

2 Base Teórica

Esse capítulo fornece o embasamento teórico aos capítulos que se seguem.

2.1. Processos Estocásticos

Uma variável segue um processo estocástico quando ela se desenvolve ao longo do tempo de maneira parcialmente ou totalmente aleatória, mas de acordo com regras de probabilidade bem definidas, de maneira que previsões futuras podem ser expressas somente em termos de distribuições de probabilidades. Mais formalmente, um processo estocástico é definido por uma lei de probabilidade para a evolução da variável \tilde{X} no tempo. Então, para os instantes $t_1 < t_2 < t_3$ dados, podemos calcular a probabilidade de os valores correspondentes \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 e \tilde{X}_3 estarem em um intervalo específico, por exemplo $\text{prob}(a_1 < \tilde{X}_1 \leq b_1, a_2 < \tilde{X}_2 \leq b_2, \dots)$. Quando chegar o instante t e observamos o real valor de \tilde{X}_1 , poderemos condicionar a probabilidade de futuros eventos a esta informação.

Os processos estocásticos são classificados como:

- Estacionários ou não-estacionários, conforme suas propriedades estatísticas (média e variância) forem constantes ou não no tempo;
- Em tempo discreto ou contínuo, conforme as mudanças de valor da variável se derem em determinados momentos ou a todo instante;
- De estado discreto ou contínuo, conforme os valores assumidos pela variável pertencerem a um conjunto discreto ou contínuo.

2.1.1. Propriedade e Processo de Markov

Uma variável estocástica \tilde{X}_t possui a Propriedade de Markov quando a distribuição de probabilidades de \tilde{X}_{t+1} depende somente de \tilde{X}_t (isto é, independe do que ocorreu antes do instante t). Isso quer dizer que somente a informação atual que temos sobre a variável será útil para prevermos o valor que ela terá no futuro. Em outras palavras, o caminho seguido pela variável até chegar ao estado \tilde{X}_t não é relevante. Em termos matemáticos:

$$\text{prob}(\tilde{X}_{t+1} | \tilde{X}_0 = x_0, \tilde{X}_1 = x_1, \tilde{X}_2 = x_2, \dots, \tilde{X}_t = x_t) = \text{prob}(\tilde{X}_{t+1} | \tilde{X}_t = x_t) \quad (1)$$

Um processo que satisfaz à propriedade de Markov é chamado de Processo de Markov.

2.1.2. Processo de Wiener ou Movimento Aritmético Browniano (MAB)

O movimento browniano recebe esse nome de seu descobridor, o botânico escocês Robert Brown, que em 1827 observou e descreveu esse tipo de movimento irregular ao observar grãos de pólen suspensos em água. Essa descoberta, aparentemente trivial, revelou-se de extrema importância na física e culminou com sua explicação completa e rigorosa por Albert Einstein em 1905. Alguns anos após o trabalho de Einstein, o matemático americano Norbert Wiener provou que a trajetória browniana entre dois pontos quaisquer possuía comprimento infinito. Diz-se que essa trajetória é “patológica”, ou seja, é uma curva contínua mas que não possui derivada contínua em nenhum de seus pontos.

Seja $\tilde{z}(t)$ um processo de Wiener. Então, qualquer mudança em \tilde{z} , isto é, $d\tilde{z}$, correspondente ao intervalo de tempo dt , possuirá as seguintes propriedades:

- i. A mudança na variável \tilde{z} em um pequeno intervalo de tempo dt é dada por $d\tilde{z} = \tilde{\varepsilon}_t \sqrt{dt}$, onde $\tilde{\varepsilon}_t$ é uma variável aleatória com distribuição normal padrão, isto é, $\tilde{\varepsilon}_t \sim N(0,1)$;
- ii. A variável aleatória $\tilde{\varepsilon}_t$ é serialmente descorrelacionada, isto é, para dois intervalos distintos $t \neq s$, $E(\tilde{\varepsilon}_t \tilde{\varepsilon}_s) = 0$;
- iii. $d\tilde{z}$ é um processo de Markov de tempo contínuo.

Da primeira propriedade deduz-se que $d\tilde{z}$ possui distribuição normal com média 0 e variância dt , isto é, $d\tilde{z} \sim N(0, \sqrt{dt})$. Pode-se observar que a variância de um processo de Wiener aumenta linearmente com o intervalo de tempo.

A segunda propriedade nos permite afirmar que um processo de Wiener possui incrementos independentes e é, portanto, um caso particular de processo de Markov. Não havendo correlação entre dois valores da variável ε em instantes de tempo distintos, então também não haverá correlação entre os respectivos valores de $d\tilde{z}$. Ou seja, os valores de $d\tilde{z}$ para quaisquer dois intervalos diferentes são independentes, de modo que $\tilde{z}(t)$ segue um processo de Markov.

2.1.3. Processo de Wiener Generalizado ou Movimento Browniano com Drift

O processo de Wiener pode ser generalizado em processos mais complexos. A mais simples generalização é o movimento browniano com *drift*:

$$d\tilde{x} = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot d\tilde{z} \quad (2)$$

onde x é a variável que segue o processo de Wiener generalizado, α e σ são constantes, dt é o incremento de tempo e $d\tilde{z}$ é o incremento de Wiener. A constante α é chamada de parâmetro de *drift* e implica uma taxa de crescimento temporal (*drift rate*) em \tilde{x} de α por unidade de tempo. O termo $\sigma \cdot d\tilde{z}$ representa a incerteza do caminho percorrido por \tilde{x} e a constante σ é chamada de parâmetro de variância ou volatilidade. Pode-se notar que o processo de Wiener

nada mais é que um caso particular do processo generalizado, no qual as taxas de *drift* e variância são iguais a zero e um, respectivamente.

Em um intervalo de tempo dt , a mudança na variável \tilde{x} , denominada $d\tilde{x}$, possui distribuição normal com média αdt e variância $\sigma^2 dt$, isto é, $d\tilde{x} \sim N(\alpha dt, \sigma\sqrt{dt})$. Tanto a média como a variância aumentam linearmente com o intervalo de tempo.

2.1.4. Movimento Browniano Generalizado ou Processo de Itô

O movimento browniano generalizado ou processo de Itô nada mais é do que uma generalização do movimento browniano com *drift* na qual os parâmetros de *drift* e variância podem variar no tempo. É dado pela seguinte equação:

$$d\tilde{x} = \alpha(x, t) \cdot dt + \sigma(x, t) \cdot d\tilde{z} \quad (3)$$

onde $d\tilde{z}$ é um incremento de Wiener e $\alpha(x, t)$ e $\sigma(x, t)$, agora funções conhecidas e determinísticas do estado atual \tilde{x} e do tempo t , são denominados taxa de crescimento esperado instantâneo e variância instantânea do processo de Itô.

O processo de Itô possui média dada por $\alpha(x, t) \cdot dt$ e variância igual a $\sigma^2(x, t) \cdot dt$, isto é, $d\tilde{x} \sim N(\alpha(x, t)dt, \sigma(x, t)\sqrt{dt})$.

2.1.5. Movimento Geométrico Browniano (MGB)

Trata-se de um caso particular do processo de Itô no qual $\alpha(x, t) = \alpha x$ e $\sigma(x, t) = \sigma x$, α e σ constantes. Substituindo na eq. (3):

$$d\tilde{x} = \alpha x \cdot dt + \sigma x \cdot d\tilde{z} \quad (4)$$

Dividindo-se o MGB por x o resultado é um MAB:

$$\frac{d\tilde{x}}{x} = \alpha \cdot dt + \sigma \cdot d\tilde{z} \quad (5)$$

Ou seja, as variações proporcionais de x (i.e., $d\tilde{x}/x$) possuem distribuição normal pois se trata de um MAB. Portanto, se $\ln(x)$ tiver distribuição normal, x terá distribuição lognormal. A média e a variância do MGB são respectivamente $x_0 e^{\alpha t}$ e $x_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$, onde x_0 é o valor de x em $t=0$.

2.1.6.

Processo de Reversão à Média ou de Ornstein-Uhlenbeck

Movimentos brownianos tendem a divergir de seus pontos iniciais. Essa característica pode ser verdade para algumas variáveis econômicas, como preços de ativos de especulação, mas não o é para *commodities* como o petróleo, por exemplo, cujo preço estaria relacionado a seu custo marginal de produção de longo prazo. Assim, enquanto no curto prazo poder-se-ia modelar o preço do petróleo como um MGB, tal modelagem não seria apropriada em análises de longo prazo. Nesse caso, um modelo mais apropriado para o preço do petróleo seria um processo de reversão à média, cuja forma mais simples é dada pela equação:

$$d\tilde{x} = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma d\tilde{z} \quad (6)$$

onde η é a velocidade de reversão, \bar{x} é o nível para o qual x tende a reverter, σ é o parâmetro de volatilidade e $d\tilde{z}$ é um incremento de Wiener.

Um processo de reversão à média é um processo de Markov, muito embora seus incrementos não sejam independentes. Isso pode ser visto através da eq. (6), onde se vê que a variação esperada de x depende da diferença entre \bar{x} e x . Além disso, quanto mais distante estiver x de seu valor normal \bar{x} , maior será a probabilidade de a variável retornar para \bar{x} .

Sendo x_0 o valor da variável x no instante $t=0$, o valor esperado de x em qualquer instante futuro t é dado por $\bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t}$. Nota-se que esse valor esperado tenderá a \bar{x} para valores elevados de t . A variância de $(x_t - \bar{x})$, por

sua vez, é dada por $\frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t})$. Analisando a expressão, pode-se observar que para valores elevados da velocidade de reversão ($\eta \rightarrow \infty$) a variância do processo tende a zero, o que significa que x nunca se desviaria de \bar{x} nesse caso. Por outro lado, caso a velocidade de reversão fosse zero ($\eta=0$), a expressão para a variância de x_t resumir-se-ia a $\sigma^2 t$, o que corresponde simplesmente a um movimento browniano.

2.1.7. Lema de Itô

Processos de Itô são processos estocásticos em tempo contínuo. Porém, assim como processos de Wiener, não são diferenciáveis.

No entanto, haverá ocasiões onde será necessário diferenciar funções de processos de Itô. Desenvolvido em 1951 pelo matemático japonês Kiyosi Itô, a propriedade que ficou conhecida como Lema de Itô permite derivar qualquer processo estocástico de uma variável que seja função de outra variável que siga outro processo estocástico.

Seja $\tilde{x}(t)$ uma variável estocástica que siga o processo descrito pela eq. (3) e seja $\tilde{F}(x, t)$ uma função pelo menos duas vezes diferenciável em x e uma vez em t . O diferencial $d\tilde{F}$ desta função é dado pelo lema de Itô:

$$d\tilde{F} = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] \cdot dt + b(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} \cdot d\tilde{z} \quad (7)$$

Portanto, $\tilde{F}(x, t)$ também segue um processo de Itô com média igual a

$$\frac{\partial F}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ e variância igual a } \left[b(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} \right]^2.$$

2.2. Métodos Numéricos de Avaliação de Ativos

Quando métodos analíticos não são possíveis ou não são conhecidos, existem basicamente três métodos numéricos usados para se avaliar ativos que seguem processos estocásticos: árvores binomiais, diferenças finitas e simulação de Monte Carlo.

2.2.1. Modelo Binomial

Esse modelo, proposto por Cox, Ross e Rubinstein em 1979, assume que em um intervalo de tempo dt o preço do ativo pode realizar um movimento de alta (up) ou baixa ($down$) com probabilidades p e $1-p$, respectivamente. Basicamente, esse método procura discretizar o processo de neutralidade ao risco representado pela equação diferencial parcial (EDP) de Black e Scholes para então utilizar programação dinâmica para determinar o valor do ativo.

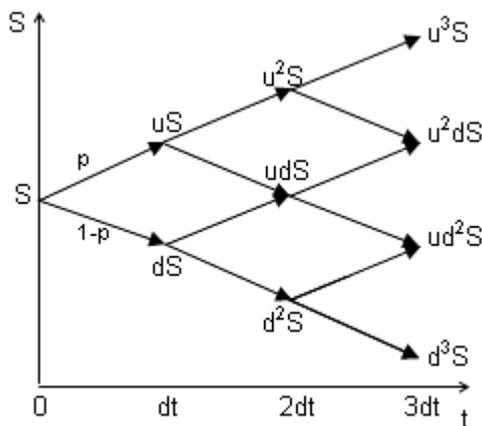


Figura 2: Árvore binomial de três passos.

Na figura, u e d correspondem aos fatores de subida e descida de preços, respectivamente. S é o preço do ativo no instante $t=0$.

Estendendo esse método para árvores com maior número de passos, torna-se possível representar todos os caminhos que o preço de um ativo pode seguir ao longo do tempo. Os autores mostram em seu artigo que os parâmetros são dados por:

- $u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$
- $d = u^{-1}$
- $dt = T/n$, onde n é o número de passos na árvore entre os instantes inicial e final
- $p = \frac{e^{r \cdot dt} - d}{u - d}$, se o ativo não pagar dividendos.

No caso de o ativo pagar dividendos a uma taxa contínua q , a equação torna-se $p = \frac{e^{(r-q) \cdot dt} - d}{u - d}$.

Cox, Ross e Rubinstein mostram que conforme se aumenta a discretização do tempo (aumentando-se n), o modelo binomial converge para um MGB. Demonstra-se também que, aumentando-se n , o resultado do método binomial converge para a solução analítica de Black e Scholes.

Na prática, ao se construir uma árvore binomial que represente os movimentos no preço de um ativo, procura-se escolher os parâmetros u e d sendo conhecida a volatilidade do preço o ativo. O preço pode subir de um fator u ou decrescer de um fator d , sendo que nesse caso (mundo real) as probabilidades são q e $1-q$, onde q é dada por $q = \frac{e^{\mu \cdot dt} - d}{u - d}$, sendo μ o parâmetro de *drift* do MGB que descreve a trajetória do preço do ativo.

2.2.2. Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas avalia um derivativo pela resolução da EDP obedecida por ele. Essa equação diferencial é transformada em um conjunto de equações diferenças, as quais são resolvidas iterativamente.

Para ilustrar essa abordagem, consideremos uma *put* americana sobre um ativo que não paga dividendos. A EDP a que a opção em questão deve satisfazer (equação diferencial de Black-Scholes-Merton) é:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (8)$$

Divide-se o tempo de vida da opção (T) em N intervalos de tempo iguais, cada um de comprimento $\delta t = T/N$, resultando em um total de $N+1$ instantes de tempo ($0, \delta t, 2\delta t, \dots, T$).

Escolhe-se $S_{m\acute{a}x}$ como sendo um valor para o preço do ativo de tal forma que, uma vez atingido esse valor, a *put* não possua praticamente valor nenhum. Dividindo o intervalo $[0, S_{m\acute{a}x}]$ em pequenos intervalos $\delta S = S_{m\acute{a}x}/M$, obtêm-se $M+1$ valores para o preço do ativo igualmente espaçados entre si ($0, \delta S, 2\delta S, \dots, S_{m\acute{a}x}$). O valor $S_{m\acute{a}x}$ é escolhido de modo que um desses valores seja o valor atual do ativo.

Os instantes de tempo e os valores do ativo formam um plano composto por $(M+1) \times (N+1)$ pontos, conforme mostra a figura 3.

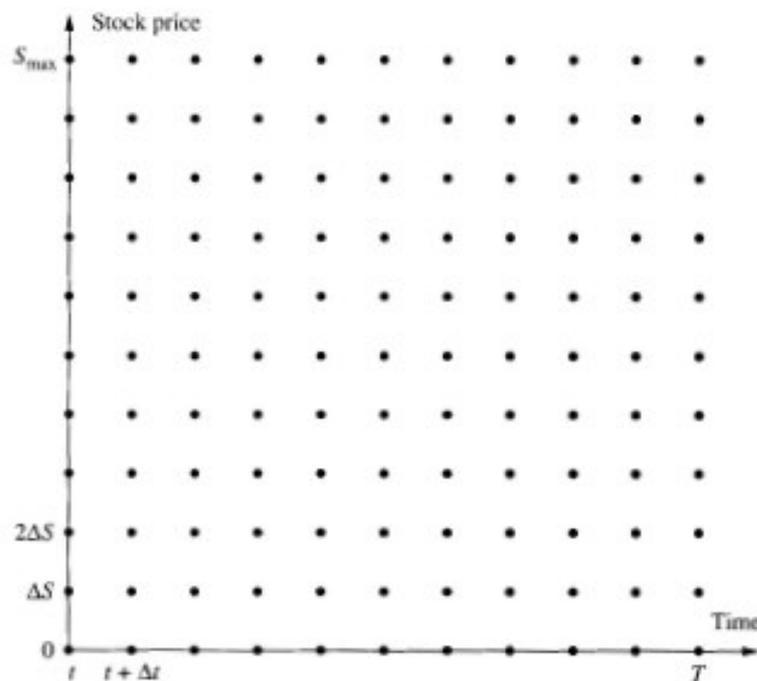


Figura 3: Representação gráfica do *grid* do método das diferenças finitas.

Cada ponto (i,j) é uma coordenada cartesiana desse plano e corresponde a um instante $i\delta t$ e um preço $j\delta S$. A variável $f_{i,j}$ representa o valor da opção no ponto de coordenadas (i,j) .

2.2.2.1. Método das Diferenças Finitas Implícito

Para um ponto (i,j) desse plano, a derivada $\partial f/\partial S$ pode ser aproximada pela expressão:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta S} \quad (9)$$

A derivada segunda em S , $\partial^2 f/\partial S^2$, pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\delta S^2} \quad (10)$$

Para a derivada de f no tempo, $\partial f/\partial t$, a aproximação será dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\delta t} \quad (11)$$

Substituindo as eq. (9). (10) e (11) na EDP (8) e dado que $S=j\delta S$, podemos reescrever a eq. (8) como:

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \quad (12)$$

onde:

$$a_j = \frac{1}{2} r j \delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \delta t$$

$$b_j = 1 + r \delta t + \sigma^2 j^2 \delta t$$

$$c_j = -\frac{1}{2} r j \delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \delta t$$

O valor da opção (*put*) no instante T é $\max(K - S_T, 0)$, onde S_T é o valor do ativo em $t=T$ e K é o preço de exercício. Então:

$$f_{N,j} = \max [K - j\delta S, 0] \quad j = 0, 1, \dots, M \quad (13)$$

O valor da opção é K quando o preço do ativo é zero, portanto:

$$f_{i,0} = K \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (14)$$

O valor da opção é igual a zero quando $S=S_{máx}$, de modo que:

$$f_{i,M} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (15)$$

As eq. (13), (14) e (15) definem o valor da opção nas condições de contorno $S=0$, $S=S_{máx}$ e $t=T$. Para encontrar o valor de f em todos os outros pontos utiliza-se a eq. (12). Iniciando pelos pontos $(T-\delta t)$, chega-se a um sistema com $(M-1)$ equações e $(M-1)$ incógnitas:

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{N,j} \quad j = 1, 2, \dots, M-1$$

cujo lado direito é calculado pela eq. (13). Além disso, as eq. (14) e (15) nos dão que $f_{N-1,0} = K$ e que $f_{N-1,M} = 0$.

Uma vez solucionado o sistema, cada valor de $f_{N-1,j}$ é comparado com $(K - j\delta S)$. Se $f_{N-1,j}$ for menor, o exercício antecipado é ótimo no instante $(T-\delta t)$ e $f_{N-1,j}$ será igual a $(K - j\delta S)$. Repete-se esse procedimento até se determinar o valor da opção em $t=0$.

2.2.2.2. Método das Diferenças Finitas Explícito

O método das diferenças finito implícito possui como vantagem o fato de ser robusto, isto é, de sempre convergir para a solução da equação diferencial

conforme δS e δt tendem a zero. Porém, possui o inconveniente de que $M-1$ equações têm de ser resolvidas simultaneamente para calcular os valores $f_{i,j}$ a partir dos valores $f_{i+1,j}$. Podemos simplificar esse método assumindo que $\delta f/\delta S$ e $\delta^2 f/\delta S^2$ no ponto (i,j) são os mesmos no ponto $(i+1,j)$. Nesse caso, as eq. (9) e (10) ficam, respectivamente:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\delta S}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\delta S^2}$$

Substituindo na eq. (8) essa se torna:

$$a^*_j f_{i+1,j-1} + b^*_j f_{i+1,j} + c^*_j f_{i+1,j+1} = f_{i,j} \quad (16)$$

onde:

$$a^*_j = \frac{1}{1+r\delta t} \left(-\frac{1}{2} rj\delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \delta t \right)$$

$$b^*_j = \frac{1}{1+r\delta t} (1 - \sigma^2 j^2 \delta t)$$

$$c^*_j = \frac{1}{1+r\delta t} \left(\frac{1}{2} rj\delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \delta t \right)$$

A essa abordagem dá-se o nome de Método das Diferenças Finitas Explícito. Como as condições de contorno são as mesmas tanto no método implícito como no explícito, os valores da opção em $t=T$ já são conhecidos e os valores em $(T-\delta t)$ serão obtidos através da eq. (16), e assim recursivamente até $t=0$.

Apesar de mais simples que o método implícito, o método explícito nem sempre converge para a solução da equação diferencial, dependendo dos intervalos δS e δt empregados. Uma condição suficiente para assegurar a estabilidade do método é escolher $\delta t \leq \frac{1}{\sigma^2 M^2}$.

2.2.3. Simulação de Monte Carlo (SMC)

Esse método usa a avaliação neutra ao risco. O *payoff* esperado em um mundo neutro ao risco é calculado usando-se uma amostragem aleatória repetida a partir das distribuições de probabilidade de cada uma das variáveis de entrada que determinam o fluxo de caixa, que é então descontada à taxa livre de risco, obtendo-se assim uma distribuição de probabilidades ou um “perfil de risco” do VPL.

Considerando um derivativo que dependa de uma única variável de mercado S que gera um *payoff* no instante T e assumindo que as taxas de juros são constantes, podemos valorar o derivativo da seguinte maneira:

1. Gerar uma amostra aleatória para valores de S em um mundo neutro ao risco.
2. Calcular o *payoff* do derivativo.
3. Repetir os passos 1 e 2 pra se obterem várias amostras de valor para o *payoff* do derivativo em um mundo neutro ao risco.
4. Calcular a média dos *payoffs* para se obter uma estimativa do *payoff* esperado em um mundo neutro ao risco.
5. Descontar o *payoff* esperado à taxa livre de risco para se obter uma estimativa do valor do derivativo.

Por exemplo, supondo que a variável de mercado siga um processo, em um mundo neutro ao risco, dado por:

$$dS = \hat{\mu}S \cdot dt + \sigma S \cdot dz \quad (17)$$

onde dz é um incremento de Wiener, $\hat{\mu}$ é o retorno esperado em um mundo neutro ao risco e σ é a volatilidade. Para simular o caminho percorrido por S , divide-se a vida do derivativo em N intervalos curtos de comprimento δt e a equação (17) aproximada fica:

$$S(t + \delta t) - S(t) = \hat{\mu}S(t)\delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\delta t} \quad (18)$$

onde $S(t)$ representa o valor de S no instante t e ε , uma variável aleatória com distribuição normal padrão. A eq. (18) nos permite calcular o valor de S em qualquer instante de tempo. Outra maneira de se simular o caminho percorrido por S é através da expressão:

$$S(t + \delta t) = S(t) \cdot e^{\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\delta t} \right]} \quad (19)$$

A simulação de Monte Carlo é particularmente adequada para opções que dependam de múltiplas variáveis de estado ou opções que dependem do caminho percorrido pela variável S , que pode seguir qualquer processo estocástico. A precisão dos resultados da SMC pode ser melhorada aumentando-se o número de simulações, porém a um custo computacional mais alto.

2.3. Técnicas de Otimização Dinâmica sob Incerteza

Existem dois métodos matemáticos para resolução de modelos de opções, sejam elas financeiras ou reais: programação dinâmica e análise de direitos contingenciais. Ambos estão intimamente relacionados e levam a resultados idênticos em várias situações, mas partem de pressupostos diferentes quanto ao mercado financeiro e às taxas de desconto que as firmas usam para descontar seus fluxos de caixa. Enquanto na programação dinâmica a taxa de desconto exigida pelo ativo é a taxa de retorno ajustada ao risco, na análise de ativos contingentes usa-se a taxa livre de risco (*risk-free rate*) obtida junto ao mercado de capitais, o que dá um tratamento menos subjetivo à taxa de desconto. Por outro lado, o método dos ativos contingentes parte da premissa de existência de mercados completos, ou seja, mercados onde o número de estados possíveis é menor ou igual ao número de ativos negociados.

2.3.1. Programação Dinâmica

O método da programação dinâmica é uma ferramenta genérica e é usado principalmente para avaliar ativos não replicáveis ou situações onde o mercado é incompleto. Esse método divide uma seqüência de decisões em apenas duas componentes: a decisão imediata e uma função de valoração que engloba as conseqüências de todas as decisões subseqüentes. No caso de o horizonte de planejamento ser finito, a última decisão a ser tomada no fim desse horizonte pode ser encontrada usando-se técnicas tradicionais de otimização estática. A solução encontrada fornece a função de valoração a ser usada na avaliação da penúltima decisão, e assim sucessivamente até o instante inicial. Esse método pode ser usado também em horizontes de planejamento infinito, característica que parece dificultar o problema mas que é simplificada pelo fato de que cada decisão tomada leva a outro problema semelhante ao original. Isso não apenas facilita a solução numérica do problema como também por vezes torna possível obter uma caracterização teórica da solução e, em algumas situações, até mesmo uma solução analítica.

A programação dinâmica pode ser representada essencialmente pela seguinte equação, conhecida como Equação de Bellman ou Equação Fundamental da Otimalidade:

$$F_t(x_t) = \max_{u_t} \left\{ \pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1 + \rho} E[F_{t+1}(x_{t+1})] \right\} \quad (20)$$

onde:

- x_t = variável de estado no instante t ;
- u_t = variável de decisão no instante t ;
- ρ = taxa de desconto (variável exógena);
- $F_t(x_t)$ = valor da oportunidade de investimento no instante t ;
- $\pi_t(x_t, u_t)$ = lucro imediato no instante t ;
- $E[F_{t+1}(x_{t+1})]$ = valor de continuação (valor esperado no instante t dos fluxos de caixa futuros a partir do instante $t+1$).

Em suma, o primeiro termo do lado direito da eq. (20) é o lucro imediato e o segundo termo constitui o valor de continuação. A ação ótima no instante t é aquela que maximiza a soma desses dois componentes.

Como afirmam Dixit e Pindyck (1994), a idéia por trás dessa equação é formalmente expressa no Princípio da Otimalidade de Bellman: *“Uma política ótima tem a propriedade de, qualquer que seja a ação inicial, as escolhas remanescentes constituírem uma política ótima no que diz respeito ao subproblema iniciado no estado que resulta das ações iniciais.”*

Em tempo contínuo, após alguma manipulação algébrica, a equação de Bellman toma a seguinte forma:

$$\rho \cdot F(x, t) = \max_u \left\{ \pi(x, u, t) + \frac{1}{dt} E[dF] \right\} \quad (21)$$

Ou seja, para um investidor que mantenha o ativo de valor $F(x, t)$ por um curto intervalo de tempo, o fluxo de benefícios imediato junto com o ganho esperado de capital produzem uma taxa de retorno total igual a ρ . Isso fica mais claro ao reescrevermos a eq. (21):

$$\rho = \frac{\pi(x, u, t)}{F} + \frac{E[dF]/dt}{F} \quad (22)$$

que assim é escrita como a fórmula de Gordon: $K_1 = \frac{D_1}{P_0} + g$.

A taxa de desconto, na prática, pode ser interpretada como o custo de oportunidade do capital, devendo ser igual ao retorno que o investidor poderia ganhar em outra oportunidade de investimento de igual risco.

2.3.2. Direitos Contingenciais (*Contingent Claims Analysis*)

O método da análise de direitos contingenciais é usado em situações de mercado completo ou para ativos replicáveis e seus fundamentos vêm da teoria de finanças. Um projeto de investimentos é definido como um fluxo de custos e benefícios que variam no tempo e que dependem do desdobramento de eventos futuros incertos. Uma firma que possua o direito a uma oportunidade de investimento ou a um fluxo de lucros operacionais de um projeto já completado possui um ativo que tem valor. Supõe-se que uma economia moderna possua mercados para os mais variados tipos de ativos, com riscos e retornos os mais diversos. No caso de esse projeto ser um desses ativos transacionados no mercado, ele terá um preço de mercado conhecido e determinado pelo equilíbrio entre oferta e demanda desse mercado. Além disso, mesmo ele não sendo negociado no mercado, como essa metodologia parte da hipótese de mercado completo, pode-se calcular um valor implícito para o ativo relacionando-o a outros ativos, combinando-os em carteiras de modo a replicar exatamente o retorno presente e futuro do projeto de investimento em questão (*portfolio replicante*). Assim, em equilíbrio, o valor da oportunidade de investimento (projeto) deve ser igual ao da carteira de ativos que o replica, pois qualquer diferença entre os dois valores daria margem a ganhos de arbitragem.

O primeiro passo nesse método é montar uma carteira ϕ livre de risco. Para tanto, assume-se uma posição longa (comprada) na opção de investir no ativo (F_0) e uma posição curta (a descoberto) em n posições no ativo base, cujo preço unitário é P_0 . Assim, a carteira sem risco é dada por $\phi_0 = F_0 - nP_0$. O

número de posições do ativo base será ajustado de maneira a neutralizar o risco ao qual a carteira está exposta, fazendo com que seu valor no instante seguinte independa do fato de o preço do ativo subir ou cair. Conseqüentemente, na ausência de oportunidades de arbitragem, sua taxa de retorno será igual à taxa livre de risco r . Essa situação é ilustrada pela figura 4.

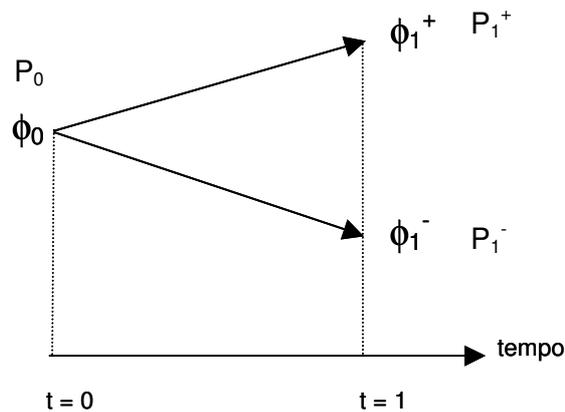


Figura 4: Evolução da carteira ϕ para dois possíveis cenários.

Aqui, ϕ_0 é o valor inicial da carteira. Após um intervalo de tempo de um período, dois cenários podem ocorrer: um de aumento no preço (P_1^+) ou um de queda (P_1^-), para os quais a carteira assume os valores ϕ_1^+ e ϕ_1^- , respectivamente. Como a carteira é livre de risco, seu valor no instante $t=1$ deve ser o mesmo quer o cenário seja positivo quer seja negativo, isto é, $\phi_1^+ = \phi_1^- = \phi_1$. A partir dessa relação de igualdade, a carteira é dimensionada calculando-se o valor de n .

Isso feito, faz-se uma relação entre o lucro esperado e o lucro obtido. O lucro esperado é dado pela remuneração da carteira, $r\phi_0$, enquanto o lucro obtido é o ganho de capital, $\phi_1 - \phi_0$, mais os dividendos distribuídos pelo ativo, $n r P_0$ (negativos, pois se trata de uma posição vendida, sendo, portanto, um custo). A relação entre os dois lucros deve ser de igualdade de modo a não existirem oportunidades de arbitragem. Assim:

$$\underbrace{r\phi_0}_{\text{remuneração}} = \underbrace{\phi_1 - \phi_0}_{\text{ganho de capital}} - \underbrace{n \cdot r \cdot P_0}_{\text{dividendos}} \quad (23)$$

Por fim, resolve-se matematicamente essa igualdade até se obter a equação diferencial parcial. Em seguida, devem-se estabelecer as condições de contorno que modelam as opções.

Esse método, embora de aplicação mais restrita que o anterior, dispensa a escolha de uma taxa de desconto ajustada ao risco do projeto, razão pela qual se tornou um método bastante popular na área de finanças.