

## 6 Resultados

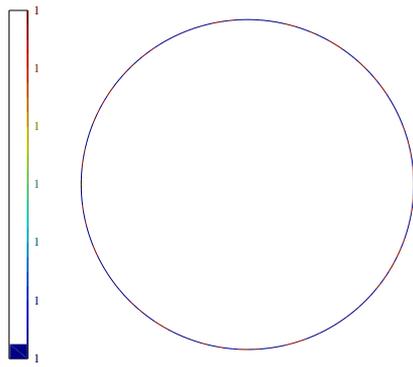
Nesta seção discutiremos nossos resultados e também compararemos nossos métodos com métodos que apresentam as mesmas características, ou seja, métodos que utilizam mínimos quadrados em uma janela de  $n$  pontos.

### 6.1 Curvas no Plano

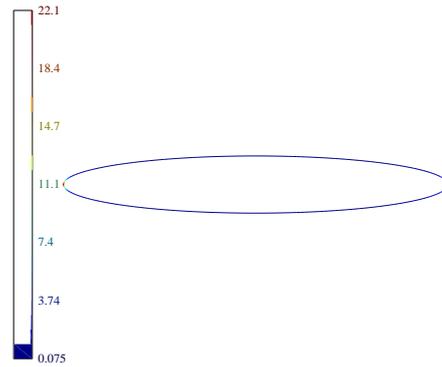
Discutiremos nossos testes baseados em cinco curvas (tais curvas podem ser visualizadas na figura 6.1):

- Circunferência:  $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t)) : t \in [0, 2\pi]$ ;
- Elipse:  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), 0.3 \sin(t)) : t \in [0, 2\pi]$ ;
- Lemniscata:  $\mathbf{r}(t) = (\sin(t), \sin(t) \cos(t)) : t \in [-\pi, \pi]$ ;
- Parábola:  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2) : t \in [-1, 1]$ ;
- Reta :  $\mathbf{r}(t) = (t, 0) : t \in [-0.5, 0.5]$ .

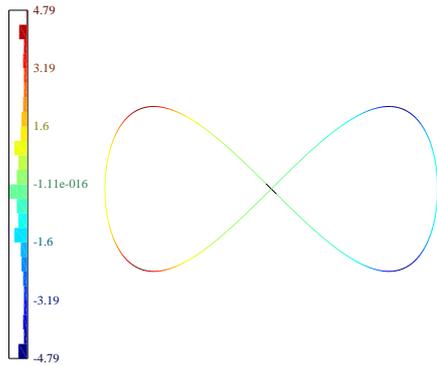
A princípio, todas as curvas foram uniformemente amostradas no tempo. Como consequência, as amostras são igualmente espaçadas para o círculo e reta, mas não para a elipse, lemniscata e parábola. O ruído foi simulado como uma variável aleatória uniforme no disco de raio  $\sigma$ , onde  $\sigma$  é um parâmetro a ser escolhido em cada caso. Podemos ver na figura 6.2 uma ilustração de uma curva ruidosa.



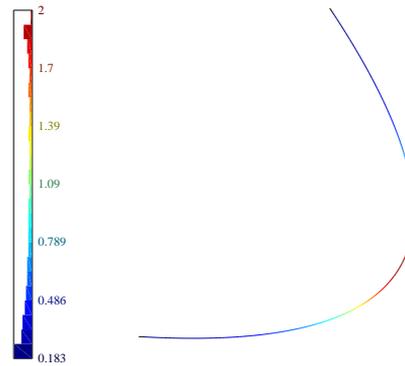
6.1(a): Cicunferência



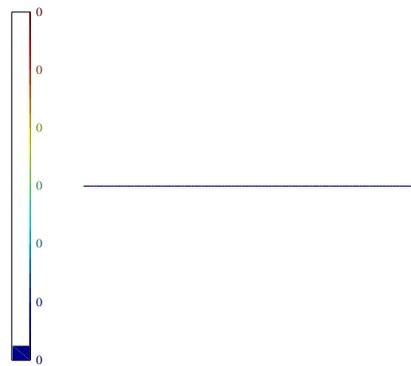
6.1(b): Elipse



6.1(c): Lemniscata

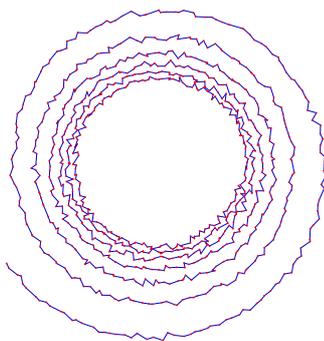


6.1(d): Parábola

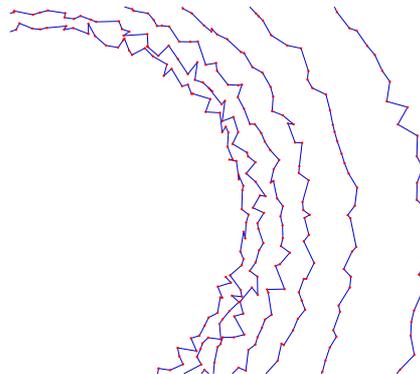


6.1(e): Reta

Figura 6.1: Visualização das curvas sobre as quais serão discutidos os testes.



6.2(a): Traço da curva



6.2(b): Curva em detalhe

Figura 6.2: Espiral com ruído (amostragem de 1000,  $\sigma = 1$ ).

Consideramos a largura  $q$  da janela móvel entre 1 e 25. Nós também testamos o algoritmo com pesos dado pela fórmula apresentada no capítulo 4.

Como temos a fórmula paramétrica dos exemplos, calculamos a curvatura real usando diferenciação automática (vide [13]). O erro foi medido em alguns pontos da curva. Procuramos escolher pontos com características específicas tais como curvatura alta, curvatura baixa e pontos de inflexão. O valor do erro no ponto  $\mathbf{p}$  é dado por

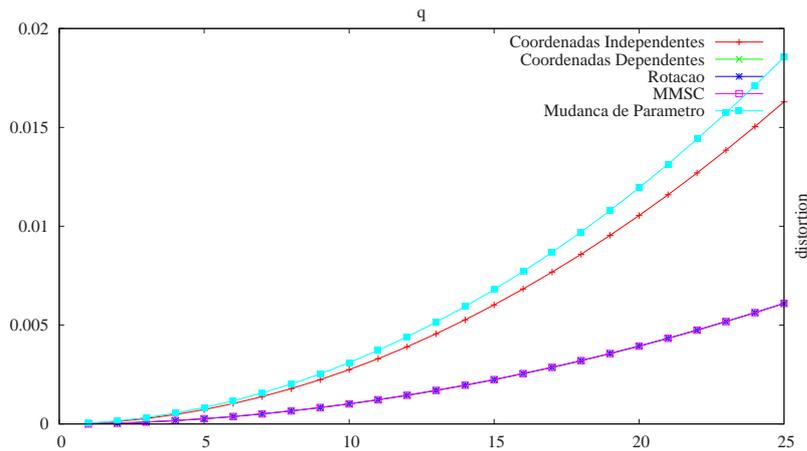
$$E(p) = |\hat{\kappa}(p) - \kappa(p)| \quad , \quad (6-1)$$

onde  $\kappa(p)$  é a curvatura real e  $\hat{\kappa}(p)$  é a curvatura estimada.

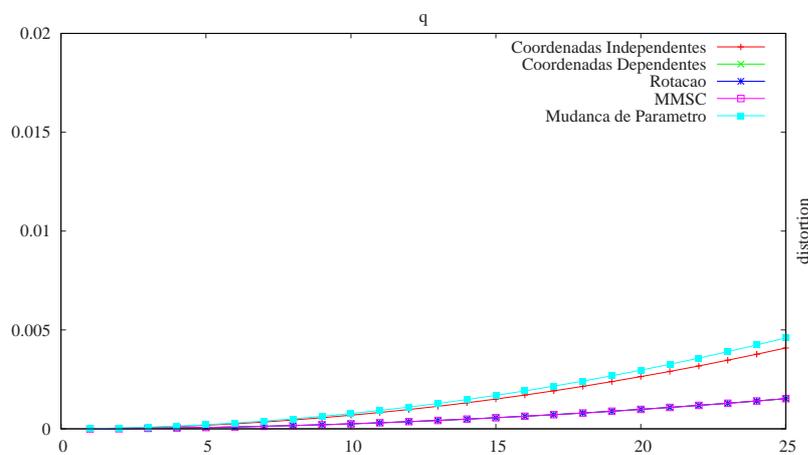
### 6.1.1

#### Curvas sem Ruído

Nesta seção iniciaremos discutindo a influência de  $q$  na estimativa da curvatura. Observe os gráficos dados em 6.3 onde o eixo das abscissas representam a variação do  $q$  e o eixo das ordenadas a distorção calculada utilizando a fórmula dada em (6-1). Daqui em diante, a menos de menção contrária, teremos nos gráficos essa disposição dos eixos.



6.3(a): Círculo com 500 pontos

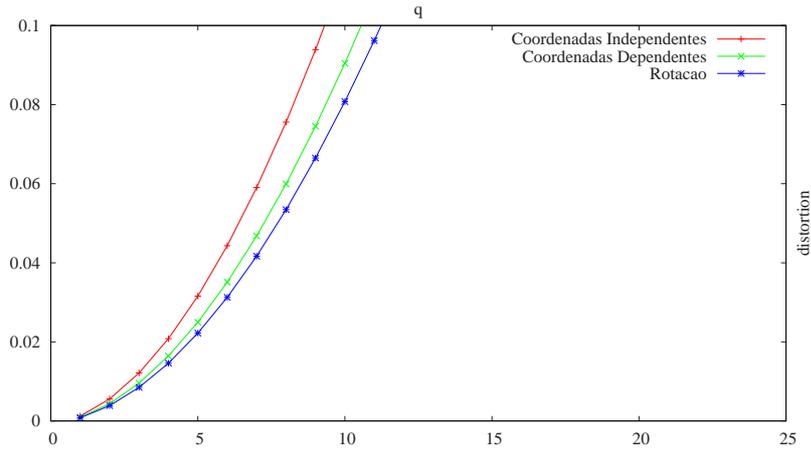


6.3(b): Círculo com 1000 pontos

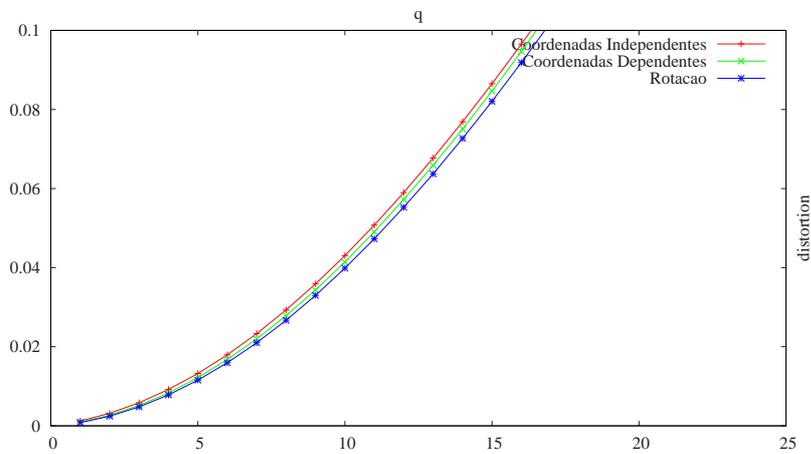
Figura 6.3: Gráfico referente a circunferência com diferente valores de  $q$ 

Neles podemos perceber que quanto maior o valor de  $q$  pior ficam as estimativas da curvatura. Isto vem do fato de se aumentarmos o valor de  $q$  estaremos utilizando pontos mais distantes do ponto base. Podemos observar também que quanto maior a amostragem melhor ficam os resultados, o que é bastante intuitivo.

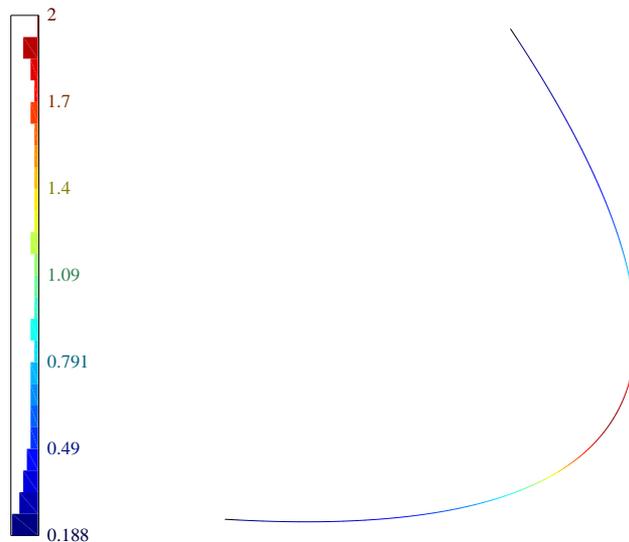
Outra variável importante é o peso dado para cada ponto. Note pelos gráficos 6.4 que ao colocarmos um peso valorizando os pontos mais próximos obtemos um resultado melhor. No entanto, colocar um peso muito grande equivale em diminuir o valor de  $q$ . Note que, nesse caso, utilizamos somente os métodos Coordenadas Independentes, Coordenadas Dependentes e com Rotação.



6.4(a): Parábola com 100 pontos e sem peso



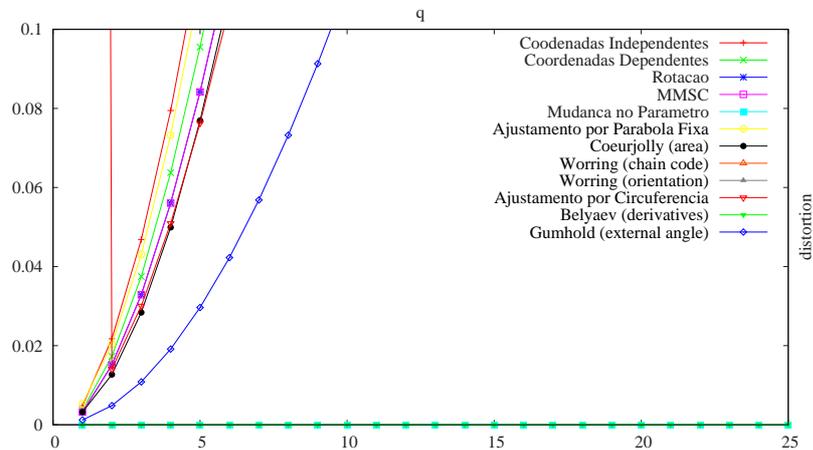
6.4(b): Parábola com 100 pontos e com peso igual a 2



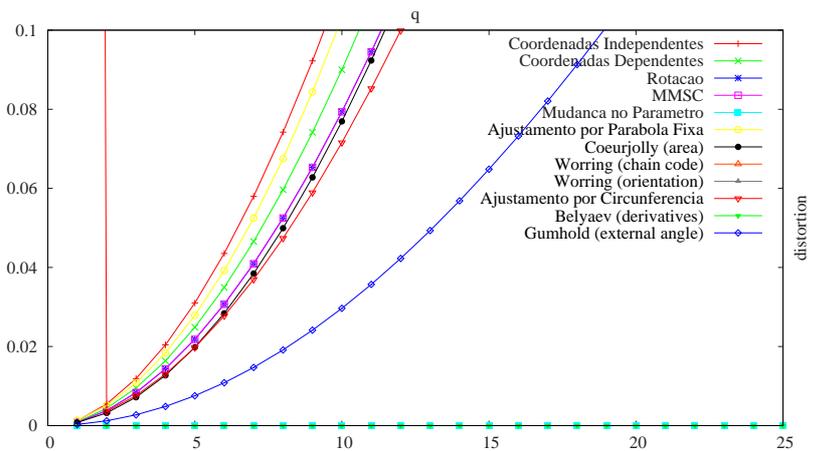
6.4(c): Parábola com 100 pontos

Figura 6.4: Gráfico referente a parábola rodada de  $60^\circ$  cujo domínio varia de  $-1$  a  $1$ , como podemos ver em (c). Esses erros foram calculados no ponto de maior curvatura.

Vamos analisar agora o que acontece com os métodos propostos nesse trabalho para pontos com características específicas. Primeiramente analisaremos pontos de alta curvatura. Como podemos ver nos gráficos 6.5 e 6.6 o MMSC com mudança de parâmetro obteve resultados melhores que os outros métodos propostos.



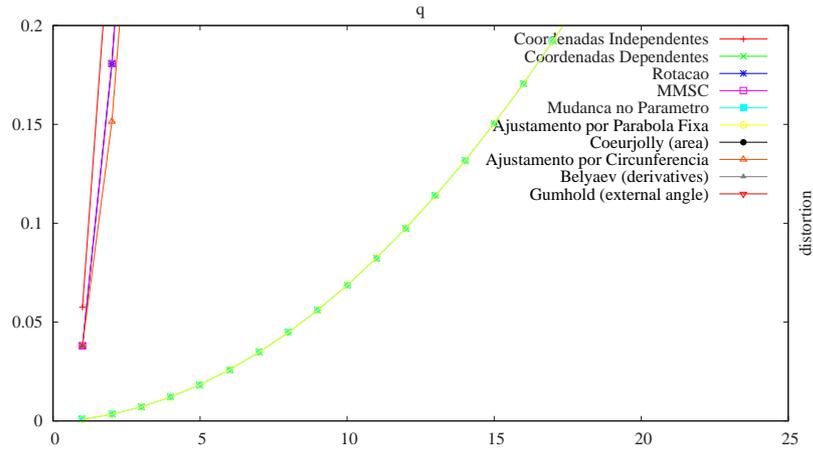
6.5(a): Parábola com 51 pontos



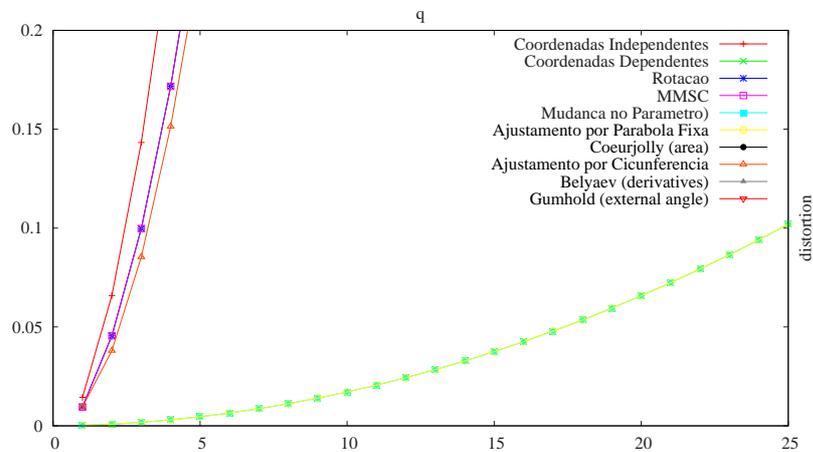
6.5(b): Parábola com 101 pontos

Figura 6.5: Gráficos de erros para alta curvaturas referentes a parábola rodada de  $60^\circ$  no intervalo  $[-1, 1]$ . Os dados foram calculados em  $t = 0$ , ou seja, no ponto de máxima curvatura

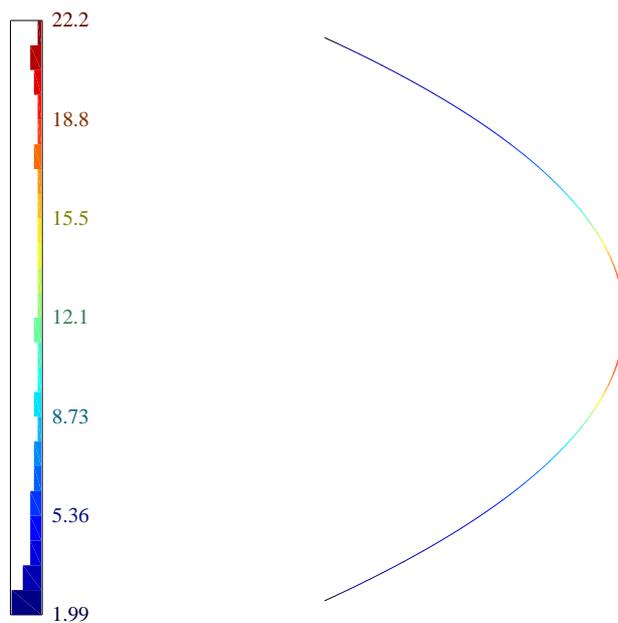
Observe também que este método obteve resultados melhores que os métodos da parábola fixa e do ajustamento da circunferência.



6.6(a): Elipse com 51 pontos



6.6(b): Elipse com 101 pontos

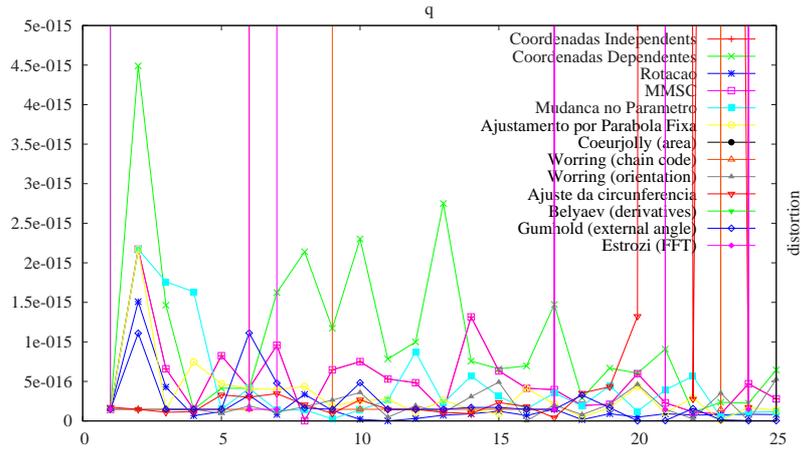


6.6(c): Elipse com 100 pontos

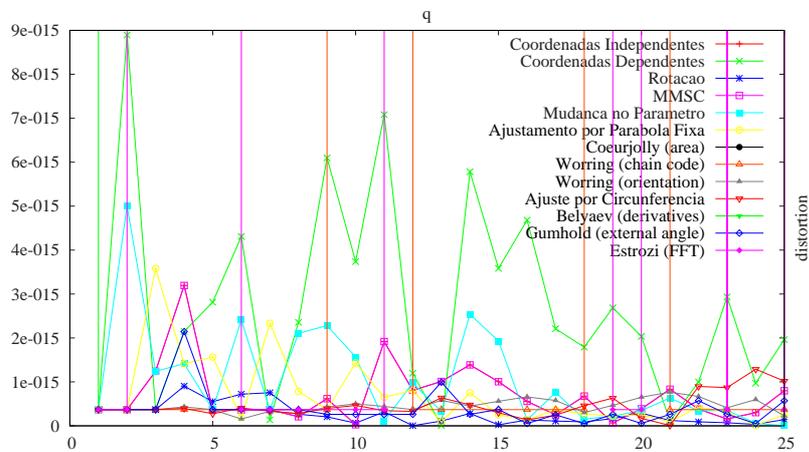
Figura 6.6: Gráficos de erros para alta curvaturas referentes à elipse com  $t$  pertencente ao intervalo  $[-\pi/10, \pi/10]$ . Os dados foram calculados em  $t = 0$ , ou seja, no ponto de máxima curvatura.

Outro detalhe que podemos perceber é que, mesmo a curvatura sendo obtida de forma diferente, o método com rotação obteve resultados muito semelhantes ao MMSC.

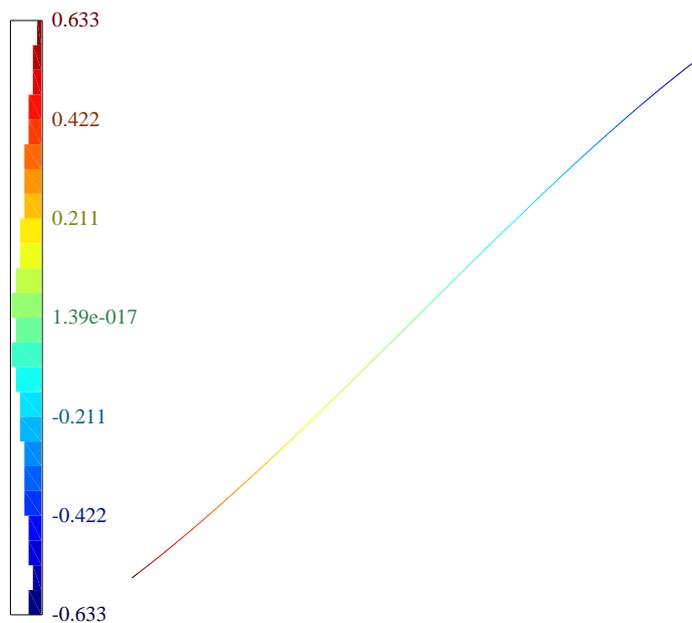
Analisaremos agora pontos de inflexão (vide 6.7(c)). Observamos que os nossos métodos apresentaram resultados bem satisfatórios para pontos de inflexão.



6.7(a): Lemniscata com 51 pontos



6.7(b): Lemniscata com 101 pontos

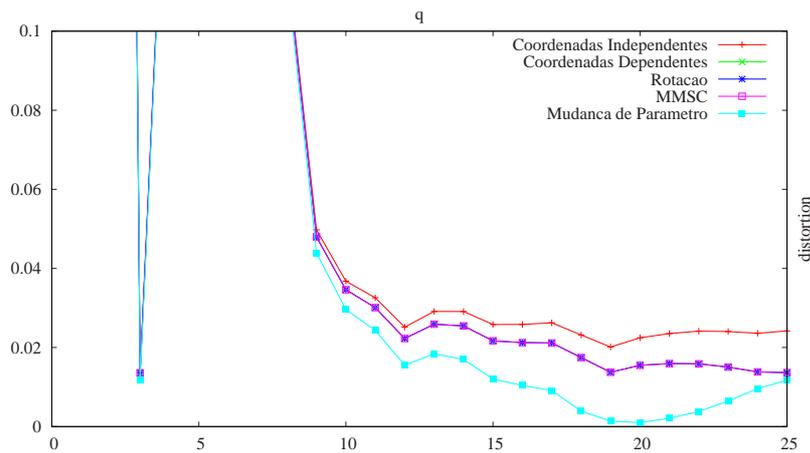


6.7(c): Lemniscata com 100 pontos

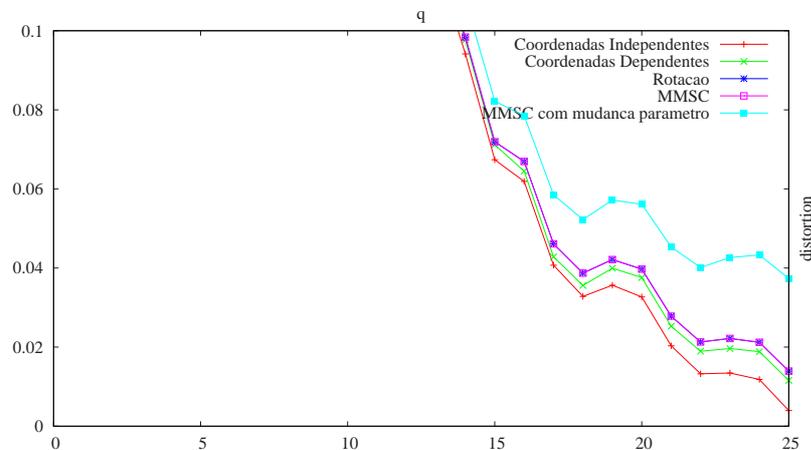
Figura 6.7: Gráficos de erros para baixa curvaturas referentes à lemniscata com  $t$  pertencente ao intervalo  $[-\pi/8, \pi/8]$ . Os dados foram calculados em  $t = 0$ , ou seja, o ponto de inflexão.

### 6.1.2 Curvas com Ruído

Como na seção anterior veremos inicialmente a influência do  $q$  na estimativa da curvatura. Observe os gráficos dados em 6.8 onde o eixo das abscissas representam a variação do  $q$  e o eixo das ordenadas a distorção calculada utilizando a fórmula dada em (6-1). Daqui em diante, a menos de menção contrária, teremos nos gráficos essa disposição dos eixos.



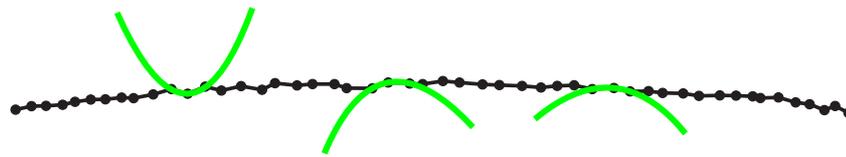
6.8(a): Círculo com 500 pontos e  $\sigma = 0.05$



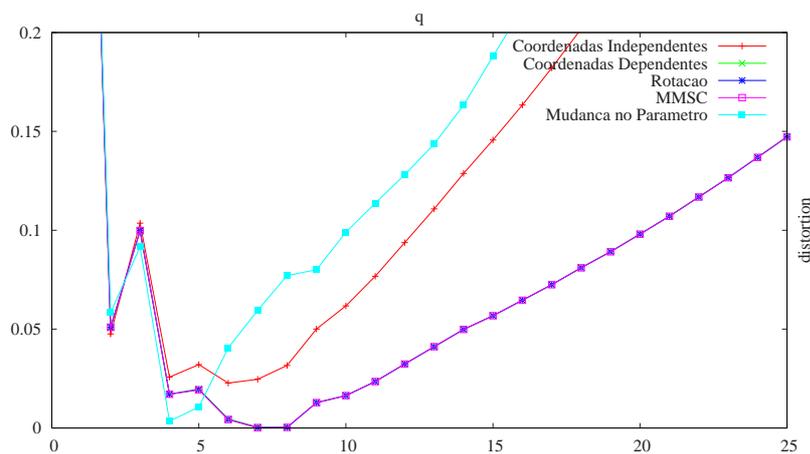
6.8(b): Parábola com 500 pontos e  $\sigma = 0.05$

Figura 6.8: Gráfico de curvas com diferentes valores de  $q$

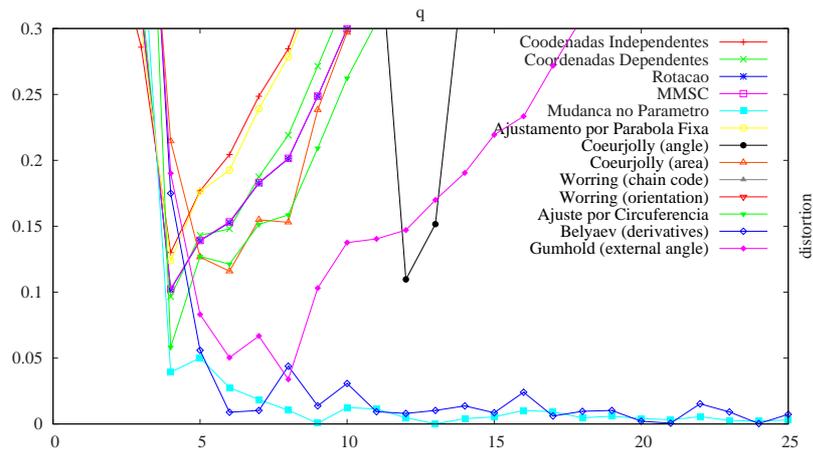
Neles podemos perceber que aumentando o valor de  $q$  melhor ficam as estimativas da curvatura. Isso porque ao contrário da figura 6.9(b), caso utilizássemos  $q$  pequeno poderíamos obter uma aproximação dada pela figura 6.9(a).

6.9(a): Aproximação por parábola de uma curva com ruído usando  $q = 1$ 6.9(b): Aproximação por parábola de uma curva com ruído usando  $q = 5$ Figura 6.9: Aproximação de curvas por parábolas com diferente valores de  $q$ 

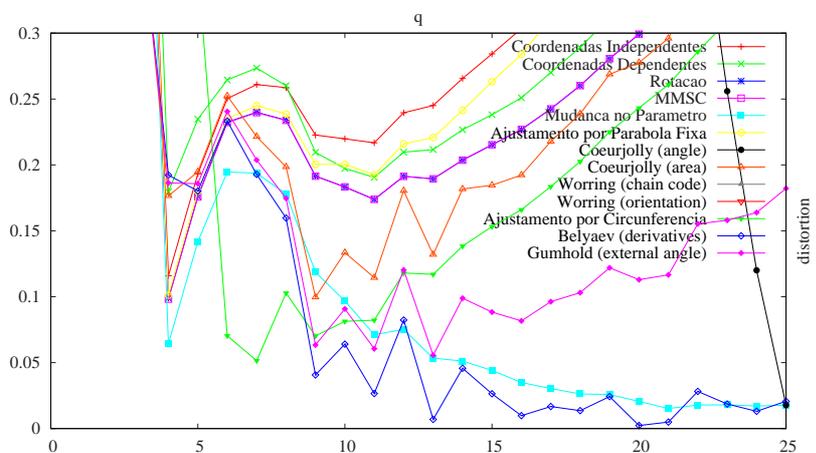
Contudo a tendência é que ocorra algo semelhante ao gráfico dado na figura 6.10, ou seja, teríamos para todos os métodos um ponto ótimo. Isso porque ao utilizarmos um valor de  $q$  muito grande sairíamos da vizinhança do ponto onde queremos estimar a curvatura.

Figura 6.10: Gráfico do círculo com 100 pontos e diferente valores de  $q$ 

Analisaremos agora a influência do ruído em alguns pontos com características específicas, por exemplo pontos de alta curvatura, baixa curvatura e pontos de inflexão. Iniciaremos nossa análise para pontos de alta curvatura. Podemos ver no gráfico 6.11 que a partir de um certo tamanho de janela o erro não mais diminui. E também percebemos que o MMSC com mudança de parâmetro mostrou-se mais estável.



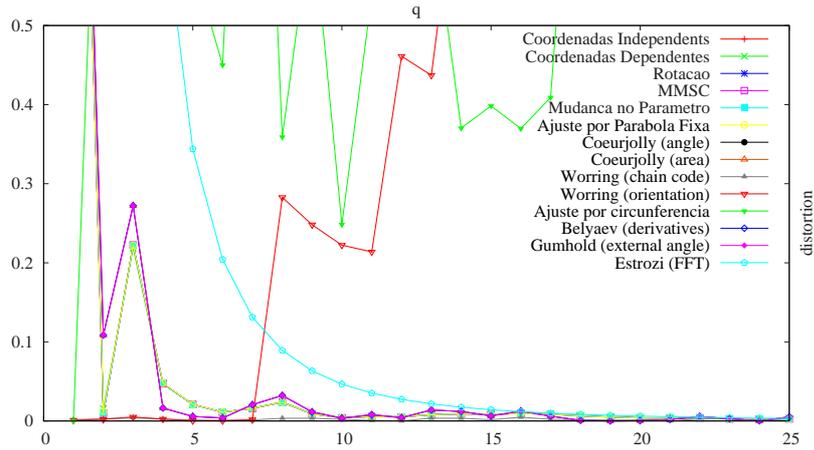
6.11(a): Parábola com 51 pontos



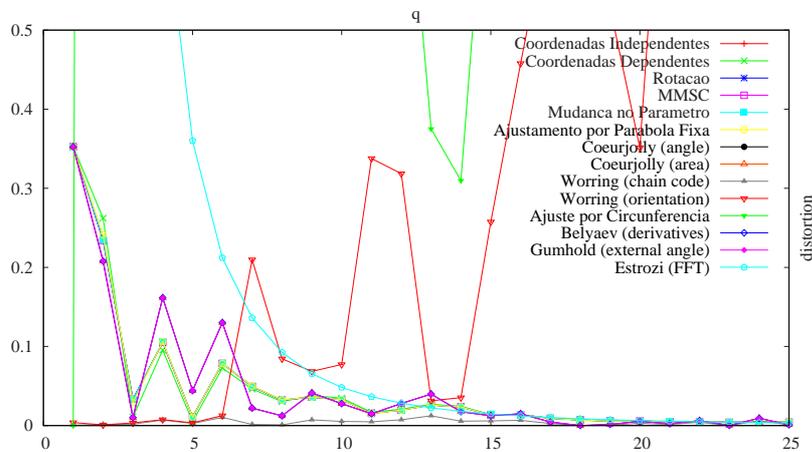
6.11(b): Parábola com 101 pontos

Figura 6.11: Gráficos de erros para alta curvaturas referentes à parábola rodada de  $60^\circ$  no intervalo  $[-1, 1]$ . Os dados foram calculados em  $t = 0$ , ou seja, no ponto de máxima curvatura e com  $\sigma = 0.1$

Passaremos agora à análise de pontos de inflexão. Observe os gráficos dados em 6.12, podemos perceber os nossos métodos obtiveram um resultado bem satisfatório para pontos inflexão. Note também que os outros métodos (método do ajustamento por parábolas fixas e método do ajustamento por circunferência) obtiveram um resultado semelhante aos nossos métodos.



6.12(a): Lemniscata com 51 pontos e com  $\sigma = 0.05$



6.12(b): Lemniscata com 51 pontos e com  $\sigma = 0.1$

Figura 6.12: Gráficos de erros para baixa curvaturas referentes à lemniscata com  $t$  pertencente ao intervalo  $[-\pi/8, \pi/8]$ . Os dados foram calculados em  $t = 0$ , ou seja, ponto de inflexão.

### 6.1.3 Curvas Não Uniformemente Amostradas

Obtemos até agora alguns resultados bem satisfatórios. Contudo como pode-se perceber que utilizamos somente curvas bem amostradas. Passamos então a análise de curvas cuja amostragem é irregular. Exemplos desse tipo de amostragem podem ser vistos nas figuras 6.14 e 6.13.

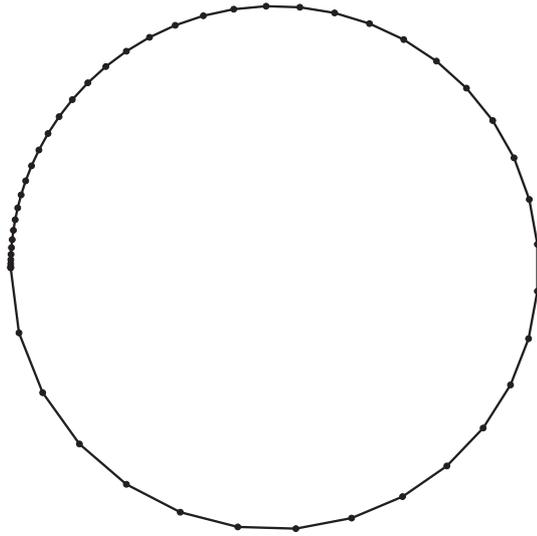


Figura 6.13: Amostragem irregular com espaçamento crescente para a circunferência com  $n = 50$

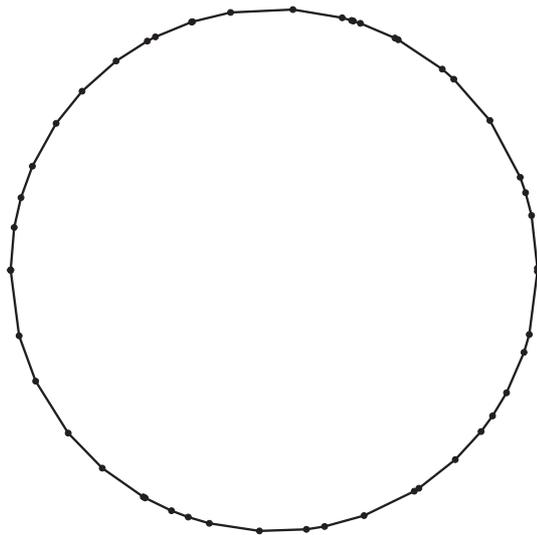
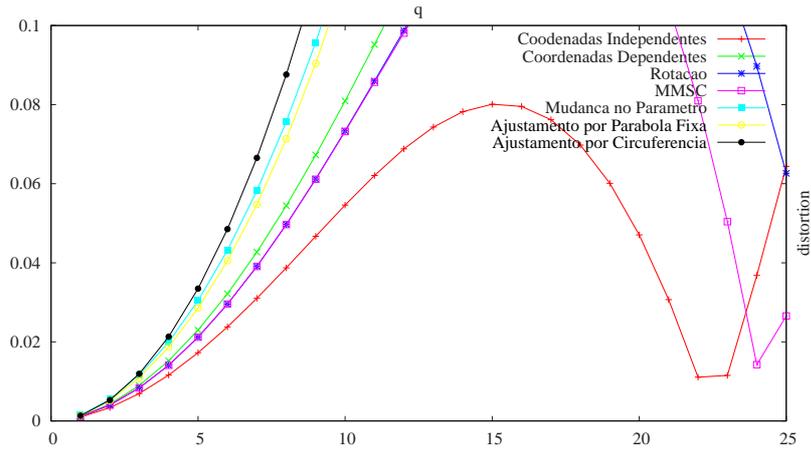
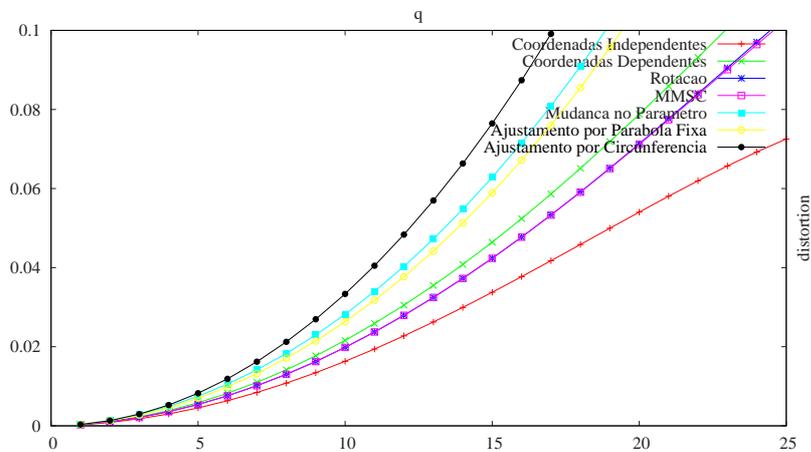


Figura 6.14: Amostragem irregular aleatória para a circunferência com  $n = 50$

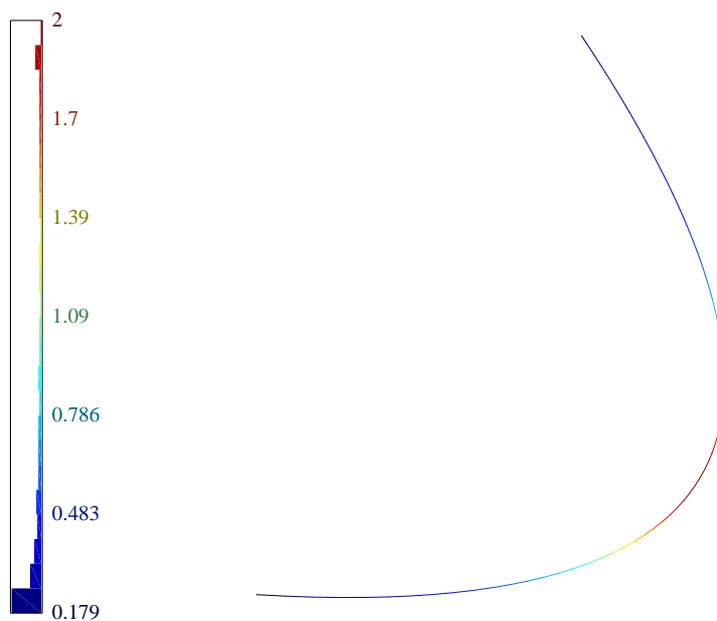
Observando o gráfico 6.15 que utilizam a amostragem com espaçamento crescente (ver figura 6.13), podemos verificar que, assim como no caso de amostragem uniforme, quanto maior o valor de  $q$ , pior ficam as estimativas.



6.15(a): Parábola com 51 pontos



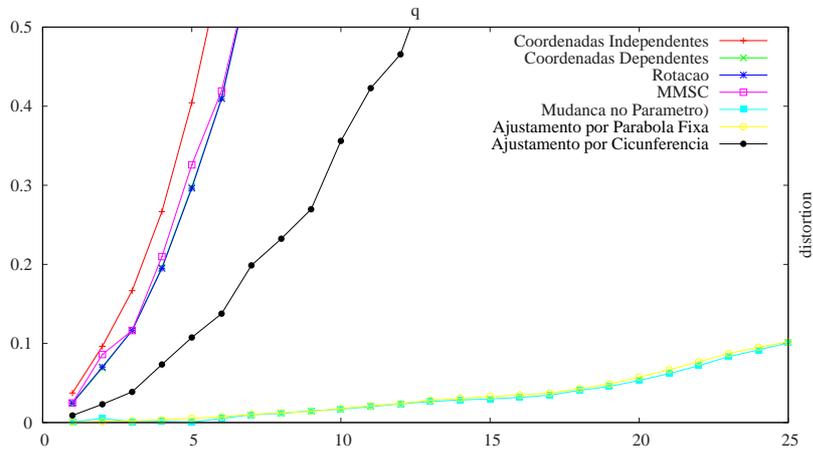
6.15(b): Parábola com 101 pontos



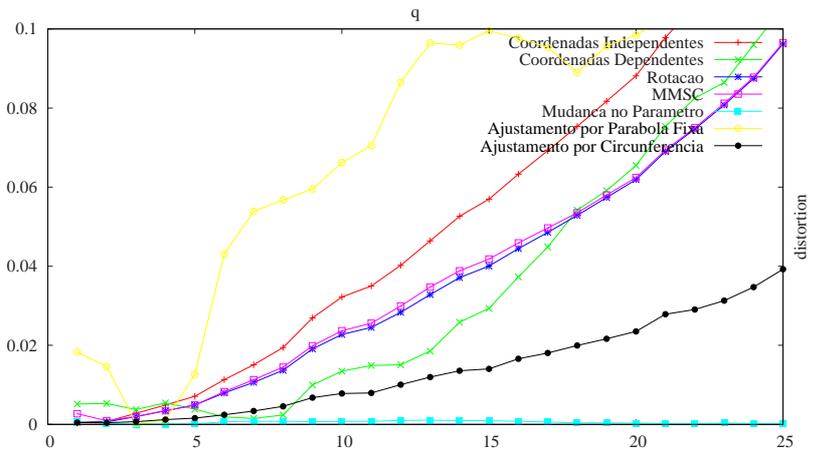
6.15(c): Parábola com 100 pontos

Figura 6.15: Gráficos de erros para parábola não uniformemente amostrada e rodada de  $60^\circ$  no intervalo  $[-1, 1]$

Para amostragem irregular aleatória (vide figura 6.14), podemos verificar pelo gráfico 6.16 que também conseguimos estimar a curvatura utilizando nossos métodos e que novamente, quanto maior o tamanho da janela pior o resultado. O gráfico 6.16(b) sugere que nos pontos de alta curvatura o MMSC com mudança de parâmetro gera erros menores.



6.16(a): Elipse com 101 pontos no intervalo  $[-\pi/10, \pi/10]$



6.16(b): Parábola com 201 pontos no intervalo  $[-1, 1]$  no ponto de máxima curvatura

Figura 6.16: Gráficos de erros para curvas com amostragem irregular aleatória

### 6.1.4 Comparação com Outros Métodos

Baseamos nossa comparação em métodos com as mesmas características, ou seja, métodos que utilizam processos de otimização com uma janela de  $n$  pontos.

Primeiramente compararemos nossos métodos com o método da parábola fixa, dado em [8]. Como foi visto anteriormente este método não gera uma boa aproximação para uma parábola rodada (ver figura 3.6). Contudo ao aplicarmos os nossos métodos obtemos melhores aproximações, como podemos ver na figura 6.17. Isso deve-se ao fato de estarmos usando parábolas paramétricas que podem se adequar melhor à parábolas em qualquer direção, ou seja, são invariantes por movimentos rígidos.

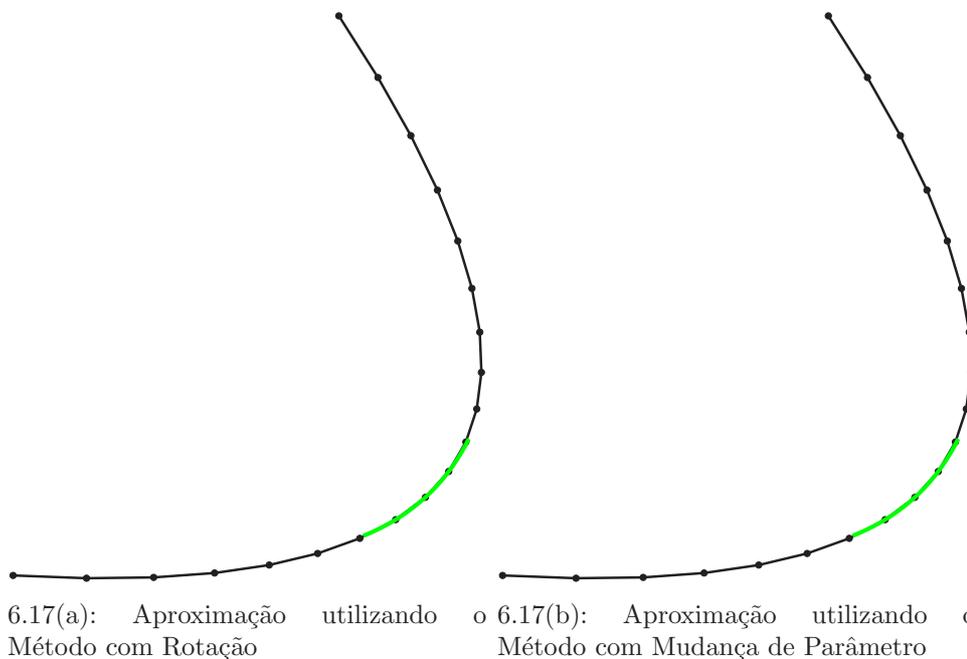
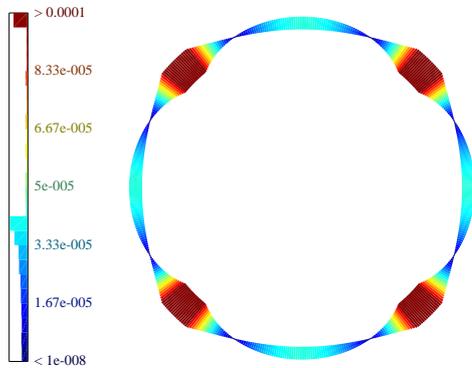
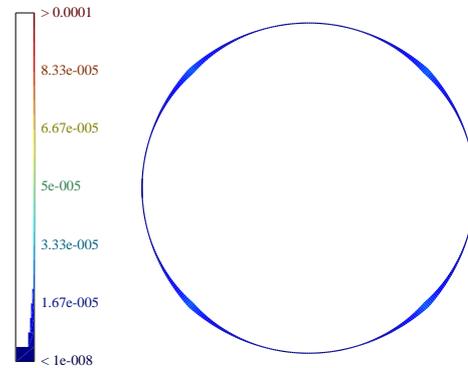


Figura 6.17: Aproximação da parábola rodada de  $60^\circ$  e  $q = 1$

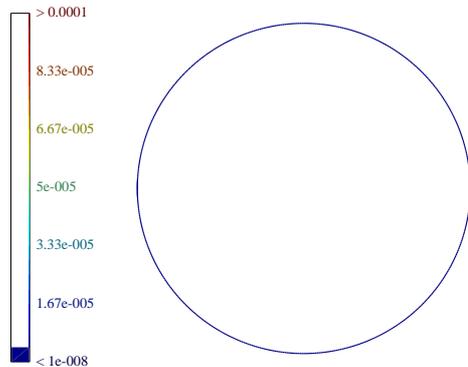
Mencionamos também que esse método apresentava problemas numéricos perto de  $45^\circ$ . A figura 6.18 ilustra esse fato e compara esse método com os nossos. Observe que com as melhorias os erros apresentados pelos nossos métodos diminuíram ou ficaram uniformes por toda a curva.



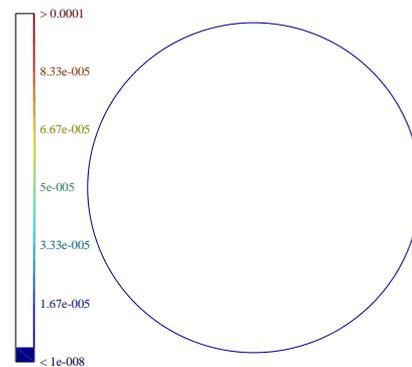
6.18(a): Aproximação por Parábolas de [8]



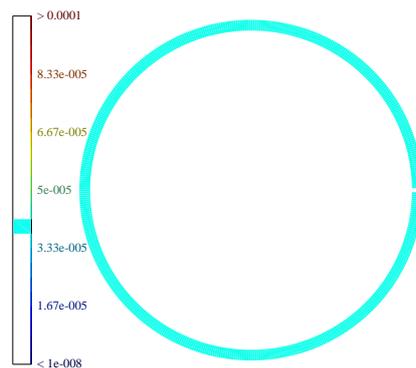
6.18(b): Método das Coordenadas Dependentes



6.18(c): Método das Coordenadas Dependentes com rotação



6.18(d): MMSC



6.18(e): MMSC com Mudança de Parâmetro

Figura 6.18: Grandes erros são representados por linhas grossas e a escala é a mesma para as figuras .

Já o método do ajustamento da circunferência, dado em [26], vimos que a aproximação dada para a reta com ruído não obteve boas aproximações, vide figura 3.4. É claro que isso acontece porque foi fixado o valor de  $A$  igual a 1 na

equação dada em (3-14). Note que se fixarmos outro coeficiente serão obtidos outros resultados.

Ao compararmos o método do ajustamento de circunferência com os outros podemos perceber que estes obtiveram melhores aproximações (vide figura 6.19).

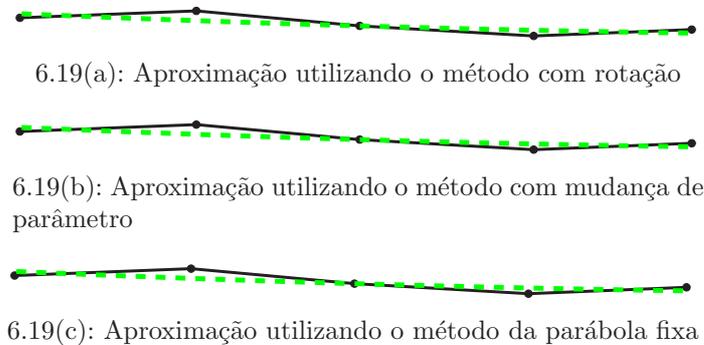


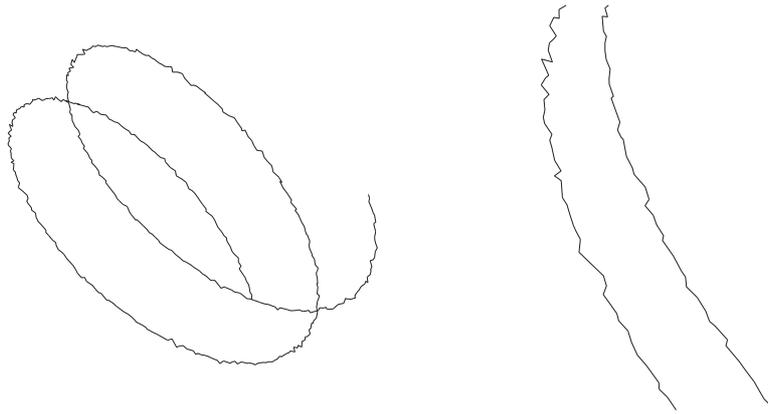
Figura 6.19: Aproximação da reta com  $q = 2$ , ruído de 0.1 e  $n = 5$

## 6.2 Curvas no Espaço

Discutiremos nossos testes baseados em cinco curvas:

- Hélice Cilíndrica:  $\mathbf{r}(t) = (4 \cos(t), 4\text{sen}(t), t) : t \in [-2\pi, 2\pi]$ ;
- Curva de Crepe:  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), 2\text{sen}(t), \cos(2t)) : t \in [-\pi, \pi]$ ;
- Espiral Cônica de Pappus:  $\mathbf{r}(t) = (0.5t \cos(t), 0.5t\text{sen}(t), 0.5t) : t \in [-4\pi, 4\pi]$ ;
- Clelia :  $\mathbf{r}(t) = (\cos(2t) \cos(t), \cos(2t)\text{sen}(t), \text{sen}(2t)) : t \in [-\pi, \pi]$ .
- Cylindric Sine Wave :  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), 2\text{sen}(t), \cos(3t)) : t \in [-\pi, \pi]$ .

A princípio, todas as curvas foram uniformemente amostradas no tempo. Como uma consequência, as amostras são igualmente espaçadas para a hélice cilíndrica, curva de crepe, clelia e reta, mas não para a espiral cônica de Pappus e onda senoidal cilíndrica. O ruído foi simulado como uma variável aleatória uniforme na esfera de raio  $\sigma$ , onde  $\sigma$  é um parâmetro a escolher. Uma ilustração de uma curva ruidosa pode ser vista na figura 6.20.



6.20(a): Traço da curva

6.20(b): Curva em detalhe

Figura 6.20: Hélice cilíndrica com ruído (amostragem de 500,  $\sigma = 1$ ).

Como estamos usando a fórmula paramétrica das curvas utilizamos também a diferenciação automática e calculamos o erro da mesma forma que foi calculado em curvas no plano. O valor do erro em um ponto  $\mathbf{p}$  é dado para a curvatura e a torção respectivamente por:

$$E_{\kappa}(\mathbf{p}) = |\hat{\kappa}(\mathbf{p}) - \kappa(\mathbf{p})| \quad (6-2)$$

e

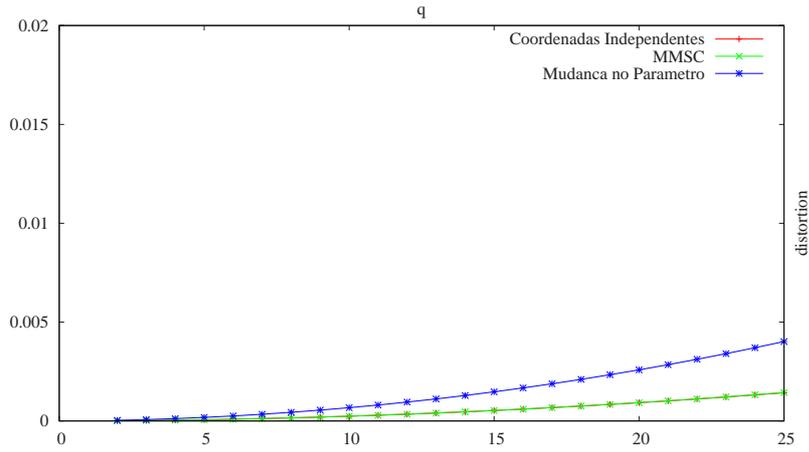
$$E_{\tau}(\mathbf{p}) = |\hat{\tau}(\mathbf{p}) - \tau(\mathbf{p})| \quad , \quad (6-3)$$

onde  $\kappa(\mathbf{p})$  e  $\tau(\mathbf{p})$  são curvatura e torção reais e  $\hat{\kappa}(\mathbf{p})$  e  $\hat{\tau}(\mathbf{p})$  são curvatura e torção estimadas.

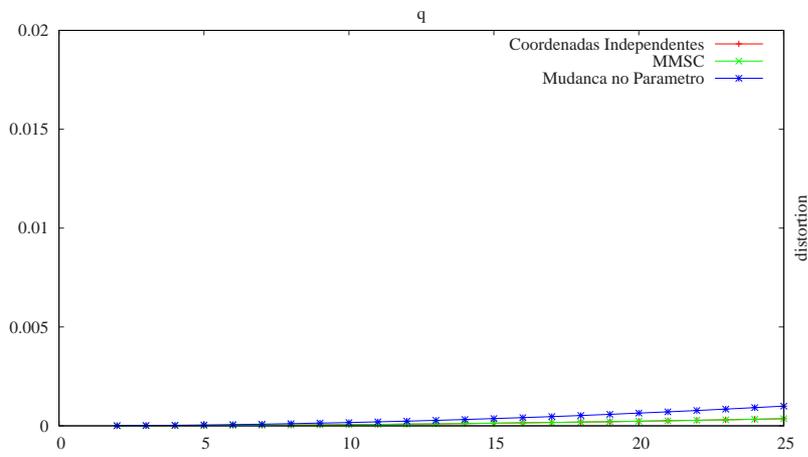
### 6.2.1

#### Curvas sem Ruído

Como em curvas, no plano iniciaremos discutindo a influência de  $q$  na estimativa da curvatura e da torção. Observe os gráficos dados em 6.21 e 6.22, onde o eixo das abscissas representa o valor de  $q$  e o eixo das ordenadas a distorção calculada utilizando a fórmula dada em (6-2), para a curvatura, ou em (6-3), para a torção. A menos de menção contrária, teremos os gráficos com essa disposição dos eixos.

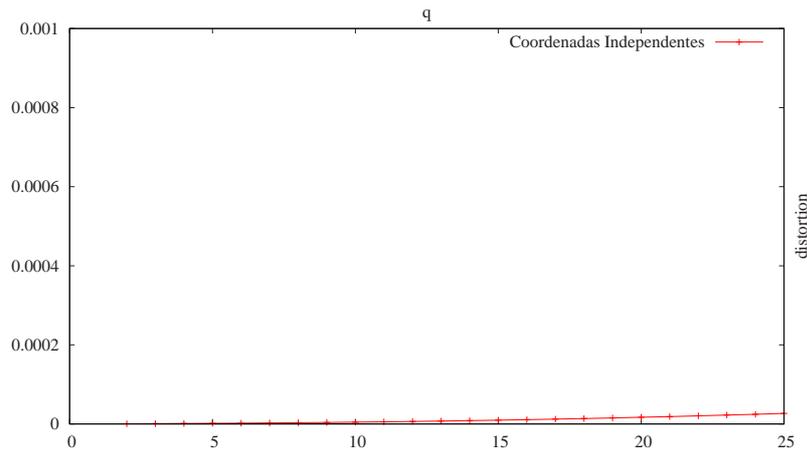


6.21(a): Hélice cilíndrica com 500 pontos

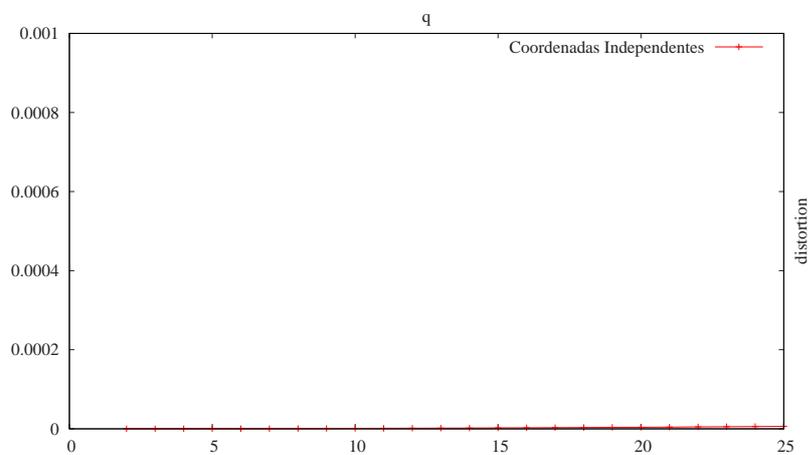


6.21(b): Hélice cilíndrica com 1000 pontos

Figura 6.21: Curvatura da hélice cilíndrica no intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$  com diferentes valores de  $q$ .



6.22(a): Hélice cilíndrica com 500 pontos

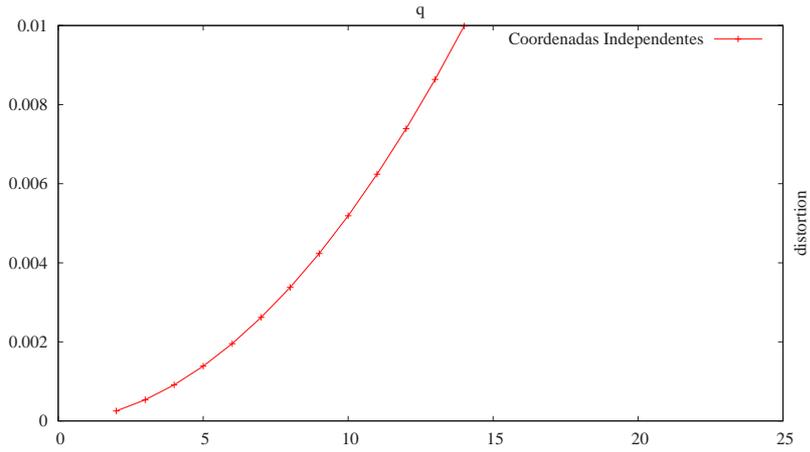


6.22(b): Hélice cilíndrica com 1000 pontos

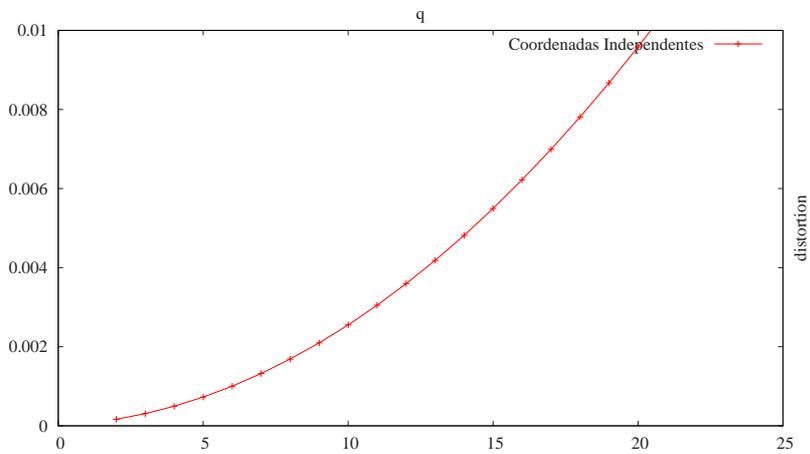
Figura 6.22: Gráfico da hélice cilíndrica com diferentes valores de  $q$  para a estimativa da torção

Podemos perceber que quanto maior o valor de  $q$  pior ficam as estimativas da curvatura e da torção. Isso vem novamente do fato de estarmos usando pontos mais distantes do ponto base. Podemos observar também que, como esperado, quanto maior é a amostragem melhor ficam os resultados.

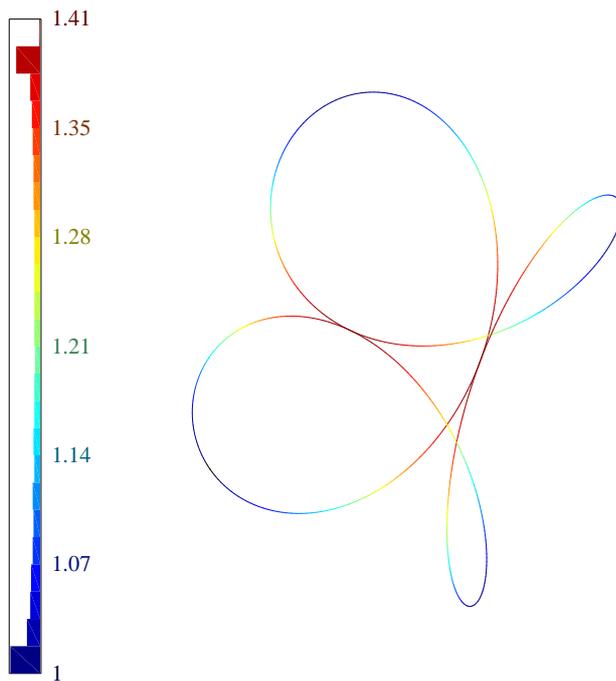
Outra variável importante é o peso dado para cada ponto. Note pelos gráficos 6.23 que ao colocarmos um peso valorizando os pontos mais próximos obtemos um resultado melhor. No entanto, colocar um peso muito grande equivale em diminuir o valor de  $q$ . Note que nesse caso, utilizamos somente o método das Coordenadas Independentes.



6.23(a): Clélia com 500 pontos e sem peso



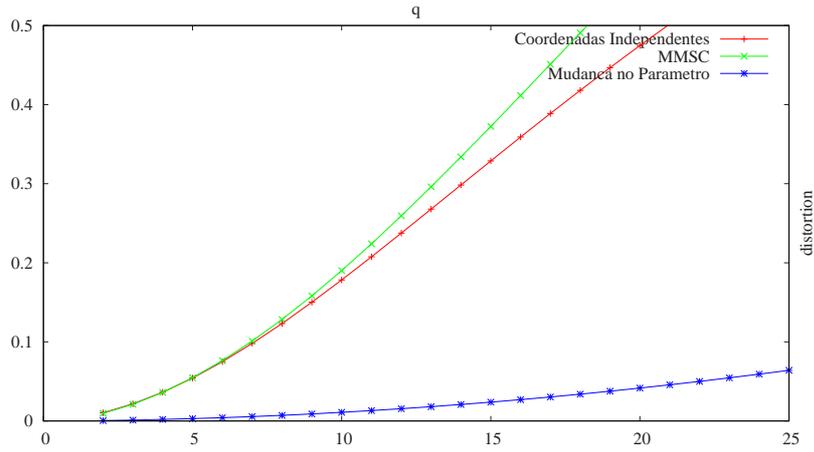
6.23(b): Clélia com 500 pontos e com peso igual a 2



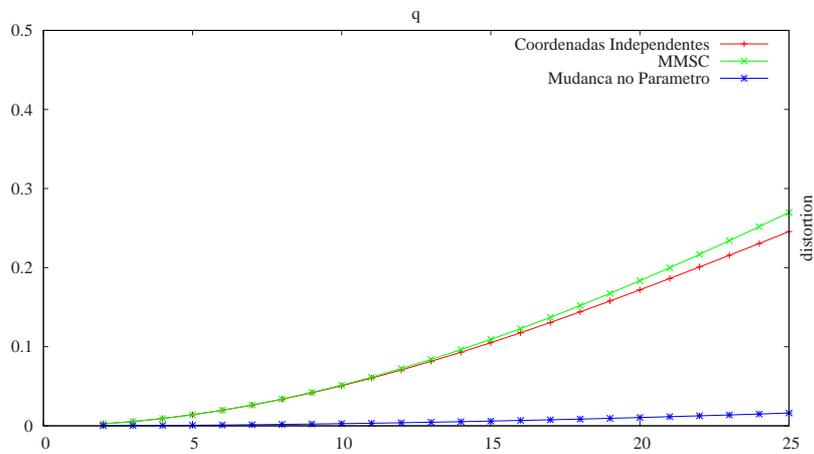
6.23(c): Clélia com 500 pontos

Figura 6.23: Gráfico da Clélia para verificarmos a influência do peso na estimativa da curvatura

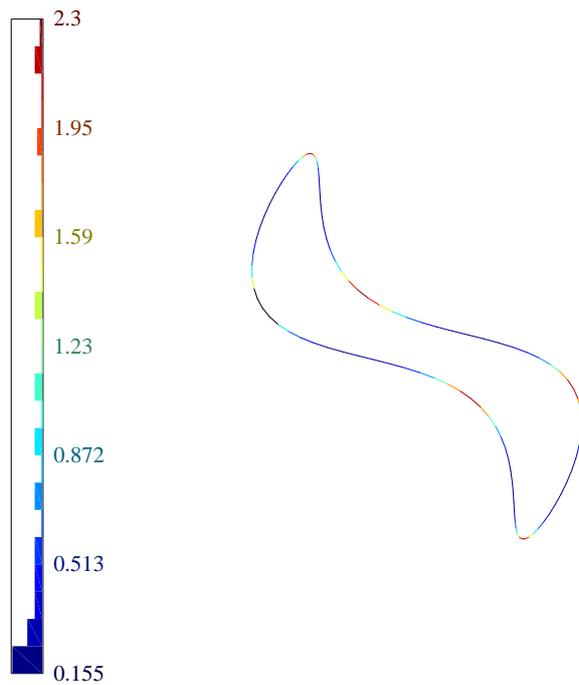
Vamos analisar agora o que acontece com os métodos propostos nesse trabalho para pontos com características específicas. Primeiramente analisaremos pontos de alta curvatura. Podemos observar nos gráficos dados em 6.24 que o MMSC com mudança de parâmetro apresentou resultados melhores que os outros métodos propostos. Contudo ao observarmos os gráficos de 6.25 percebemos que os métodos apresentados por nós obtiveram resultados bem semelhante.



6.24(a): Onda senoidal cilíndrica com 51 pontos

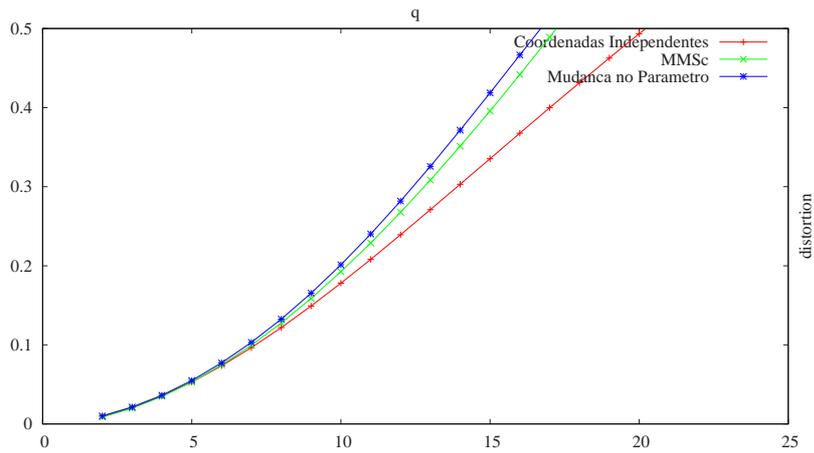


6.24(b): Onda senoidal cilíndrica com 101 pontos

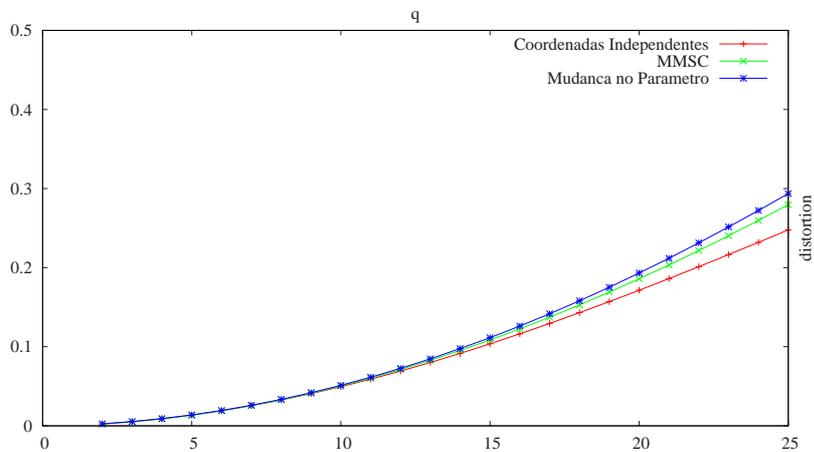


6.24(c): Onda senoidal cilíndrica com 100 pontos

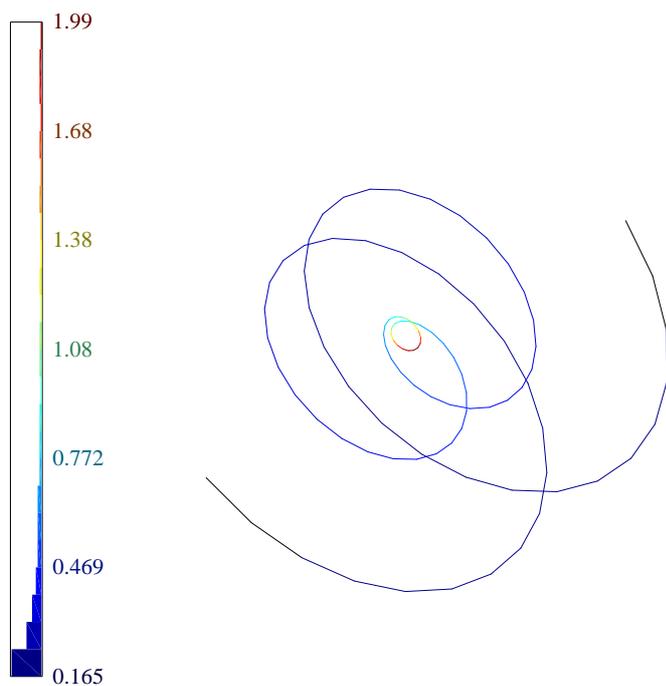
Figura 6.24: Gráfico de erros para altas curvatura referentes à onda senoidal cilíndrica no intervalo  $[-\pi/10, \pi/10]$ . Os dados foram calculados em  $t = 0$ .



6.25(a): Espiral Cônica de Pappus com 51 pontos



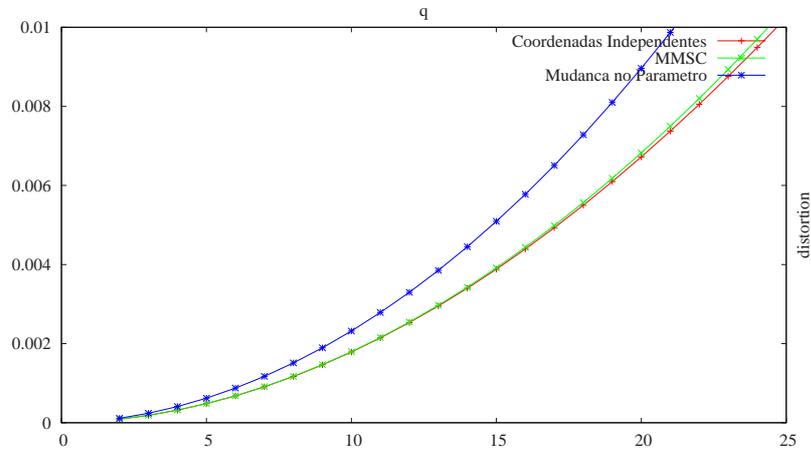
6.25(b): Espiral Cônica de Pappus com 101 pontos



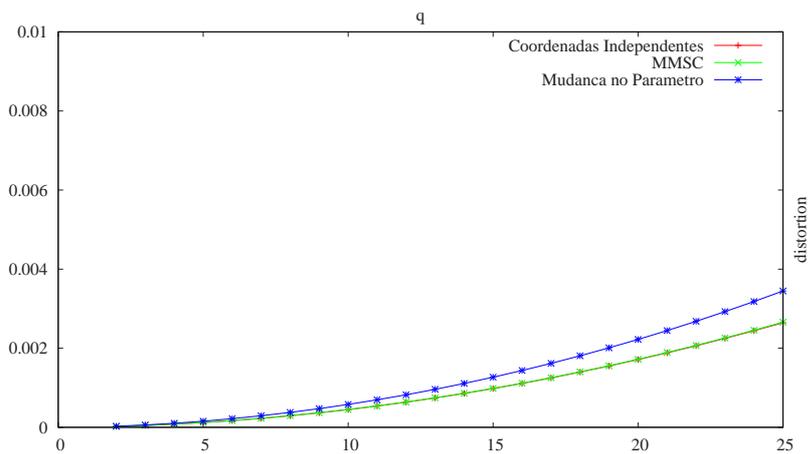
6.25(c): Espiral Cônica de Pappus com 100 pontos

Figura 6.25: Gráfico de erros para altas curvatura referentes à Espiral Cônica de Pappus no intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . os dados foram calculados em  $t = 0$ .

Analisaremos agora pontos de curvatura baixa. Observe os gráficos dado em 6.26. Podemos perceber que os nossos métodos apresentaram resultados bem satisfatórios também para baixas curvaturas.



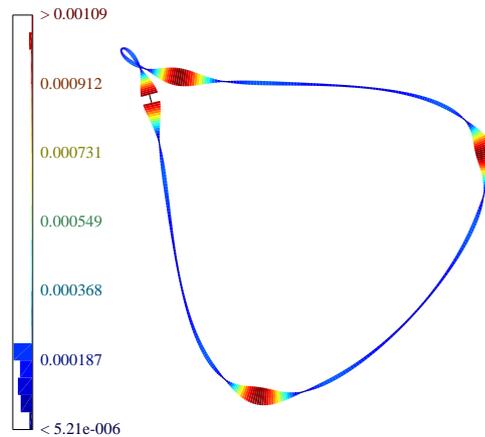
6.26(a): Curva de Crepe com 51 pontos



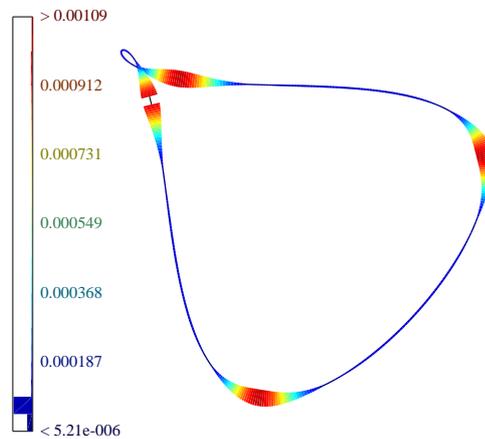
6.26(b): Curva de Crepe com 101 pontos

Figura 6.26: Gráfico de erros para baixa curvatura referentes à Curva de Crepe no intervalo  $[\pi/4 - \pi/10, \pi/4 + \pi/10]$ . Os dados foram calculados em  $t = \pi/4$ .

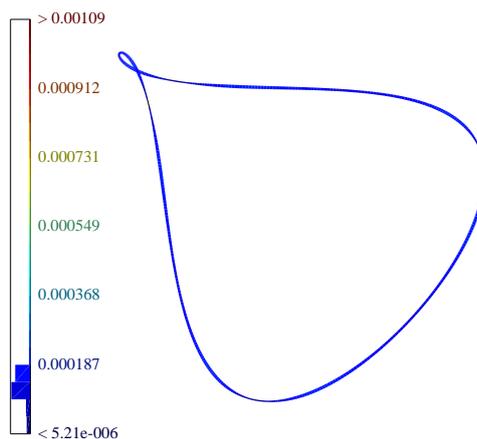
É instrutivo apreciarmos na figura 6.27 o comportamento do erro de estimativa da curvatura para a curva de Crepe.



6.27(a): Método das Coordenadas Independentes



6.27(b): MMSC



6.27(c): MMSC com mudança de parâmetro

Figura 6.27: Grandes erros são representados por linhas grossas e a escala é a mesma para as figuras. Essas figuras representam a Curva de Crepe.

### 6.2.2 Curvas com Ruído

Veremos inicialmente a influência do  $q$  na estimativa da curvatura. Observe os gráficos dados em 6.28 onde o eixo das abscissas representam a variação do  $q$  e o eixo das ordenadas a distorção calculada utilizando a fórmula dada em (6-2), para a curvatura, ou a fórmula dada em (6-3), para a torção. Daqui em diante a menos de menção contrária, teremos os gráficos com essa disposição dos eixos.

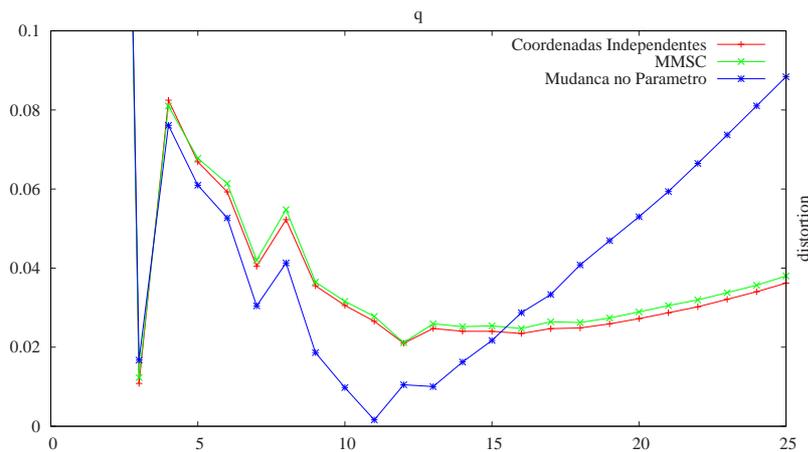


Figura 6.28: Gráfico de referente a Clélia com 500 pontos e  $\sigma = 0.1$  para diferente valores de  $q$  na estimativa da curvatura.

Nele podemos perceber que aumentando o valor de  $q$  melhor ficam as estimativas da curvatura. Contudo a tendência é que ocorra algo semelhante ao gráfico dado em 6.28(b), ou seja, teríamos para todos os métodos um ponto ótimo. Isso porque ao utilizarmos um valor de  $q$  muito grande saímos da vizinhança do ponto onde queremos estimar a curvatura. Não conseguimos verificar no gráfico 6.29 um comportamento semelhante para a torção.

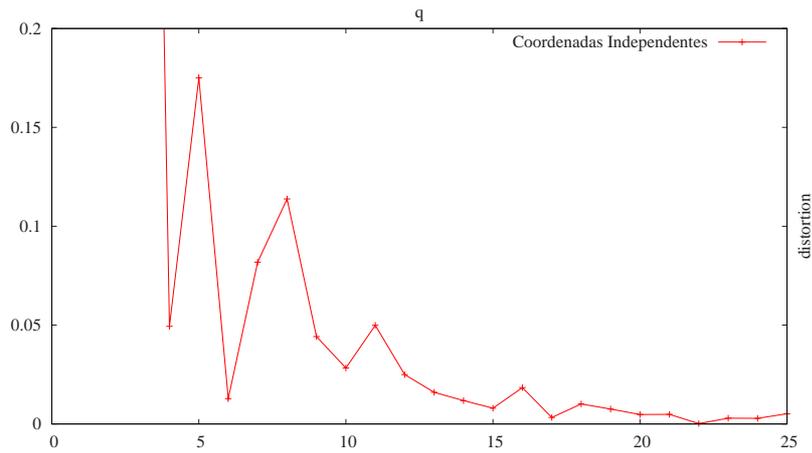
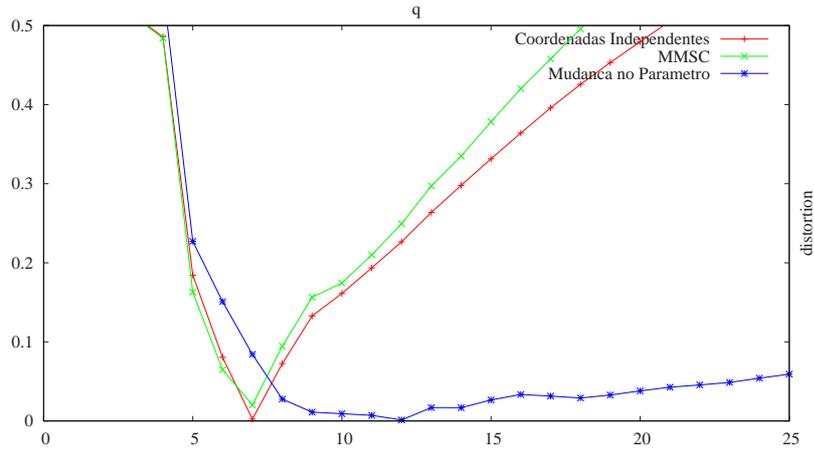
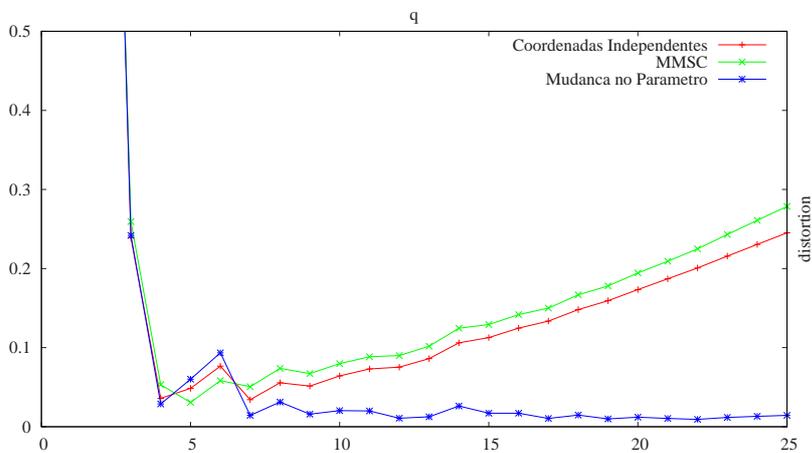


Figura 6.29: Gráfico de referente a Clélia com 500 pontos e  $\sigma = 0.1$  para diferente valores de  $q$  na estimativa da torção

Analisaremos agora a influência do ruído em alguns pontos com características específicas, por exemplo pontos de alta curvatura e baixa curvatura. Iniciaremos nossa análise com pontos de alta curvatura. Observamos no gráfico 6.30 que também existe um tamanho de janela ótimo. E que o MMSC com mudança de parâmetro mostrou-se mais eficiente que os outros.



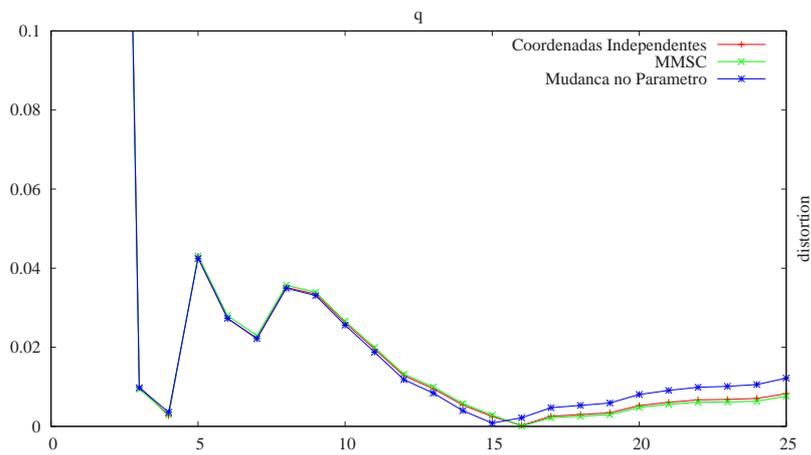
6.30(a): Onda senoidal cilíndrica com 51 pontos no intervalo  $[-\pi/10, \pi/10]$  e  $\sigma = 0.1$



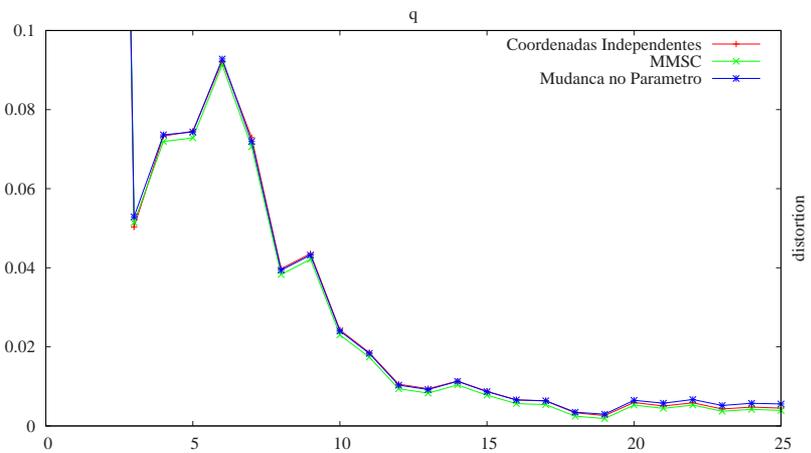
6.30(b): Onda senoidal cilíndrica com 101 pontos no intervalo  $[-\pi/10, \pi/10]$  e  $\sigma = 0.1$

Figura 6.30: Gráfico de erros para altas curvatura referentes a onda senoidal cilíndrica no intervalo  $[-\pi/10, \pi/10]$ . Os dados foram calculados em  $t = 0$  e com  $\sigma = 0.1$ .

Passaremos agora à análise de pontos com baixa curvatura. Observe o gráfico 6.31, podemos perceber que a existência de um tamanho de janela ótimo não é tão evidente.



6.31(a): Curva de Crepe com 51 pontos



6.31(b): Curva de Crepe com 101 pontos

Figura 6.31: Gráfico de erros para baixa curvatura referentes a curva de Crepe no intervalo  $[\pi/4 - \pi/10, \pi/4 + \pi/10]$ . Os dados foram calculados em  $t = \pi/4$  e com  $\sigma = 0.1$