limitação dos recursos computacionais destacam a importância de estudar os tempos de execução e o espaço em disco. Afinal, o custo computacional pode inviabilizar a execução dos cálculos. O tempo de execução também pode variar com os valores dos parâmetros de um problema. Com o objetivo de diminuir o custo computacional, nos artigos [32, 33], os autores propuseram combinar o método de Monte Carlo com uma integração analítica ao invés de uma numérica e compararam os tempos de execução entre as duas abordagens.

No artigo [32], o sistema analisado é modelado por um PVI envolvendo a equação de Duffing [34] onde a condição inicial de deslocamento foi modelada como uma variável aleatória com distribuição beta. Foram consideradas 66 distribuições beta diferentes, cada uma com  $10^4$  realizações. Dois métodos de aproximação foram usados para calcular aproximações das respostas dos PVIs, o método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens e uma aproximação analítica de 2º ordem calculada pelo método de Lindstedt-Poincaré. Com isso,  $66 \cdot 10^4$  integrações numéricas foram calculadas e o tempo de execução total foi de

aproximadamente 6 horas. Já com o método de Lindstedt-Poincaré apenas uma aproximação analítica foi calculada e avaliada para cada realização. O tempo de execução para concluir o método de MC combinado com a aproximação analítica foi de aproximadamente 3 minutos. Neste artigo também foi estudado a influência do parâmetro que controla a não linearidade da equação de Duffing. Para este caso, também foram consideradas 66 distribuições beta diferentes com  $10^4$  realizações e 11 valores do parâmetro que controla a não linearidade. Para o método de MC combinado com o método de Runge-Kutta,  $7,26 \cdot 10^6$  integrações numéricas foram feitas e os tempos de execução total aumentaram de acordo com o aumento do valor do parâmetro que controla a não linearidade. Já para o método de MC combinado com a aproximação analítica, os tempos de execução em relação ao valor do parâmetro que controla a não linearidade não aumentaram.

No artigo [33] também é proposto combinar o método de MC com um método analítico para diminuir o custo computacional. Neste artigo, foi usado um sistema cuja dinâmica foi modelada por um PVI envolvendo atrito seco onde a condição inicial de deslocamento também foi modelada como uma variável aleatória com distribuição beta. Foram consideradas 22 distribuições beta diferentes cada uma com  $10^4$  realizações. Dois métodos de aproximação foram usados para calcular aproximações das respostas dos PVIs, o método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens e uma aproximação analítica de 1º ordem calculada pelo método de múltiplas escalas. Com a abordagem do método de MC combinado com o método de Runge-Kutta foram feitas  $22 \cdot 10^4$  integrações numéricas com tempo de execução total de aproximadamente 10 dias. Enquanto que com o método de múltiplas escalas apenas uma aproximação analítica foi calculada e avaliada para cada realização. O tempo de execução para concluir o método de MC combinado com a aproximação analítica foi de aproximadamente 11 minutos.

Analisando a diferença entre os tempos de execução do método de MC combinado com aproximações numéricas e analíticas, pode-se concluir que a escolha do método de integração utilizado para calcular as aproximações tem grande influência no custo computacional. Também pode-se observar que os tempos de execução são influenciados pelo valor dos parâmetros de um problema, principalmente na abordagem com aproximações numéricas. As variáveis de tempo de execução e espaço em disco também são aleatórias, apesar de normalmente serem tratadas de forma determinística. Nos artigos [35, 36] os autores usaram o mesmo sistema analisado em [33]. Porém, nestes novos trabalhos o tempo de execução foi modelado como uma variável aleatória.

Nos artigos [35, 36] também foi usado o método de MC combinado com

o método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens e com o método de múltiplas escalas. Nestes trabalhos, um parâmetro da força de atrito seco foi modelado como uma variável aleatória com distribuição uniforme. Com o objetivo de construir modelos estatísticos e histogramas normalizados para a variável do tempo de execução foram geradas  $10^5$  realizações. Com a abordagem do método de MC combinado com o método de Runge-Kutta foram feitas  $10^5$  integrações numéricas. A média e o desvio padrão para as realizações da variável do tempo de execução para essa abordagem foram de 41,7 segundos e 3,1 segundos. Já com método de múltiplas escalas apenas uma aproximação analítica de 1º ordem foi calculada e avaliada para cada realização. A média e o desvio padrão para as realizações da variável do tempo de execução para essa abordagem foram de 10,4 segundos e 1,2 segundos. Mostrando que, em média, a abordagem com aproximação analítica é 4,00 vezes mais rápida que com a abordagem numérica e também é menos sensível a variação, uma vez que o desvio padrão é 2,58 vezes menor.

### 1.2.1

#### Tempos de execução

Um dos objetivos desta tese é o estudo dos tempos de execução através da construção de modelos estatísticos e histogramas normalizados. Este tipo de análise é uma prática comum na área da computação, onde estudos sugerem a existência de uma lógica por trás do comportamento dos tempos de execução que podem auxiliar em um melhor entendimento a respeito da performance de algoritmos. Como nos artigos [37, 38], onde os autores estudaram os tempos de execução aplicados em algoritmos de busca local estocástica. Algoritmos de busca local estocástica são métodos de escolha usados para resolver decisões computacionais e problemas de otimização, usados em diversas áreas como ciência da computação, pesquisa operacional, engenharia, química entre outras [39–41]. Segundo Barrero em [37] e Ribeiro em [38], os primeiros estudos sobre o comportamento dos tempos de execução estão nos artigos [42, 43].

No artigo [37], os autores construíram modelos estatísticos para as variáveis de tempo de execução associados à oito algoritmos de busca. Na análise realizada, apenas os tempos de execução bem sucedidos foram avaliados, ou seja, só execuções que conseguiram encontrar uma solução foram consideradas. Segundo este artigo, a distribuição da variável dos tempos de execução geralmente pode ser aproximada por uma distribuição lognormal, com exceção de alguns problemas de maior complexidade, que são melhor aproximadas por uma distribuição exponencial. Além disso, foi mostrado que parâmetros do algoritmo podem influenciar a distribuição da variável de tempo de execução.

Já no artigo [38], os autores tinham o objetivo de descrever uma nova ferramenta para comparar dois algoritmos baseados em busca local estocástica. Em um primeiro momento, os autores consideraram que a distribuição dos tempos de execução de dois algoritmos de busca local estocástica seguiam uma distribuição exponencial, com isso foi calculado a probabilidade de um deles encontrar um valor de solução em um menor tempo. Em seguida, esse conceito foi extrapolado de forma a considerar que os tempos de execução pudessem ter outras distribuições.

Apesar do estudo dos tempos de execução ser uma prática comum na área de computação, nesta tese, a análise dos tempos de execução foi feita com uma abordagem e aplicação diferente. Os tempos de execução estudados são associados a combinação do método de Monte Carlo com métodos de aproximação, com objetivo de estudar a influência destes métodos na distribuição de probabilidade e modelo estatístico das variáveis, assim como a influência dos parâmetros do sistema. Para isso, foi usado um problema modelo que envolve vibrações com *stick-slip*.

## 1.3

### Problema modelo e objetivos

#### 1.3.1

##### Problema modelo: sistema com vibrações de *stick-slip*

O problema modelo usado nesta tese é um oscilador de um grau de liberdade composto por um amortecedor, uma mola e uma massa que se desloca sobre uma esteira que também está em movimento. Considera-se a existência de atrito seco entre a massa do oscilador e a esteira. O atrito seco é uma força de oposição ao movimento relativo entre duas superfícies em contato. A existência da força de atrito seco pode causar na dinâmica do sistema um fenômeno chamado *stick-slip*, que é objeto de estudo em vários artigos encontrados na literatura [44–50]. A força de atrito é modelada considerando uma descontinuidade entre os parâmetros chamados de força de atrito estática e dinâmica, que está relacionada com a velocidade relativa entre os corpos, fazendo assim com que a dinâmica resultante possa ser dividida em duas fases que se alternam, chamadas de *stick* e *slip*. As fases de *stick* ocorrem quando há um equilíbrio entre a força da mola e a força de atrito, fazendo com que a massa e a esteira tenham velocidade relativa nula, ou seja, os dois corpos possuem velocidades iguais. Quando a força da mola supera a força de atrito, tem-se as fases de *slip*, a massa passa a ter aceleração, fazendo com que os corpos tenham velocidades diferentes.

Em geral, PVIs que modelam a dinâmica destes sistemas com atrito seco não têm solução conhecida e sua resposta é construída em partes. É comum encontrar na literatura trabalhos que aplicam métodos numéricos para obter aproximações para a resposta deste tipo de problema. Entretanto, a não linearidade e a transição abrupta entre as fases dificultam bastante o processo de integração [51–53]. Os métodos analíticos podem ser usados como estratégia para reduzir os custos computacionais, sem perder a precisão das aproximações e até mesmo para prever os instantes de transição.

### 1.3.2 Objetivos

Este é um trabalho multidisciplinar que trata de métodos de aproximação, quantificação de incertezas, modelagem estocástica e custo computacional. Um dos objetivos desta tese é analisar os custos computacionais do método de Monte Carlo combinado com métodos de aproximação, aplicado ao problema modelo envolvendo o fenômeno de *stick-slip* e modelagem estocástica.

Como o PVI que governa a dinâmica do problema modelo não possui solução analítica conhecida, foram usados métodos de aproximação para calcular aproximações para a resposta do sistema. Os métodos usados foram o método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens com passo de integração variável, o método de Runge-Kutta de 4º ordem com passo de integração fixo e o método de múltiplas escalas. Foi calculada uma aproximação analítica de 1º ordem para que fosse possível prever os instantes de transição entre as fases considerando apenas informações iniciais de cada fase, sem que seja necessário discretizar o intervalo de integração com passo de integração pequeno. Para verificar se a aproximação de 1º ordem atende a um critério de erro determinado, foi definida uma métrica e as aproximações calculadas com o método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens foram usadas como referência.

Com o objetivo de realizar um estudo estocástico dos custos computacionais, um parâmetro da força de atrito foi modelado como uma variável aleatória de distribuição uniforme. Devido às incertezas consideradas no problema, o PVI que modela a dinâmica do problema, tornou-se um PVI estocástico. Assim, as aproximações para a resposta do sistema são processos estocásticos que podem ser caracterizados por uma sequência aleatória de fases de *stick* e *slip*. Definido um intervalo de integração, algumas das variáveis de interesse associadas aos processos estocásticos são os números de fases de *stick* e *slip* e suas durações.

A propagação de incerteza é estudada através do método de Monte Carlo, considerando três abordagens diferentes que combinam o método de MC com:

- NV) aproximações numéricas calculadas usando método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens com passo de integração variável;
- NF) aproximações numéricas calculadas usando método de Runge-Kutta de 4º ordem com passo de integração fixo; e
- AN) aproximação analítica obtida com o método de múltiplas escalas.

Nas abordagens NV e NF para cada valor de parâmetro uma aproximação numérica foi calculada. Já para a AN apenas uma aproximação analítica foi calculada e avaliada para os diferentes valores usados. As variáveis dos custos computacionais, de tempo de execução e espaço em disco, também são estudadas nesta tese.

Para avaliar a influência dos métodos de integração nos custos computacionais foram construídos modelos estatísticos e histogramas conjuntos para as variáveis associadas à cada abordagem. Também foi estudado se as variáveis associadas aos processos estocásticos e ao tempo de execução são independentes. Para isso foram usados gráficos de dispersão e histogramas conjuntos normalizados de vetores aleatórios. Porém, estes vetores são de dimensão três e a visualização de suas probabilidades usando histogramas normalizados não é simples devido à dimensão do problema. Por isso, foi usada a estratégia de dividir os vetores aleatórios para que eles se tornassem de dimensão dois e assim a construção dos histogramas conjuntos normalizados fosse possível. Outra estratégia utilizada foi realizar uma transformação de coordenadas de modo a facilitar a visualização de dependência ou independência entre as variáveis associadas ao processo estocástico e aos tempos de execução.

## 1.4

### Organização da tese

Este trabalho está organizado em seis capítulos. O primeiro é dedicado à introdução e discussão dos assuntos abordados na tese. No segundo capítulo, o problema modelo foi apresentado e detalhado. Três métodos de aproximação foram usados para calcular aproximações da resposta do problema modelo. No terceiro capítulo, estes três métodos foram discutidos e foi mostrado como as aproximações foram calculadas. No quarto capítulo, os custos computacionais de cada abordagem que combina o método de Monte Carlo com os métodos de aproximação foram discutidos. As estratégias usadas para executar cada abordagem foram detalhadas. Os modelos estatísticos, histogramas normalizados e análises das variáveis aleatórias associadas ao processo estocástico e aos custos computacionais foram discutidos no quinto capítulo. As considerações finais foram feitas no sexto capítulo.



## 2

### Problema modelo: oscilador com atrito seco

O método de Monte Carlo detalhado no capítulo anterior pode, em geral, ser aplicado em qualquer problema de natureza estocástica. Em particular, nesta tese ele foi aplicado a um problema modelo que envolve o comportamento dinâmico de um oscilador com atrito seco.

Neste capítulo, primeiro é apresentada uma definição para atrito seco e como ele pode ser modelado. Depois, o problema modelo escolhido para este trabalho é descrito junto com o PVI que descreve sua dinâmica e as condições que permitem determinar se em um determinado instante de tempo o sistema se encontra em uma fase de *stick* ou de *slip*.

#### 2.1

##### Atrito seco

Atrito pode ser encontrado em sistemas mecânicos reais que têm superfícies em contato com movimento relativo. Em geral, a força de atrito pode ser associada com a resistência ao movimento relativo entre duas superfícies em contato. Na maioria dos casos, estas forças não são desejáveis devido aos efeitos de dissipação de energia e desgaste dos sistemas, enquanto que às vezes são necessários para o funcionamento correto dos sistemas. No entanto, ambas as situações requerem que a força de atrito seja modelada corretamente para obter uma resposta dinâmica precisa do sistema. Devido aos fenômenos complexos que podem ocorrer em um sistema com atrito seco, esta força é objeto de estudo de vários pesquisadores [46, 52, 54].

O primeiro modelo matemático de atrito foi desenvolvido por Coulomb e é conhecido como atrito de Coulomb. Este modelo afirma que o atrito sempre se opõe ao movimento relativo entre dois corpos em contato e depende de apenas um parâmetro chamado de coeficiente de atrito. No entanto, a força de atrito de Coulomb pode falhar em descrever a maior parte de efeitos de atrito ao se basear no uso de apenas um parâmetro. Para o modelo de Coulomb, o valor máximo da força quando a velocidade relativa é nula é igual ao valor da força quando a velocidade relativa é não nula.

Alguns estudos verificaram que a força de atrito pode assumir valores maiores quando a velocidade relativa é nula do que assume quando a velocidade

relativa é não nula, apresentando assim a necessidade de introduzir no modelo dois coeficientes de atrito diferentes, chamados de estático e dinâmico. Este tipos de modelos podem apresentar um fenômeno conhecido como *stick-slip*. A ocorrência de *stick-slip* pode dificultar a modelagem e a simulação de sistemas dinâmicos, uma vez que é um fenômeno com transições abruptas entre as fases de *stick* e *slip*.

### 2.1.1

#### Atrito de Coulomb

Pelo modelo de Coulomb, quando a velocidade relativa entre as superfícies em contato é não nula, a magnitude da força de atrito é proporcional a força normal entre as superfícies em contato. Este modelo depende da velocidade relativa entre os corpos, exceto quando esta é nula [54]. A Fig. 2.1 mostra um grafo da força de atrito pela velocidade relativa. Quando a velocidade relativa é diferente de zero, a força é dada por

$$f_{at}(u) = f_d \operatorname{sign}(u), \quad (2-1)$$

onde  $f_d$  é a força de atrito dinâmica e  $u$  é a velocidade relativa entre dois corpos. Quando a velocidade relativa é nula, a força de atrito pode assumir qualquer valor dentro do intervalo de  $[f_d, -f_d]$ . Embora este modelo seja simples, a dificuldade de especificar o valor da força de atrito quando o sistema apresenta velocidade relativa nula gera uma dificuldade na implementação desse modelo.

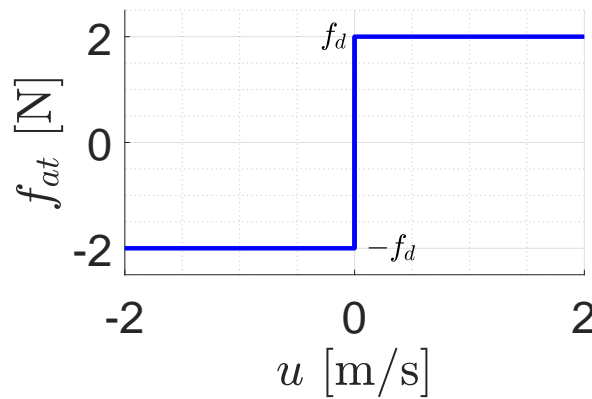


Figura 2.1: Representação do modelo de Coulomb com  $f_d = 2$  N.

### 2.1.2

#### Atrito de Coulomb modificado

O modelo de atrito de Coulomb modificado [54] leva em consideração que essa força pode assumir valores maiores quando a velocidade relativa é nula, do que assume quando a velocidade relativa é não nula, apresentando

a necessidade de introduzir no modelo dois coeficientes de atrito diferentes chamados de estático e dinâmico. A Fig. 2.2 mostra um grafo da força de atrito pela velocidade relativa. Quando a velocidade relativa é diferente de zero, a força é dada por

$$f_{at}(u) = f_d \operatorname{sign}(u), \quad (2-2)$$

onde  $f_d$  é a força de atrito dinâmica e  $u$  é a velocidade relativa entre os corpos. Quando a velocidade relativa é nula, a força pode assumir qualquer valor dentro do intervalo de  $[f_e, -f_e]$ . Devido a essa descontinuidade entre os valores da força de atrito, o sistema pode apresentar *stick-slip*.

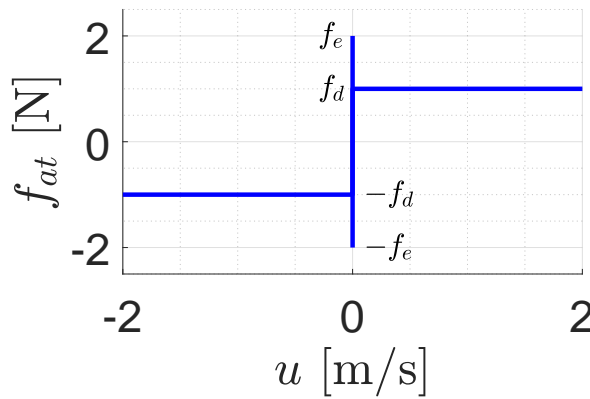


Figura 2.2: Representação do modelo de Coulomb modificado com  $f_e = 2$  N e  $f_d = 1$  N.

### 2.1.3

#### Atrito de Coulomb modificado não linear

O atrito de Coulomb modificado não linear também apresenta uma descontinuidade entre a força de atrito dinâmica e estática. Este modelo foi inspirado em um exemplo dado em [20]. Porém diferente do modelo de Coulomb modificado quando a velocidade relativa entre os corpos é diferente de zero, a relação da força é não linear em relação a velocidade relativa e é dado por

$$f_{at}(u) = \frac{1}{3} a u (u^2 - 3) + f_d \operatorname{sign}(u) \quad (2-3)$$

onde  $a$  é uma constante,  $u$  é a velocidade relativa e  $f_d$  é a força de atrito dinâmica. Quando a velocidade relativa é nula, a força pode assumir qualquer valor dentro do intervalo de  $[f_d, -f_e]$ . Esse modelo foi inspirado em um exemplo dado em [20].

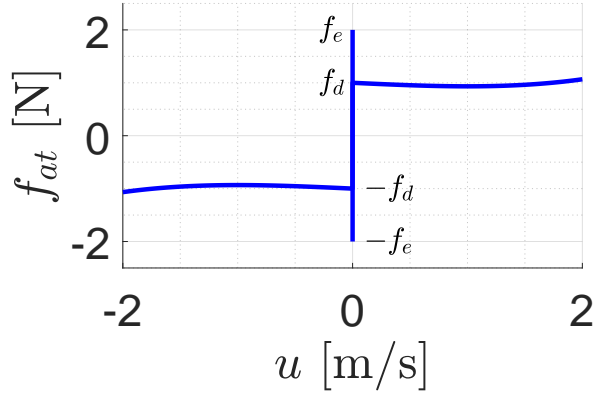


Figura 2.3: Representação do modelo de Coulomb modificado não linear com  $a = 0.1$  e  $f_d = 0.5$  N.

## 2.2

### Problema modelo: Oscilador com vibrações de *stick-slip*

O sistema mecânico analisado nesta tese trata-se de um oscilador massa-mola-amortecedor apoiado sobre uma esteira. O oscilador permite o movimento relativo entre a massa e a esteira, e, por sua vez, a esteira se movimenta com velocidade constante, como mostrado na Fig. 2.4. Entre as superfícies da massa e da esteira é considerada a existência de atrito seco, o que pode induzir vibrações de *stick-slip*. Como foi indicado, quando isso ocorre a resposta do sistema é caracterizada por dois comportamentos distintos, chamados de *stick* e *slip*. Estas fases, de duração não nula, se alternam com uma transição abrupta.

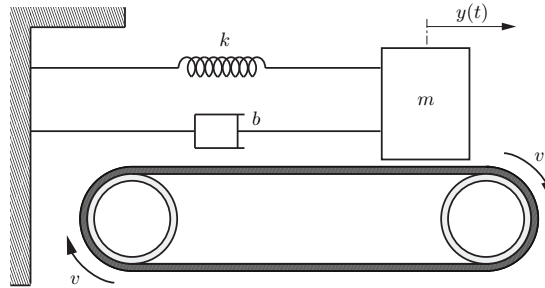


Figura 2.4: Oscilador com atrito seco entre as superfícies da massa e da esteira.

O sistema é modelado pelo PVI dado por

$$m \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + k y(t) = f_{at}(u), \quad (2-4)$$

com condições iniciais  $y(0)$  e  $\dot{y}(0)$ . Na equação anterior,  $y(t)$  é a posição da massa  $m$ ,  $b$  o coeficiente de amortecimento,  $k$  a constante da mola,  $f_{at}$  a força de atrito entre a massa e a esteira e  $u$  a velocidade relativa entre elas.

A força de atrito considerada neste sistema segue o modelo de Coulomb modificado não linear descrito na seção 2.1.3. Para definir os parâmetros da força de atrito de acordo com a parametrização do problema modelo, a Eq. (2-3) é apresentada novamente,

$$f_{at}(u) = \frac{1}{3} a u (u^2 - 3) + f_d \operatorname{sign}(u) \quad (2-5)$$

onde  $u = (v - \dot{y})$ ,  $a$  é uma constante,  $v$  é a velocidade da esteira e  $f_d$  é a magnitude da força de atrito dinâmica. Para  $u = 0$ , a força pode assumir valores entre  $[-f_e, f_e]$ , onde  $f_e$  é a magnitude da força de atrito estático.

As condições para detectar se a resposta do sistema, para um certo instante de tempo  $t$ , é caracterizada por uma fase de *stick* ou uma de *slip* são detalhadas a seguir. A Fig. 2.5 mostra esquematicamente, um exemplo de como pode ser a resposta de um sistema com vibrações de *stick-slip* onde:

- o número de fases de *stick* é representado por  $n^{stick}$ ;
- o número de *slip* é representado por  $n^{slip}$ ;
- a duração de cada fase de *stick* é representado por  $d^{stick}$ ;
- a duração de cada fase de *slip* é representado por  $d^{slip}$ ;
- os instantes de transição são representados por  $t_l$ .

Nesta ilustração foi escolhido, arbitrariamente, que a resposta começasse por uma fase de *stick*, mas poderia também ter começado por uma fase *slip*. A resposta da dinâmica pode ser expressa em partes como

$$y(t) = \begin{cases} y_j(t) & , \text{ se as condições de } stick \text{ forem atendidas} \\ y_p(t) & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2-6)$$

onde  $y_j(t)$  é a solução correspondente as fases de *stick* e  $y_p(t)$  é a solução das fases de *slip*, com

$$j \in [1, \dots, n^{sticks}], \quad p \in [1, \dots, n^{slips}], \quad l \in [1, \dots, n^{sticks} + n^{slips}]. \quad (2-7)$$

As fases de *stick* são caracterizadas pela velocidade relativa nula ( $u = 0$ ) e pelo valor da força de atrito estar entre

$$-f_e \leq f_{at} \leq f_e. \quad (2-8)$$

Durante uma fase de *stick*, para determinar o valor da força de atrito, a cada instante faz-se um balanço de forças usando a Eq. (2-4). Nesta fase, a velocidade da massa é igual à da esteira ( $\dot{y}_j(t) = v$ ), ou seja, os dois corpos se movimentam juntos, e por ser condição necessária que a fase tenha duração não

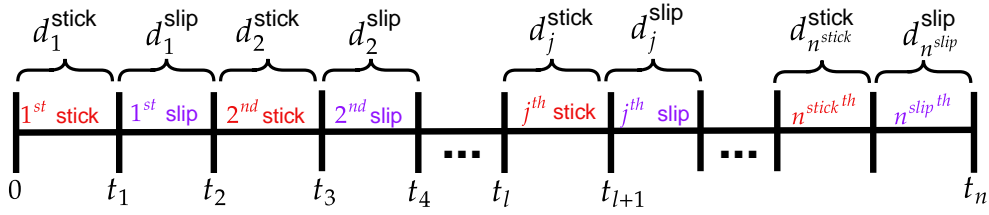


Figura 2.5: Esquema da dinâmica de uma resposta com vibração de *stick-slip*.

instantânea, deve-se cumprir que durante esta fase, a massa tenha aceleração nula ( $\ddot{y}_j(t) = 0$ ). Substituindo estas condições na Eq. (2-4), tem-se

$$b v + k y_j = f_{at} . \quad (2-9)$$

Ao longo de uma fase de *stick*, o valor da força de atrito varia de acordo com a posição da massa como dado pela Eq. (2-9), assim substituindo esta equação na Eq. (2-8) pode-se escrever uma expressão que limita os valores que  $y$  pode assumir durante uma estas fases. Esses limites são dados por

$$\frac{-f_e - b v}{k} \leq y_j \leq \frac{f_e - b v}{k} . \quad (2-10)$$

Para uma velocidade de esteira positiva, a posição  $y$  cresce e consequentemente, o valor de  $f_{at}$  também. Esse crescimento ocorre até que o valor da força de atrito atinja seu valor máximo  $f_e$ . Neste instante, a fase de *stick* termina e uma fase de *slip* se inicia. Durante a fase de *stick*, a massa exibe um movimento retilíneo uniforme com solução analítica exata conhecida e dada por

$$y_j(t) = y_j(t_{0,l}) + v(t - t_{0,l}) \text{ para } t_{0,l} \leq t \leq t_{e,l}, \quad (2-11)$$

onde  $t_{0,l}$  e  $t_{e,l}$  são instantes associados com o início e fim da  $j$ -ésima fase de *stick*. Portanto,  $y_j(t_{0,j})$  representa a posição da massa no instante inicial de uma fase de *stick*. É importante observar que esses valores coincidem com a posição da massa no final da fase de *slip* imediatamente anterior. Se  $y_j(t_{0,j})$ , for início de um intervalo de integração, este valor será igual ao deslocamento inicial ( $y(0)$ ).

Quando o sistema não está em uma fase de *stick*, ele deve encontrar-se em uma fase de *slip*. Neste caso, a velocidade relativa entre a massa e a esteira não é nula e o valor da força de atrito é definida pela Eq. (2-5). Assim, a Eq. (2-4) torna-se

$$m \ddot{y}_p(t) + b \dot{y}_p(t) + k y_p(t) = \frac{1}{3} a u (u^2 - 3) + f_d \text{sign}(u) . \quad (2-12)$$

Considerando a Eq. (2-12), uma fase de *slip* é modelada por um PVI não linear que não apresenta solução analítica exata conhecida. Neste caso, a utilização de métodos de aproximação são necessários para calcular uma aproximação para a resposta do sistema.

### 3

## Métodos de aproximação

Neste capítulo são apresentados os métodos de aproximação usados para calcular aproximações para a resposta do problema modelo definido no capítulo anterior. Primeiro, é feita uma introdução sobre os métodos de perturbação e em seguida especificado como aplicar os métodos de Lindstedt-Poincaré e múltiplas escalas. Também é detalhado como uma aproximação de primeira ordem para a resposta do problema modelo usando o método de múltiplas escalas é calculada. Além das aproximações analíticas, também são usados métodos numéricos para calcular aproximações, dois métodos de Runge-Kutta foram usados e são detalhados neste capítulo. Assim, como a diferença entre eles. Por último, é verificado se a aproximação analítica de primeira ordem está dentro da margem de erro definida.

### 3.1

#### Métodos de perturbação

Considerando um problema de valor inicial não linear genérico como

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + f(\dot{x}(t), x(t)) = 0 \quad (3-1)$$

com condições iniciais  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ , onde  $x$  é o parâmetro de deslocamento,  $\omega_0$  é a frequência natural do sistema quando  $f(\dot{x}(t), x(t)) = 0$  e  $f$  é uma função não linear de  $\dot{x}(t)$  e  $x(t)$ . Para a teoria de perturbação a resposta do problema está associada com um parâmetro chamado de parâmetro de perturbação,  $\epsilon$ . Este termo pode ser introduzido no problema ou ser escolhido como um parâmetro já existente no problema que assuma valores pequenos,  $\epsilon \ll 1$ . Para aplicação das técnicas de perturbação, o parâmetro  $\epsilon$  deve ser introduzido de maneira a tornar um problema linear quando ele assumir valor igual a zero. Com este objetivo, o parâmetro de perturbação  $\epsilon$  é colocado na Eq. (3-1) multiplicando o termo de  $f$  como dado em

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \epsilon f(\dot{x}(t), x(t)) = 0. \quad (3-2)$$

Estes métodos consideram como solução do problema uma série uniforme em potências de  $\epsilon$ , dado por

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots + \epsilon^\infty x_\infty(t). \quad (3-3)$$



Os termos da série tem significância reduzida de acordo com o crescimento da ordem de  $\epsilon$ , garantindo que os termos de ordens altas se comportem apenas como pequenas correções para os termos de ordens inferiores, e não dominem a solução geral [55, 56]. Ao supor  $\epsilon = 0$ , a Eq. (3-2) se torna linear, e tem solução conhecida. Considerando esta hipótese, o termo  $x_0$  é a solução da equação linearizada e os outros termos  $x_h$  são perturbações em relação a solução linearizada. Pelo teorema fundamental da teoria de perturbação definido em [13], ao aplicar a solução dada na Eq. (3-3) no PVI da Eq. (3-2), o mesmo pode ser transformado em uma família de PVIs lineares com soluções analíticas conhecidas. Assim, a solução do problema é calculada resolvendo todos estes PVIs hierarquicamente. Porém, isto envolve fazer infinitos cálculos o que torna o cálculo da solução impossível. Como alternativa a solução pode ser truncada em um termo  $h$  e assim, uma aproximação de  $h$ -ésima ordem pode ser obtida.

Os métodos de perturbação são uma família de metodologias usadas em cálculos de aproximações analíticas. Dois dos métodos mais famosos entre as técnicas de perturbação são os métodos de Lindstedt-Poincaré e de múltiplas escalas. O método de Lindstedt-Poincaré é usado para calcular aproximações para soluções periódicas e tem como principal característica escrever a frequência da resposta em função do deslocamento inicial ( $x(0)$ ). Já o método de múltiplas escalas pode ser usado em sistemas que apresentam solução aperiódicas ou com diferentes escalas de tempo. Sua principal característica é a troca da variável independente  $t$  por múltiplas escalas de tempo.

### 3.1.1

#### Método de Lindstedt-Poincaré

O método de Lindstedt-Poincaré visa o cálculo de aproximações analíticas periódicas. A técnica desenvolvida por Lindstedt para evitar os termos seculares, foi escrever a frequência de um sistema como função do seu deslocamento inicial. Assim, para calcular esta frequência, é preciso escrever o problema de forma que este termo fique explícito na equação. Por isso, primeiro define-se um novo parâmetro  $\tau$  como

$$\tau = \omega t, \quad (3-4)$$

onde  $\omega$  é uma função definida como uma série de potências de  $\epsilon$  e em função do deslocamento inicial,  $x(0)$ . Essa função pode ser escrita como

$$\omega(x(0)) = \omega_0 + \epsilon \omega_1(x(0)) + \epsilon^2 \omega_2(x(0)) + \dots + \epsilon^\infty \omega_\infty(x(0)), \quad (3-5)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural do sistema quando  $\epsilon = 0$  e  $\omega_h$  com  $h = 1, 2, 3, \dots$  são correções da frequência  $\omega_0$ .

O próximo passo é aplicar as Eqs. (3-4) e (3-5) na equação do problema, assim a Eq. (3-1) se torna

$$\omega^2 \bar{x}''(\tau) + \omega_0^2 \bar{x}(\tau) + \epsilon f(\bar{x}'(\tau), \bar{x}(\tau)) = 0, \quad (3-6)$$

onde  $\bar{x}'$  representa a derivada em relação a  $\tau$  e  $\bar{x}(\tau)$  é uma nova variável em função de  $\tau$ . Este método também assume como solução do problema uma série em potências de  $\epsilon$  como dado por

$$\bar{x}(\tau) = \bar{x}_0(\tau) + \epsilon \bar{x}_1(\tau) + \epsilon^2 \bar{x}_2(\tau) + \dots + \epsilon^\infty \bar{x}_\infty(\tau). \quad (3-7)$$

### 3.1.2

#### Método de múltiplas escalas

Para problemas com aperiodicidade, diferentes escalas de tempo ou amortecimento, o método de múltiplas escalas se mostra mais eficiente do que o método de Lindstedt-Poincaré. Em problemas com amortecimento, por exemplo, em geral uma escala está associada ao deslocamento do corpo e uma outra ao decaimento de amplitude. A principal característica do método de múltiplas escalas é a troca da variável  $t$  por múltiplas escalas de tempo. Neste trabalho foi tratada apenas a expansão derivativa, definida por Nayfeh em [11], que expande a variável  $t$  em uma série de potências de  $\epsilon$  como

$$\tau_h = \epsilon^h t \quad \text{para} \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (3-8)$$

Com a aplicação de novas escalas, a Eq. (3-3) se transforma em

$$\bar{x}(\tau_h) = \bar{x}_0(\tau_h) + \epsilon \bar{x}_1(\tau_h) + \epsilon^2 \bar{x}_2(\tau_h) + \dots + \epsilon^\infty \bar{x}_\infty(\tau_h), \quad (3-9)$$

sendo  $\bar{x}(\tau_h)$  uma nova variável em função das novas escalas de tempo. Como estratégia para calcular as aproximações, os termos  $\tau_h$  são tratados como variáveis independentes, apesar das únicas variáveis realmente independentes serem somente  $t$  e  $\epsilon$ . Agora que  $\bar{x}(\tau_h)$  é função de diferentes escalas deve-se calcular as derivadas em relação a cada um destes novos termos. Como as escalas são tratadas como independentes, a regra da cadeia é usada para transformar a derivada em relação a  $t$  para as novas escalas. Dessa forma a primeira derivada é dada por

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\tau_0}{dt} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau_0} + \frac{d\tau_1}{dt} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau_1} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau_0} + \epsilon \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau_1} + \dots, \quad (3-10)$$

e a segunda

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} &= \frac{d\tau_0}{dt} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau_0^2} + \frac{d\tau_1}{dt} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau_0 \tau_1} + \epsilon \frac{d\tau_0}{dt} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau_0 \tau_1} + \epsilon \frac{d\tau_1}{dt} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau_1^2} \\
&= \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \tau_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \tau_0 \tau_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \tau_1^2} + \dots
\end{aligned} \tag{3-11}$$

Com a nova solução  $\bar{x}(\tau_h)$  definida pela Eq. (3-9) e suas derivada pelas Eqs. (3-10) e (3-11), estas equações podem ser substituídas no PVI não linear e seguindo a metodologia geral dos métodos de perturbação, uma aproximação analítica pode ser calculada de acordo com a ordem desejada. Porém, uma família de PVIs lineares que antes eram de equações diferenciais ordinárias, devido a aplicação das novas escalas, passam a ser de equações diferenciais parciais.

### 3.1.3

#### Cálculo de um aproximação analítica para fases de *slip*

Como discutido no capítulo anterior, um problema com atrito seco pode ter sua dinâmica dividida em duas fases distintas, *stick* e *slip*, e sua resposta pode ser construída em partes como dado pela Eq. (2-6). As fases de *stick* por serem modeladas como um movimento retilíneo uniforme possuem soluções analíticas conhecidas e dadas pela Eq. (2-11). Com as condições e a solução das fases de *stick* definidas, a Eq. (2-6) pode ser reescrita como

$$y(t) = \begin{cases} y_j(t) = y_j(t_{0,l}) + v(t - t_{0,l}) & , \text{ se } -f_e \leq f_{at} \leq f_e \text{ e } \frac{-f_e - bv}{k} \leq y \leq \frac{f_e - bv}{k}, \\ y_p(t) & , \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{3-12}$$

Já as fases de *slip* por serem modeladas por um PVI não linear, o método de múltiplas escalas foi usado para calcular uma aproximação de primeira ordem. Assim, a Eq. (2-4) se torna

$$m \ddot{y}_p(t) + b \dot{y}_p(t) + k y_p(t) = \frac{1}{3} a u (u^2 - 3) + f_d \text{sign}(u). \tag{3-13}$$

Adicionando o parâmetro de perturbação  $\epsilon$ , tem-se

$$m \ddot{y}_p(t) + \epsilon b \dot{y}_p(t) + k y_p(t) = \frac{1}{3} a \epsilon u (\epsilon^2 u^2 - 3) + f_d \text{sign}(u). \tag{3-14}$$

Com o objetivo de calcular uma aproximação de primeira ordem, as novas escalas foram definidas como  $\tau_0 = t$ ,  $\tau_1 = \epsilon t$  e a Eq. (3-9) foi truncada no segundo termo, e é dada por

$$\bar{y}_p(\tau_0, \tau_1) \approx \bar{y}_{p0}(\tau_0, \tau_1) + \epsilon \bar{y}_{p1}(\tau_0, \tau_1), \quad (3-15)$$

assim como suas derivadas

$$\frac{d\bar{y}_p}{dt} \approx \frac{\partial \tau_0}{\partial t} \frac{\partial \bar{y}_p}{\partial \tau_0} + \frac{\partial \tau_1}{\partial t} \frac{\partial \bar{y}_p}{\partial \tau_1} = \frac{\partial \bar{y}_p}{\partial \tau_0} + \epsilon \frac{\partial \bar{y}_p}{\partial \tau_1}, \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{y}_p}{dt^2} &\approx \frac{d\tau_0}{dt} \frac{\partial \bar{y}_p}{\partial \tau_0^2} + \frac{d\tau_1}{dt} \frac{\partial \bar{y}_p}{\partial \tau_0 \tau_1} + \epsilon \frac{d\tau_0}{dt} \frac{\partial \bar{y}_p}{\partial \tau_0 \tau_1} + \epsilon \frac{d\tau_1}{dt} \frac{\partial \bar{y}_p}{\partial \tau_1^2} \\ &= \frac{\partial^2 \bar{y}_p}{\partial \tau_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 \bar{y}_p}{\partial \tau_0 \tau_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{y}_p}{\partial \tau_1^2}. \end{aligned} \quad (3-17)$$

Por simplificação, foi adotada a nomenclatura de  $\partial \bar{y}_p / \partial \tau_i = \partial_{\tau_i} \bar{y}_p$ . Assim, substituindo as Eqs. (3-15), (3-16) e (3-17) no PVI da Eq. (3-14) e pelo teorema fundamental de perturbação, obteve-se a família de PVIs lineares dadas por

$$m \partial_{\tau_0}^2 \bar{y}_{p0} + k \bar{y}_{p0} = f_d, \quad (3-18a)$$

$$m \partial_{\tau_0}^2 \bar{y}_{p1} + k \bar{y}_{p1} = -2 \partial_{\tau_0} \partial_{\tau_1} \bar{y}_{p0} - b \partial_{\tau_0} \bar{y}_{p0} + a \partial_{\tau_0} \bar{y}_{p0} - a v. \quad (3-18b)$$

Lembrando que com a aplicação das escalas de tempo, as equações diferenciais passam a ser parciais e as constantes de integração passam a ser funções das novas escalas. Neste caso, como só duas novas escalas foram usadas, as constantes de integração passam a ser funções de  $\tau_1$ . Os PVIs da Eq. (3-18) são dependentes e devem ser resolvidos hierarquicamente, assim a solução para  $\bar{y}_{p0}(\tau_0, \tau_1)$  é dado por

$$\bar{y}_{p0}(\tau_0, \tau_1) = C_1(\tau_1) e^{\sqrt{k m} \tau_0 I / m} + C_2(\tau_1) e^{-\sqrt{k m} \tau_0 I / m} + \frac{f_d}{k}. \quad (3-19)$$

Para definir as funções  $C_1(\tau_1)$  e  $C_2(\tau_1)$  é preciso resolver o próximo PVI da Eq. (3-18). Para isso a solução de  $\bar{y}_{p0}(\tau_0, \tau_1)$  deve ser substituída na Eq. (3-18b)

$$\begin{aligned} m \partial_{\tau_0}^2 \bar{y}_{p1} + k \bar{y}_{p1} &= \left[ -2 \frac{\sqrt{k m}}{m} I \partial_{\tau_1} C_1 - b \frac{\sqrt{k m}}{m} I C_1 + a \frac{\sqrt{k m}}{m} I C_1 \right] e^{\sqrt{k m} \tau_0 I / m} \\ &+ \left[ 2 \frac{\sqrt{k m}}{m} I \partial_{\tau_1} C_2 + b \frac{\sqrt{k m}}{m} I C_2 - a \frac{\sqrt{k m}}{m} I C_2 \right] e^{-\sqrt{k m} \tau_0 I / m}. \end{aligned} \quad (3-20)$$

Eliminando os termos seculares uma relação para  $C_1(\tau_1)$  e  $C_2(\tau_1)$  é encontrada

$$-2 \frac{\sqrt{k m}}{m} I \partial_{T_1} C_1 - b \frac{\sqrt{k m}}{m} I C_1 + a \frac{\sqrt{k m}}{m} I C_1 = 0, \quad (3-21)$$

$$2 \frac{\sqrt{k m}}{m} I \partial_{T_1} C_2 + b \frac{\sqrt{k m}}{m} I C_2 - a \frac{\sqrt{k m}}{m} I C_2 = 0. \quad (3-22)$$

As Eq. (3-21) e (3-22) são equações diferenciais ordinárias lineares e têm solução analítica conhecida dada por

$$C_1(\tau_1) = C_{1,1} e^{\tau_1(a-b)/2}, \quad (3-23)$$

$$C_2(\tau_1) = C_{2,1} e^{\tau_1(a-b)/2}, \quad (3-24)$$

onde  $C_{1,1}$  e  $C_{2,1}$  são constantes de integração que são determinadas de acordo com as condições iniciais de cada fase de *slip*. Com as funções  $C_1(\tau_1)$  e  $C_2(\tau_1)$  determinadas, pode-se voltar para o domínio do tempo  $t$  e uma aproximação de primeira ordem para cada fase de *slip* é escrita como

$$y_p(t) \approx C_1(t) e^{\sqrt{k m} t I/m} + C_2(t) e^{-\sqrt{k m} t I/m} + f_d. \quad (3-25)$$

Aplicando a Lei de Euler, a Eq. (3-25) pode ser reescrita em notação trigonométrica dada por

$$y_p(t) \approx e^{z(t-t_{0,l})} [C_{1,p} \cos(\sqrt{k}(t-t_{0,l})) + C_{2,p} \sin(\sqrt{k}(t-t_{0,l}))] + \frac{f_d}{k}, \quad (3-26)$$

onde  $z = \epsilon(a-b)/2$ ,  $C_{1,p} = y_p(t_{0,l}) - f_d/k$  e  $C_{2,p} = [\dot{y}_p(t_{0,l}) - zd]/\sqrt{k}$ . Os valores de  $y_p(t_{0,l})$  e  $\dot{y}_p(t_{0,l})$  variam de acordo com o início de cada fase. No início de uma simulação, elas correspondem as condições iniciais  $y(0)$  e  $\dot{y}(0)$ , respectivamente. Depois disso, elas coincidem com os valores de  $y_j(t)$  e  $\dot{y}_j(t)$  no final da fase de *stick* imediatamente anterior. Assim a Eq. (3-12) pode ser reescrita, tornando-se

$$y(t) \approx \begin{cases} y_j(t) = y_j(t_{0,l}) + v(t-t_{0,l}) & , \text{ se } -f_e \leq f_{at} \leq f_e \text{ e} \\ & \frac{-f_e - bv}{k} \leq y \leq \frac{f_e - bv}{k}, \\ y_p(t) \approx e^{z(t-t_{0,l})} [C_{1,p} \cos(\sqrt{k}(t-t_{0,l})) + & \\ C_{2,p} \sin(\sqrt{k}(t-t_{0,l}))] + \frac{f_d}{k}, & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3-27)$$

Esta equação é o que chama-se de aproximação analítica para a resposta do problema modelo tratado nessa tese.

## 3.1.4

## Previsão dos instantes de transição

A ocorrência do fenômeno de *stick-slip* na resposta de um sistema pode ser um complicador na modelagem e na simulação devido à dificuldade em determinar o valor da força de atrito nas fases de *stick* e detectar corretamente os instantes de transição. Uma vez que com uma aproximação analítica, tem-se uma expressão para cada fase é possível prever estes instantes de transição analiticamente. Com esse objetivo, foi escolhido calcular uma aproximação de primeira ordem para que o termo  $t$  fosse isolado nas expressões e assim fosse possível prever os instantes de transição.

Para executar uma simulação usando a aproximação analítica como está expressa na Eq. (3-27), ainda seria necessário discretizar um intervalo de simulação com passo de integração pequeno, pois seria necessário verificar para cada ponto da malha qual expressão usar, a da fase de *stick* ou *slip*. Utilizar a aproximação analítica desta forma já significa uma vantagem em tempo de execução comparado ao uso de aproximações numéricas como foi mostrado nos artigos [33, 35, 36, 57]. Porém, ao usar a expressão analítica para prever os instantes de transição, tem-se uma vantagem ainda maior. As condições de *stick* não precisam ser testadas para cada ponto da malha do intervalo. Por isso, nesta seção o termo  $t$ , dado pela Eq. (3-27), foi escrito em função dos parâmetros do problema.

Uma das principais características da teoria de perturbação é que o parâmetro de perturbação,  $\epsilon$ , deve assumir valores pequenos, ou seja,  $\epsilon \ll 1$  [13]. Esta característica foi usada para reescrever os termos de  $t$  em função dos parâmetros do sistema da Eq. (3-27). O termo  $z = \epsilon(a - b)/2$ , que aparece em  $e^{z(t-t_{0,l})}$ , da Eq. (3-27) depende de  $\epsilon$ , assim supondo que  $\epsilon \ll 1$ , também tem-se que o valor de  $z$  tende a zero. Por consequência, o valor do termo  $e^{z(t-t_{0,l})}$  tenderia a um. Com essas suposições e usando transformações trigonométricas, a Eq. (3-27) pode ser reescrita como

$$y(t) \approx \begin{cases} y_j(t) = y_j(t_{0,l}) + v(t - t_{0,l}) & , \text{ se } -f_e \leq f_{at} \leq f_e \text{ e} \\ & \frac{-f_e - bv}{k} \leq y \leq \frac{f_e - bv}{k} \\ y_p(t) \approx C_{3,p} \cos(\sqrt{k}(t - t_{0,l}) - C_{4,p}) + \frac{f_d}{k} & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3-28)$$

onde  $C_{3,p} = \sqrt{C_{1,p}^2 + C_{2,p}^2}$  e  $C_{4,p} = \text{atan}(C_{2,p}/C_{1,p})$ . Para verificar que não houve perda na qualidade da aproximação analítica dada pela Eq. (3-27) em relação a Eq. (3-28), foi feita uma simulação para comparar as aproximações de  $y(t)$  e  $\dot{y}(t)$ . Esta simulação é mostrada na Fig. 3.1 e os dados usados são apresentados na Tab. 3.1.

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
$m$	1	kg	$k$	0.1	N/m
$v$	-2	m/s	$y(0)$	1	m
$b$	1	(N s)/m	$\dot{y}(0)$	-1	m/s
$a$	0.1	(kg s)/(m <sup>2</sup> )	$f_e$	2	N
$\epsilon$	0.0001	-	$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>
$f_d$	1	N	$\Delta t$	$10^{-3}$	s

Tabela 3.1: Valor dos parâmetros usados nas simulações.

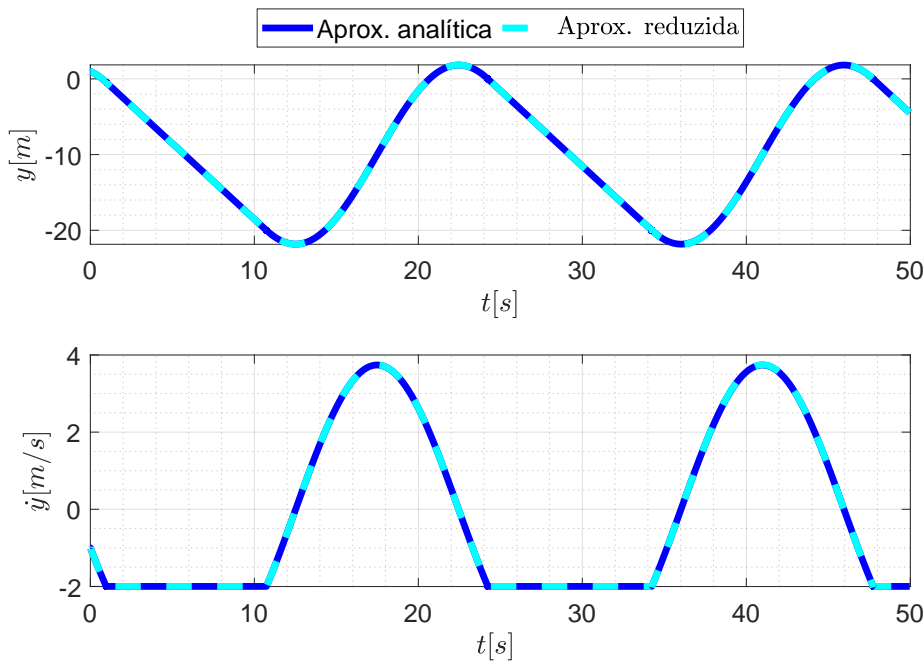


Figura 3.1: Velocidade e deslocamento do sistema usando as aproximações analíticas e reduzida.

Comparando as respostas das simulações mostradas na Fig. 3.1, verifica-se que a qualidade da aproximação analítica não foi quase modificada. Assim, o próximo passo é reescrever os termo  $t$  em função dos parâmetros do sistema respeitando as condições para cada fase ocorrer.

Para determinar os instantes de transição de uma fase de *stick* para uma de *slip*, usa-se a expressão de  $y_j(t)$  da Eq. (3-28). Desta forma, o sistema encontra-se em uma fase de *stick* e deseja-se prever o instante final da fase corrente. Em resumo, as condições para o sistema se encontrar em uma fase de *stick* são velocidade relativa nula e a posição da massa estar entre o intervalo de  $[y_{min}, y_{max}]$ . O sinal da velocidade da esteira determina se a posição do sistema no final de uma fase de *stick* é  $y_{min}$  ou  $y_{max}$ . Assim, a expressão de

$y_j(t)$  foi reescrita da seguinte forma

$$y_j(t_{0,l}) + v(t_j - t_{0,l}) = \begin{cases} y_{max}, & \text{se } v > 0 \\ y_{min}, & \text{se } v < 0. \end{cases} \quad (3-29)$$

Na expressão escrita a cima, a posição ( $y_j(t_{0,l})$ ), o instante inicial ( $t_{0,l}$ ) e a posição final ( $y_{min}$  ou  $y_{max}$ ) de uma fase de *stick* são conhecidos, com isso somente o instante final ( $t_j$ ) é desconhecido. Reescrevendo a Eq. 3-29 tem-se uma expressão para calcular  $t_j$  dada por

$$t_j = \begin{cases} \frac{y_{max} - y_j(t_{0,l})}{v} + t_{0,l}, & \text{se } v > 0 \\ \frac{y_{min} - y_j(t_{0,l})}{v} + t_{0,l}. & \text{se } v < 0. \end{cases} \quad (3-30)$$

Para finalizar, a expressão dos instantes de transição das fases de *slip* para *stick* é calculada. Para esta etapa, usou-se a expressão da velocidade do sistema durante as fases de *slip*, para isso a derivada da Eq. (3-28) é dada por

$$\dot{y}_p(t) \approx -C_{3,p} \sin(\sqrt{k}(t_p - t_{0,l}) - C_{4,p}) \sqrt{k}. \quad (3-31)$$

A condição de que a velocidade da massa deve ser igual à velocidade da esteira foi usada para obter os instantes  $t_p$ , assim  $\dot{y}_p(t) = v$ , resulta em

$$-C_{3,p} \sin(\sqrt{k}(t_p - t_{0,l}) - C_{4,p}) \sqrt{k} = v. \quad (3-32)$$

Nesta equação, somente os valores do início da fase ( $t_{0,l}$ ) e dos parâmetros  $k$  e  $v$  são conhecidos, os valores das constantes de integração  $C_{3,p}$  e  $C_{4,p}$  precisam ser definidos de acordo com as condições iniciais da fase, além do instante final  $t_p$ . Para calcular os instantes de transição,  $t_p$ , de *slip* para *stick*, primeiro é necessário calcular as constantes de integração usando a Eq. (3-28). Assim, a Eq. (3-32) pode ser reescrita como

$$t_p = \frac{\left[ \arcsin\left(\frac{-v}{C_{3,p}\sqrt{k}}\right) + C_{4,p} \right]}{\sqrt{k}} + t_{0,l}. \quad (3-33)$$

Deve-se notar que a condição usada para obter as Eqs. (3-32) e (3-33) (a velocidade da massa é igual à velocidade da esteira) é uma condição necessária, mas não suficiente para determinar os instantes de transição entre as fases de *slip* para *stick*. Esta condição só se torna completa com a verificação de que a posição da massa deve estar dentro do intervalo  $[y_{min}, y_{max}]$ . A Fig. 3.2 mostra um esquema ilustrativo de como os instantes de transição são previstos usando uma aproximação analítica dada pelas Eqs. (3-32) e (3-33).



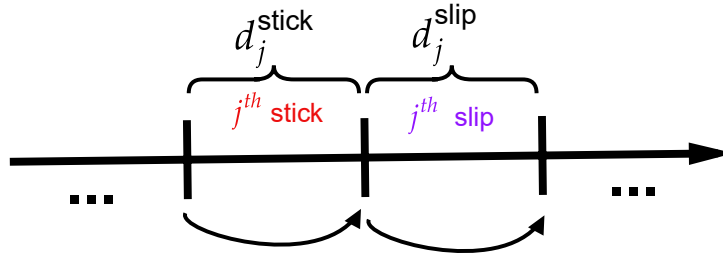


Figura 3.2: Esquema ilustrativo de como calcular os instantes de transição com uma aproximação analítica.

### 3.2

#### Aproximação numérica

Em geral, para a implementação de métodos numéricos de integração de um PVI é necessário discretizar a variável independente do problema. Em problemas dinâmicos, esta variável é usualmente o tempo. Para calcular uma aproximação numérica é preciso definir um intervalo de integração, o qual será discretizado, passando do domínio contínuo para um discreto. A Fig. 3.3 mostra um esquema de como um intervalo de  $[0, t_n]$  é discretizado sendo  $t_i$  os pontos de uma malha e  $\Delta t$  o passo de integração. O parâmetro  $\Delta t$  determina o refinamento da malha de integração, assim quanto menor o valor deste parâmetro mais pontos são considerados em um intervalo de integração e mais refinada é a malha.

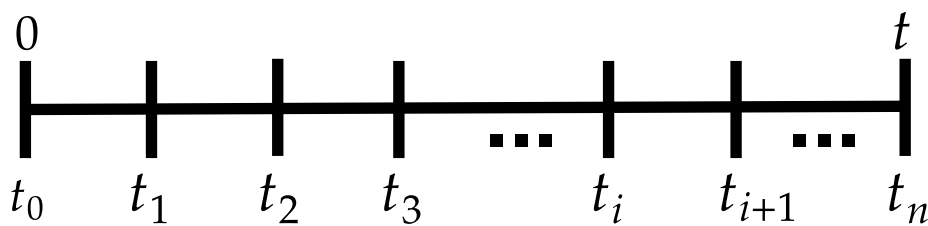


Figura 3.3: Discretização de um intervalo de integração.

Como uma aproximação numérica é calculada para cada ponto da malha e o cálculo de cada ponto depende do cálculo do ponto anterior, quanto menor o valor de  $\Delta t$  maior a acurácia de uma aproximação. A Fig. 3.5 mostra um esquema ilustrativo de como uma aproximação numérica é calculada. Por consequência, essa relação entre  $\Delta t$  e a qualidade de uma aproximação se

reflete no custo computacional. Pois, quanto maior a quantidade de pontos a serem calculados, maior o tempo de execução e o armazenamento em disco.

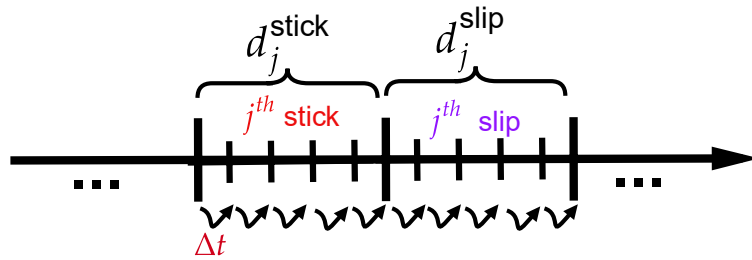


Figura 3.4: Esquema ilustrativo de como calcular uma aproximação numérica.

Os métodos de Runge-Kutta são muito populares por aliar simplicidade de implementação e precisão [14, 17]. Estes métodos foram desenvolvidos por volta de 1900 e são uma família de métodos iterativos usados para calcular aproximações numéricas de soluções de PVIs. Neste trabalho, foram usados dois métodos de Runge-Kutta com passos de integração diferentes. O primeiro é o método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens que está implementado no software MATLAB e é conhecido como a função ODE45. Este é um método de passo de integração variável. O usuário não consegue definir o valor de  $\Delta t$  usado pelo integrador, a função só permite que seja definido um passo de integração máximo, pois cálculos para pontos intermediários podem ser feitos para que a qualidade desejada de uma aproximação seja alcançada. O outro método de Runge-Kutta usado foi o de 4º ordem, este integrador foi implementado pela autora no software MATLAB. O método de Runge-Kutta de 4º ordem foi escolhido devido a sua facilidade de implementação e acurácia [58]. A opção por implementar o próprio integrador se deu pelo fato de desejar controlar o  $\Delta t$  usado, por isso este método foi chamado de integrador com passo fixo. Já o integrador usando a função ODE45 foi chamado de integrador com passo variável. Para mostrar a diferença da discretização de um intervalo de integração usando integrador com passo fixo e variável, foi feita uma simulação do problema modelo usando os dois métodos e considerando os mesmos valores de parâmetros. O resultado dessa simulação foi mostrado em um gráfico de dispersão, assim, somente os pontos para os quais as aproximações foram calculadas foram plotados. Na Fig. 3.5 é mostrado um gráfico de dispersão da aproximação numérica para a solução da velocidade do problema modelo usando a) integrador com passo variável e b) integrador com passo fixo. Pode-se perceber que com o integrador de passo variável, a discretização da malha

do intervalo de integração não é uniforme, apresentando uma maior densidade de pontos perto das regiões onde ocorrem as transições entre as fases e os extremos da velocidade nas fases de *slip*. Já para o integrador com passo fixo, a malha uniforme definida é respeitada e somente estes pontos são calculados independente da proximidade de regiões de extremo ou mudança de fase.

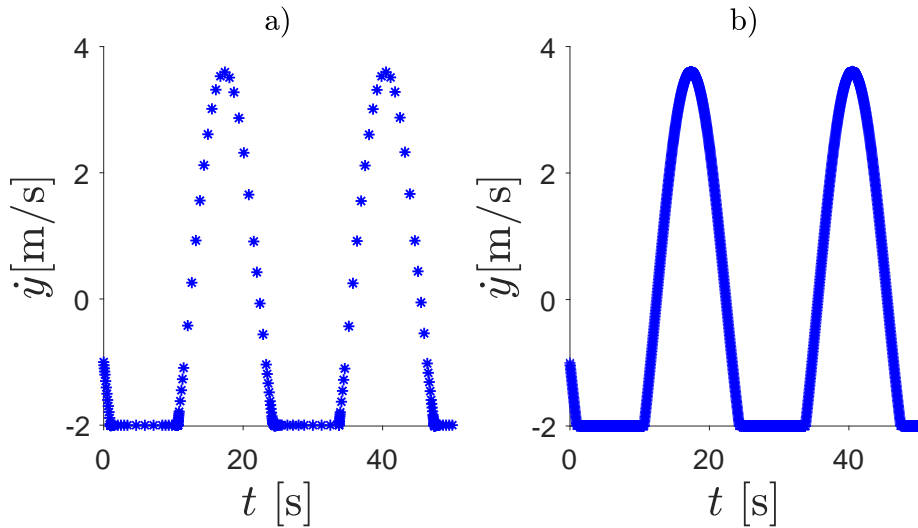


Figura 3.5: Simulação das aproximações da resposta de  $\dot{y}(t)$  calculada usando aproximações numéricas com a) passo variável e b) passo constante.

Como já mencionado, determinar os instantes de transição com acurácia em problemas com *stick-slip* é um dos desafios de se trabalhar com essa dinâmica. Por isso, como visto na simulação mostrada na Fig. 3.5, perto dos instantes de transição o integrador diminui o passo de integração para garantir que estes instantes sejam capturados corretamente. Porém, esta estratégia faz com que o custo computacional aumente. Para exemplificar esta relação entre passo de integração, qualidade da aproximação e custo computacional, foram feitas outras duas simulações usando a função ODE45 considerando passos de integração máximos diferentes. O intervalo de integração usado foi de  $[0, 50]$  segundos e os valores dos parâmetros usados estão na Tab. 3.1. A primeira simulação foi usando  $\Delta t = 2$ , considerado grande e está na Fig. 3.6. A área marcada na Fig. 3.6 mostra que com um passo de integração grande como este, os instantes de transição não são capturados corretamente, pois esta área mostra um intervalo de transição entre as fases de *stick* e *slip* que não deve existir. O tempo de execução desta simulação foi de 0,23 segundos e o arquivo para armazenar os dados desta simulação foi de 4 KB.

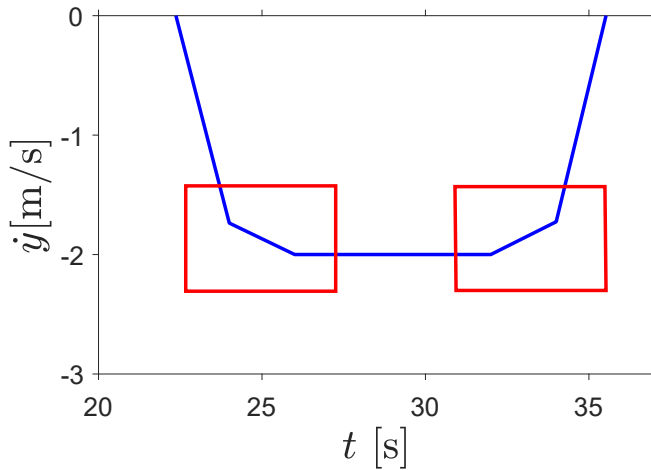


Figura 3.6: Instantes de transição entre as fases de *stick* e *slip* com passo de tempo de 2.

Para a segunda simulação foi usado um  $\Delta t = 0,0002$ , um passo considerado pequeno. O resultado obtido é mostrado na Fig. 3.7. Pode-se verificar que os instantes de transição foram capturados mais precisamente com este passo de integração, mostrando a relação do passo de integração com a acurácia das aproximações numéricas. O tempo de execução desta simulação foi de 1,35 segundos e o arquivo para armazenar os dados desta simulação foi de 3.467 KB.

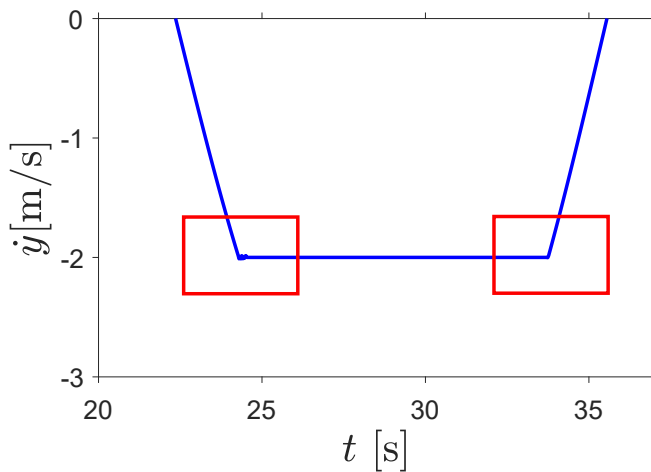


Figura 3.7: Instantes de transição entre as fases de *stick* e *slip* com passo de tempo de 0.0002.

O tempo de execução da simulação com  $\Delta t = 2$  é aproximadamente 5,63 vezes menor que o da simulação com  $\Delta t = 0,0002$ . Já o espaço em disco da simulação com  $\Delta t = 2$  é aproximadamente 866 vezes menor que o da simulação com  $\Delta t = 0,0002$ . Em um exemplo determinístico e com intervalo de integração

pequeno, os custos computacionais são razoáveis, apesar de ter uma diferença expressiva entre os custos para cada simulação.

### 3.2.1

#### Validação das aproximações analíticas

Para validar a aproximação analítica calculada neste capítulo foi determinada uma métrica e as aproximações calculadas pelo método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens foram usadas como referência. O erro máximo admitido para uma aproximação analítica neste trabalho é de  $1,5 \cdot 10^{-3}$ . Para calcular a métrica definida para validar as aproximações analíticas, primeiro calcula-se a diferença entre os instantes de transição para as fases de *slip* para *stick*

$$e_p = (t_p^{AN} - t_p^{NV}) \quad \text{sendo } p = [1, \dots, n^{slip}], \quad (3-34)$$

depois, calcula-se a média destas diferenças

$$e = \text{média}(e_p), \quad (3-35)$$

onde  $e$  é o erro de uma aproximação analítica com uma numérica,  $t_p^{AN}$  é o instante de transição de uma fase de *slip* para *stick* calculado com uma aproximação analítica e  $t_p^{NV}$  é o instante de transição de uma fase de *slip* para *stick* calculado com uma aproximação numérica. A escolha em usar os instantes de transição para calcular o erro entre as aproximações se deu pelo fato destes instantes serem uma das principais características da dinâmica de um sistema com *stick-slip*.

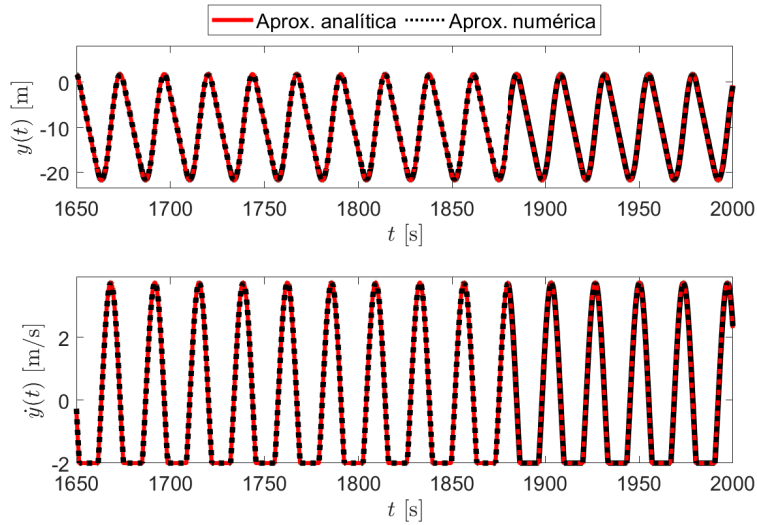


Figura 3.8: Aproximações do deslocamento e velocidade do sistema usando os métodos de múltiplas escalas e de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens.

Antes de calcular o erro entre as aproximações, foi feita uma simulação considerando o intervalo de integração de  $[0, 2000]$  segundos e os valores dos parâmetros da Tab. 3.1. Na Fig. 3.8 as aproximações analíticas e numéricas para o deslocamento e velocidade do sistema são mostradas. Para visualizar melhor as curvas referentes a cada aproximação, nos gráficos somente os últimos 350 segundos do intervalo de integração foram mostrados. Pode-se verificar que as duas aproximações continuam coincidentes, tanto para velocidade quanto para deslocamento. Os diagramas de fase também foram mostrados no gráfico da Fig. 3.9. Usando a métrica dada pela Eq. (3-35), o erro desta aproximação analítica é de  $1,3 \cdot 10^{-3}$ . Como o erro máximo admitido é de  $1,5 \cdot 10^{-3}$ , a aproximação analítica de primeira ordem calculada neste capítulo atende o critério de validação.

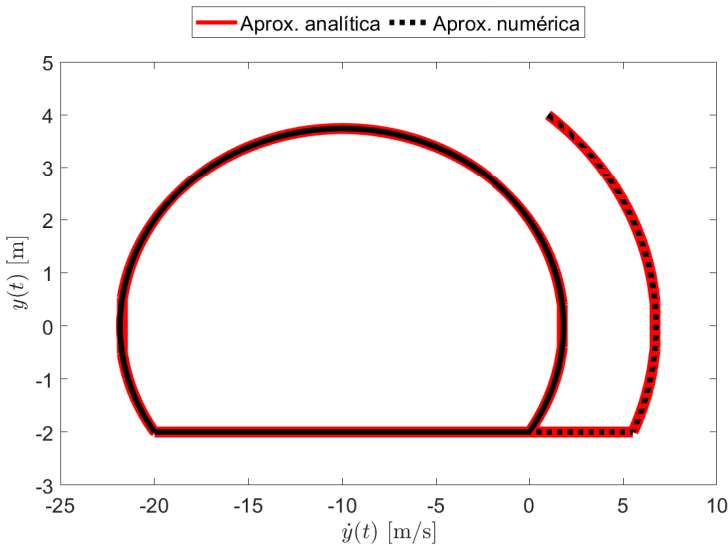


Figura 3.9: Diagrama de fase das aproximações da resposta do problema modelo usando os métodos de múltiplas escalas e de Runge-Kutta de 4º e 5º ordem.

Os custos computacionais para executar essas simulações estão na Tab. 3.2. Comparando os tempos de execução, pode-se verificar que a simulação usando a aproximação analítica é aproximadamente 6,41 vezes mais rápida que a usando aproximação numérica. Já ao comparar os valores de espaço em disco, a vantagem em usar métodos analíticos é ainda mais expressiva, uma vez que o espaço em disco usado com a aproximação analítica é aproximadamente 502,2 vezes menor que com a aproximação numérica.

Aproximação	Tempo de execução [s]	Espaço em disco [MB]
Analítica	2, 10	1, 81
Numérica	13, 46	900

Tabela 3.2: Custos computacionais das aproximações.

## 4

### Método de Monte Carlo: custo computacional

#### 4.1

##### Método Monte Carlo

O método de Monte Carlo é uma ferramenta fundamental quando se trabalha com problemas estocásticos. Uma das aplicações deste método é construir modelos estatísticos de objetos aleatórios, os quais tem modelos probabilísticos não conhecidos. Quando um objeto aleatório passa por uma transformação, o processo pode ser dividido em três partes: a primeira está relacionada a geração de realizações de um objeto aleatório com modelo probabilístico conhecido; a segunda parte é a aplicação de uma transformação; e a última está relacionada com a obtenção de realizações dos objetos de saída. Desta forma, as incertezas das variáveis de entrada são propagadas através da transformação para as variáveis de saída, que também serão objetos aleatórios. Estas transformações podem ser dadas por funções matemáticas desde as mais simples às mais complexas. A complexidade de uma transformação, em alguns casos, pode dificultar e até impedir a obtenção de um modelo probabilístico de saída. Por isso, uma alternativa é construir um modelo estatístico.

Fixado um erro:

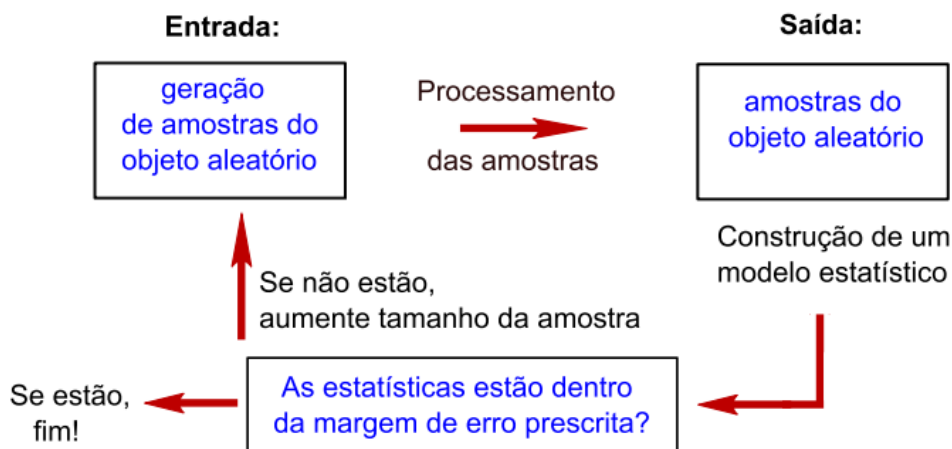


Figura 4.1: Algoritmo para as simulações de Monte Carlo.



O método de Monte Carlo é uma ferramenta muito usada para construir modelos estatísticos e um esquema de como o método funciona é mostrado na Fig. 4.1. Fixado um erro, gera-se realizações de um objeto aleatório de entrada com modelo probabilístico conhecido. Então aplica-se a transformação desejada de forma determinística para cada uma das realizações, gerando assim realizações de objetos aleatórios de saída. Se este modelo estiver dentro da margem de erro prescrita, fim do processo, se não, aumenta-se o tamanho da amostra de entrada e inicia-se novamente o processo. Baseado na Lei dos Grandes Números e no Teorema do Limite Central, que garante a convergência do modelo estatístico quando um número elevado de realizações é gerado, trabalhar com o método de Monte Carlo implica em lidar com uma quantidade elevada de realizações. Um exemplo de como a quantidade de realizações influencia na qualidade do modelo estatístico pode ser vista na construção de histogramas normalizados. Esta ferramenta é usada para aproximar uma função densidade de probabilidade (FDP) e uma função de probabilidade quando se trata de variáveis aleatórias contínuas e discretas, respectivamente. Para exemplificar, foram construídos dois histogramas normalizados de uma variável aleatória com distribuição de probabilidade normal usando amostras de tamanhos diferentes. Na Fig. 4.2, os histogramas são dados em azul e as FDP pela curva vermelha, na Fig. 4.2 a) tem-se o histograma com 500 realizações e na Fig. 4.2 b) tem-se o histograma com  $10^5$  realizações. Pode-se verificar que uma amostra com  $10^5$  realizações aproxima melhor a FDP desta variável aleatória do que a amostra de 500 realizações aproxima.

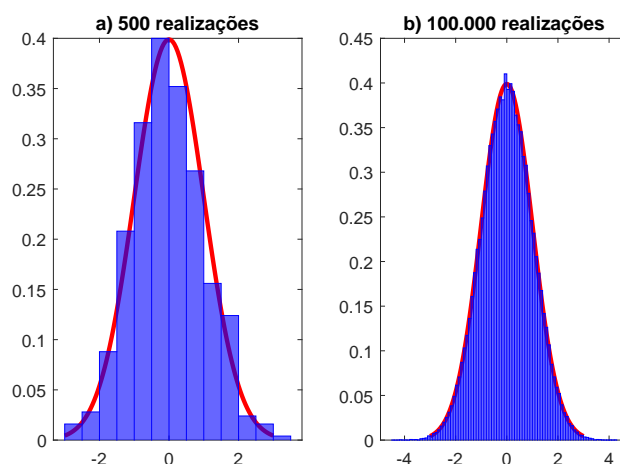


Figura 4.2: Histogramas normalizados construídos com a) 500 e b)  $10^5$  realizações de uma variável aleatória com distribuição normal com média igual a um e variância zero.

Mas este mesmo tamanho de amostra, pode não ser suficiente para aproximar uma FDP bivariada por um histograma conjunto normalizado, pois neste caso

deseja-se aproximar uma superfície ao invés de uma curva. Para exemplificar, foram geradas  $10^5$  e  $10^7$  realizações de um vetor aleatório composto por duas variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade normal e independentes. Para cada um dos conjuntos de realizações foi construído um histograma normalizado (um histograma conjunto das componentes do vetor) e foi traçada a FDP do vetor. Na Fig. 4.3, os histogramas conjuntos são dados em azul e as FDPs bivariadas são dadas pelas superfícies vermelhas. Na Fig. 4.3 a) tem-se um histograma com  $10^5$  realizações e na Fig. 4.3 b) tem-se um histograma com  $10^7$  realizações. Comparando os dois histogramas com tamanhos de amostra diferentes, pode-se verificar que a amostra com  $10^7$  realizações aproxima melhor a FDP de um vetor aleatório de dimensão 2. É importante destacar que a visualização de incertezas usando histogramas conjuntos é limitado a objetos aleatórios de dimensão 2.

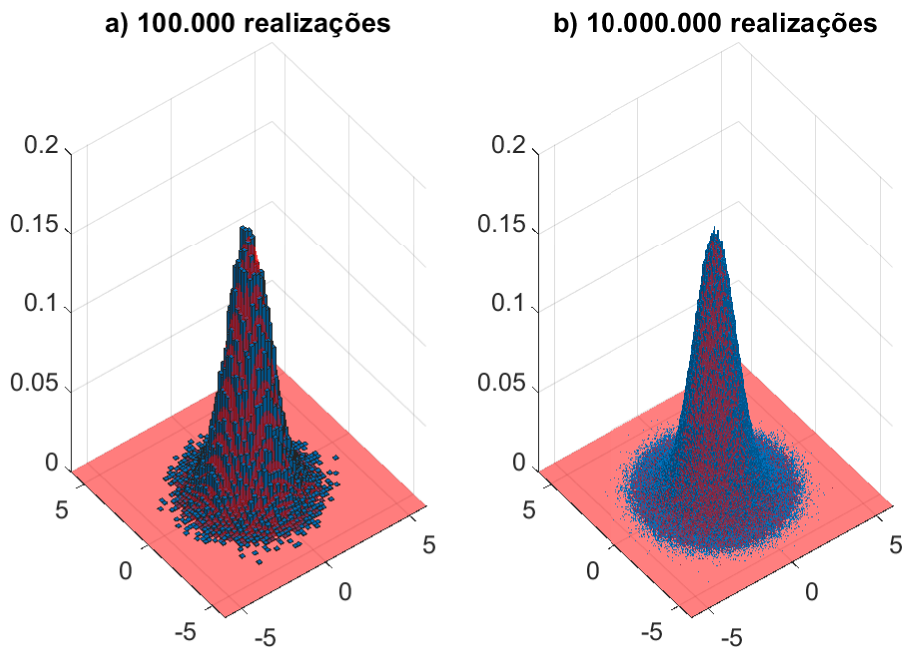


Figura 4.3: Histogramas normalizados construídos com a) 100.000 e b) 10.000.000 realizações de duas variáveis aleatórias independentes com distribuição normal com média igual a um e variância igual a zero.

Devido à elevada quantidade de dados necessária para construir um modelo estatístico com acurácia, entre outros fatores, problemas estocásticos podem ser classificados como problemas de *big data*. Problemas de *big data* são caracterizados pelo grande volume de dados que devem ser armazenados e tratados, dos quais podem ser extraídos informações importantes. Neste contexto, o custo computacional é um requisito importante para a viabilidade da exe-

cução de problemas com este tipo de abordagem. Uma vez que os tempos de execução podem impedir a obtenção dos resultados dentro do prazo estabelecido, ou até mesmo, o impedimento total por falta de memória ou espaço de armazenamento (do inglês *storage*). Tratar um grande volume de dados pode ser extremamente custoso, por isso, em muitos casos é necessário traçar estratégias para otimizar o desempenho do computador, como a paralelização dos cálculos ou salvar os resultados em arquivos menores para otimizar o pós processamento dos dados. Para o contexto deste trabalho, onde a transformação a ser aplicada é dada pelo cálculo de aproximações da resposta de PVIs, outra estratégia para diminuir o custo computacional é utilizar métodos de integração menos custosos.

## 4.2

### Estratégias

Com o objetivo de realizar um estudo estocástico dos custos computacionais de executar o método de Monte Carlo, foi escolhido como problema modelo o sistema dinâmico que envolve o fenômeno de *stick-slip*, detalhado no capítulo 2. Para isso, um parâmetro da força de atrito foi modelado como uma variável aleatória de distribuição uniforme. Devido as incertezas consideradas no problema, o PVI que modela a dinâmica deste problema, tornou-se um PVI estocástico. Assim, as aproximações para a resposta do sistema são processos estocásticos caracterizados por uma sequência aleatória de fases de *stick* e *slip*. Neste trabalho a combinação do método de Monte Carlo com cada método de aproximação usado é chamada de

- abordagem AN quando a aproximação de primeira ordem calculada pelo método de múltiplas escalas é usada junto com o método de Monte Carlo;
- abordagem NV quando aproximações numéricas calculadas pelo método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens com passo de integração variável são usadas junto com o método de Monte Carlo;
- abordagem NF quando aproximações numéricas calculadas pelo método de Runge-Kutta de 4º ordem com passo de integração fixo são usadas junto com o método de Monte Carlo.

### 4.2.1

#### Abordagem AN

A abordagem AN combina o método de Monte Carlo com a aproximação analítica de primeira ordem calculada usando o método de múltiplas escalas. Como mostrado, com este método foi possível calcular duas expressões que

permitem prever os instantes de transição entre as fases. Com isso, para esta abordagem não é preciso discretizar o intervalo de integração.

Para executar as simulações usando esta aproximação é preciso apenas definir o intervalo de integração, as condições iniciais e substituir os valores dos parâmetros nas expressões. Para isso, foi criada uma rotina no software MATLAB usando a Eq. (3-30) para prever os instantes de transição entre as fases de *stick* para *slip*, e a Eq. (3-33) para prever os instantes de transição entre as fases de *slip* para *stick*.

```

- Definir um intervalo de integração:  $[0; t]$ 
- Definir condições iniciais do problema:  $y(0)$  e  $\dot{y}(0)$ 
- Criar variável  $t_l$  que indica os instantes de transição entre as fases
- Criar  $y(t_l)$  e  $\dot{y}(t_l)$  que são as variáveis de estado nos instantes  $t_l$ 
- Definir  $y_{min} = -f_e - b \cdot v / k$ ,  $y_{max} = f_e - b \cdot v / k$  e  $u = v - \dot{y}(t_j)$ 
- No início da simulação:  $t_l = 0$ ,  $y(t_l) = y(0)$  e  $\dot{y}(t_l) = \dot{y}(0)$ 
- Criar uma iteração: enquanto  $t_l < t$ 
  {
    Fazer enquanto  $t_l < t$ 
      - Testar as condições das fases de stick:  $y(t_l) < y_{max}$ ,  $y(t_j) > y_{min}$  e  $u < e_{tol}$ 
        - Prever o instante final de uma fase de stick:  $t_l = t_j$  da Eq. 3-30
        - Salvar posição e velocidade no instante final desta fase:
           $y(t_l) = y(t_j)$  e  $\dot{y}(t_l) = \dot{y}(t_j)$ 
        se não
          - Calcular os valores das constantes de integração usando método numérico:
             $c_{3,p}$  e  $c_{4,p}$ 
          - Prever o instante final de uma fase de stick:  $t_l = t_p$  da Eq. 3-33
          - Salvar posição e velocidade no instante final desta fase:
             $y(t_l) = y(t_p)$  e  $\dot{y}(t_l) = \dot{y}(t_p)$ 
        fim
      fim
    fim
  }

```

Figura 4.4: Parte do algoritmo usado na abordagem AN.

A Fig. 4.4 mostra parte do algoritmo usado na rotina programada para simular a aproximação da dinâmica do sistema usando a abordagem AN. É importante destacar que as mesmas expressões calculadas pelas Eqs. (3-30) e (3-33) são usadas para todas as realizações da variável de entrada. Estas equações foram avaliadas para cada realização através de substituição de valores nas expressões.

### 4.2.2

#### Abordagem NV

A abordagem NV combina o método de Monte Carlo com aproximações numéricas calculadas pelo método de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens. Este método está implementado no software MATLAB e pode ser usado através da função ODE45. Como já mencionado, este é um método de passo de integração variável que permite o usuário definir o passo máximo, mas não se tem controle do passo mínimo.

```

- Definir um intervalo de integração:  $[0; t]$ 
- Definir condições iniciais do problema:  $y(0)$  e  $\dot{y}(0)$ 
- Definir o passo de integração:  $\Delta t_{NV}$ 
- Definir  $y_{min} = -f_e - b \cdot v / k$ ,  $y_{max} = f_e - b \cdot v / k$  e  $u = v - \dot{y}(t_j)$ 
- Discretizar o intervalo:  $[0: \Delta t_{NV}: t_n]$ 
- Chamar a função ODE45 e passar as variáveis:  $[0; t_n]$ ,  $y(0)$  e  $\dot{y}(0)$ 

  {
    Fazer para todo instante  $t_l$ 
      - Testar as condições das fases de stick:  $y(t_l) < y_{max}$ ,  $y(t_l) > y_{min}$  e  $u < e_{tol}$ 
      - Calcular  $y(t_j)$  e  $\dot{y}(t_j)$  integrando a Eqs. 2-9
    se não
      - Calcular  $y(t_j)$  e  $\dot{y}(t_j)$  integrando a Eqs. 2-12
    fim
  }
fim

```

Figura 4.5: Parte do algoritmo usado na abordagem NV.

A Fig. 4.5 mostra parte do algoritmo usado na rotina programada para simular as aproximações da dinâmica do sistema usando a abordagem NV. Diferente da abordagem AN, onde a mesma aproximação foi usada para todas as realizações, na abordagem NV para cada realização uma nova aproximação numérica é calculada.

### 4.2.3

#### Abordagem NF

A abordagem NF combina o método de Monte Carlo com aproximações numéricas calculadas pelo método de Runge-Kutta de 4º ordem. O integrador usado nesta abordagem foi implementado pela autora da tese para garantir que a integração fosse feita usando um passo de integração fixo. Para isto, o integrador também foi implementado no software MATLAB.

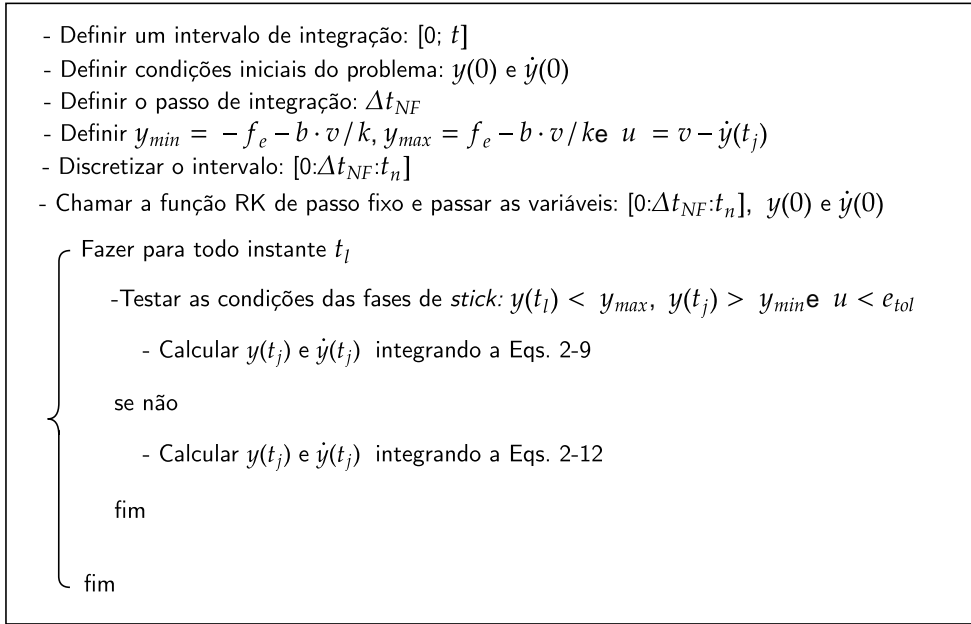


Figura 4.6: Parte do algoritmo usado na abordagem NF.

A Fig. 4.6 mostra parte do algoritmo usado na rotina programada para simular as aproximações da dinâmica do sistema usando a abordagem NF. Assim como na abordagem NV, neste caso também foi calculada uma aproximação para cada realização.

### 4.3

#### Modelagem da variável aleatória $F_d$

Neste trabalho o parâmetro modelado como uma variável aleatória é o parâmetro relacionado a força de atrito,  $f_d$ , da Eq. (2-5). Este parâmetro é modelado como uma variável aleatória uniforme,  $F_d$ , com função de densidade de probabilidade (FDP) dada por

$$p_{F_d}(x) = \begin{cases} \frac{1}{l_s - l_i}, & l_i \leq x \leq l_s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4-1)$$

onde  $l_i$  é o limite inferior e  $l_s$  é o limite superior do suporte. Os limites do suporte devem respeitar algumas características dadas pelo modelo de atrito mostrado na Fig. 2.3. O limite superior não pode assumir valores maiores que o de  $f_e$ . Como  $f_e$  é um parâmetro determinístico com valor fixo igual a 2,0, o limite superior escolhido foi de 1,8. Já o valor do limite inferior deve ser escolhido de maneira a não permitir que as curvas da Fig. 2.3 referentes aos valores de  $u \neq 0$  não cruzem o eixo de  $f_{at} = 0$ . Para respeitar esta característica

escolheu-se o valor do limite inferior igual a 0,8. Assim, o suporte da variável  $F_d$  é dado por  $[0,8; 1,8]$ . A Fig. 4.7 mostra os histogramas normalizados e a FDP para uma distribuição uniforme em a) com  $10^5$  realizações e em b) com  $4 \cdot 10^4$  realizações. Para as abordagens AN e NV foram usadas amostras com  $10^5$  realizações, já para a abordagem NF foi necessário diminuir o tamanho da amostra usada para  $4 \cdot 10^4$  realizações devido ao custo computacional desta abordagem.

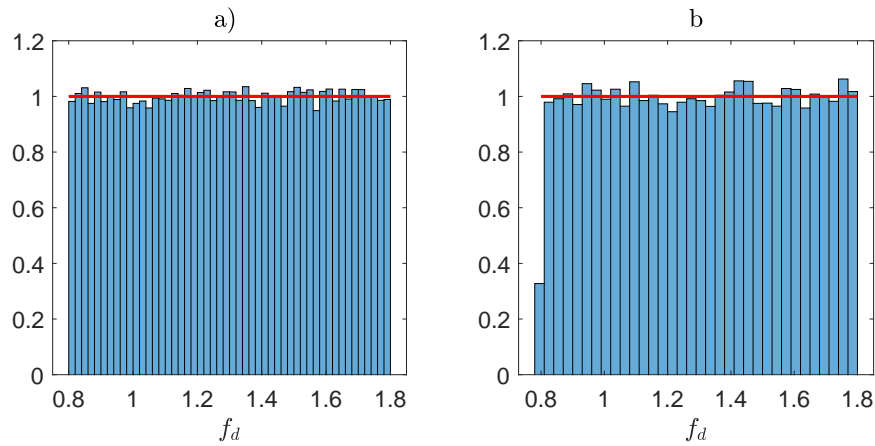


Figura 4.7: FDP de  $F_d$  e um histograma normalizado com  $10^5$  realizações.

## 5

### Análise dos resultados

A discussão dos resultados é dividida em três partes, referentes aos resultados associados ao processo estocástico, ao custo computacional de executar as três abordagens propostas e à análise conjunta. Além disso, antes de analisar os modelos estatísticos das variáveis aleatórias associadas ao processo estocástico, na Seção 5.1 verifica-se que a aproximação analítica usada na abordagem AN satisfaz o critério de erro escolhido em cada realização de  $F_d$ . Para isto, usou-se a métrica definida pela Eq. 3-35 e as aproximações calculadas na abordagem NV foram usadas como referência. Uma vez que a aproximação analítica foi validada, considera-se que os processos estocásticos calculados usando cada uma das abordagens propostas são iguais. Ou seja, o número de fases de *stick* e *slip* e suas durações são consideradas iguais para as três abordagens.

Na Seção 5.2 são construídos modelos estatísticos e histogramas normalizados das variáveis aleatórias que representam o número de fases de *stick* e *slip*,  $N^{stick}$  e  $N^{slip}$ , assim como para as variáveis aleatórias que representam as durações totais das fases,  $\bar{D}^{stick}$  e  $\bar{D}^{slip}$ .

Na seção 5.3, são tratadas as variáveis associadas ao custo computacional, dadas pelo tempos de execução,  $R$ , e o espaço em disco,  $S$ . Estas variáveis são distinguidas de acordo com a abordagem usada, pelo uso dos índices  $\square_{AN}$ ,  $\square_{NV}$  e  $\square_{NF}$  referentes as abordagens AN, NV e NF, respectivamente. O tempo de execução ( $R$ ) como o próprio nome indica, está relacionado ao período de tempo necessário para concluir uma execução do método de Monte Carlo. O espaço em disco, do inglês *storage*, está associado com o tamanho do arquivo necessário para armazenar os dados referentes a aproximação da resposta do sistema. Com a construção dos modelos estatísticos e histogramas normalizados destas variáveis, pode-se verificar que a abordagem escolhida afeta o modelo estatístico dessas variáveis.

Posteriormente, na Seção 5.4 é feita uma análise conjunta dos tempos de execução com as variáveis associadas ao processo estocástico para estudar a relação entre elas.



Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
$m$	1	kg	$k$	0.1	N/m
$v$	-2	m/s	$y(0)$	1	m
$b$	1	(N s)/m	$\dot{y}(0)$	4	m/s
$a$	0.1	(kg s)/(m <sup>2</sup> )	$f_e$	2	N
$\epsilon$	0.0001	-	$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>
$l_i$	0.8	-	$l_s$	1.8	-
$e_{rel}$	$1e-9$	-	$\Delta t_{NF}$	0.005	s

Tabela 5.1: Valor dos parâmetros usados nas simulações.

## 5.1

### Validação da aproximação analítica

Como já mencionado nos capítulos anteriores, na abordagem AN apenas uma aproximação analítica foi calculada e avaliada para cada valor de parâmetro. Já para os métodos numéricos para cada novo valor de um parâmetro uma nova integração precisa ser feita. Neste caso, a quantidade de realizações em uma amostra indica a quantidade de integrações calculadas nas abordagens numéricas. Os parâmetros mostrados na Tab. 5.1 foram usados nas simulações e são iguais para todas as abordagens. O intervalo de integração escolhido foi de  $[0 \ 2000]$  segundos. A Fig. 5.1 mostra uma realização das abordagens AN e NV considerando os primeiros 100 segundos do intervalo de integração, com as quatro primeiras fases de *stick* e *slip*. Devido a propagação de incertezas, os instantes de transição também são variáveis aleatórias.

Com o objetivo de estudar se a aproximação analítica de primeira ordem satisfaz o critério de erro pré-estabelecido, esta foi avaliada considerando os mesmos valores que tomam as  $10^5$  realizações de  $F_d$  na abordagem NV. Logo, foi usada a métrica dada pela Eq. 3-35, que foi reescrita como

$$e_{p,i} = (t_{p,i}^{AN} - t_{p,i}^{NV}) , \quad (5-1)$$

$$e_i = \text{média}(e_{p,i}) \quad (5-2)$$

onde o índice  $i$  está relacionado com a número de realização (ou seja,  $i \in [1, \dots, 10^5]$ ), o índice  $p$  está relacionado com o número de transições entre as fases de *slip* para *stick* (ou seja,  $p \in [0, \dots, n^{slip}]$ ),  $t_{p,i}^{AN}$  é o instante de transição  $p$  entre uma fase de *slip* para *stick* associada à aproximação analítica de primeira ordem usada na abordagem AN de uma realização  $i$  e  $t_{p,i}^{NV}$  é o instante de transição  $p$  entre uma fase de *slip* para *stick* associada à uma integração numérica da abordagem NV de uma realização  $i$ . Assim, para uma realização são calculadas as diferenças entre os instantes de transição das fases

de *slip* para *stick*, e depois calcula-se a média destas diferenças. Desta forma, a variável  $e$  também é uma variável aleatória que foi chamada de  $E$  com  $10^5$  realizações.

Para verificar se todas as aproximações estão dentro do erro definido, foi construído um histograma normalizado da amostra de  $E$ . O valor  $1,5 \cdot 10^{-3}$  foi adotado como critério de erro máximo admissível. Assim, se o suporte não ultrapassa este valor, a aproximação analítica satisfaz o critério. Isto se verifica na Fig. 5.2, onde ilustra-se o histograma normalizado da amostra de  $E$ , e a linha vertical vermelha indica o erro determinado. Como o suporte desta variável está entre  $[8 \cdot 10^{-4}, 1,49 \cdot 10^{-3}]$ , os erros de todas as realizações estão abaixo do erro máximo.

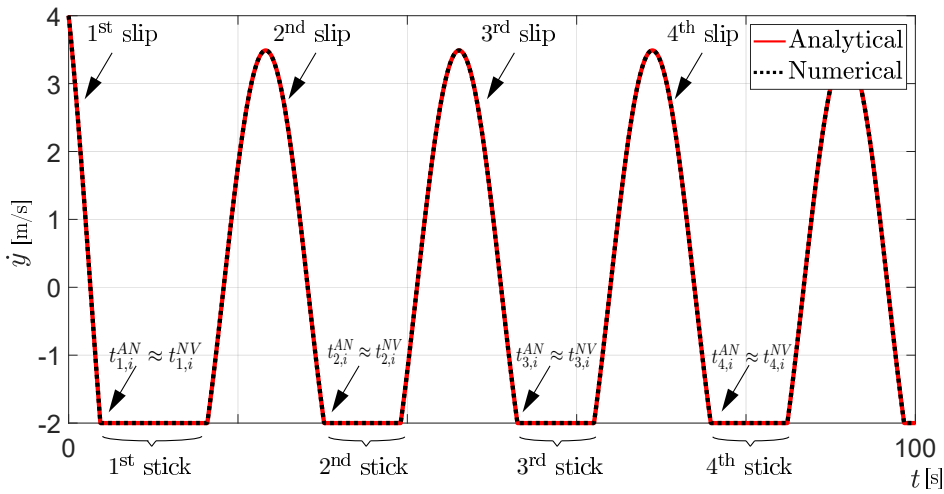


Figura 5.1: A velocidade  $\dot{y}(t)$  para uma realização ao longo das primeiras fases de *stick* e *slip*.

Uma vez que as aproximações satisfazem o erro indicado, tanto o número de fases como suas durações, preditos pelas diferentes abordagens, foram considerados iguais neste trabalho. A nomenclatura adotada para as fases de *stick*:

$$\begin{aligned} - D_{AN}^{stick} &= D_{NV}^{stick} = D_{NF}^{stick} = D^{stick}, \\ - N_{AN}^{stick} &= N_{NV}^{stick} = N_{NF}^{stick} = N^{stick}; \end{aligned}$$

e para as fases de *slip*:

$$\begin{aligned} - D_{AN}^{slip} &= D_{NV}^{slip} = D_{NF}^{slip} = D^{slip}, \\ - N_{AN}^{slip} &= N_{NV}^{slip} = N_{NF}^{slip} = N^{slip}. \end{aligned}$$

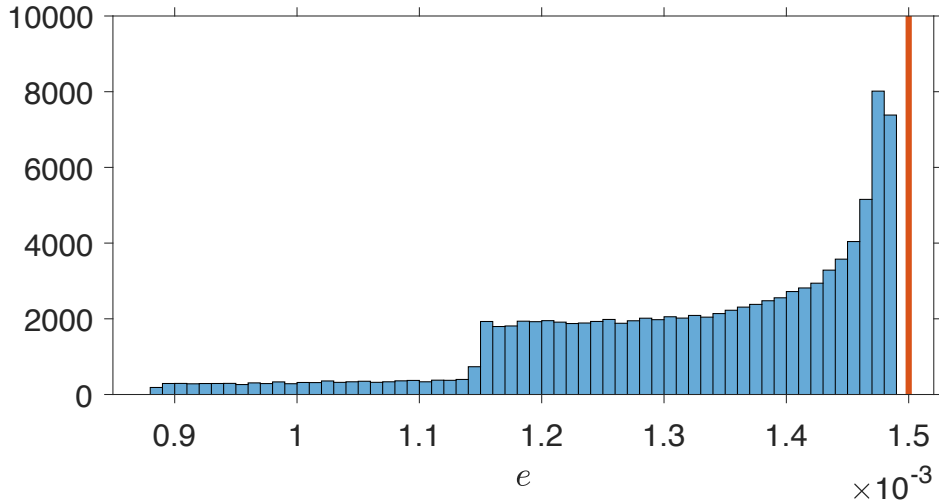


Figura 5.2: Histograma normalizado do erro e a tolerância definida.

## 5.2

### Construção dos modelos estatísticos das variáveis associadas ao processo estocástico

As aproximações para a resposta do sistema são processos estocásticos caracterizados por uma sequência aleatória de fases de *stick* e *slip*. A Fig. 5.3 mostra um exemplo de uma realização de um processo estocástico com intervalo de integração de  $[0, t_n]$ , que começa por uma fase de *stick* e termina com uma fase de *slip*, onde  $d_j^{stick}$ ,  $d_p^{slip}$ ,  $n^{stick}$  e  $n^{slip}$  são realizações de variáveis aleatórias. Como os modelos probabilísticos destas variáveis são desconhecidos, foram construídos modelos estatísticos e histogramas normalizados para as variáveis aleatórias de interesse. Em seguida, gráficos de dispersão foram usados para estudar a relação destas variáveis com  $F_d$ .

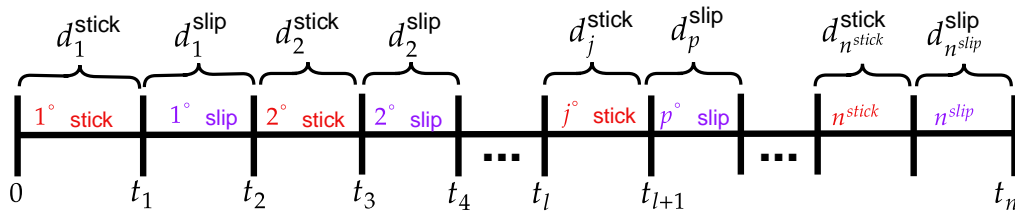


Figura 5.3: Esquema de uma realização do processo estocástico.

Os números de fases de *stick* e *slip* são dados pelas variáveis  $N^{stick}$  e  $N^{slip}$ , respectivamente. Em cada integração (realização) o número de fases de *stick* e *slip* só difere em um máximo de uma unidade, dependendo em qual fase o

sistema se encontrava no início e no fim do intervalo. Como cada realização da variável de entrada resulta em um processo estocástico de saída, as amostras de  $N^{stick}$  e  $N^{slip}$  também são compostas por  $10^5$  realizações. Estas realizações foram usadas para construir os histogramas normalizados da Fig. 5.4 e calcular as estatísticas amostrais da Tab. 5.2.

Na Fig. 5.4 são mostrados os histogramas normalizados das variáveis a)  $N^{stick}$  e b)  $N^{slip}$ . Analisando estes histogramas pode-se verificar que  $N^{stick}$  e  $N^{slip}$  são variáveis aleatórias discretas com suporte de  $[80, 100]$  e  $[81, 101]$ , respectivamente. A diferença de uma unidade entre o número de fases de *stick* e *slip* em uma realização pode ser vista também no suporte dos histogramas. A semelhança entre  $N^{stick}$  e  $N^{slip}$  também é dada pelas estatísticas da Tab. 5.2, visto que as diferenças entre as médias, de 0,69, e entre os desvios padrões, de 0,11, são pequenas. Já os momentos de 4º ordem tem valores iguais mostrando que os dois histogramas tem o mesmo achatamento.

Variável	Média	Desvio padrão	Momento de 3º ordem	Momento de 4º ordem
$N^{stick}$	91.95	6.16	-0.29	1.76
$N^{slip}$	92.64	6.27	-0.28	1.76

Tabela 5.2: Estatísticas amostrais das variáveis  $N^{stick}$  e  $N^{slip}$ .

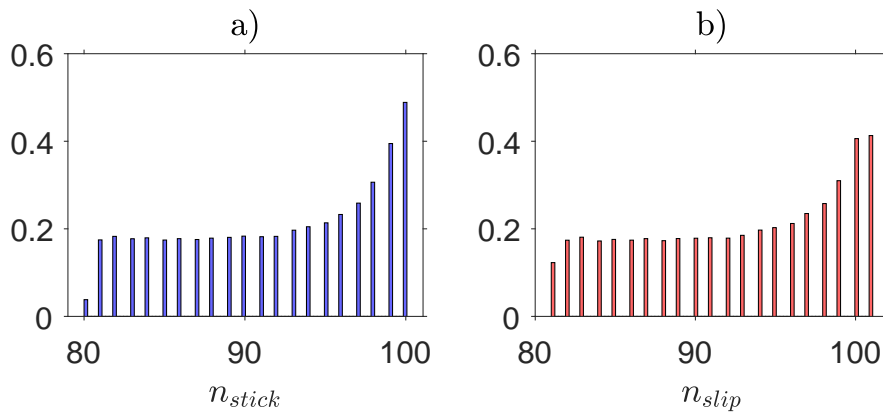


Figura 5.4: Histograma normalizado do número de fases de *stick* e *slip*, respectivamente,  $N^{stick}$  e  $N^{slip}$ .

As variáveis de duração das fases de *stick* e *slip* também são importantes na análise dos processos estocásticos. Cada fase pode ter durações diferentes. Por exemplo, a da primeira fase de *stick*, dada por  $d_1^{stick}$ , pode ser diferente da duração da  $j$ -ésima fase de *stick*, dada por  $d_j^{stick}$ . A mesma situação pode acontecer para as fases de *slip*, tendo-se no total  $n^{stick} + n^{slip}$  variáveis diferentes por realização. Por isso, novas variáveis foram definidas denominadas de  $\bar{d}^{stick}$

e  $\bar{d}^{stick}$ , que são dadas pelo total das durações das fases de *stick* e *slip* em uma realização, ou seja,

$$\bar{d}^{stick} = \sum_{j=1}^{N^{stick}} d_j^{stick}, \quad (5-3)$$

$$\bar{d}^{slip} = \sum_{p=1}^{N^{slip}} d_p^{slip}. \quad (5-4)$$

Dado um intervalo de integração de  $[0, t_n]$ , tem-se que para cada realização

$$\bar{d}^{stick} + \bar{d}^{slip} = t_n. \quad (5-5)$$

Assim, as amostras de  $\bar{D}^{stick}$  e  $\bar{D}^{slip}$  também possuem  $10^5$  realizações que foram usadas para construir os histogramas normalizados da Fig. 5.5 e calcular as estatísticas amostrais da Tab. 5.2. Na Fig. 5.5 são mostrados os histogramas normalizados das variáveis a)  $\bar{D}^{stick}$  e b)  $\bar{D}^{slip}$ . Analisando estes histogramas pode-se verificar que  $\bar{D}^{stick}$  e  $\bar{D}^{slip}$  são variáveis aleatórias contínuas com suporte de  $[208, 966]$  e  $[1032, 1790]$ , respectivamente. Visto que para as simulações calculadas neste trabalho o intervalo de integração foi de 2000 segundos, os suportes destes histogramas respeitam a relação dada pela Eq. (5-5), assim, como a média amostral das variáveis dada na Tab. 5.2.

Os histogramas da Fig. 5.5 parecem estar espelhados um em relação ao outro. Os valores de desvio padrão, momento de 3º ordem e 4º ordem iguais podem confirmar esse efeito. Uma vez que os desvios padrões amostrais e os momentos de 4º ordem amostrais de ambas as variáveis são iguais, ou seja, mostram que eles têm mesma dispersão e achatamento. Já os momentos de 3º ordem possuem valores iguais e sinais trocados, mostrando que o histograma da Fig. 5.5 a) possui mais realizações a direita da sua média e o histograma da Fig. 5.5 b) possui mais realizações a esquerda da sua média.

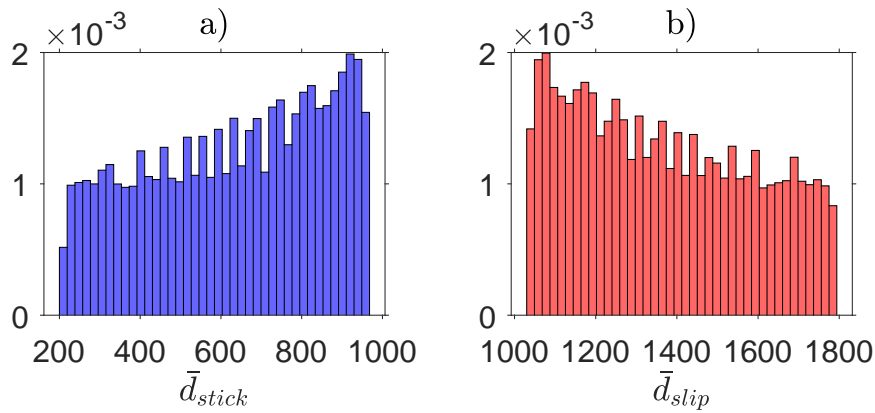


Figura 5.5: Histograma normalizado das durações totais das fases de *stick* e *slip*, respectivamente,  $\bar{D}^{stick}$  e  $\bar{D}^{slip}$ .

Variável	Média	Desvio padrão	Momento de 3º ordem	Momento de 4º ordem
$\bar{D}^{stick}$	631.27	219.19	-0.25	1.84
$\bar{D}^{slip}$	1368.7	219.19	0.25	1.84

Tabela 5.3: Estatísticas amostrais das variáveis  $\bar{D}^{stick}$  e  $\bar{D}^{slip}$ .

Com as variáveis do número de fases e suas durações definidas, foi feita uma análise entre a relação dessas variáveis com  $F_d$ . A Fig. 5.6 a) mostra os gráficos de dispersão entre as variáveis das durações totais das fases de *stick* e *slip*,  $\bar{D}^{stick}$  e  $\bar{D}^{slip}$ , com  $F_d$ ; e em b) entre as variáveis do número de fases de *slip*,  $N^{slip}$ , com  $F_d$ . Lembrando que devido a natureza do problema, os valores de  $N^{slip}$  e  $N^{stick}$  tem no máximo diferença de uma unidade. Analisando a Fig. 5.6 tem que

- quando o valor de  $f_d$  aumenta, a duração total das fases de *slip* ( $\bar{d}^{slip}$ ) também aumenta, assim como o número de fases ( $n^{slip}$ );
- quando o valor de  $f_d$  aumenta a duração total das fases de *stick* ( $\bar{d}^{stick}$ ) diminui, enquanto o número de fases ( $n^{stick}$ ) aumenta.

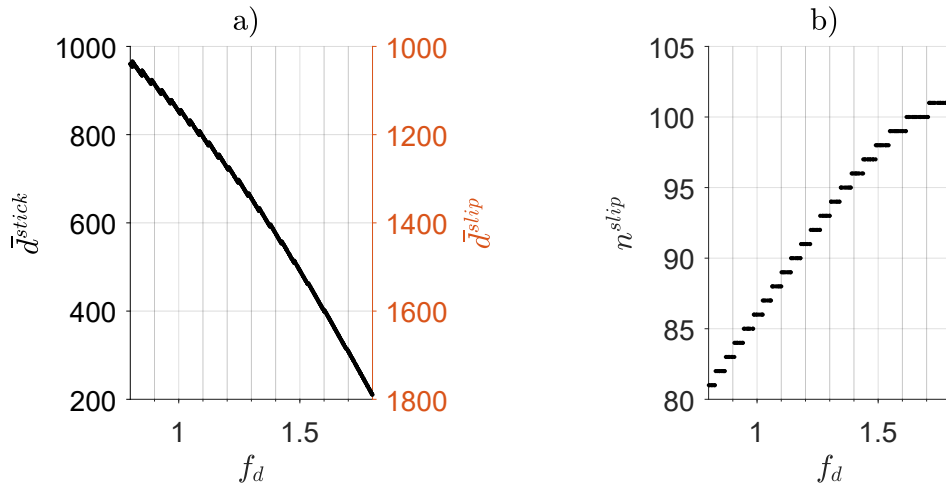


Figura 5.6: Gráfico de dispersão entre as variáveis em a) do total da duração das fases de *stick* e *slip* e  $f_d$  e em b) do número de fases de *slip* e  $f_d$ .

Para todas as realizações, o valor de  $f_e$  é determinístico e fixo. Com isso, quanto maior o valor de  $f_d$  menor a diferença entre esses dois parâmetros, o que faz diminuir a duração das fases de *stick* e aumentar as de *slip*. Para exemplificar esta relação foram construídos dois digramas de fase considerando os valores extremos de  $f_d$  usando a aproximação analítica de primeira ordem e

aproximações numéricas com passo variável. Os valores dos parâmetros usados estão na Tab. 5.1. A Fig. 5.7 mostra o diagrama de fases para  $f_d = 0,8$ . Quando  $f_d$  assume este valor, tem-se a maior diferença entre os valores deste parâmetro e  $f_e$  e para este caso tem-se  $n^{stick} = 80$ ,  $n^{slip} = 80$ ,  $d^{stick} = 11,9$  segundos e  $d^{slip} = 13,0$  segundos.

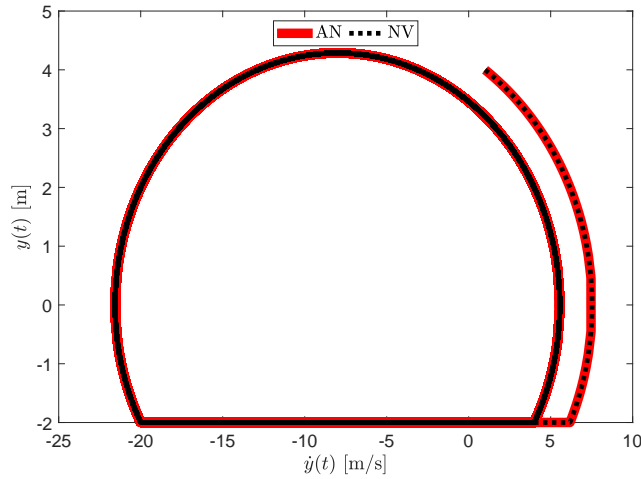


Figura 5.7: Diagrama de fase de uma realização com  $f_d = 0,8$ .

A Fig. 5.8 mostra o diagrama de fases para  $f_d = 1,8$ . Quando  $f_d$  assume este valor, tem-se a menor diferença entre os valores deste parâmetro e  $f_e$  e para este caso tem-se  $n^{stick} = 50$ ,  $n^{slip} = 51$ ,  $d^{stick} = 2,0$  segundos e  $d^{slip} = 17,9$  segundos.

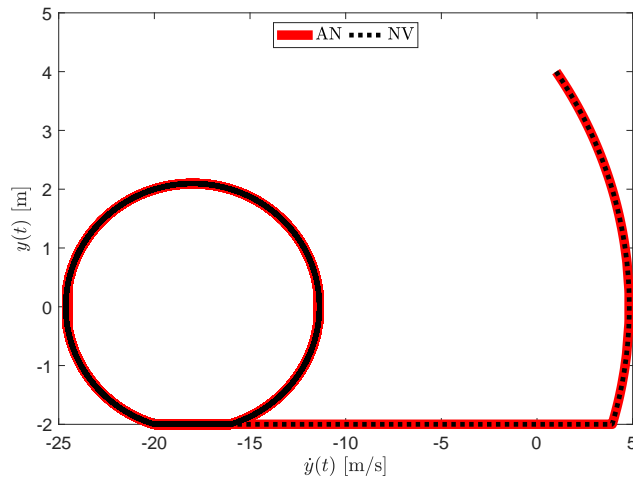


Figura 5.8: Diagrama de fase de uma realização com  $f_d = 0,8$ .

### 5.3

#### Construção dos modelos estatísticos do tempo de execução e espaço em disco

Um dos objetivos deste trabalho é estudar o custo computacional de forma aleatória. Para isto, o método de Monte Carlos foi combinado com três abordagens de integração diferentes, AN, NV e NF. As duas variáveis de interesse relacionadas ao custo computacional são o tempo de execução,  $R$ , e o espaço em disco,  $S$  (*storage*) que também são variáveis aleatórias. Por isso, nesta seção foram construídos modelos estatísticos e histogramas normalizados para cada destas variáveis.

As simulações usando as abordagens AN e NV foram calculadas em um computador com as seguintes configurações: processador AMD Ryzen 9 3900X 12-Core (3.80 GHz) e de 32Gb RAM; já a abordagem NF foi calculado em um computador Server Lenovo SR650, com 2 processadores Intel Xeon Gold 5120 (2.20GHz), com 14 cores cada um (28 cores no total) e 64Gb RAM. Devido ao custo computacional em executar a abordagem NF, além de diminuir o tamanho da amostra de  $F_d$  também foi necessário usar um computador com um maior número de processadores. Como cada fase é modelada por um PVI diferente, esforços diferentes são necessários para resolver cada uma delas, visto isto o tempo de execução também foi avaliado de acordo com as fases. Assim, o tempo de execução para integrar todas as fases de *stick* em uma realização é dado por  $r_{\square}^{stick}$  e para *slip* é dado por  $r_{\square}^{slip}$ , sendo  $r_{\square} = r_{\square}^{stick} + r_{\square}^{slip}$ .

#### 5.3.1

##### Modelos estatísticos dos tempos de execução

Nesta subseção são mostrados os modelos estatísticos e os histogramas normalizados dos tempos de execução total ( $R$ ), dos tempos de execução para as fases de *stick* ( $R^{stick}$ ) e para as fases de *slip* ( $R^{slip}$ ), para as três abordagens AN, NV e NF.

Para executar o método de Monte Carlo de forma sequencial, usando a abordagem AN, seriam necessários aproximadamente 7 dias para concluir todas as simulações, e usando a abordagem NV seriam necessários aproximadamente 77 dias. Para evitar essa demora, essas duas abordagens foram executadas em um computador com 12 processadores e com a estratégia de paralelização dos cálculos, os tempos foram reduzidos para 0,5 dia e 6,5 dias, respectivamente. Já para a abordagem NF foi necessário reduzir o tamanho da amostra devido ao longo tempo de execução requerido para completar todos os cálculos das  $10^5$  realizações. Considerando este tamanho de amostra, em forma sequencial seriam necessários 1909,7 dias, e usando a estratégia de paralelização, e



um computador com 28 processadores, o tempo de execução seria reduzido para aproximadamente 68,2 dias. Assim, a amostra para esta abordagem foi reduzida para  $4 \cdot 10^4$  realizações, uma vez que a tendência dos resultados não estava mais sofrendo alterações significativas. Com isso, para completar os cálculos de forma sequencial com este tamanho de amostra seriam necessários aproximadamente 770 dias, mas com a estratégia de paralelização o tempo foi reduzido para 27,5 dias. Pode-se verificar que esta abordagem é muito mais custosa que as outras duas, pois mesmo com o uso de um computador com mais processadores e diminuindo o tamanho da amostra, os cálculos levaram quase 1 mês para serem concluídos.

Os histogramas normalizados dos tempos de execução total são mostrados na Fig. 5.9. Em a) as realizações referentes a abordagem AN são mostradas, em b) as da abordagem NV; e em c) as da abordagem NF. Analisando a forma e o suporte destes histogramas pode-se verificar que o tipo de integração tem influência direta no modelo estatístico das variáveis dos tempos de execução. O suporte do histograma referente à abordagem AN é de  $[3, 669, 23]$  segundos, à abordagem NV é de  $[21, 785, 87]$  segundos e à abordagem NF é de  $[1.555, 551.920, 51]$  segundos.

As estatísticas amostrais calculadas para cada variável aleatória são apresentadas na Tab. 5.4. A média amostral da variável  $R_{AN}$  é aproximadamente 11,94 vezes menor que a média amostral de  $R_{NV}$ , que por sua vez é aproximadamente 24,92 vezes menor que a média amostral de  $R_{NF}$ . Já o desvio padrão amostral da variável  $R_{AN}$  é aproximadamente 13,89 vezes menor que o desvio padrão amostral de  $R_{NV}$ , que por sua vez é aproximadamente 9 vezes menor que o desvio padrão amostral de  $R_{NF}$ . O sinal do momento de 3º ordem indica se a maioria das realizações estão a direita ou a esquerda da média. Neste caso, os momentos de 3º ordem amostrais para as variáveis  $R_{AN}$  e  $R_{NF}$  tem sinal positivo, o que indica que a maioria das realizações estão a esquerda das suas respectivas médias amostrais. Já o momento de 3º ordem amostral para a variável  $R_{NV}$  tem sinal negativo, indicando que a maioria das realizações estão a direita de sua média amostral. Considerando a diferença entre os PVIs que modelam cada fase, espera-se que o esforço computacional necessário para executar cada um delas também seja. Por isso, cada histograma da Fig. 5.9 foi desmembrado em outros dois histogramas referentes as variáveis  $R_{\square}^{stick}$  e  $R_{\square}^{slip}$ .

Os histogramas normalizados para os tempos de execução associados a abordagem AN são mostrados na Fig. 5.10 sendo em a) as fases de *stick*, b) as fases de *slip* e c) o total. O suporte do histograma normalizados da variável  $R_{AN}^{stick}$  é aproximadamente  $10^3$  menor que o da variável  $R_{AN}^{slip}$ . Isso se deve pela forma como os instantes de transição são previstos na abordagem AN.

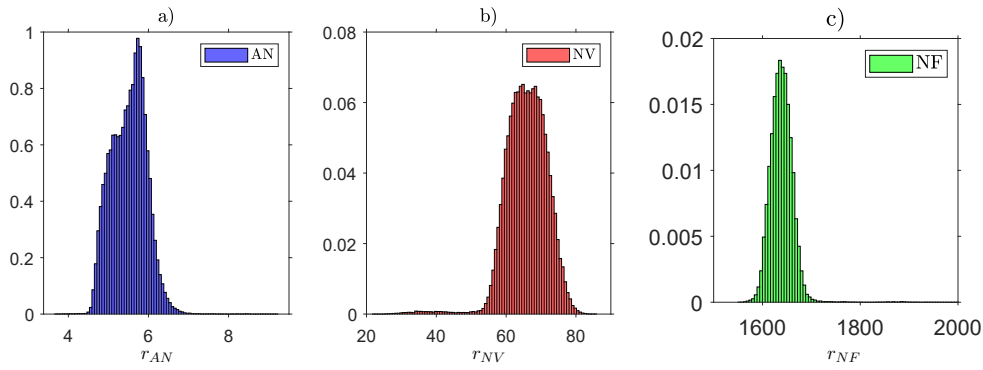


Figura 5.9: Histogramas normalizados para dos tempos de execução total associados a abordagem a) AN, b) NV e c) NF.

Abordagem	Média	Desvio padrão	Momento de 3º ordem	Momento de 4º ordem
AN	5.51 s	0.43 s	0.16	3.62
NV	65.80 s	6.02 s	-1.08	7.69
NF	$1,64 \cdot 10^3$ s	54, 21 s	23, 01	718, 53

Tabela 5.4: Estatísticas de primeira ordem das variáveis  $R_{AN}$ ,  $R_{NV}$  e  $R_{NF}$ .

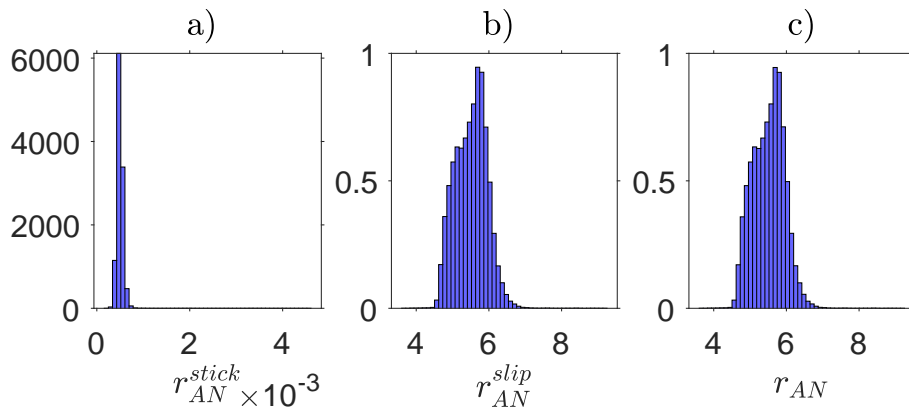


Figura 5.10: Histogramas normalizados dos tempos de execução de a) *stick*, b) *slip*, c) total associados a abordagem AN.

Como discutido em capítulos anteriores, a aproximação para a resposta do sistema é calculada usando as previsões dos instantes de transição dadas pelas Eqs. (3-30) e (3-33). O tempo de execução das fases de *stick* são referentes ao cálculo dos instantes de transição das fases de *stick* para *slip* que são dados pela Eq. (3-30). Neste caso para calcular um instante  $t_j$  é preciso, apenas, substituir os valores dos parâmetros que já são conhecidos. Por outro lado, os tempos de execução das fases de *slip* são referentes ao cálculo dos instantes de transição das fases de *slip* para *stick* que são dados pela Eq. (3-33). Uma vez que esta equação é não linear, devido ao termo trigonométrico, calcular  $t_p$  não é tão

simples quanto  $t_j$ . Para calcular os valores das constantes de integração  $C_{3,p}$  e  $C_{4,p}$  tem-se que resolver um sistema não linear, o qual é dado pela substituição das condições iniciais do problema nas aproximações calculadas para  $y(t)$  e  $\dot{y}$ . Este sistema de equações foi resolvido numericamente usando uma função *solver* baseada no método de Newton, e implementada no próprio software MATLAB.

Os histogramas normalizados dos tempos de execução associados a abordagem NV são mostrados na Fig. 5.11 sendo em a) para as fases de *stick*, b) para as fases de *slip* e c) para o total. Os suportes dos histogramas para  $R_{NV}^{stick}$  e  $R_{NV}^{slip}$  não apresentam uma diferença tão expressiva como os da abordagem AN, uma vez que estão na mesma ordem de grandeza, apesar da média amostral de  $R_{NV}^{slip}$  ser 3,06 vezes maior que  $R_{NV}^{stick}$ . Com a abordagem NV, o PVI dado pela Eq. (2-4) é integrado usando os métodos de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens pela função ODE45 do software MATLAB.

Como já discutido, neste integrador o passo de tempo é variável. A variação no passo de integração é acentuada perto dos instantes de transição entre fases, onde o integrador deve ser capaz de detectar qual das duas equações governa a dinâmica do problema com precisão, assim como nos extremos do intervalo de integração. Além disto, a dinâmica nas fases de *stick* segue uma equação linear, ou seja, mais simples e fácil de resolver do que aquela das fases de *slip* onde a EDO é não linear, o que justifica, em parte, a diferença entre os tempos de execução de  $R_{NV}^{stick}$  e  $R_{NV}^{slip}$ .

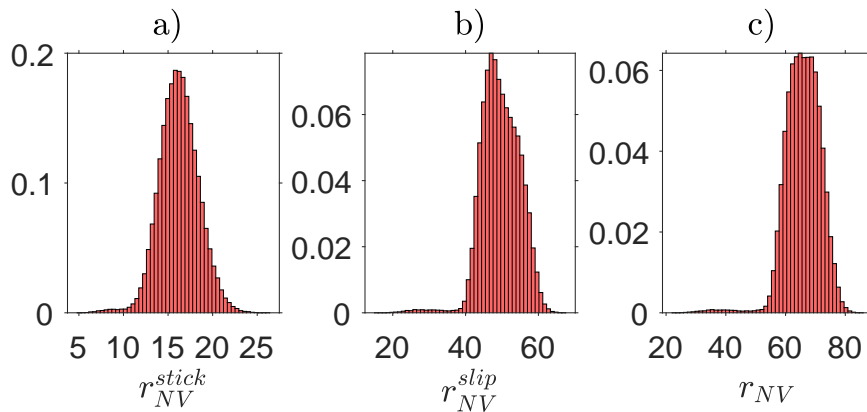


Figura 5.11: Histogramas normalizados dos tempos de execução de a) *stick*, b) *slip*, c) total associados a abordagem NV.

Os histogramas normalizados dos tempos de execução associados a abordagem NF são mostrados na Fig. 5.12 sendo em a) para as fases de *stick*, b) para as fases de *slip* e c) para o total. Como no caso anterior, o suporte dos histogramas de  $R_{NF}^{stick}$  e  $R_{NF}^{slip}$  apresentam diferenças mas mantém a mesma

ordem de grandeza, apesar da média amostral de  $R_{NF}^{slip}$  ser 2,26 vezes maior que  $R_{NF}^{stick}$ . Nesta abordagem o integrador usado é método de Runge-Kutta de 4º ordem com passo de integração fixo, ou seja, a malha do intervalo de integração é dividida uniformemente independente dos instantes de transição ou de pontos de extremidade. Então a diferença no suporte dos histogramas de  $R_{NF}^{stick}$  e  $R_{NF}^{slip}$  é referente ao esforço necessário para integrar os PVI que modelam cada tipo de fase e também a duração delas. Lembrando que os PVI para as fases de *stick* são lineares, e o dos *slips* não são.

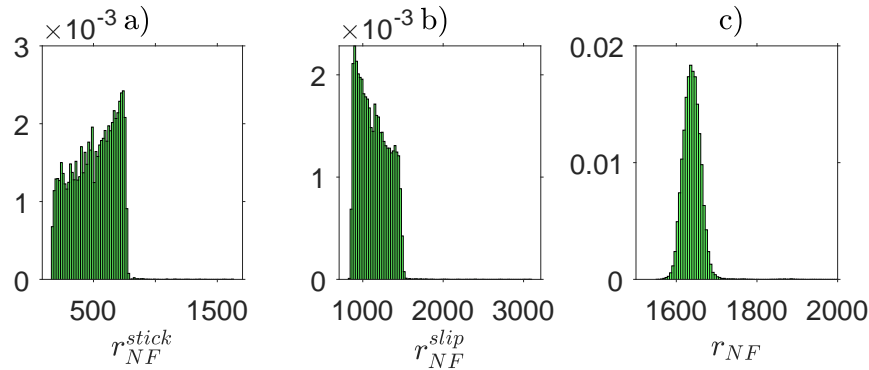


Figura 5.12: Histogramas normalizados dos tempos de execução de a) *stick*, b) *slip*, c) total associados a abordagem NF.

### 5.3.2

#### Modelo estatístico de espaço em disco

O espaço em disco, ou *storage*, é a variável que indica o tamanho de um arquivo para salvar as informações das aproximações da resposta do sistema. Esta variável, diferente do tempo de execução, só foi avaliada para as abordagens AN e NV. Os dados da aproximação para a abordagem NF não foram salvos devido ao alto volume de dados. Os dados da aproximação da resposta usando abordagem NF geraria um arquivo de aproximadamente 6,375 Mb. Extrapolando este valor para armazenar  $10^5$  arquivos para cada realização, o total seria de aproximadamente 637,6 Gb. Por isso, somente foram salvas as informações associadas ao custo computacional, e o tamanho da amostra foi reduzido para  $4 \cdot 10^4$ . Já para as abordagens AN e NF o total de dados gerados foi de aproximadamente 190,88 MB e 96,06 GB, respectivamente. Assim, somente para as abordagens AN e NV foram construídos modelos estatísticos e histogramas normalizados das variáveis de espaço em disco que são chamados de  $S_{AN}$  e  $S_{NV}$ , respectivamente.

Os histogramas normalizados das variáveis de espaço em disco são ilustrador na Fig. 5.13, em a) para as realizações referentes à abordagem AN,

e em b) para as associadas com a abordagem NV. Os suportes dos histogramas para as variáveis  $S_{AN}$  e  $S_{NV}$  são  $[1632, 2050]$  e  $[738000, 1238000]$  bytes. Estes suportes indicam que os dados das simulações com a abordagem AN ocupam menos espaço do que com a abordagem NV, dado que em AN não é necessário calcular todos os pontos de um intervalo de integração. Com a previsão dos instantes de transição, os dados armazenados e necessários para construir uma simulação são os próprios instantes, um indicador se o instante é de uma transição de uma fase de *stick* para *slip* ou vice e versa, e o deslocamento inicial de cada fase. Já para a abordagem NV todos os instantes calculados de um intervalo de integração precisam ser armazenados, assim como o vetor com sua malha discretizada.

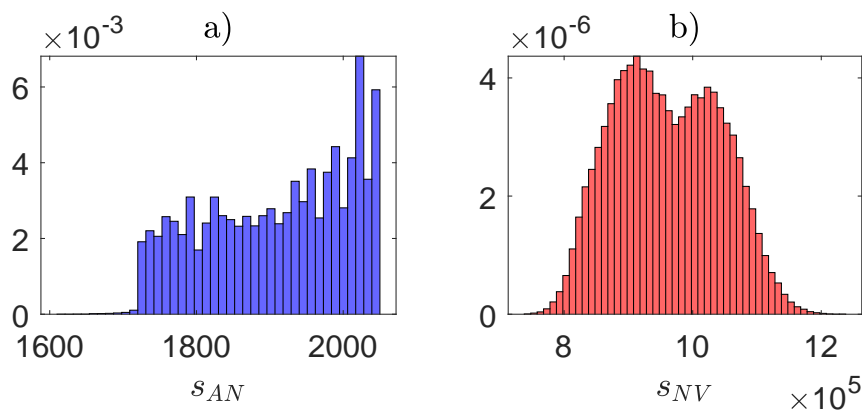


Figura 5.13: Histogramas normalizados do espaço em disco.

Abordagem	Média	Desvio padrão	Momento de 3º ordem	Momento de 4º ordem
AN	$1.90 \cdot 10^3$	97.52	-0.3	1.82
NV	$9.607 \cdot 10^5$	$8.27 \cdot 10^4$	0.11	2.17

Tabela 5.5: Estatísticas para  $S_{AN}$  e  $S_{NV}$ .

## 5.4

### Relação entre as variáveis de tempo de execução e do processo estocástico

Até agora, os tempos de execução foram analisados como variáveis aleatórias independentes. Contudo, com a propagação de incertezas da variável aleatória da entrada  $F_d$ , pode-se pensar em investigar a relação que esses tempos de execução podem apresentar à respeito de outras variáveis que caracterizam o processo estocástico da resposta do sistema. Neste contexto, pretende-se avaliar a dependência ou independência entre estas variáveis.

Esta seção é dedicada à discussão da relação dos tempos de execução, a variável aleatória de entrada e as variáveis relacionadas com os processos estocásticos. Para isso, foram construídos gráficos de dispersão e regressões lineares. No cálculo das regressões lineares foi usado o método de mínimos quadrados. Também foram usados histogramas conjuntos normalizados com o objetivo de analisar as distribuições conjuntas das variáveis e estudar a dependência entre elas. Estes histogramas são visualizados desde uma vista superior. O plano mostrado é dado pelo par de variáveis que estão sendo usadas, e as probabilidades conjuntas são dadas pela barra de probabilidade ao lado dos histogramas. Nesta barra as cores em tons azuis tem menor probabilidade de ocorrer e as cores em tons avermelhados tem maior probabilidade.

A primeira análise foi feita com os vetores aleatórios compostos pelas variáveis

- $[R_{AN} \ F_d]$ ,
- $[R_{NV} \ F_d]$  e
- $[R_{NF} \ F_d]$ .

Por serem vetores com duas componentes é possível construir histogramas conjuntos normalizados para visualizar as distribuições conjuntas. A Fig. 5.14 mostra em a) os gráficos de dispersão das realizações das variáveis aleatórias dos tempos de execução para a abordagem AN, em b) para a abordagem NV; e em c) para a abordagem NF com a variável de entrada  $F_d$  e suas respectivas regressões lineares. Estas regressões possuem as seguintes equações

$$\tilde{r}_{AN} = 1.26 \ f_d + 3.86 \quad (5-6)$$

$$\tilde{r}_{NV} = 14.24 \ f_d + 47.30 \quad (5-7)$$

$$\tilde{r}_{NF} = 22.2 \ f_d + 1.61 \cdot 10^3 \quad (5-8)$$

Analisando a inclinação das regressões lineares tem-se que o aumento do valor da variável  $f_d$  representa também um aumento no tempo de execução nas

três abordagens. Este aumento está relacionado com o valor de  $f_d$  e com a duração das fases de *slip*, uma vez que quanto maior o valor de  $f_d$ , maior a duração total das fases de *slip* em uma simulação. Pensando nas equações a serem resolvidas em cada fase, os *sticks* estão associados a um movimento retilíneo uniforme, regido por uma EDO linear. No entanto, a dinâmica dos *slips* depende da resolução de uma EDO não linear. Por isto, é esperado que os tempos de execução aumentem a medida que a simulação apresenta *slips* de maior duração.

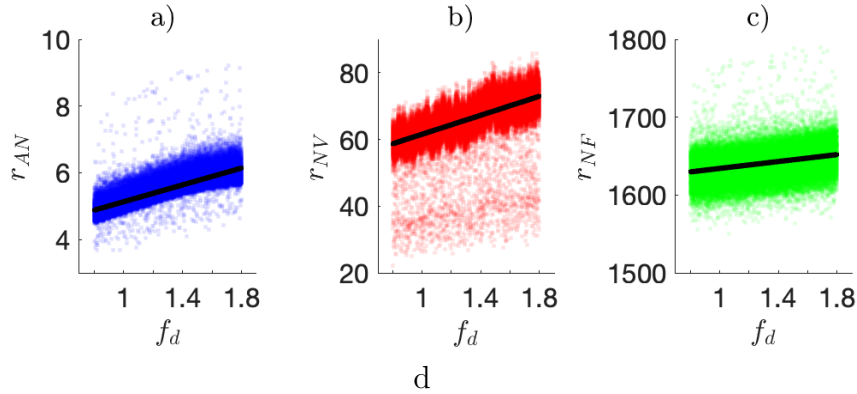


Figura 5.14: Gráfico de dispersão das variáveis dos tempos de execução associados à abordagem a) AN; b) NV; e c) NF com a variável de entrada  $F_d$ .

Para analisar as distribuições de probabilidades de cada vetor aleatório, foram construídos os histogramas conjuntos mostrados nas Figs. 5.15 a), b) e c). Eles são observados desde uma vista superior, mostrando o plano  $r_{\square} \times f_d$ . Analisando este histograma e os gráficos da Fig. 5.14, verificou-se que as regressões lineares estão localizadas próximas as regiões de maior probabilidade nos histogramas conjuntos, isso é mostrado, nas Figs. 5.15 d), e) e f) em que as regressões lineares das Eqs. (5-6), (5-7) e (5-8) foram plotadas juntas com os histogramas. A Fig. 5.15 mostra uma visão superior dos histogramas conjuntos normalizados do vetor aleatório  $[R_{\square} \ F_d]$  em a) para abordagem AN, b) para abordagem NV e c) para abordagem NF; e dos histogramas conjuntos normalizados com as regressões lineares em d) para abordagem AN, e) para abordagem NV e f) para abordagem NF. Também foram feitas análises conjuntas das variáveis relacionadas ao processo estocástico com os tempos de execução.

Os processos estocástico são caracterizados por uma sequência aleatória das fases de *stick* e *slip*, ou seja, os instantes de transição entre as fases, o número de fases e suas durações são variáveis aleatórias. Neste trabalho, as variáveis que foram modeladas são as de número de fases,  $N^{stick}$  e  $N^{slip}$ , e das

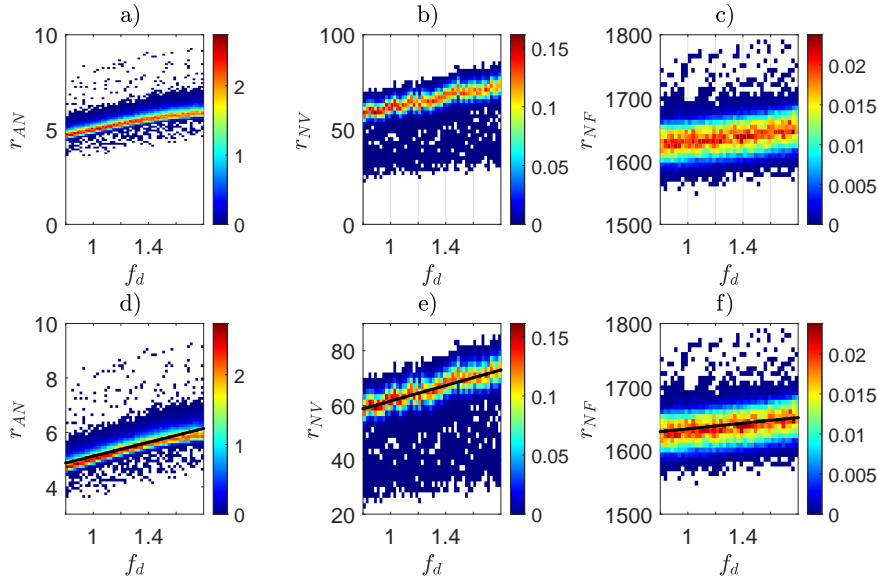


Figura 5.15: Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados a) dos tempos de execução total com a força de atrito  $f_d$  associado à abordagem a) AN; b) NV; e c) NF.

durações totais  $\bar{D}^{stick}$  e  $\bar{D}^{slip}$ . Os tempos de execução também são separados de acordo com a fase, assim tem-se os seguintes vetores aleatórios

- $[D^{stick}, N^{stick}, R_{AN}^{stick}]$  e  $[D^{slip}, N^{slip}, R_{AN}^{slip}]$ ;
- $[D^{stick}, N^{stick}, R_{NV}^{stick}]$  e  $[D^{slip}, N^{slip}, R_{NV}^{slip}]$ ; e
- $[D^{stick}, N^{stick}, R_{NF}^{stick}]$  e  $[D^{slip}, N^{slip}, R_{NF}^{slip}]$ .

Por serem vetores com três componentes, a visualização das distribuições conjuntas não é possível. Pois, precisaria-se de uma representação em  $\mathbb{R}^4$ . Como estratégia, cada um destes vetores foi dividido em outros dois novos, para analisar os tempos de execução com o número de fases e com as durações. Assim, os novos vetores ficaram como  $[D^{stick} R_{\square}^{stick}]$  e  $[N^{stick} R_{\square}^{stick}]$ , o mesmo foi feito para as fases de *slip*.

As relações dos tempos de execução referentes à abordagem AN com o número de fases e suas durações totais são mostradas nos gráficos de dispersão da Fig. 5.16 sendo em a)  $r_{AN}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{AN}^{stick}$  e  $d^{stick}$ ; c)  $r_{AN}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{AN}^{slip}$  e  $d^{slip}$ . As respectivas regressões lineares são representadas pelas linhas pretas. Estas regressões são dadas pelas expressões



$$\tilde{r}_{AN}^{stick} = 5,2 \cdot 10^{-6} n^{stick} + 0,21 \cdot 10^{-4} \quad (5-9)$$

$$\tilde{r}_{AN}^{stick} = -1 \cdot 10^{-7} \bar{d}^{stick} + 0,59 \cdot 10^{-3} \quad (5-10)$$

$$\tilde{r}_{AN}^{slip} = 5,9 \cdot 10^{-2} n^{slip} + 0,071 \quad (5-11)$$

$$\tilde{r}_{AN}^{slip} = 1,6 \cdot 10^{-3} \bar{d}^{slip} + 3,27 \quad (5-12)$$

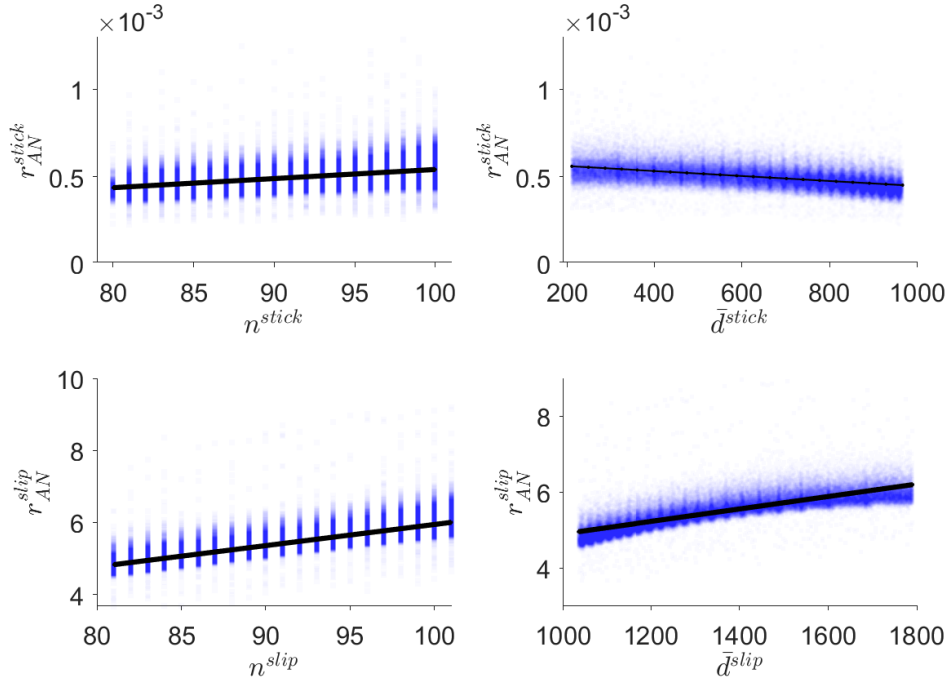


Figura 5.16: Gráfico de dispersão referente a abordagem AN entre as realizações das variáveis a)  $r_{AN}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{AN}^{stick}$  e  $d^{stick}$ ; c)  $r_{AN}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{AN}^{slip}$  e  $n^{slip}$ .

Pela análise das regressões, os tempos de execução das fases de *stick* (na ordem de  $10^{-3}$  segundos) são muito baixos comparados com os tempos totais de execução (na ordem de 1 segundo, ver Fig. 5.16). Estas regressões são muito próximas a uma linha constante, o que sugere que os tempos não apresentariam uma dependência nem com o número nem com a duração das fases de *stick*. Já os tempos de execução das fases de *slip* dominam o tempo de execução total da abordagem AN, e o comportamento mostrado na figura não pode ser aproximado por uma constante, pois apresenta uma variação perceptível. Para este caso, também foram construídos histogramas conjuntos normalizados, mostrados na Fig. 5.17, em a)  $r_{AN}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{AN}^{stick}$  e  $d^{stick}$ ; c)  $r_{AN}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{AN}^{slip}$  e  $n^{slip}$ .

Analisando as regressões de forma isolada, não é possível estabelecer al-

guma conclusão sobre o comportamento do problema. No entanto, quando os gráficos de dispersão e os histogramas são observados junto às linhas de regressão, a estrutura dos dados parece acompanhar a reta de regressão. No caso da abordagem AN, isto se evidencia no comportamento dos tempos de execução com o número de fases. Questiona-se então se, fazendo uma transformação de coordenadas referindo a estrutura dos dados a essas retas, poderia-se simplificar o estudo do problema desde o ponto de vista estocástico, talvez achar alguma relação de independência entre as novas variáveis envolvidas.

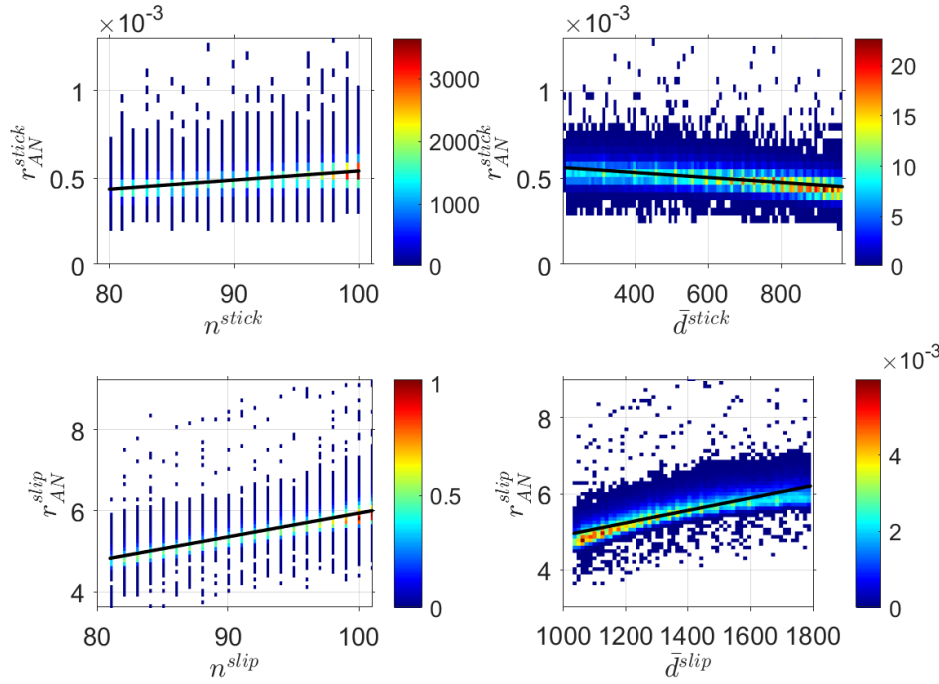


Figura 5.17: Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados das variáveis aleatórias referente à abordagem AN sendo em a)  $r_{AN}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{AN}^{stick}$  e  $\bar{d}^{stick}$ ; c)  $r_{AN}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{AN}^{slip}$  e  $\bar{d}^{slip}$ .

A mesma análise feita para a abordagem AN foi replicada para a abordagem NV. Assim, a Fig. 5.18 mostra os gráficos de dispersão em a)  $r_{NV}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{NV}^{stick}$  e  $\bar{d}^{stick}$ ; c)  $r_{NV}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{NV}^{slip}$  e  $\bar{d}^{slip}$ , e as respectivas regressões lineares são representadas pelas linhas pretas. Estas regressões são dadas pelas expressões

$$\tilde{r}_{NV}^{n^{stick}} = 1,4 \cdot 10^{-2} n^{stick} + 14.94, \quad (5-13)$$

$$\tilde{r}_{NV}^{\bar{d}^{stick}} = 2,18 \cdot 10^{-5} \bar{d}^{stick} + 16.20, \quad (5-14)$$

$$\tilde{r}_{NV}^{n^{slip}} = 0.64 n^{slip} - 9.47, \quad (5-15)$$

$$\tilde{r}_{NV}^{\bar{d}^{slip}} = 0.018 \bar{d}^{slip} + 24.06. \quad (5-16)$$

Estas regressões, na escala representada nas Fig. 5.18, parecem ser constantes para os tempos associados aos *sticks*, mas apresentam uma variação perceptível para as fases de *slips*.

As vistas superiores dos histogramas conjuntos normalizados são mostrados na Fig. 5.19 sendo em a)  $r_{NV}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{NV}^{stick}$  e  $\bar{d}^{stick}$ ; c)  $r_{NV}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{NV}^{slip}$  e  $\bar{d}^{slip}$ . De novo, percebe-se uma estrutura que segue o comportamento da regressão. Agora, considerando uma transformação de maneira a analisar essa estrutura de dados em relação às retas, se as novas variáveis forem estocasticamente independentes qualquer corte transversal (no plano composto por  $r_{NV}$  ao redor da reta e da frequência normalizada) seria proporcional entre si. Mas isto não é compatível com o que mostra o gráfico, onde a região de maior probabilidade apresenta uma forma sinuosa ao redor da reta.

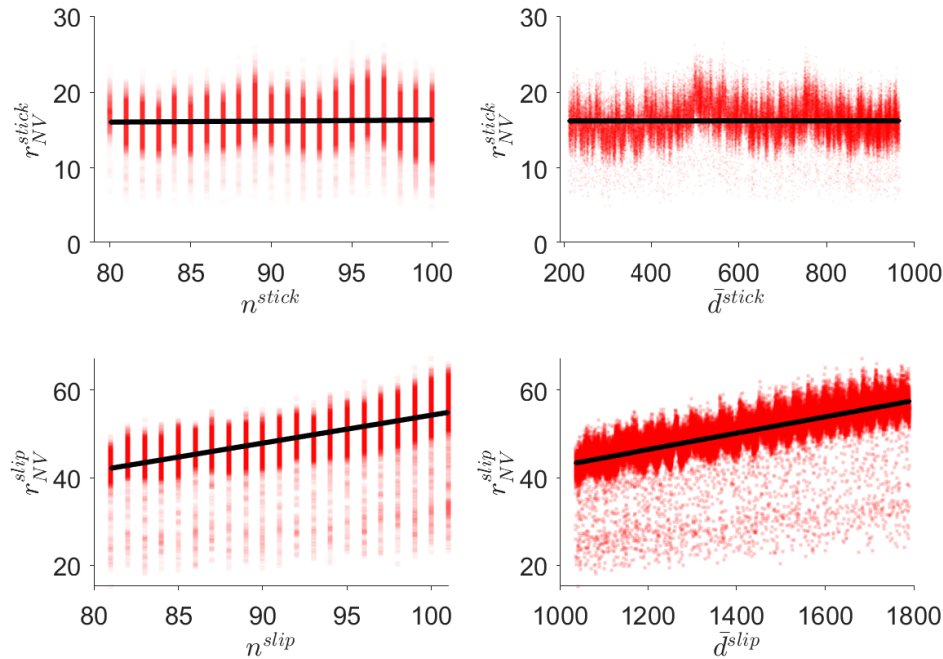


Figura 5.18: Gráfico de dispersão referente a abordagem NV entre as realizações das variáveis a)  $r_{NV}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{NV}^{stick}$  e  $\bar{d}^{stick}$ ; c)  $r_{NV}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{NV}^{slip}$  e  $\bar{d}^{slip}$ .

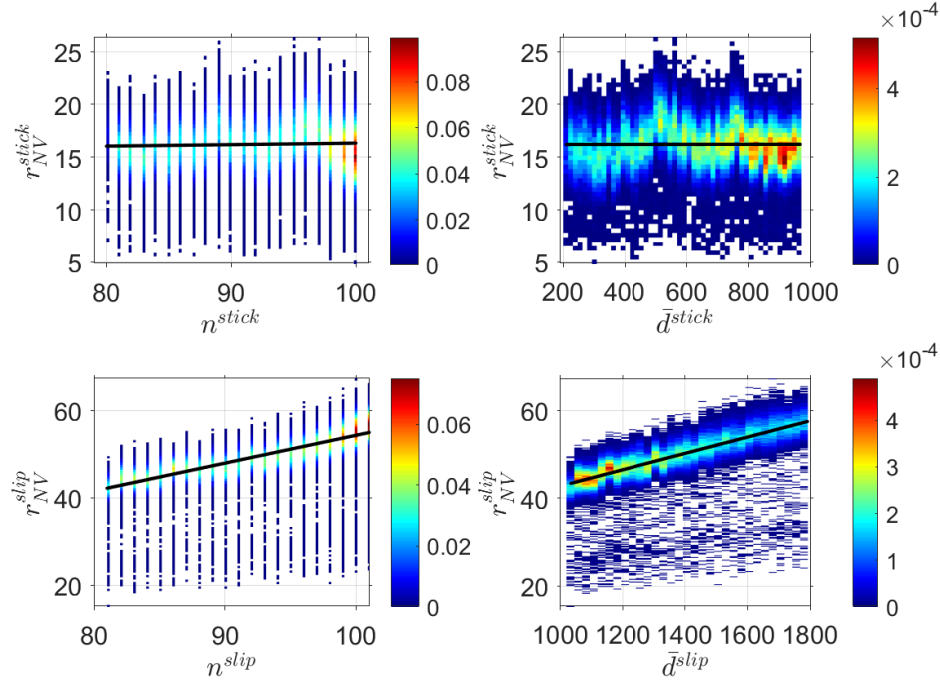


Figura 5.19: Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados das variáveis aleatórias referente à abordagem NV sendo em a)  $r_{NV}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{NV}^{stick}$  e  $\bar{d}^{stick}$ ; c)  $r_{NV}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{NV}^{slip}$  e  $\bar{d}^{slip}$ .

Por último, tem-se os resultados da abordagem NF. As relações dos tempos de execução referentes à abordagem NF com o número de fases e suas durações totais são mostradas nos gráficos de dispersão da Fig. 5.20 sendo em a)  $r_{NF}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{NF}^{stick}$  e  $\bar{d}^{stick}$ ; c)  $r_{NF}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{NF}^{slip}$  e  $\bar{d}^{slip}$ , e as respectivas regressões lineares são representadas pelas linhas pretas. As regressões são dadas pelas expressões:

$$\tilde{r}_{NF}^{n^{stick}} = -27.6 n^{stick} + 3.04, \quad (5-17)$$

$$\tilde{r}_{NF}^{\bar{d}^{stick}} = 0.79 \bar{d}^{stick} - 0.0004, \quad (5-18)$$

$$\tilde{r}_{NF}^{n^{slip}} = 28.1 n^{slip} - 1.47, \quad (5-19)$$

$$\tilde{r}_{NF}^{\bar{d}^{slip}} = 0.83 \bar{d}^{slip} + 7.42. \quad (5-20)$$

Nenhum caso dos apresentados na Fig. 5.20 mostra uma variação que possa ser aproximada por uma constante.

Uma vista superior dos histogramas conjuntos normalizados é mostrada na Fig. 5.21 sendo em a)  $r_{NF}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{NF}^{stick}$  e  $\bar{d}^{stick}$ ; c)  $r_{NF}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{NF}^{slip}$  e  $\bar{d}^{slip}$ .

Retomando o pensamento enunciado acima sobre o estudo da estrutura

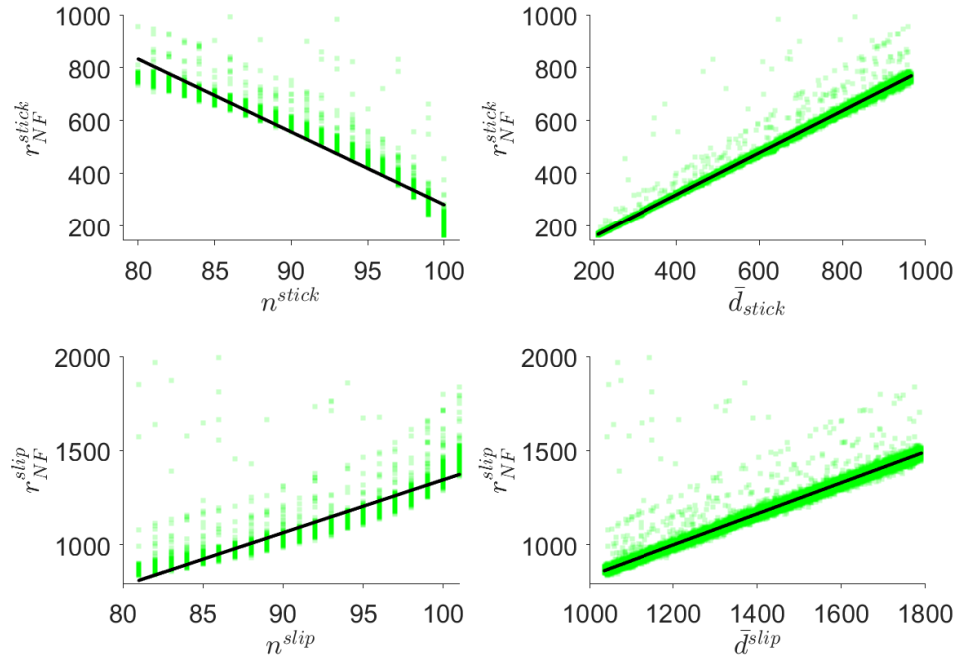


Figura 5.20: Gráfico de dispersão referente a abordagem NF entre as realizações das variáveis a)  $r_{NF}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{NF}^{stick}$  e  $d^{stick}$ ; c)  $r_{NF}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{NF}^{slip}$  e  $d^{slip}$ .

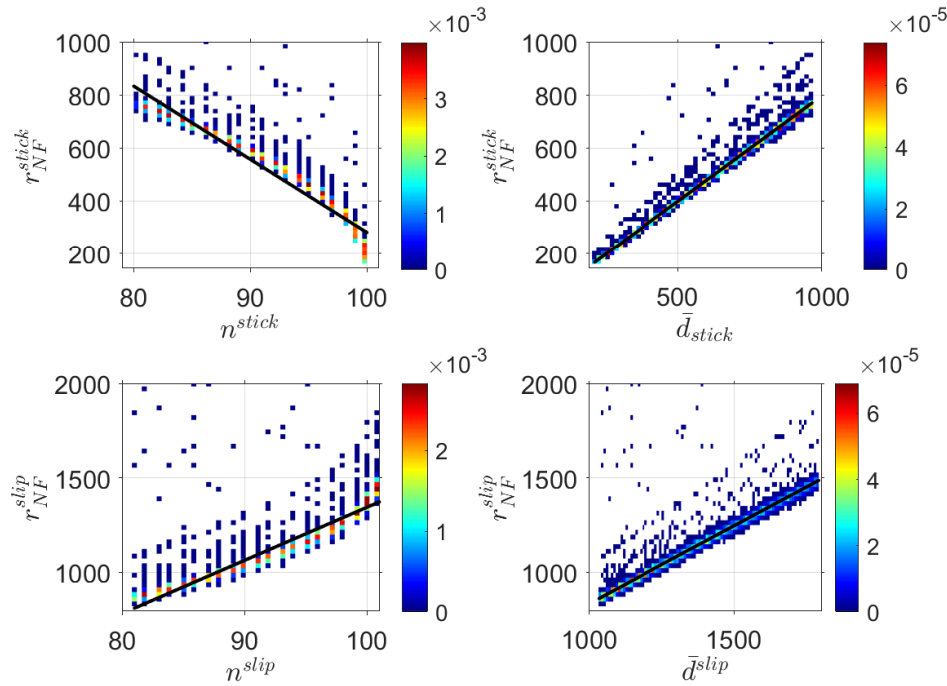


Figura 5.21: Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados das variáveis aleatórias referente à abordagem NF sendo em a)  $r_{NF}^{stick}$  e  $n^{stick}$ ; b)  $r_{NF}^{stick}$  e  $d^{stick}$ ; c)  $r_{NF}^{slip}$  e  $n^{slip}$ ; e d)  $r_{NF}^{slip}$  e  $d^{slip}$ .

dos dados, quando referidos as retas de regressão, serviria para melhorar o entendimento do problema, e em vista dos comportamentos observados acima para AN, NV, NF, formulam-se as hipóteses que:

- Para a abordagem AN, as variáveis aleatórias tempo de execução transformado e número de fases são estocasticamente independentes.
- Para a abordagem NV, as variáveis aleatórias tempos de execução transformado e número de fases, e tempo de execução e durações são dependentes.
- Com a abordagem NF, as variáveis aleatórias tempo de execução transformado e durações das fases são dependentes.

Para avaliar as hipóteses propostas, é necessário aplicar uma transformação de coordenadas e posteriormente analisar a dependência das variáveis aleatórias através da comparação dos histogramas conjuntos normalizados com os histogramas normalizados do produto das marginais.

#### 5.4.1

##### Transformação de coordenadas

Para verificar as hipóteses propostas sobre a dependência das variáveis aleatórias na seção anterior, serão definidas duas transformações de coordenadas. Essas transformações serão feitas considerando as direções dadas pelas retas de regressão da seção anterior.

A primeira transformação será utilizada para explorar a hipótese onde  $R_2$ , o tempo de execução transformado, e  $N$  são independentes. Neste caso é usada uma regressão linear da forma  $\tilde{r}(n) = \alpha_2 n + \beta_2$ , sendo  $\alpha_2$  e  $\beta_2$  coeficientes obtidos a partir dos ajustes feitos para calcular as regressões. Assim, a transformação é dada por

$$\pi_2 : \begin{cases} r_2 = r - \alpha_2 n - \beta_2 \\ n_2 = n \\ d_2 = d \end{cases} \quad (5-21)$$

onde  $r_2$  e  $r$  representam uma realização do tempo de execução transformado, e do tempo de execução (antes da transformação), respectivamente. Desta forma um novo vetor aleatório é definido como  $[R_2, N_2, D_2]$ . Se a hipótese for confirmada, espera-se que, no novo sistema,  $R_2$  e  $N_2$  sejam variáveis aleatórias independentes. Caso isto aconteça, também se procedera a estudar se  $R_2$  e a  $D_2$  também são independentes.

A segunda transformação será utilizada para explorar a hipótese onde  $R_2$ , o tempo de execução transformado, e  $D$  são independentes. Neste caso

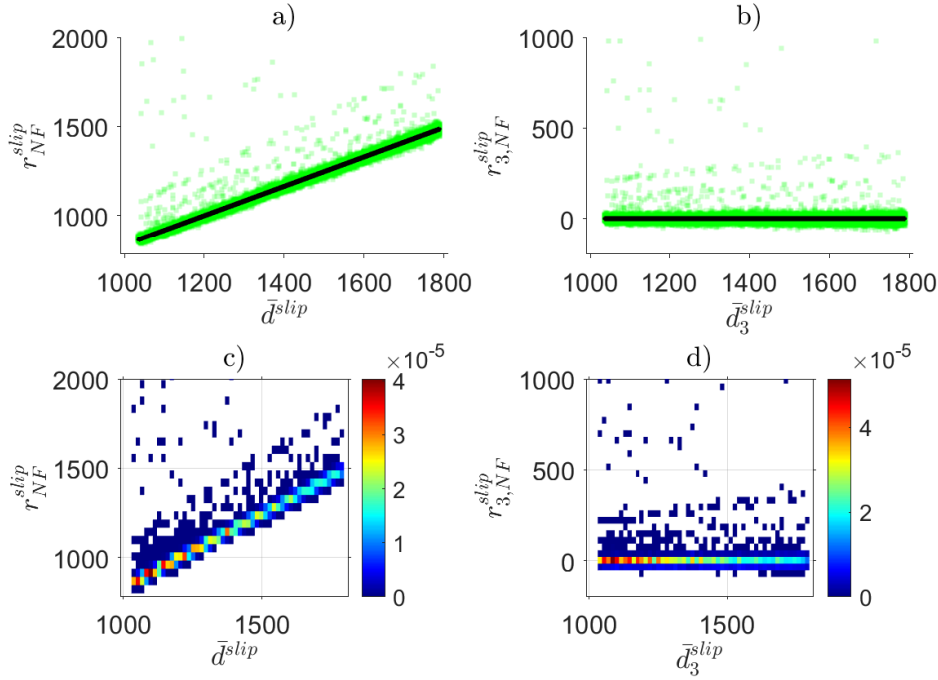


Figura 5.22: Gráfico de dispersão das realizações das variáveis  $R_{NF}^{slip}$  e  $D^{slip}$  em a) com as coordenadas originais e em b) com as novas coordenada da transformação  $\pi_3$ ; e os histogramas conjuntos normalizados das variáveis  $R_{NF}^{slip}$  e  $D^{slip}$  em c) com as coordenadas originais e em d) com as novas coordenada da transformação  $\pi_3$ .

é usada uma regressão linear da forma  $\tilde{r}(d) = \alpha_3 d + \beta_3$ , sendo  $\alpha_3$  e  $\beta_3$  coeficientes obtidos a partir dos ajustes feitos para calcular as regressões. Assim, a transformação é dada por

$$\pi_3 : \begin{cases} r_3 = r - \alpha_3 d - \beta_3 \\ n_3 = n \\ d_3 = d \end{cases} \quad (5-22)$$

desta forma fica definido um novo vetor aleatório dado por  $[R_3, N_3, D_3]$ . Se a hipótese for confirmada, espera-se que, no novo sistema,  $R_3$  e  $D_3$  sejam variáveis aleatórias independentes. Caso isto aconteça, também se verificará se  $R_3$  e  $N_3$  também são independentes.

Para ilustrar a aplicação de uma destas transformação escolheu-se o exemplo do vetor  $[R_{NF}^{slip} D^{slip}]$ . A Fig. 5.22 mostra em a) o gráfico de dispersão das realizações das variáveis  $R_{NF}^{slip}$  e  $D^{slip}$  e em b) o gráfico de dispersão das mesmas realizações do gráfico de a) porém com as novas coordenadas. As Figs. 5.22 c) e b) mostram os histogramas conjuntos normalizados também das variáveis  $R_{NF}^{slip}$  e  $D^{slip}$ , sendo na Fig. 5.22 c) com as coordenadas originais

e na Fig. 5.22 d) com as novas coordenadas depois da transformação  $\pi_3$ .

### 5.4.2

#### Análise de independência das variáveis aleatórias

As transformações de coordenadas definidas na subseção anterior chamadas de  $\pi_2$  e  $\pi_3$  foram aplicadas de acordo com a hipótese que se deseja provar.

A transformação  $\pi_2$  será utilizada para testar a hipótese do tempo de execução transformado e o número de fases serem variáveis independentes. Neste contexto, deseja-se avaliar também se os tempos de execução transformados e a duração das fases são variáveis independentes.

A transformação  $\pi_3$  será utilizada para testar a hipótese do tempo de execução transformado e a duração das fases serem variáveis independentes. Aqui também resulta de interesse descobrir se os tempos de execução transformados e o número de fases são variáveis independentes.

Depois de aplicar a transformação de coordenadas são construídos os histogramas conjuntos normalizado e os histogramas dos produtos das marginais. Estes dois são comparados entre si, para verificar se as hipóteses podem ser confirmadas.

Na abordagem AN, a aproximação da resposta do sistema é construída com a previsão dos instantes de transição, sem a necessidade de discretizar o intervalo de integração. Para esta abordagem, devido à forma em que a aproximação foi construída, espera-se que o tempo de execução seja influenciado pelo número de fases, mas não pelas durações delas. Por isso, a transformação  $\pi_2$  foi aplicada para as variáveis desta abordagem, tem-se

$$\begin{cases} r_{AN}^{stick} \\ n^{stick} \\ d^{stick} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_{2,AN}^{stick} \\ n_2^{stick} \\ d_2^{stick} \end{cases} \quad (5-23)$$

e

$$\begin{cases} r_{AN}^{slip} \\ n^{slip} \\ d^{slip} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_{2,AN}^{slip} \\ n_2^{slip} \\ d_2^{slip} \end{cases} \quad (5-24)$$

Considerando as novas coordenadas, os histogramas das Figs. 5.23 e 5.24 foram construídos. A Fig. 5.23 mostra a vista superior em a) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{2,AN}^{stick} \ N_2^{stick}]$ ; b) dos histogramas normalizados dos produtos das marginais do vetor  $[R_{2,AN}^{stick} \ N_2^{stick}]$ ; c) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{2,AN}^{stick} \ D_2^{stick}]$ ; d) dos histogramas normalizados dos



produtos das marginais do vetor  $[R_{2,AN}^{stick} D_2^{stick}]$  com as novas coordenadas de  $\pi_2$ . Ao comparar os respectivos histogramas conjuntos com os dos produtos das marginais, para ambos os casos, eles são similares. Com isto, confirma-se que as novas variáveis  $R_{2,AN}^{stick}$  e  $N_2^{stick}$  são independentes, assim como as variáveis  $R_{2,AN}^{stick}$  e  $\bar{D}_2^{stick}$ .

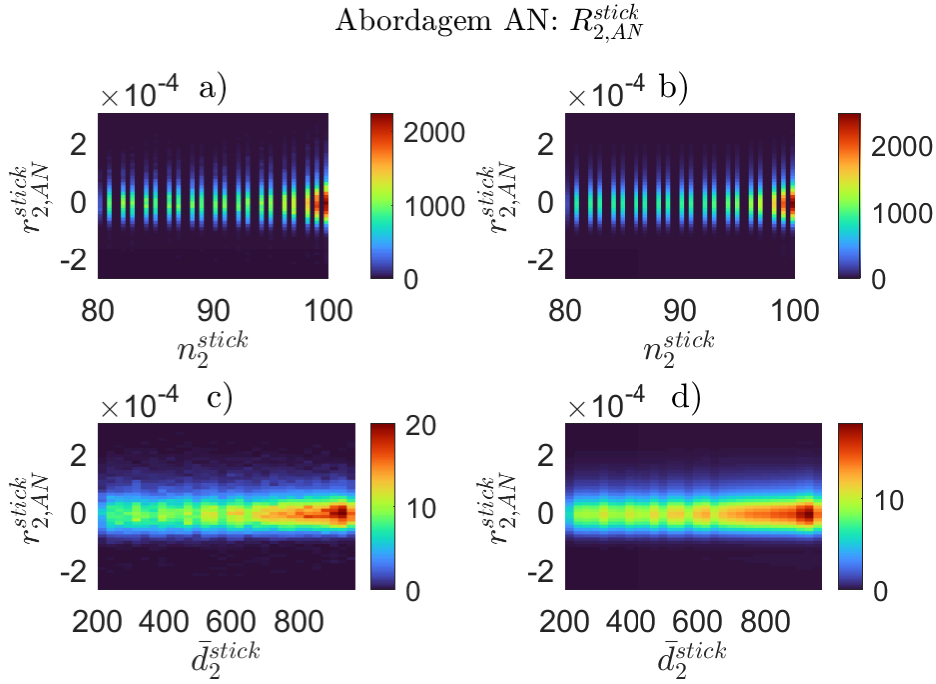


Figura 5.23: Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{2,AN}^{stick}$  com  $N_2^{stick}$  e c) e d)  $\bar{R}_{2,AN}^{stick}$  com  $D_2^{stick}$ , respectivamente, para a abordagem AN.

Já a Fig. 5.24 mostra a vista superior a) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{2,AN}^{slip} N_2^{slip}]$ ; b) dos histogramas normalizados dos produtos as marginais do vetor  $[R_{AN}^{slip} N_2^{slip}]$ ; c) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{2,AN}^{slip} D_2^{slip}]$ ; d) dos histogramas normalizados dos produtos as marginais do vetor  $[R_{AN}^{slip} D_2^{slip}]$  com as novas coordenadas de  $\pi_2$ . Neste caso, também tem-se que os respectivos histogramas conjuntos e os produtos das marginais, são similares. Com isto, pode-se dizer que as novas variáveis  $R_{2,AN}^{slip}$  e  $N_2^{slip}$  são independentes, assim como as variáveis  $R_{2,AN}^{slip}$  e  $\bar{D}_2^{stick}$ .

Dado que com a abordagem NV, um integrador de passo variável é usado, a hipótese a ser testada é que os tempos de execução, número de fases e as durações não são variáveis independentes. Por isso, ambas as transformações são aplicadas, a  $\pi_2$  para verificar que a independência dos tempos de execução com o número de fases não se cumpre, e a  $\pi_3$  para verificar que a independência

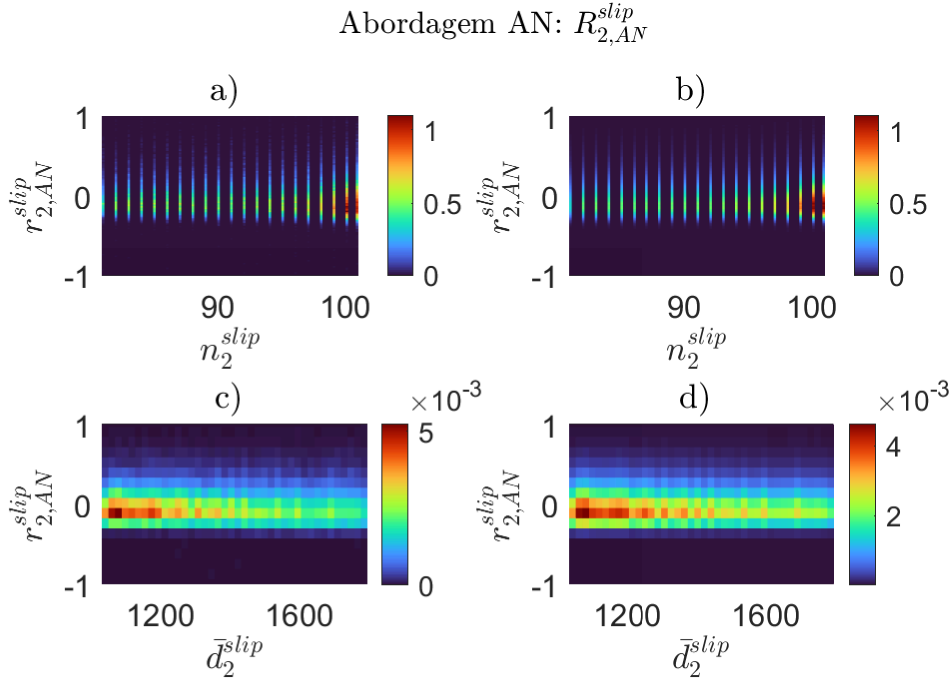


Figura 5.24: Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{2,AN}^{slip}$  com  $N_2^{slip}$  e c) e d)  $\bar{R}_{2,AN}^{slip}$  com  $D_2^{slip}$ , respectivamente, para a abordagem AN.

com as durações das fases também não se cumpre. As novas coordenadas são dadas por

$$\begin{cases} r_{NV}^{stick} \\ n^{stick} \\ d^{stick} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_{2,NV}^{stick} \\ n_2^{stick} \\ d_2^{stick} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_{3,NV}^{stick} \\ n_3^{stick} \\ d_3^{stick} \end{cases} \quad (5-25)$$

e

$$\begin{cases} r_{NV}^{slip} \\ n^{slip} \\ d^{slip} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_{2,NV}^{slip} \\ n_2^{slip} \\ d_2^{slip} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_{3,NV}^{slip} \\ n_3^{slip} \\ d_3^{slip} \end{cases} \quad (5-26)$$

Os histogramas das Figs. 5.25 e 5.26 foram construídos considerando as novas coordenadas. A Fig. 5.25 mostra a vista superior a) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{3,NV}^{stick} \ N_3^{stick}]$ ; b) dos histogramas normalizados dos produtos das marginais do vetor  $[R_{3,NV}^{stick} \ N_3^{stick}]$  com as novas coordenadas de  $\pi_3$ ; c) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{2,NV}^{stick} \ D_2^{stick}]$ ; b) dos histogramas normalizados dos produtos das marginais do vetor  $[R_{2,NV}^{stick} \ D_2^{stick}]$  com as novas coordenadas de  $\pi_2$ . Ao comparar os respectivos histogramas conjuntos com os dos produtos das marginais, para ambos os casos, eles

não são similares. Sendo assim,  $R_{3,NV}^{stick}$  e  $N_3^{stick}$  são dependentes, assim como  $R_{2,NV}^{stick}$  e  $\bar{D}_2^{stick}$  são dependentes.

Abordagem NV:  $R_{2,NV}^{stick}$  e  $R_{3,NV}^{stick}$

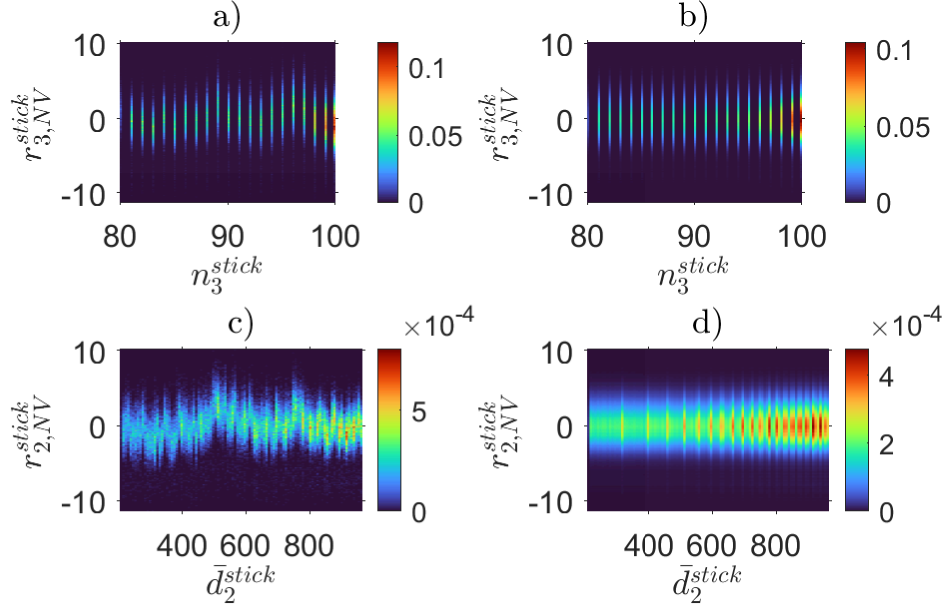


Figura 5.25: Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{3,NV}^{stick}$  com  $N_3^{stick}$  e c) e d)  $\bar{R}_{2,NV}^{stick}$  com  $\bar{D}_2^{stick}$ , respectivamente, para a abordagem NV.

A Fig. 5.26 mostra a vista superior a) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{3,NV}^{slip} N_3^{slip}]$ ; b) dos histogramas normalizados dos produtos das marginais do vetor  $[R_{3,NV}^{slip} N_3^{slip}]$  com as novas coordenadas de  $\pi_3$ ; c) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{2,NV}^{slip} D_2^{slip}]$ ; b) dos histogramas normalizados dos produtos das marginais do vetor  $[R_{2,NV}^{slip} D_2^{slip}]$  com as novas coordenadas de  $\pi_2$ . Ao comparar os respectivos histogramas conjuntos com os dos produtos das maginais, para ambos os casos, eles não são similares. Sendo assim,  $R_{3,NV}^{slip}$  e  $N_3^{slip}$  são dependentes. A mesma coisa acontece entre  $R_{2,NV}^{slip}$  e  $\bar{D}_2^{slip}$ , que são dependentes.

O resultado anterior é esperado, lembrando que a resposta de uma realização usando os métodos de Runge-Kutta de 4º e 5º ordens com passo de integração variável é influenciada tanto pela necessidade de detectar os instantes de transição com acurácia, o que deriva em um passo de integração menor nas regiões de transição, quanto pela duração das fases.

Os resultados obtidos com o integrador de passo fixo usado com a abordagem NF, sugerem que os tempos de execução e as durações das fases são variáveis dependentes. Devido a construção do integrador, neste caso os pontos

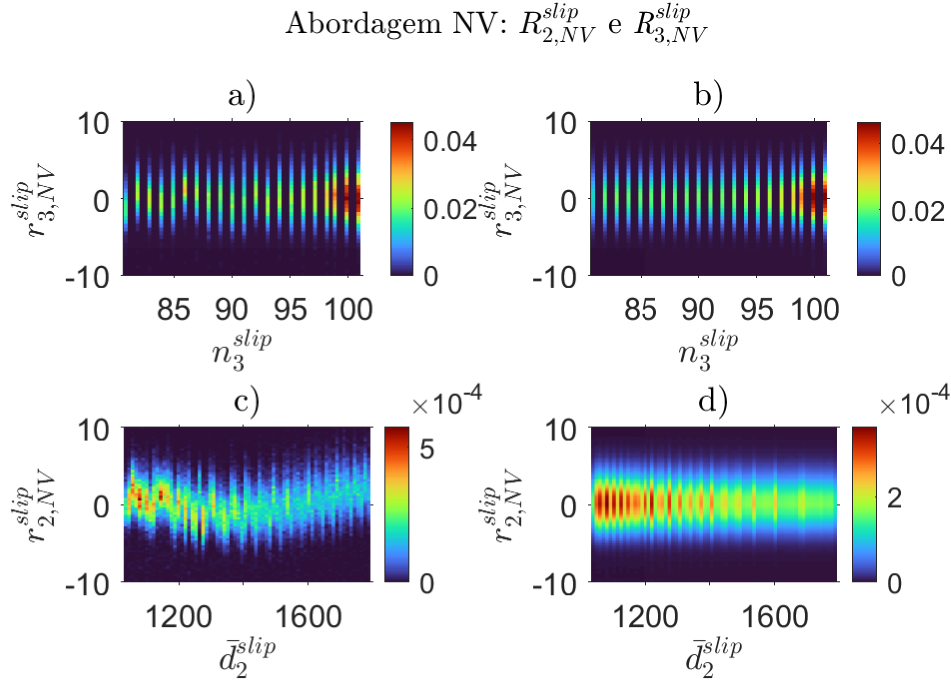


Figura 5.26: Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{3,NV}^{slip}$  com  $N_3^{slip}$  e c) e d)  $\bar{R}_{2,NV}^{slip}$  com  $D_2^{slip}$ , respectivamente, para a abordagem NV.

de extremidade e instantes de transição não influenciam na discretização da malha do intervalo de integração. Por isso, para esta abordagem a transformação aplicada é a  $\pi_3$ . As novas coordenadas são dadas por

$$\begin{cases} r_{NF}^{stick} \\ n^{stick} \\ d^{stick} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_{3,NF}^{stick} \\ n_3^{stick} \\ d_3^{stick} \end{cases} \quad (5-27)$$

e

$$\begin{cases} r_{NF}^{slip} \\ n^{slip} \\ d^{slip} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_{3,NF}^{slip} \\ n_3^{slip} \\ d_3^{slip} \end{cases} \quad (5-28)$$

Com as novas coordenadas foram construídos os histogramas das Figs. 5.27 e 5.28. A Fig. 5.27 mostra a vista superior a) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{3,NF}^{stick} \ N_3^{stick}]$ ; b) dos histogramas normalizados dos produtos as marginais do vetor  $[R_{3,NF}^{stick} \ N_3^{stick}]$ ; c) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{3,NF}^{stick} \ D_3^{stick}]$ ; d) dos histogramas normalizados dos produtos as marginais do vetor  $[R_{3,NF}^{stick} \ D_3^{stick}]$  com as novas coordenadas de  $\pi_3$ . Ao comparar os respectivos histogramas conjuntos com os dos produtos das

maginais, para ambos os casos, eles não são similares. Com isto, confirmasse que a nova variável  $R_{3,NF}^{stick}$  e  $N_3^{stick}$  são dependentes, assim como as variáveis  $R_{3,NF}^{stick}$  e  $\bar{D}_3^{stick}$ .

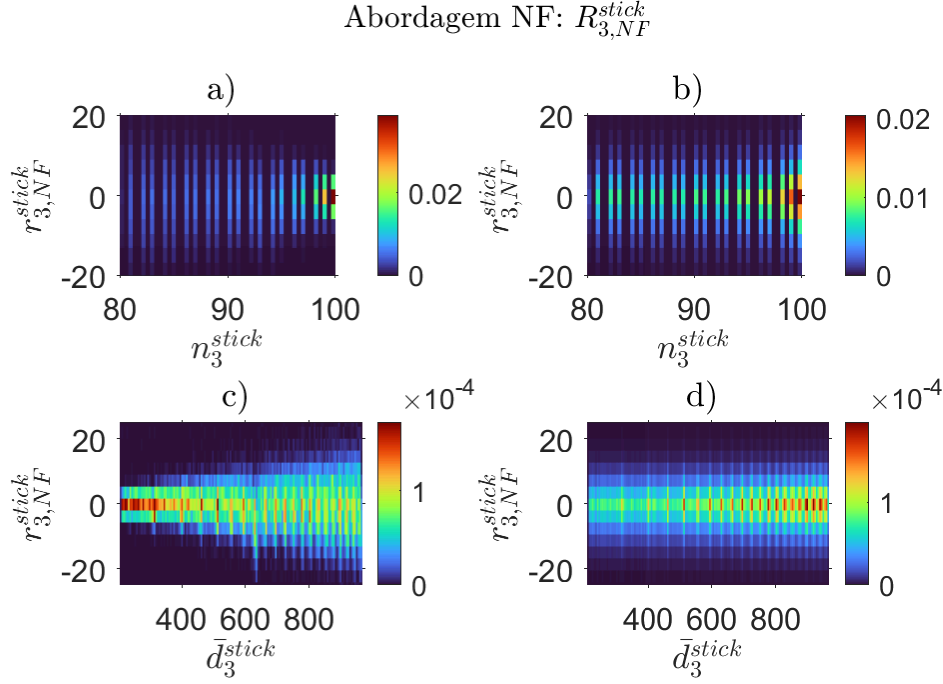


Figura 5.27: Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{3,NF}^{stick}$  com  $N_3^{stick}$  e c) e d)  $\bar{R}_{3,NF}^{stick}$  com  $D_3^{stick}$ , respectivamente, para a abordagem NF.

A Fig. 5.28 mostra a vista superior a) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{3,NF}^{slip} \ N_3^{slip}]$ ; b) dos histogramas normalizados dos produtos das marginais do vetor  $[R_{3,NF}^{slip} \ N_3^{slip}]$ ; c) dos histogramas conjuntos normalizados do vetor  $[R_{3,NF}^{slip} \ D_3^{slip}]$ ; b) dos histogramas normalizados dos produtos das marginais do vetor  $[R_{3,NF}^{slip} \ D_3^{slip}]$  com as novas coordenadas de  $\pi_3$ . Ao comparar os respectivos histogramas conjuntos com os dos produtos das maginais, para ambos os casos, eles são similares. Com isto, confirmasse que a nova variável  $R_{3,NF}^{slip}$  e  $N_3^{slip}$  são independentes, assim como as variáveis  $R_{3,NF}^{slip}$  e  $\bar{D}_3^{stick}$ .

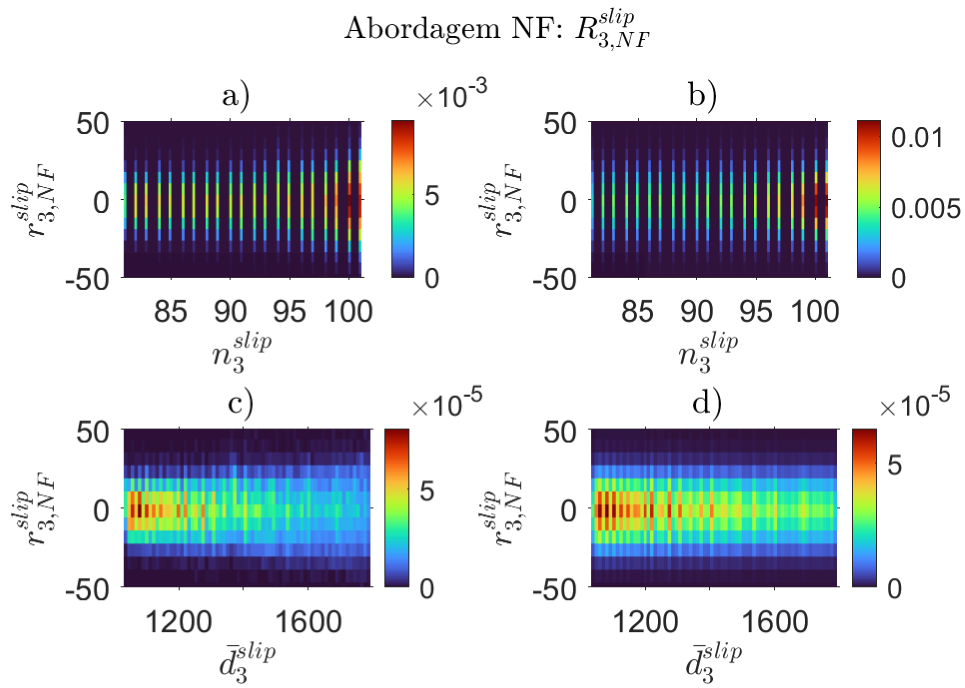


Figura 5.28: Vista superior dos histogramas conjuntos normalizados e dos histogramas dos produtos das marginais das variáveis a) e b)  $\bar{R}_{3,NF}^{slip}$  com  $N_3^{slip}$  e c) e d)  $\bar{R}_{3,NF}^{slip}$  com  $D_3^{slip}$ , respectivamente, para a abordagem NF.

Neste estudo, um oscilador de um grau de liberdade com *stick-slip* foi escolhido como problema modelo. Foi considerado um atrito seco estocástico, sendo o parâmetro da força de atrito dinâmico modelado com uma distribuição de probabilidade uniforme. O foco desta tese está nos custos computacionais de executar simulações estocásticas e na relação destes custos com as variáveis associadas a dinâmica do sistema.

Considerando o problema determinístico, não é possível resolver analiticamente o PVI que modela a dinâmica deste sistema, devido a não linearidade da força de atrito seco. Por isso, técnicas de aproximação foram usadas. Como consequência, o problema estocástico foi aproximado por meio de três abordagens que combinam o método de Monte Carlo com metodologias de aproximação. Na abordagem AN) uma aproximação analítica de primeira ordem foi obtida com o método de múltiplas escalas; NV) as aproximações numéricas foram calculadas usando o método de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> e 5<sup>a</sup> ordens com passo de integração variável; NF) as aproximações numéricas foram calculadas usando o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem com passo de integração fixo. Nas abordagens NV e NF para cada valor de parâmetro uma aproximação numérica foi calculada. Já para AN apenas uma aproximação analítica foi calculada e avaliada para os diferentes valores usados. Para garantir que a aproximação analítica de primeira ordem atenderia o critério de erro determinado, foi definido uma métrica e as aproximações da abordagem NV foram usadas como referência.

Com os métodos numéricos, cada aproximação foi obtida discretizando a equação no domínio do tempo seguindo o método de Runge-Kutta. O método baseia-se em pequenos passos de tempo para garantir a precisão da solução. O método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> ordens foi usado através de uma função já implementada no software MATLAB, chamada de ODE45. Essa função permite que o usuário determine o passo de integração máximo, mas o algoritmo pode identificar a necessidade de calcular pontos intermediários para garantir a acurácia da aproximação. No problema abordado na tese isso acontece perto dos instantes de transição entre as fases de *stick* e *slip* e nos pontos onde a velocidade de massa apresenta máximos locais. Já com o método

de Runge-Kutta de 4ª ordem, a função usada foi implementada pela autora da tese com o objetivo de discretizar o intervalo de integração de maneira uniforme e, assim, controlar o passo de integração. Com o método de múltiplas escalas uma aproximação dada por uma expressão analítica pode ser obtida para as fases *stick* e *slip*. A aproximação analítica foi construída como uma função por partes, devido à mudança repentina no comportamento entre as fases *stick* e *slip*. Uma vez que a expressão analítica é conhecida, somente a informação dos instantes de transição e as condições iniciais no início de cada fase são necessários para definir uma aproximação para o comportamento do sistema em qualquer instante dentro do intervalo de análise.

Estas metodologias têm impacto direto nos custos computacionais. A abordagem AN pode ser considerada vantajosa se comparada às abordagens NV e NF, onde passos de integração pequenos são necessários para garantir a acurácia nas aproximações. Isso, pode ser um fator decisivo para definir a viabilidade de um estudo estocástico, dado o grande número de realizações que precisam ser calculadas e os custos computacionais envolvidos em tais abordagens. Todos esses aspectos se refletem nos resultados obtidos para a análise das variáveis estocásticas relacionadas ao processo estocástico e aos custos computacionais.

Algumas das variáveis associadas ao processo estocástico que caracteriza a resposta do sistema são os números de fases de *stick* e *slip* e a duração total das fases. Uma vez que as aproximações numéricas das abordagens NV e NF e a aproximações de primeira ordem da abordagem AN respeitam o erro pré-determinado, as variáveis associadas ao processo estocástico são consideradas iguais para as três abordagens. Com isso, foram construídos modelos estatísticos e histogramas normalizados para cada uma delas. As variáveis dos números de fases de *stick* e *slip* são do tipo discretas e com suporte dos histogramas normalizados bem próximos, o que era esperado uma vez que dentro de um determinado intervalo de integração os números de fases de *stick* e *slip* só podem se diferenciar no máximo em uma unidade, dependendo em que fase o sistema está no início e no fim da simulação. A semelhança dos histogramas normalizados para esses número de *stick* e *slip* também é confirmada pelas estatísticas amostrais calculadas. Já as variáveis das durações totais das fases de *stick* e *slip* são contínuas. Seus histogramas normalizados e as estatísticas amostrais calculadas refletem o comportamento da resposta de um sistema com *stick-slip*. Por exemplo, a soma da duração total de fase de *stick* e *slip* em uma realização, deve ser igual ao intervalo total de integração, e esta relação acontece com as médias amostrais destas variáveis. Outra estatística, que mostra esta relação, é a de assimetria, que tem valores



iguais e sinais trocados.

Diferente das variáveis associadas ao processo estocástico que não são afetadas pelas abordagens usadas, as variáveis associadas ao custo computacional são. Esta influência fica evidente ao analisar os histogramas normalizados e os modelos estatísticos construídos para as variáveis dos tempos de execução e espaço de armazenamento associadas à cada abordagem. O suporte do histograma normalizado dos tempos de execução associados à abordagem NA é, aproximadamente, 10 vezes menor que o suporte associado à abordagem NV, e, aproximadamente, 1000 vezes menor que o suporte associado à abordagem NF. A média amostral dos tempos de execução mostra que a abordagem AN é, aproximadamente, 12 vezes mais rápida que a abordagem NV e 298 vezes mais rápida que a abordagem NF. Já a abordagem NV é, aproximadamente, 25 vezes mais rápida que a abordagem NF, dado suas médias amostrais. A abordagem AN é menos sensível à variação, dado que seu desvio padrão amostral é, aproximadamente, 14 vezes menos que o desvio padrão amostral de NV, e 126 vezes menos que o desvio padrão amostral de NF. Esses resultados também podem ser observados nos histogramas conjuntos dos tempos de execução e do parâmetro da força de atrito dinâmica, bem como nos histogramas conjuntos dos tempos de execução e número de fases e duração total, onde os suportes associados à cada abordagem são visivelmente diferentes.

Também foi estudada a relação dos tempos de execução em relação as variáveis associadas ao processo estocástico. Pode-se verificar que estas relações são diferentes de acordo com a abordagem, isto se dá pela forma que cada aproximação foi construída. Os tempos de execução vinculados com a abordagem AN e as variáveis do número de fases de *stick* e *slip* são variáveis dependentes. Por outra parte, os tempos de execução e as durações totais são variáveis independentes. Já os tempos de execução associados à abordagem NV, as variáveis do número de fases de *stick* e *slip* e as de durações totais de fases são variáveis dependentes. Os tempos de execução associados à abordagem NF e as durações totais de fases de *stick* e *slip* são dependentes.

## Referências bibliográficas

- [1] KROESE, D. P.; BRERETON, T.; TAIMRE, T. ; BOTEV, Z. I.. **Why the Monte Carlo method is so important today**. Wiley Periodicals, 6:386–392, 2014.
- [2] DE CURSI, E. S.; SAMPAIO, R.. **Modelagem Estocástica e Quantificação de Incertezas**, volume 66. SBMAC - Notas em Matemática Aplicada, São Carlos - SP, 2012.
- [3] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **What is uncertainty quantification?** Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering, 40:155, 2018.
- [4] DE CURSI, E. S.; SAMPAIO, R.. **Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling with MATLAB**, volume 67. ISTE Press Ltd, Elsevier Ltd, London - UK, 1 edition, 2015.
- [5] SAMPAIO, R.; LIMA, R.. **Modelagem Estocástica e Geração de Amostras de variáveis e Vetores Aleatórios**, volume 70. SBMAC - Notas em Matemática Aplicada, São Carlos - SP, 2012.
- [6] SOBOL, I. M.. **A Primer for the Monte Carlo Method**. CRC Press, Boca Raton, Florida - USA, 1<sup>st</sup> edition, 1994.
- [7] INMAN, D. J.. **Engineering vibration**. Pearson, Upper Saddle River, New Jersey - EUA, 3<sup>rd</sup> edition, 2007.
- [8] WAGG, D. E. V.; VIRGIN, L.. **Exploiting Nonlinear Behavior in Structural Dynamics**. Springer, Vienna - Austria, 1<sup>st</sup> edition, 2012.
- [9] SINGIRESU, S. R.. **Mechanical vibrations**. Pearson, Florida - EUA, 5<sup>th</sup> edition, 2010.
- [10] JORDAN, D. W.; SMITH, P.. **Nonlinear Ordinary Differential Equations: An Introduction for Scientists and Engineers**. Oxford University Press, Oxford - London, 4<sup>th</sup> edition, 2007.
- [11] NAYFEH, A. H.. **Perturbation Methods**. John Wiley, Nova Jersey - EUA, 1<sup>st</sup> edition, 2004.

- [12] RADHIKA, T. S.; IYENGAR, T. K. ; RANI, T. R.. **Approximate analytical methods for solving ordinary differential equations**. CRC Press, 1<sup>st</sup> edition, 2014.
- [13] SIMMONDS, J. G.; MANN, J. E. E. .. **A First Look at Perturbation Theory**. American Society of Mechanical Engineers, Nova York - USA, 2<sup>nd</sup> edition, 1988.
- [14] ATKINSON, K. E.. **An Introduction to Numerical Analysis**. John Wiley & Sons, Inc., Nova Jersey - USA, 2<sup>nd</sup> edition, 1989.
- [15] BOYCE, W.; DIPRIMA, R.. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. LTC, 9<sup>th</sup> edition, 2010.
- [16] CHAPRA, S. C.. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas**. AMGH Editora, 3<sup>th</sup> edition, 2013.
- [17] SAVI, M. A.. **Dinâmica não-linear e caos**. E-papers, 2006.
- [18] KRACK, M.; GROSS, J.. **Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems**. Springer, Switzerland, 1<sup>st</sup> edition, 2019.
- [19] MICKENS, R.. **Truly Nonlinear Oscillations**. World Scientific, Singapura, 1<sup>st</sup> edition, 2010.
- [20] HOLMES, M. H.. **Introduction to perturbation methods**. Springer, Nova York - EUA, 2<sup>nd</sup> edition, 2012.
- [21] MARINCA, V.; HERISANU, N.. **Nonlinear Dynamical Systems in Engineering: Some Approximate Approaches**. Springer, Timisoara - Romania, 1<sup>st</sup> edition, 2012.
- [22] SANCHEZ, N. E.. **The Method of Multiple Scales: Asymptotic Solutions and Normal Forms for Nonlinear Oscillatory Problems**. Journal Symbolic Computation, 21(1):245–252, 1996.
- [23] MURDOCK, J.; WANG, L.-C.. **Validity of the multiple scale method for very long intervals**. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 47:760–789, 1996.
- [24] HE, J.-H.. **Modified lindstedt–poincare methods for some strongly non-linear oscillations: Part i: expansion of a constant**. International Journal of Non-Linear Mechanics, 37(2):309–314, 2002.
- [25] MURDOCK, J.. **Perturbations theory and methods**. John Wiley & Sons, Inc., 1<sup>st</sup> edition, 1991.

- [26] GOMES, M.. **Estratégias de aproximações analíticas hierárquicas de problemas não lineares: métodos de perturbação**. Master's thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2019.
- [27] JAKOBSEN, P.. **Introduction to the method of multiple scales**. 2013.
- [28] KEVORKIAN, J. K.; COLE, J. D.. **Multiple scale and singular perturbation methods**, volume 114. Springer Science & Business Media, 2012.
- [29] SALIH, A.. **The method of multiple scales**. Department of aerospace engineering, Indian Institute of Space Science and Technology, 2014.
- [30] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Parametric analysis of the statistical model of the stick-slip process**. *Journal of Sound and Vibration*, 397:141–151, 2017.
- [31] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Random stick-slip oscillations in a multiphysics system**. *The European Physical Journal Plus*, 136(8):879, 2021.
- [32] GOMES, M.; LIMA, R. ; SAMPAIO, R.. **A race in the Monte Carlo method: numerical and analytical methods**. *Mecánica Computacional*, 37(17):649–655, 2019.
- [33] GOMES, M.; LIMA, R. ; SAMPAIO, R.. **Multiscale method: A powerful tool to reduce the computational cost of big data problems involving stick-slip oscillations**. In: *ABCM Series on Mechanical Sciences and Engineering Proceedings of the 5th International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modelling*, p. 69–79. Springer, 2020.
- [34] KOVACIC, I.; BRENNAN, M. J.. **The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour**. John Wiley & Sons, 2011.
- [35] GOMES, M.; GOICOECHEA, H. E.; LIMA, R. ; SAMPAIO, R.. **Stochastic evaluation of the run-time of a stick-slip oscillator problem**. In: *XXXVIII Congresso Argentino de Mecânica Computacional. MECOM 2022, Bahia Blanca - Argentina*, 2022.
- [36] GOMES, M.; GOICOECHEA, H. E.; LIMA, R. ; SAMPAIO, R.. **Stick-slip oscillator: a stochastic approach for the run-time**. In: *Proceeding of the XIX International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics. DINAME 2023, Goias - Brasil*, 2023.

- [37] BARRERO, D.; MUÑOZ, P.; CAMACHO, D. ; R-MORENO, M.. **On the statistical distribution of the expected run-time in population-based search algorithms.** *Soft Computing*, 19:2717–2734, 10 2015.
- [38] RIBEIRO, C.; ROSSETI, I. ; CAMPOS, R.. **On the use of run time distributions to evaluate and compare stochastic local search algorithms.** p. 16–30, 09 2009.
- [39] HOOS, H.; STÜTZLE, T.. **Stochastic Local Search: Foundations & Applications.** Morgan Kaufmann Publishers Inc., California - USA, 2004.
- [40] HOOS, H. H.; TSANG, E.. **Chapter 5 - local search methods.** In: Rossi, F.; van Beek, P. ; Walsh, T., editors, *Handbook of Constraint Programming*, volume 2 de **Foundations of Artificial Intelligence**, p. 135–167. Elsevier, 2006.
- [41] HOOS, H. H.; STÜTZLE, T.. **Stochastic local search algorithms: an overview.** *Springer Handbook of Computational Intelligence*, p. 1085–1105, 2015.
- [42] FEO, T. A.; RESENDE, M. G. C. ; H. SMITH, S.. **A greedy randomized adaptive search procedure for maximum independent set.** *Operations Research*, 42(5):860–878, 1994.
- [43] HOOS, H. H.; STÜTZLE, T.. **Local Search Algorithms for SAT: An Empirical Evaluation.** *Journal of Automated Reasoning*, 24(4):421–481, 2000.
- [44] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **Stick-slip oscillations or couple-decouple oscillations?** In: *Proceeding of the XIX International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, DINAME 2019*, Rio de Janeiro - Brazil, 2019.
- [45] LIMA, R.; SAMPAIO, R.. **A strange head-tail problem: a base-excited stick-slip oscillator.** In: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, Gramado, RS, Brazil, 2016.
- [46] POPOV, V. L.. **Contact mechanics and friction.** Springer Berlin - Germany, 1<sup>st</sup> edition, 2010.
- [47] TANG, L.; ZHU, X.. **Effects of drill string length on stick-slip oscillation of the oilwell drill string.** *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, p. 1–10, 2019.

- [48] VAHID-ARAGHI, O.; GOLNARAGHI, F.. **Friction-induced vibration in lead screw drives**. Springer Science & Business Media, 2010.
- [49] VAN DE VRANDE, B.; VAN CAMPEN, D. ; DE KRAKER, A.. **An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure**. *Nonlinear Dynamics*, 19(2):159–171, 1999.
- [50] SANTOS, G. B.; SANTOS, D. D. A.; COGHI, T. D. O.; OLIVEIRA JR., J. M. D.; ARANHA, N. ; BONVENTI JR., W.. **Pêndulo físico amortecido por atrito seco**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42(42), 2020.
- [51] FEENY, B.; GURAN, A.; HINRICHS, N. ; POPP, K.. **A Historical Review on Dry Friction and Stick-Slip Phenomena**. *Applied Mechanics Reviews*, 51(5):321–341, may 1998.
- [52] AWREJCEWICZ, J.; OLEJNIK, P.. **Occurrence of stick-slip phenomenon**. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45(1):33–40, 2007.
- [53] GOICOECHEA, H. E.; LIMA, R.; SAMPAIO, R.; ROSALES, M. B. ; BUEZAS, F. S.. **A stochastic approach for a cosserat rod drill-string model with stick-slip motion**. In: *Proceedings of the 5th International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modelling*, p. 103–110, Cham, 2021. Springer International Publishing.
- [54] MARQUES, F.; FLORES, P.; CLARO, J. ; LANKARANI, H.. **A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems**. *Nonlinear Dynamics*, 86:1407–1443, 11 2016.
- [55] NEILD, S. A.. **Exploiting Nonlinear Behavior in Structural Dynamics**. volume 536, p. 53–109. Springer, Vienna, 1 edition, 2012.
- [56] AWAD, A. I.. **Advances and Applications of Multiple Scale Methods in Complex Dynamical Systems**. PhD thesis, University of Washington, 2017.
- [57] GOMES, M.; LIMA, R. ; SAMPAIO, R.. **Multiscale method: A powerful tool to reduce the computational cost of big data problems involving stick-slip oscillations**. In: *Proceedings of the 5th International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modelling*, p. 69–79. Springer, 2021.

- [58] DE LIMA STERZA, R.; COSTACURTA BRANDI, A.. **Comparação entre métodos numéricos: Runge-Kutta de quarta ordem e previsor-corretor.** C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, 7:12–22, 2016.