

4

Desenvolvimento Teórico

Nosso objetivo nesta dissertação é a estimativa da torção, sendo que esta para curvas no espaço, e principalmente da curvatura. Neste capítulo descreveremos a parte teórica necessária para o entendimento dos métodos.

Considere $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\}$ uma amostragem de uma curva em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , ou seja, uma sequência finita de m pontos da curva. Admitiremos algum ruído na amostragem, ou seja, $\mathbf{p}_i = \mathbf{c}_i + \eta_i$, onde \mathbf{c}_i é um ponto da curva e η_i é uma variável aleatória modelando o ruído em \mathbf{c}_i .

Para estimar a curvatura em \mathbf{p}_j , $1 \leq j \leq m$, restringiremos nossos cálculos a uma janela de $2q + 1$ pontos centrados em \mathbf{p}_j , ou seja, usaremos apenas os pontos $\mathbf{p}_{j-q}, \dots, \mathbf{p}_{j+q}$ da amostragem \mathbf{P} .

4.1

Curvas no Plano

Assumimos, para facilitar a notação, que $\mathbf{p}_0 = (0, 0)$. Nosso método é baseado em aproximações das amostras por curvas paramétricas. No caso de curvas planas, faremos esta aproximação através de curvas paramétricas de segundo grau. Dessa forma procuramos encontrar cônicas parametrizadas da forma

$$\begin{cases} x(s) = x'_0 s + \frac{1}{2} x''_0 s^2 \\ y(s) = y'_0 s + \frac{1}{2} y''_0 s^2 \end{cases},$$

onde s é um parâmetro. Note que a expansão de Taylor foi truncada no termo de segundo grau, pois como estamos interessados na curvatura necessitamos somente da primeira e segunda derivada das funções coordenadas.

Podemos assumir também as seguintes restrições

$$\begin{cases} x_0'^2 + y_0'^2 & = 1 \\ x_0'x_0'' + y_0'y_0'' & = 0 \end{cases} \quad (4-1)$$

e nesse caso o parâmetro s representa geometricamente o comprimento da projeção da curva na direção tangente no ponto $\mathbf{p}_0 = (0, 0)$. Além disso tais cônicas representam parábolas parametrizadas.

Estimativa do Parâmetro

Ao trabalhar com curvas paramétricas necessitamos estimar o parâmetro s_i associado ao ponto \mathbf{p}_i . Uma primeira aproximação para este parâmetro é o comprimento de arco a partir do ponto \mathbf{p}_j , que pode ser estimado como segue: defina Δl_k como o comprimento do vetor $\mathbf{p}_k \mathbf{p}_{k+1}$ com k variando de 1 até $m - 1$. O comprimento de arco estimado de \mathbf{p}_j até \mathbf{p}_i é definido por

$$\begin{cases} l_i = \sum_{k=j}^{i-1} \Delta l_k, & \text{se } i > j \\ l_i = -\sum_{k=i}^{j-1} \Delta l_k, & \text{se } i < j \end{cases} \quad (4-2)$$

Estimativa de Mínimos Quadrados

Procuramos parábolas parametrizadas que melhor se aproximam dos dados utilizando mínimos quadrados ponderado (MQP) ([15]). Em outras palavras, estamos procurando x'_0 , x''_0 , y'_0 e y''_0 que minimizem

$$f(x'_0, x''_0, y'_0, y''_0) = \sum_{i=-q}^q w_i \left(x_i - \left(x'_0 s_i + \frac{1}{2} x''_0 s_i^2 \right) \right)^2 + w_i \left(y_i - \left(y'_0 s_i + \frac{1}{2} y''_0 s_i^2 \right) \right)^2, \quad (4-3)$$

onde w_i são os pesos dos pontos \mathbf{p}_i . Tais pesos são escolhidos positivos, relativamente grandes para $|s_i|$ pequeno e relativamente pequenos para $|s_i|$ grandes. Podemos assim considerar pesos da forma $w_i = \alpha \exp(-\beta s_i) / s_i^k$, como em [27], ou então $w_i = 1$.

A seguir descreveremos duas formas de encontrar soluções aproximadas para o problema de minimizar (4-3). A primeira é mais rápida computacionalmente. A segunda é mais lenta e só funciona quando $w_i = 1$.

4.1.1

Minimização Separada das Parcelas

Nesse primeiro método desacoplamos a função f dada em (4-3) minimizando separadamente as funções

$$E_x(x'_0, x''_0) = \sum_{i=-q}^q w_i \left(x_i - \left(x'_0 s_i + \frac{1}{2} x''_0 s_i^2 \right) \right)^2 \quad (4-4)$$

e

$$E_y(y'_0, y''_0) = \sum_{i=-q}^q w_i \left(y_i - (y'_0 s_i + \frac{1}{2} y''_0 s_i^2) \right)^2 \quad . \quad (4-5)$$

Para os valores de s_i podemos usar as estimativas l_i , dada em (4-2), para o parâmetro s_i . Quando $q > 1$, o MQP acima tem a seguinte solução:

$$\begin{cases} x'_0 = \frac{ce - bf}{ac - b^2} & x''_0 = \frac{af - be}{ac - b^2} \\ y'_0 = \frac{cg - bh}{ac - b^2} & y''_0 = \frac{ah - bg}{ac - b^2} \end{cases} \quad ,$$

onde

$$\begin{cases} a = \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 \\ b = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^3 \\ c = \frac{1}{4} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^4 \\ e = \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i x_i \\ f = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 x_i \\ g = \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i y_i \\ h = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 y_i \end{cases} \quad .$$

Com estes resultados, nosso estimador de curvatura é dado por

$$\hat{\kappa}(\mathbf{p}_j) = \frac{eh - fg}{ac - b^2} \quad .$$

Variação na Estimativa das Derivadas

Uma variação do método que também consideramos é estimar x'_0 e x''_0 a partir da fórmula dada em (4-4) e a partir delas obter uma estimativa para y'_0 e y''_0 usando (4-1).

Outra possibilidade é estimar y'_0 e y''_0 usando (4-5) e a partir delas obtermos x'_0 e x''_0 usando (4-1).

Para escolher entre as possibilidades citadas, optamos por fazer primeiro a estimativa básica dada em (4-4) e (4-5) e usar a primeira opção se $|x'_0| < |y'_0|$ e a segunda opção se $|x'_0| > |y'_0|$.

Tal variação foi feita para limitarmos as derivadas das funções coordenadas, evitando trabalhar com números muito grandes e para que elas não explodissem.

**4.1.2
Análise Teórica do Método**

Como assumimos que \mathbf{p}_0 é a origem da curva, ou seja, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_0$, temos

$$\begin{cases} x(s) = x(0) + x'(0) s + \frac{1}{2} x''(0) s^2 + O(s^3) \\ y(s) = y(0) + y'(0) s + \frac{1}{2} y''(0) s^2 + O(s^3) \end{cases}, \tag{4-6}$$

com $\frac{O(s^3)}{s^2} \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow 0$. Como $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$ está associado ao valor do comprimento de arco s_i , podemos escrever

$$\begin{cases} x_i = x(s_i) = x'_0 s_i + \frac{1}{2} x''_0 s_i^2 + O(s^3) \\ y_i = y(s_i) = y'_0 s_i + \frac{1}{2} y''_0 s_i^2 + O(s^3) \end{cases}. \tag{4-7}$$

Caso haja ruído, as equações (4-7) serão escritas da seguinte maneira

$$\begin{cases} x(s_i) = x_i = x'_0 s_i + \frac{1}{2} x''_0 s_i^2 + O(s^3) + \eta_{x,i} \\ y(s_i) = y_i = y'_0 s_i + \frac{1}{2} y''_0 s_i^2 + O(s^3) + \eta_{y,i} \end{cases}, \tag{4-8}$$

onde $\eta_i = (\eta_{x,i}, \eta_{y,i})$ é o ruído correspondente ao ponto \mathbf{p}_i . Assumiremos que as variáveis aleatórias η_i são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) com média zero e variância σ^2 (Ver ilustração na figura 4.1).

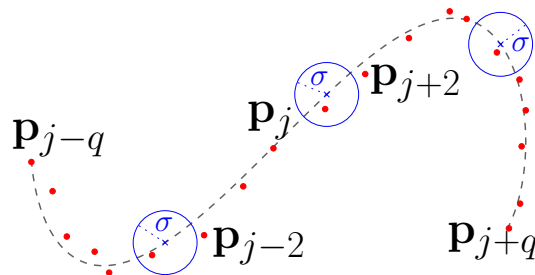


Figura 4.1: Amostragem da curva com ruído

Análise da convergência: curvas sem ruído

Denotemos por δ a maior valor do parâmetro no intervalo de amostragem, ou seja, $\delta = \max\{|s_i|\}$, por K_0 e K_1 o valor máximo da curvatura e sua derivada nessa vizinhança de \mathbf{p}_0 : $K_0 = \max\{|\kappa(s)|, |s| \leq \delta\}$ e $K_1 = \max\{|\kappa'(s)|, |s| \leq \delta\}$, onde κ é a curvatura de \mathbf{r} em s . Denote também

$$\phi = \frac{ac + \frac{1}{2}|b| \sum_{i=-q}^q w_i^2 |l_i|^3}{ac - b^2}.$$

Apresentaremos agora alguns resultados com as respectivas demonstrações. Inicialmente precisaremos do seguinte lema:

Lema 4.1 Considerando a estimativa l_i de s_i dada em (4-2) e assumindo que $\delta K_0 < 2\varepsilon$. Então $\text{sinc}(\varepsilon)|s_i| \leq |l_i| \leq |s_i|$, onde $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$

Prova: Para qualquer $i > 0$, temos que $e_i = s_i - l_i = \sum_{k=1}^i \Delta e_k$, onde $\Delta e_k = \Delta s_k - \Delta l_k$, $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$ e $\Delta l_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$. Como a curvatura é limitada por K_0 , a maior diferença entre Δs_k e Δl_k ocorre quando a curva é um arco de círculo de raio $\frac{1}{K_0}$. Nesse caso o ângulo central correspondente é $K_0 \Delta s_k$ e então

$$\Delta l_k \geq \frac{2\text{sen}\left(\frac{K_0 \Delta s_k}{2}\right)}{K_0}$$

daí segue que

$$l_i = \sum_{k=1}^i \Delta l_k \geq \sum_{k=1}^i \frac{2}{K_0 \Delta s_k} \text{sen}\left(\frac{K_0 \Delta s_k}{2}\right) \Delta s_k \geq \text{sinc}(\varepsilon) s_i$$

provando assim o lema. ■

Proposição 4.1 (a) Se $\delta K_0 \leq \varepsilon$ então,

$$|x'_0 - x'(0)| \leq \phi \frac{1 - \text{sinc}(\varepsilon)}{\text{sinc}(\varepsilon)} x'(0) + \phi \frac{\varepsilon}{\text{sinc}(\varepsilon)} .$$

(b) Suponha que $\delta K_0 \leq \varepsilon$ e $\delta K_1 \leq \varepsilon$ então,

$$|x''_0 - x''(0)| \leq \phi \frac{1 - \text{sinc}(\varepsilon)^2}{\text{sinc}(\varepsilon)^2} x''(0) + \phi \frac{\varepsilon}{\text{sinc}(\varepsilon)^2} \left(1 + \frac{x'(0)K_0}{6}\right) .$$

Prova: Sabemos que $\|(x''(s), y''(s))\| = |\kappa| \leq K_0$, para todo $s \in (-\delta, \delta)$

Assim,

$$|x''(s)| \leq |\kappa| \leq K_0 .$$

Multiplicando por δ obtemos,

$$|x''(s)|\delta \leq |\kappa|\delta \leq K_0\delta \leq \varepsilon .$$

Assim pelo Teorema do Valor Médio segue que para qualquer $s \in (-\delta, \delta)$,

$$|x'(s) - x'(0)| \leq \varepsilon .$$

Dessa forma temos para todo i

$$x'(0) - \varepsilon \leq \frac{x_i}{s_i} \leq x'(0) + \varepsilon .$$

Podemos assumir sem perda de generalidade que $x'(0) > 0$. Então,

$$(x'(0) - \varepsilon)s_i \leq x_i \leq (x'(0) + \varepsilon)s_i \quad .$$

Dessa forma temos pelo lema 4.1 que

$$(x'(0) - \varepsilon)l_i \leq x_i \leq (x'(0) + \varepsilon)\frac{l_i}{\text{sinc}(\varepsilon)} \quad .$$

Segue então a seguinte desigualdade

$$x'(0)l_i - \varepsilon l_i \leq x_i \leq \frac{x'(0)l_i}{\text{sinc}(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon l_i}{\text{sinc}(\varepsilon)}$$

então,

$$-\varepsilon l_i \leq x_i - x'(0)l_i \leq x'(0)l_i \left(\frac{1 - \text{sinc}(\varepsilon)}{\text{sinc}(\varepsilon)} \right) + \frac{\varepsilon l_i}{\text{sinc}(\varepsilon)}$$

daí segue que

$$-\varepsilon l_i \leq x_i - x'(0)l_i \leq l_i \left(\frac{x'(0)(1 - \text{sinc}(\varepsilon))}{\text{sinc}(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{\text{sinc}(\varepsilon)} \right) \quad .$$

Considere $d_1(\varepsilon) = \frac{x'(0)(1 - \text{sinc}(\varepsilon))}{\text{sinc}(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{\text{sinc}(\varepsilon)}$. Então podemos escrever

$$|x_i - x'(0)l_i| \leq d_1(\varepsilon)|l_i| \quad .$$

Logo,

$$\begin{aligned} |x'_0 - x'(0)| &= \frac{1}{ac - b^2} \left| c \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i (x_i - x'(0)l_i) + \frac{b}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^2 (x_i - x'(0)l_i) \right| \\ &\leq \frac{1}{ac - b^2} \left(c \sum_{i=-q}^q w_i^2 |l_i| |x_i - x'(0)l_i| + \frac{|b|}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^2 |x_i - x'(0)l_i| \right) \\ &\leq \frac{d_1(\varepsilon)}{ac - b^2} \left(c \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^2 + \frac{|b|}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^3 \right) \\ &\quad ca + \frac{|b|}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^3 \\ &= d_1(\varepsilon) \frac{ca + \frac{|b|}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^3}{ac - b^2} \\ &= d_1(\varepsilon)\phi \quad . \end{aligned}$$

Demonstramos assim a letra (a). Passamos então para a segunda parte da proposição. Utilizando o Teorema do Valor Médio como na letra (a), temos que para qualquer $s \in (-\delta, \delta)$

$$|x''(s) - x''(0)| \leq K_1 \delta \leq \varepsilon \quad .$$

Assim, para todo i

$$(x''(0) - \varepsilon) \frac{s_i^2}{2} \leq x_i - x'(0)s_i \leq \frac{s_i^2}{2}(x''(0) + \varepsilon) \quad .$$

Utilizando novamente o lema 4.1 obtemos

$$(x''(0) - \varepsilon) \frac{(l_i)^2}{2} \leq x_i - x'(0)s_i + x'(0)l_i - x'(0)l_i \leq \frac{(l_i)^2}{2\text{sinc}(\varepsilon)^2}(x''(0) + \varepsilon) \quad .$$

Segue então as seguintes desigualdades

$$\frac{x''(0)(l_i)^2}{2} - \frac{\varepsilon(l_i)^2}{2} \leq x_i - x'(0)l_i \leq \frac{x''(0)(l_i)^2}{2\text{sinc}(\varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon(l_i)^2}{2\text{sinc}(\varepsilon)^2} + x'(0)(s_i - l_i)$$

e

$$-\frac{\varepsilon(l_i)^2}{2} \leq x_i - x'(0)l_i - \frac{x''(0)(l_i)^2}{2} \leq \frac{x''(0)(l_i)^2}{2\text{sinc}(\varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon(l_i)^2}{2\text{sinc}(\varepsilon)^2} - \frac{x''(0)(l_i)^2}{2} + x'(0)s_i(1 - \frac{l_i}{s_i}) \quad .$$

Vamos desenvolver agora o seguinte termo

$$1 - \frac{l_i}{s_i} \leq 1 - \frac{\text{sen}\left(\frac{K_0 s_i}{2}\right)}{\frac{K_0 s_i}{2}} \quad .$$

Como $1 - \frac{\text{sen}(v)}{v} \leq \frac{v^2}{3}$, concluímos que

$$x'(0)s_i(1 - \frac{l_i}{s_i}) \leq \frac{x'(0)s_i K_0^2 s_i^2}{12} \leq \frac{x'(0)K_0 \varepsilon s_i^2}{12} \leq \frac{x'(0)K_0 \varepsilon}{6} \frac{(l_i)^2}{2\text{sinc}(\varepsilon)^2} \quad .$$

Assim temos que

$$x_i - x'(0)l_i - \frac{x''(0)(l_i)^2}{2} \leq \left(x''(0) \frac{1 - \text{sinc}(\varepsilon)^2}{\text{sinc}(\varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon}{\text{sinc}(\varepsilon)^2} + \frac{x'(0)K_0 \varepsilon}{6\text{sinc}(\varepsilon)^2} \right) \frac{(l_i)^2}{2}$$

e denotando $d_2(\varepsilon) = x''(0) \frac{1 - \text{sinc}(\varepsilon)^2}{\text{sinc}(\varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon}{\text{sinc}(\varepsilon)^2} (1 + \frac{x'(0)K_0}{6})$, podemos escrever

$$\left| x_i - x'(0)l_i - \frac{x''(0)(l_i)^2}{2} \right| \leq d_2(\varepsilon) \frac{(l_i)^2}{2} \quad .$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|x''_0 - x''(0)| &= \frac{\left| a \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^2 (x_i - x'(0)l_i) - cx''(0) + b \sum_{i=-q}^q -w_i^2 l_i (x_i - x'(0)l_i) - bx''(0) \right|}{ac - b^2} \\
&\leq \frac{a \left| \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^2 (x_i - x'(0)l_i) - cx''(0) \right| + |b| \left| - \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i (x_i - x'(0)l_i) - bx''(0) \right|}{ac - b^2} \\
&\leq \frac{a \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^2 \left| x_i - x'(0)l_i + \frac{x''(0)l_i^2}{2} \right|}{ac - b^2} \\
&\quad + \frac{|b| \sum_{i=-q}^q w_i^2 |l_i| \left| x_i - x'(0)l_i + \frac{x''(0)l_i^2}{2} \right|}{ac - b^2} \\
&\leq d_2(\varepsilon) \frac{ac + \frac{1}{2}|b| \sum_{i=-q}^q w_i^2 |l_i|^3}{ac - b^2} \\
&= d_2(\varepsilon)\phi \quad \cdot \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Em outras palavras, os produtos δK_0 e δK_1 devem ser pequenos, o que corresponde a termos uma amostragem densa em regiões de alta curvatura. Caso isso não ocorra muitos pontos podem ser considerados distantes para serem usados na estimativa das derivadas.

Análise da Convergência: Curvas com ruído

Antes de iniciarmos, gostaríamos de lembrar que as variáveis η_i são independentes e com variância σ^2 .

Denote

$$\Omega_0 = \frac{c^2 \sum_{i=-q}^q w_i^4 l_i^2 + \frac{b^2}{4} \sum_{i=-q}^q w_i^4 l_i^4}{(ac - b^2)^2}$$

e

$$\Omega_1 = \frac{a^2 \sum_{i=-q}^q w_i^4 l_i^4 + \frac{b^2}{4} \sum_{i=-q}^q w_i^4 l_i^2}{(ac - b^2)^2} \quad \cdot$$

No caso particular onde a amostragem está simetricamente distribuída numa vizinhança de \mathbf{p}_0 e os pesos w_i são iguais, temos $b = 0$, e então

$$\Omega_0 = \frac{c^2 \sum_{i=-q}^q w_i^4 l_i^2}{(ac)^2}$$

e

$$\Omega_1 = \frac{a^2 \sum_{i=-q}^q w_i^4 l_i^4}{(ac)^2} \quad \cdot$$

Podemos observar que se q é grande então $\Omega_0^{-1} = a \approx \sigma^2 q$ e $\Omega_1^{-1} = c \approx \sigma^4 q$.

Proposição 4.2 *Considere a amostragem simetricamente distribuída e:*

(a) *assuma que $\sigma^2 \Omega_0 \leq \gamma$. Então o erro da estimativa de $|x'_0 - x'(0)|$ é limitado pela soma dos erros da proposição 4.1(a) e uma variável aleatória de média zero e variância menor que γ .*

(b) *assuma que $\sigma^2 \Omega_1 \leq \gamma$. Então o erro na estimativa de $|x''_0 - x''(0)|$ é limitado pela soma dos erros da proposição 4.1(b) e uma variável aleatória de média zero e variância menor que γ .*

Prova: Temos que analisar o efeito do ruído no cálculo da proposição 4.1. Se substituirmos x_i por $x_i + \eta_i$ nas fórmulas de x'_0 e x''_0 , as estimativas vão perturbar dos seguintes erros aleatórios respectivamente

$$\begin{cases} e_{x'_0} = \frac{\sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i \eta_i}{a} \\ e_{x''_0} = \frac{2 \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 \eta_i}{a} \end{cases}$$

esses erros tem média zero e variâncias

$$\begin{cases} \text{Var}(e_{x'_0}) = \frac{\sum_{i=-q}^q w_i^4 (l_i)^2}{\sigma^2 \frac{2q+1}{a^2}} \\ \text{Var}(e_{x''_0}) = \frac{\sum_{i=-q}^q w_i^4 (l_i)^4}{4\sigma^2 \frac{2q+1}{a^2}} \end{cases} .$$

■

Em outras palavras, o produto $\sigma^2 \Omega_0$ e $\sigma^2 \Omega_1$ deve ser pequeno, o qual corresponde que o número de pontos $2q + 1$ considerado para a aproximação deve aumentar com o ruído. Caso isso não aconteça, o ruído é muito forte para garantirmos as estimativas de (x'_0, y'_0) e (x''_0, y''_0) .

4.1.3

Minimização Conjunta das Parcelas

Nessa forma de minimização consideraremos o peso igual para todos os pontos, isto é, $w_i = 1$, para todo i . Novamente nosso objetivo é minimizar

(4-3) com as restrições dadas em (4-1). Usaremos as variáveis κ e θ definidas de acordo com a seguinte mudança de variável:

$$\begin{cases} (x_0'', y_0'') = \kappa(-y_0', x_0') \\ (x_0', y_0') = (\cos \theta, \text{sen} \theta) \end{cases} . \quad (4-9)$$

Substituindo essas mudanças na equação (4-3), obtemos

$$f(\kappa, \theta) = \sum_{i=-q}^q \left(x_i - \left(s_i \cos \theta - \frac{1}{2} \kappa s_i^2 \text{sen} \theta \right) \right)^2 + \left(y_i - \left(s_i \text{sen} \theta + \frac{1}{2} \kappa s_i^2 \cos \theta \right) \right)^2 . \quad (4-10)$$

Estimando s_i por l_i segundo a fórmula (4-2), temos que

$$f(\kappa, \theta) = \sum_{i=-q}^q (x_i^2 + y_i^2) + a + c\kappa^2 - 2e \cos \theta - 2f \text{sen} \theta + 2g\kappa \text{sen} \theta - 2h\kappa \cos \theta , \quad (4-11)$$

onde

$$\begin{cases} a = \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^2 \\ c = \frac{1}{4} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^4 \\ e = \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i x_i \\ f = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^2 x_i \\ g = \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i y_i \\ h = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 l_i^2 y_i. \end{cases}$$

Note que inicialmente os valores de l_i são os mesmos dados em (4-2). Dessa forma consideramos o problema de minimizar

$$f(\kappa, \theta) = c\kappa^2 - 2e \cos \theta - 2f \text{sen} \theta + 2g\kappa \text{sen} \theta - 2h\kappa \cos \theta . \quad (4-12)$$

Calculamos então as derivadas parciais da função dada em (4-12) e

igualamos a zero, já que queremos calcular os pontos críticos.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \kappa} = 2\kappa c + 2g \operatorname{sen}\theta - 2h \cos\theta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = 2e \operatorname{sen}\theta - 2f \cos\theta + 2g\kappa \cos\theta + 2h\kappa \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases} . \quad (4-13)$$

Daí vem que

$$\kappa = \frac{1}{c}(h \cos\theta - g \operatorname{sen}\theta) \quad (4-14)$$

e

$$-e \operatorname{sen}\theta + f \cos\theta = g\kappa \cos\theta + h\kappa \operatorname{sen}\theta \quad . \quad (4-15)$$

Substituindo (4-14) em (4-15) teremos

$$\Phi(\theta) = fc \cos\theta - ec \operatorname{sen}\theta - gh(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - (h^2 - g^2) \operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad . \quad (4-16)$$

Sabemos que o mínimo de $f(\kappa, \theta)$ é assumido em algum θ raiz de Φ , porém Φ pode ter duas, três ou quatro raízes.

Considere então o problema de obtermos θ que seja raiz de Φ e minimize $f(\kappa, \theta)$. Iniciemos assim pelo seguinte lema:

Lema 4.2 Considere γ um ângulo tal que $\cos\gamma = \frac{h}{\sqrt{g^2 + h^2}}$ e $\operatorname{sen}\gamma = \frac{g}{\sqrt{g^2 + h^2}}$. Defina M e N respectivamente por

$$M = \frac{c(fh + eg)}{(h^2 + g^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad N = \frac{c(fg - eh)}{(h^2 + g^2)^{3/2}}$$

e considere a mudança de variável dada por $\alpha = \theta + \gamma$. Então,

(a) $f(\kappa, \alpha) = c\kappa^2 - 2\frac{g^2+h^2}{c}(M \operatorname{sen}\alpha - N \cos\alpha) - 2\kappa\sqrt{g^2 + h^2} \cos\alpha$

(b) os pontos críticos de $f(\kappa, \alpha)$ satisfazem

$$M \cos\alpha + N \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

(c) o valor de $f(\kappa, \alpha)$ nos pontos críticos é dado por

$$\bar{\Phi}(\alpha) = \frac{g^2 + h^2}{c}(-\cos^2\alpha - 2M \operatorname{sen}\alpha + 2N \cos\alpha)$$

Prova: Temos que $f(\kappa, \theta)$ é dada por

$$f(\kappa, \theta) = c\kappa^2 - 2e \cos \theta - 2f \operatorname{sen} \theta + 2g\kappa \operatorname{sen} \theta - 2h\kappa \cos \theta \quad .$$

Assim,

$$\begin{aligned} e \cos \theta + f \operatorname{sen} \theta &= (e \cos \gamma - f \operatorname{sen} \gamma) \cos \alpha + (e \operatorname{sen} \gamma + f \cos \gamma) \operatorname{sen} \alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + h^2}} (eh - fg) \cos \alpha + (eg + fh) \operatorname{sen} \alpha \\ &= \frac{g^2 + h^2}{c} (M \operatorname{sen} \alpha - N \cos \alpha) \end{aligned} \quad (4-17)$$

e

$$\begin{aligned} g \operatorname{sen} \theta - h \cos \theta &= (-h \cos \gamma - g \operatorname{sen} \gamma) \cos \alpha + (-h \operatorname{sen} \gamma + g \cos \gamma) \operatorname{sen} \alpha \\ &= -\sqrt{g^2 + h^2} \cos \alpha \quad . \end{aligned} \quad (4-18)$$

Portanto reescrevendo a função $f(\kappa, \theta)$ obtemos,

$$f(\kappa, \alpha) = c\kappa^2 - 2\frac{g^2 + h^2}{c} (M \operatorname{sen} \alpha - N \cos \alpha) - 2\kappa\sqrt{g^2 + h^2} \cos \alpha \quad . (4-19)$$

Dessa forma provamos a letra (a) do lema proposto. Passamos então à letra (b). Derivando (4-19), obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \kappa} = 2\kappa c - 2\sqrt{g^2 + h^2} \cos \alpha & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} = -2\frac{g^2 + h^2}{c} (M \cos \alpha + N \operatorname{sen} \alpha) + 2\kappa\sqrt{g^2 + h^2} \operatorname{sen} \alpha & = 0 \end{cases} \quad . \quad (4-20)$$

Segue então que

$$\kappa = \frac{\sqrt{g^2 + h^2}}{c} (\cos \alpha) \quad . \quad (4-21)$$

Substituindo (4-21) em $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ obtemos

$$M \cos \alpha + N \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad (4-22)$$

concluindo assim a letra (b) do lema.

Passamos então à última parte, ou seja, a letra (c). Esta parte vem da

substituição de (4-21) em (4-19), nos dando assim

$$\bar{\Phi}(\alpha) = \frac{g^2 + h^2}{c} (-\cos^2 \alpha - 2M \operatorname{sen} \alpha + 2N \cos \alpha) \quad . \quad \blacksquare \quad (4-23)$$

Do item (b) do lema 4.2 temos que as soluções da equação (4-22) são obtidas pela intersecção da hipérbole de equação $Mx + Ny = xy$ com a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. As assíntotas da hipérbole são as retas $y = N$ e $x = M$, sendo assim podemos ter 2, 3 ou 4 pontos críticos dependendo do valor de M e N (ver figura 4.2).

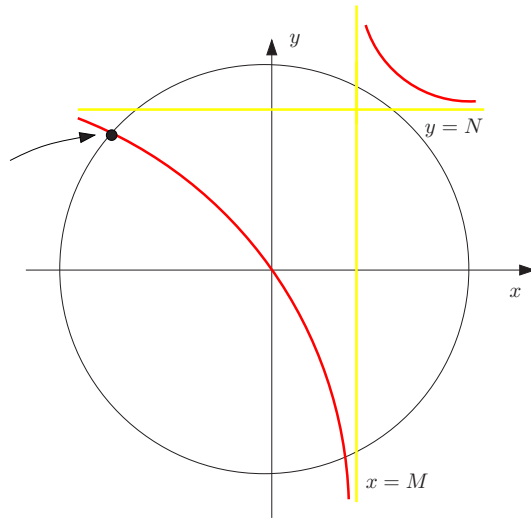


Figura 4.2: Análise do sinal de M e N para encontrar a intersecção da hipérbole de equação $Mx + Ny = xy$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Dessa forma, a solução que minimiza $f(\kappa, \alpha)$ pode ser descrita da seguinte forma:

1. Se $M > 0$ e $N > 0$: Nesse caso temos um único ponto crítico com $\cos \alpha < 0$ ($\operatorname{sen} \alpha > 0$). Esse ponto minimiza a função $f(\kappa, \alpha)$ e portanto temos que $\alpha \in [\pi/2, \pi]$. Consequentemente $\theta \in [\pi/2 - \gamma, \pi - \gamma]$.
2. Se $M > 0$ e $N < 0$: Nesse caso temos um único ponto crítico com $\operatorname{sen} \alpha > 0$ ($\cos \alpha > 0$). Esse ponto minimiza a função $f(\kappa, \alpha)$ e portanto temos que $\alpha \in [0, \pi/2]$. Consequentemente $\theta \in [-\gamma, \pi/2 - \gamma]$.
3. Se $M < 0$ e $N > 0$: Nesse caso temos um único ponto crítico com $\operatorname{sen} \alpha < 0$ ($\cos \alpha < 0$). Esse ponto minimiza a função $f(\kappa, \alpha)$ e portanto temos que $\alpha \in [-\pi, -\pi/2]$. Consequentemente $\theta \in [-\pi - \gamma, -\pi/2 - \gamma]$.

4. Se $M < 0$ e $N < 0$: Nesse caso temos um único ponto crítico com $\cos \alpha > 0$ ($\sin \alpha < 0$). Esse ponto minimiza a função $f(\kappa, \alpha)$ e portanto temos que $\alpha \in [-\pi/2, 0.0]$. Consequentemente $\theta \in [-\pi/2 - \gamma, -\gamma]$.

Para encontrar um valor aproximado da raiz utilizamos o método da bissecção para a função Φ no intervalo indicado acima .

Variação do Método por uma Nova Estimativa do Parâmetro

Considerando a parábola $(x(s), y(s)) = (x'_0 s + \frac{1}{2} x''_0 s^2, y'_0 s + \frac{1}{2} y''_0 s^2)$, observamos que s_i representa a distância da projeção de (x_i, y_i) na direção tangente à parábola no ponto $(0, 0)$.

Para termos uma melhor estimativa de s_i , primeiro fazemos uma estimativa de \mathbf{T} usando a estimativa do comprimento de arco dada em (4-2). Obtida esta estimativa de θ , rodamos novamente a algoritmo com o valor de s_i dado por

$$s_i = x_i \cos(\theta) + y_i \sin(\theta) \quad . \quad (4-24)$$

Dessa forma ao rodarmos o algoritmo novamente deixamos de usar como estimativa do parâmetro a distância entre dois pontos e passamos a usar a estimativa dada em (4-24). Essa mudança nos dá na teoria uma melhor aproximação para o comprimento de arco.

4.2

Curvas no Espaço

Assumimos para facilitar a notação que $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$. Como nosso método é baseado em aproximações das amostras por curvas paramétricas, no caso de curvas no espaço, faremos esta aproximação através de curvas paramétricas de 3º grau, pois tentaremos estimar também a torção. Dessa forma procuramos encontrar cúbicas parametrizadas da forma

$$\begin{cases} x(s) = x'_0 s + \frac{1}{2} x''_0 s^2 + \frac{1}{6} x'''_0 s^3 \\ y(s) = y'_0 s + \frac{1}{2} y''_0 s^2 + \frac{1}{6} y'''_0 s^3 \\ z(s) = z'_0 s + \frac{1}{2} z''_0 s^2 + \frac{1}{6} z'''_0 s^3 \end{cases} ,$$

onde s é um parâmetro. Note que a expansão de Taylor foi truncada no termo de terceiro grau, pois como estamos interessados na curvatura e na torção necessitamos somente da primeira, segunda e terceira derivada das funções coordenadas.

Uma vez obtida a cúbica ganhamos imediatamente a função quadrática

$$\begin{cases} x(s) = x'_0 s + \frac{1}{2} x''_0 s^2 \\ y(s) = y'_0 s + \frac{1}{2} y''_0 s^2 \\ z(s) = z'_0 s + \frac{1}{2} z''_0 s^2 \end{cases} \quad (4-25)$$

que melhor se aproxima dos dados.

Estimativa de Mínimos Quadrados

Procuramos encontrar cúbicas parametrizadas que melhor se aproximam dos dados utilizando mínimos quadrados ponderado. Em outras palavras, estamos procurando $x'_0, x''_0, x'''_0, y'_0, y''_0, y'''_0, z'_0, z''_0$ e z'''_0 que minimizem

$$\begin{aligned} f(x'_0, x''_0, x'''_0, y'_0, y''_0, y'''_0, z'_0, z''_0, z'''_0) &= \sum_{i=-q}^q w_i \left(x_i - \left(x'_0 s_i + \frac{1}{2} x''_0 s_i^2 + \frac{1}{6} x'''_0 s_i^3 \right) \right)^2 \\ &+ w_i \left(y_i - \left(y'_0 s_i + \frac{1}{2} y''_0 s_i^2 + \frac{1}{6} y'''_0 s_i^3 \right) \right)^2 \\ &+ w_i \left(z_i - \left(z'_0 s_i + \frac{1}{2} z''_0 s_i^2 + \frac{1}{6} z'''_0 s_i^3 \right) \right)^2 . \end{aligned} \quad (4-26)$$

Da mesma forma que em curvas no plano, os números reais w_i são os pesos dos pontos \mathbf{p}_i . Tais pesos são escolhidos positivos, relativamente grandes para $|s_i|$ pequeno e relativamente pequeno para $|s_i|$ grandes. Podemos assim considerar pesos da forma $w_i = \alpha \exp(-\beta s_i)/s_i^k$, como em [27], ou então $w_i = 1$.

A seguir descreveremos duas formas de encontrar soluções aproximadas para o problema de minimizar (4-26). A primeira é mais rápida computacionalmente. A segunda é mais lenta e só funciona quando $w_i = 1$.

4.2.1

Minimização Separada das Parcelas

Nesse primeiro método desacoplamos a função f dada em (4-26) minimizando separadamente as funções

$$E_x(x'_0, x''_0, x'''_0) = \sum_{i=-q}^q w_i \left(x_i - x'_0 s_i - \frac{1}{2} x''_0 (s_i)^2 + \frac{1}{6} x'''_0 (s_i)^3 \right)^2 ,$$

$$E_y(y'_0, y''_0, y'''_0) = \sum_{i=-q}^q w_i \left(y_i - y'_0 s_i - \frac{1}{2} y''_0 (s_i)^2 + \frac{1}{6} y'''_0 (s_i)^3 \right)^2$$

e

$$E_z(z'_0, z''_0, z'''_0) = \sum_{i=-q}^q w_i \left(z_i - z'_0 s_i - \frac{1}{2} z''_0 (s_i)^2 + \frac{1}{6} z'''_0 (s_i)^3 \right)^2 .$$

Usaremos novamente as estimativas l_i , dada em (4-2), para o parâmetro s_i . Quando $q > 1$, o MQP acima tem a seguinte solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_0 = \frac{(e_1 a_4 a_6 - e_1 a_5 a_5 - e_2 a_2 a_6 + e_2 a_3 a_5 + e_3 a_2 a_5 - e_3 a_3 a_4)}{a_1 a_4 a_6 - a_1 a_5 a_5 - a_2 a_2 a_6 + 2 a_2 a_3 a_5 - a_3 a_3 a_4} \\ y'_0 = \frac{(f_1 a_4 a_6 - f_1 a_5 a_5 - f_2 a_2 a_6 + f_2 a_3 a_5 + f_3 a_2 a_5 - f_3 a_3 a_4)}{a_1 a_4 a_6 - a_1 a_5 a_5 - a_2 a_2 a_6 + 2 a_2 a_3 a_5 - a_3 a_3 a_4} \\ z'_0 = \frac{(g_1 a_4 a_6 - g_1 a_5 a_5 - g_2 a_2 a_6 + g_2 a_3 a_5 + g_3 a_2 a_5 - g_3 a_3 a_4)}{a_1 a_4 a_6 - a_1 a_5 a_5 - a_2 a_2 a_6 + 2 a_2 a_3 a_5 - a_3 a_3 a_4} \\ x''_0 = \frac{-(e_1 a_2 a_6 - e_1 a_3 a_5 - e_2 a_1 a_6 + e_2 a_3 a_3 + e_3 a_1 a_5 - e_3 a_2 a_3)}{a_1 a_4 a_6 - a_1 a_5 a_5 - a_2 a_2 a_6 + 2 a_2 a_3 a_5 - a_3 a_3 a_4} \\ y''_0 = \frac{-(f_1 a_2 a_6 - f_1 a_3 a_5 - f_2 a_1 a_6 + f_2 a_3 a_3 + f_3 a_1 a_5 - f_3 a_2 a_3)}{a_1 a_4 a_6 - a_1 a_5 a_5 - a_2 a_2 a_6 + 2 a_2 a_3 a_5 - a_3 a_3 a_4} \\ z''_0 = \frac{-(g_1 a_2 a_6 - g_1 a_3 a_5 - g_2 a_1 a_6 + g_2 a_3 a_3 + g_3 a_1 a_5 - g_3 a_2 a_3)}{a_1 a_4 a_6 - a_1 a_5 a_5 - a_2 a_2 a_6 + 2 a_2 a_3 a_5 - a_3 a_3 a_4} \\ x'''_0 = \frac{-(e_1 a_2 a_5 - e_1 a_3 a_4 - e_2 a_1 a_5 + e_2 a_2 a_3 + e_3 a_1 a_4 - e_3 a_2 a_2)}{a_1 a_4 a_6 - a_1 a_5 a_5 - a_2 a_2 a_6 + 2 a_2 a_3 a_5 - a_3 a_3 a_4} \\ y'''_0 = \frac{-(f_1 a_2 a_5 - f_1 a_3 a_4 - f_2 a_1 a_5 + f_2 a_2 a_3 + f_3 a_1 a_4 - f_3 a_2 a_2)}{a_1 a_4 a_6 - a_1 a_5 a_5 - a_2 a_2 a_6 + 2 a_2 a_3 a_5 - a_3 a_3 a_4} \\ z'''_0 = \frac{-(g_1 a_2 a_5 - g_1 a_3 a_4 - g_2 a_1 a_5 + g_2 a_2 a_3 + g_3 a_1 a_4 - g_3 a_2 a_2)}{a_1 a_4 a_6 - a_1 a_5 a_5 - a_2 a_2 a_6 + 2 a_2 a_3 a_5 - a_3 a_3 a_4} \end{array} \right.$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 \\ a_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^3 \\ a_3 = \frac{1}{6} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^4 \\ a_4 = \frac{1}{4} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^4 \\ a_5 = \frac{1}{12} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^5 \\ a_6 = \frac{1}{36} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^6 \\ e_1 = \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i) x_i \\ e_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 x_i \\ e_3 = \frac{1}{6} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^3 x_i \\ f_1 = \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i) y_i \\ f_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 y_i \\ f_3 = \frac{1}{6} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^3 y_i \\ g_1 = \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i) z_i \\ g_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 z_i \\ g_3 = \frac{1}{6} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^3 z_i \end{array} \right. .$$

Com estes resultados, nossos estimadores de curvatura e torção são dados

respectivamente por

$$\hat{\kappa}(\mathbf{p}_j) = \frac{\sqrt{(y'_j z''_j - z'_j y''_j)^2 + (z'_j x''_j - x'_j z''_j)^2 + (x'_j y''_j - y'_j x''_j)^2}}{(x_j'^2 + y_j'^2 + z_j'^2)^{3/2}}$$

e

$$\hat{\tau}(\mathbf{p}_j) = -\frac{(y'_j z''_j - z'_j y''_j)x_j''' + (z'_j x''_j - x'_j z''_j)y_j''' + (x'_j y''_j - y'_j x''_j)z_j'''}{(y'_j z''_j - z'_j y''_j)^2 + (z'_j x''_j - x'_j z''_j)^2 + (x'_j y''_j - y'_j x''_j)^2}.$$

ou seja, basta aplicarmos as nossas estimativas de derivadas nas fórmulas da curvatura e torção apresentadas no capítulo 2.

4.2.2

Minimização Conjunta das Parcelas

Para esta segunda forma não calcularemos a terceira derivada das funções coordenadas, pois as contas são um pouco mais complicadas não dando tempo para serem incluídas nessa dissertação. Portanto estaremos interessados somente em estimar a primeira e a segunda derivada dessas funções. Dessa forma estamos procurando $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \kappa)$ que minimizam a distância da curva à parábola $\left(\mathbf{T}s + \kappa\mathbf{N}\frac{s^2}{2}\right)$.

Em outras palavras estamos procurando $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \kappa)$ que minimizam a seguinte função

$$\begin{aligned} f(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \kappa) &= \sum_{i=-q}^q \left\| \mathbf{p}_i - \left(\mathbf{T}s + \kappa\mathbf{N}\frac{s_i^2}{2} \right) \right\|^2 \\ &= \sum_{i=-q}^q \left(x_i - \left(\mathbf{T}_x s_i + \frac{1}{2}\kappa\mathbf{N}_x s_i^2 \right) \right)^2 + \left(y_i - \left(\mathbf{T}_y s_i + \frac{1}{2}\kappa\mathbf{N}_y s_i^2 \right) \right)^2 \\ &\quad + \left(z_i - \left(\mathbf{T}_z s_i + \frac{1}{2}\kappa\mathbf{N}_z s_i^2 \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (4-27)$$

A função (4-27) representa a função (4-26) escrita de uma forma diferente com as devidas adaptações. Desenvolvendo, obtemos

$$f(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \kappa) = \sum_{i=-q}^q \left\| \mathbf{p}_i \right\|^2 + \sum_{i=-q}^q s_i^2 + \kappa^2 \sum_{i=-q}^q \frac{s_i^4}{4} - 2\mathbf{T} \sum_{i=-q}^q \mathbf{p}_i s_i - 2\kappa\mathbf{N} \sum_{i=-q}^q \mathbf{p}_i \frac{s_i^2}{2} \quad (4-28)$$

onde,

$$\begin{cases} \sum_{i=-q}^q \mathbf{p}_i s_i = (e_1, f_1, g_1) = \mathbf{E} \\ \sum_{i=-q}^q \mathbf{p}_i \frac{s_i^2}{2} = (e_2, f_2, g_2) = \mathbf{G} \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} e_1 = \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i) x_i \\ e_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 x_i \\ f_1 = \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i) y_i \\ f_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 y_i \\ g_1 = \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i) z_i \\ g_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=-q}^q w_i^2 (l_i)^2 z_i \end{cases} .$$

Consideramos então o problema de minimizar a seguinte função

$$f(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \kappa) = \kappa^2 c - 2\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} - 2\kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{G} \quad , \quad (4-29)$$

onde $c = \sum_{i=-q}^q w_i^2 \frac{l_i^4}{4}$, com as seguintes restrições:

$$\begin{cases} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0 \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1 \end{cases} .$$

Para tal cálculo utilizaremos multiplicadores de Lagrange.

Calculamos então as derivadas parciais e igualamos a zero uma vez que queremos os pontos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = 2\kappa c - 2\mathbf{N} \cdot \mathbf{G} = 0 \quad (4-30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} = -2\mathbf{E} - \lambda_1 \mathbf{T} - \lambda_2 \mathbf{N} = 0 \quad (4-31)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{N}} = -2\kappa \mathbf{G} - \lambda_2 \mathbf{T} - \lambda_3 \mathbf{N} = 0 \quad . \quad (4-32)$$

Da equação (4-30) vem que $\kappa c = \mathbf{N} \cdot \mathbf{G}$ e das equações (4-31) e (4-32) vem que (\mathbf{T}, \mathbf{N}) geram o mesmo plano que (\mathbf{E}, \mathbf{G}) , além disso $\mathbf{E} \cdot \mathbf{N} = \kappa \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}$.

Daí vem que

$$c(\mathbf{N} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{G})(\mathbf{T} \cdot \mathbf{G}) \quad . \quad (4-33)$$

Façamos então uma mudança da base canônica para base $[v_1, v_2, v_3]$ de tal forma que

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\mathbf{G}}{\|\mathbf{G}\|} \\ v_2 = \mathbf{E} - (v_1 \cdot \mathbf{E})v_1 \\ v_3 = v_1 \times v_2 \end{cases} .$$

Escrevendo os vetores $\mathbf{G}, \mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{T}$ na base $[v_1, v_2, v_3]$ obtemos os vetores $\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{T}}$ dados por

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{G}} = (\|\mathbf{G}\|, 0, 0) \\ \tilde{\mathbf{E}} = (\mathbf{E} \cdot v_1, \mathbf{E} \cdot v_2, 0) \\ \tilde{\mathbf{T}} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \tilde{\mathbf{N}} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \end{cases} .$$

Assim temos que a curvatura é dada por $\kappa = -\frac{\|\mathbf{G}\|\sin\theta}{c}$ e considerando θ o ângulo que $\tilde{\mathbf{T}}$ faz com v_1 , podemos escrever a equação (4-33) na base $[v_1, v_2, v_3]$ por

$$-\mathbf{G}^2 \cos \theta \sin \theta = -c(\mathbf{E} \cdot v_1)\sin \theta + c(\mathbf{E} \cdot v_2) \cos \theta \quad . \quad (4-34)$$

Para calcularmos a curvatura necessitamos encontrar o valor de θ . Vem da equação (4-34) a seguinte função

$$\Phi(\theta) = -c(\mathbf{E} \cdot v_1)\sin \theta + c(\mathbf{E} \cdot v_2) \cos \theta + \mathbf{G}^2 \cos \theta \sin \theta \quad . \quad (4-35)$$

Com isso basta encontrarmos θ que seja raiz da função dada em (4-35). Da mesma forma que foi feito para curvas no plano necessitamos obter o valor de M e N para sabermos em qual quadrante se encontra o valor de θ que zera a função Φ e que minimiza a função

$$f(\kappa, \theta) = \kappa^2 c - 2(\mathbf{E} \cdot v_1) \cos \theta - 2(\mathbf{E} \cdot v_2) \sin \theta + 2\kappa \|\mathbf{G}\| \sin \theta \quad . \quad (4-36)$$

Esta função é proveniente da função dada em (4-29) escrita na base

$[v_1, v_2, v_3]$. Utilizaremos novamente o método da bissecção para encontrarmos a raiz de Φ .

Varição do Método por uma Nova Estimativa do Parâmetro

A estimativa do parâmetro para curvas no espaço é feita de modo análogo ao de curvas no plano, ou seja, fazemos primeiro uma estimativa de \mathbf{T} usando a estimativa do comprimento de arco dada em (4-2). Obtida esta estimativa de \mathbf{T} , rodamos novamente a algoritmo com o valor de s_i dado por

$$s_i = x_i \mathbf{T}_x + y_i \mathbf{T}_y + z_i \mathbf{T}_z \quad . \quad (4-37)$$

Dessa forma esperamos encontrar uma melhor estimativa para a curvatura.