

### 3 Trabalhos Anteriores

Muitos métodos já foram propostos para estimar a curvatura de curvas planas discretas num ponto  $\mathbf{p}$  sendo muitos deles para curvas digitais, isto é, curvas extraídas de imagens. Alguns destes métodos podem ser adaptados para curvas no espaço. Nesta seção descreveremos alguns dos métodos mais importantes presentes na literatura.

Para facilitar o entendimento, os métodos foram classificados em três grupos: métodos para curvas digitais, métodos que utilizam três pontos e métodos de otimização que utilizam uma janela de  $n$  pontos ( $n \geq 3$ ).

#### 3.1 Método para Curvas Digitais

Os métodos apresentados nessa seção foram desenvolvidos para o cálculo de curvaturas em curvas digitais. No entanto podem ser facilmente adaptados para o caso de curvas discretas. Para maiores detalhes relativos aos métodos apresentados em 3.1.1 ver [27, 19]. Para maiores detalhes relativos ao método apresentado em 3.1.2 ver [12].

##### 3.1.1 Método do Encadeamento

Este método consiste em estimar a curvatura em  $\mathbf{p}_j$  a partir da convolução do ângulo estimado  $\hat{\theta}$  com a derivada do núcleo Gaussiano ( $G_\sigma$ ). Matematicamente temos:

$$\hat{\kappa} = \hat{\theta} * G'_\sigma \quad (3-1)$$

$$\hat{\theta}(j) = \tan^{-1} \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \right) \quad (3-2)$$

onde,

$$G_\sigma(i) = e^{-\sigma i^2} \quad (3-3)$$

e

$$G'_\sigma(i) = -2\sigma i e^{-\sigma i^2} . \quad (3-4)$$

Note que os autores consideram que a curva está aproximada pela função  $(x * G_\sigma, y * G_\sigma)$ , o que é um modelo mais particular às curvas digitais.

Uma variação desse método pode ser obtida através de uma reamostragem dos pontos. Para esta reamostragem utilizamos interpolação linear. Matematicamente temos

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\theta} * G'_\sigma}{1.107} \quad (3-5)$$

$$\hat{\theta}(j) = \tan^{-1} \left( \frac{y_{j+1}^r - y_j^r}{x_{j+1}^r - x_j^r} \right) \quad (3-6)$$

onde  $(x^r, y^r)$  são as reamostragens obtidas a partir da amostra inicial e o valor 1.107 é a constante utilizada para corrigir o viés que aparece quando se faz a reamostragem.

Outra variante também usando suavização Gaussiana consiste em estimar a primeira e segunda derivada de um ponto  $\mathbf{p}$  a partir da convolução das coordenadas da curva com a derivada do núcleo Gaussiano (dado em (3-4)), como podemos ver abaixo

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{x}'\hat{y}'' - \hat{y}'\hat{x}''}{\sqrt{((\hat{x}')^2 + (\hat{y}')^2)^3}} ,$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{x}'_i &= x_i * G'_\sigma(i) , \\ \hat{x}''_i &= x_i * G''_\sigma(i) , \\ \hat{y}'_i &= y_i * G'_\sigma(i) , \\ \hat{y}''_i &= y_i * G''_\sigma(i) . \end{aligned}$$

Note que, eles consideram que a curva está aproximada pela função  $(x * G_\sigma, y * G_\sigma)$ , o que é um modelo mais particular às curvas digitais.

### 3.1.2

#### Método da FFT

Considere uma curva paramétrica discreta  $\mathbf{r}(n) = (x(n), y(n))$  com o parâmetro  $n = 0, \dots, N-1$ , onde  $N$  é o número de pontos ao longo do contorno. Podemos representar esta curva como um sinal complexo  $\mathbf{u}(n) = x(n) + iy(n)$ , onde  $i^2 = -1$ .

A transformada de Fourier discreta  $\mathbf{U}(s)$  de  $\mathbf{u}(n)$  é definida por

$$\mathbf{U}(s) = F(\mathbf{u}(n)) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}(n) e^{-2\pi i \frac{sn}{N}} \quad . \quad (3-7)$$

e sua inversa é dada por

$$\mathbf{u}(n) = F^{-1}(\mathbf{U}(s)) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \mathbf{U}(s) e^{2\pi i \frac{sn}{N}} \quad . \quad (3-8)$$

Uma propriedade básica da transformada de Fourier discreta é que a derivada de um sinal corresponde à multiplicação por  $is$  da transformada. Mais precisamente temos que

$$\dot{\mathbf{u}}(n) = F^{-1} \left( \frac{2\pi is}{N} \mathbf{U}(s) \right) \quad (3-9)$$

e

$$\ddot{\mathbf{u}}(n) = F^{-1} \left( \frac{-4\pi^2 s^2}{N^2} \mathbf{U}(s) \right) \quad , \quad (3-10)$$

onde  $n = 0, \dots, N-1$  e  $s = 0, \dots, N-1$ . Para maiores detalhes sobre transformada de Fourier discreta veja [20].

O cálculo estimado da curvatura é feito através da estimativa da derivada do sinal  $\mathbf{u}(n)$ , a qual é feita baseada na propriedade descrita acima. Desta forma temos que a curvatura em  $n$  é dada por

$$\kappa(n) = \frac{-Im(\dot{\mathbf{u}}(n) \cdot \overline{\ddot{\mathbf{u}}(n)})}{\|\dot{\mathbf{u}}(n)\|^3} \quad , \quad (3-11)$$

onde  $\overline{\ddot{\mathbf{u}}}$  representa o conjugado no número complexo  $\ddot{\mathbf{u}}$ .

## 3.2 Métodos que Utilizam Três Pontos

Os métodos presentes nessa seção calculam a curvatura utilizando três pontos. Para detalhes dos métodos da seção 3.2.1 ver [9, 14]. Para detalhes relativos ao método apresentado na seção 3.2.2, ver [10]. Para a estimativa da derivada da seção 3.2.3, ver [5].

### 3.2.1 Método da Orientação da Tangente

Este método para o cálculo da curvatura é baseado na orientação da tangente que consiste em calcular o ângulo local para uma vizinhança dada  $q$ . Ou seja, dados os pontos  $(\mathbf{p}_{j-q}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{j+q})$  a curvatura estimada em  $\mathbf{p}_j$  é dada por

$$\hat{k}(\mathbf{p}_j) = \frac{\angle(\mathbf{p}_{j-q}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j\mathbf{p}_{j+q})}{\|\mathbf{p}_{j-q}\mathbf{p}_j\| + \|\mathbf{p}_j\mathbf{p}_{j+q}\|}, \quad (3-12)$$

onde  $\angle(\mathbf{p}_{j-q}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j\mathbf{p}_{j+q})$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{p}_j\mathbf{p}_{j-q}$  e  $\mathbf{p}_j\mathbf{p}_{j+q}$ . O processo para o cálculo da curvatura em um ponto  $\mathbf{p}$  centrado em  $2q + 1$  pontos pode ser observado na figura 3.1.

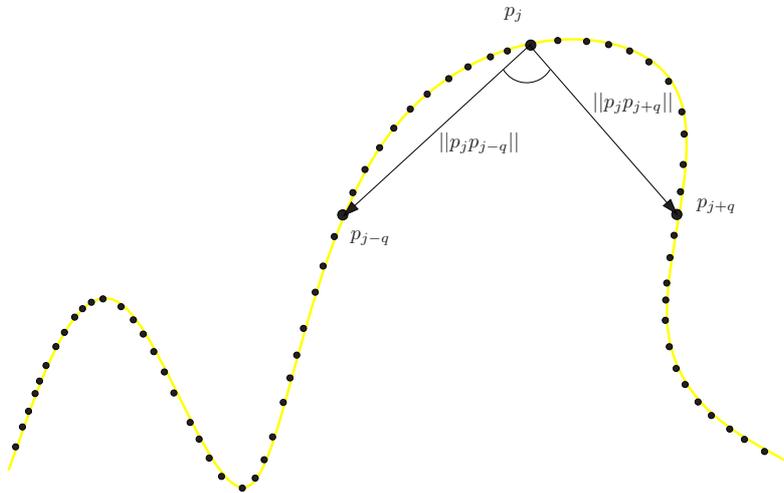


Figura 3.1: Cálculo da curvatura baseado na orientação da tangente usando o ângulo interno.

Uma variação desse método, proposta em [14], estima a curvatura utilizando o ângulo externo local para uma vizinhança dada  $q$ . Ou seja, dados os

pontos  $(\mathbf{p}_{j-q}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{j+q})$  a curvatura estimada em  $\mathbf{p}_j$  é dada por

$$\hat{k}(\mathbf{p}_j) = \frac{\phi_j}{2s_j \cos\left(\frac{\phi_j}{2.1}\right)}, \quad (3-13)$$

onde  $\phi_j$  é o ângulo externo  $(\pi - \angle(\mathbf{p}_{j-q}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j\mathbf{p}_{j+q}))$  e  $s_j = \frac{\|\mathbf{p}_{j-q}\mathbf{p}_j\| + \|\mathbf{p}_j\mathbf{p}_{j+q}\|}{2}$ .

### 3.2.2 Método do Circuncírculo

Nesse método a curvatura é estimada a partir de uma aproximação do círculo osculador num determinado ponto  $\mathbf{p}_0$  da curva discreta utilizando o circuncírculo do triângulo  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  como podemos ver na figura 3.2.

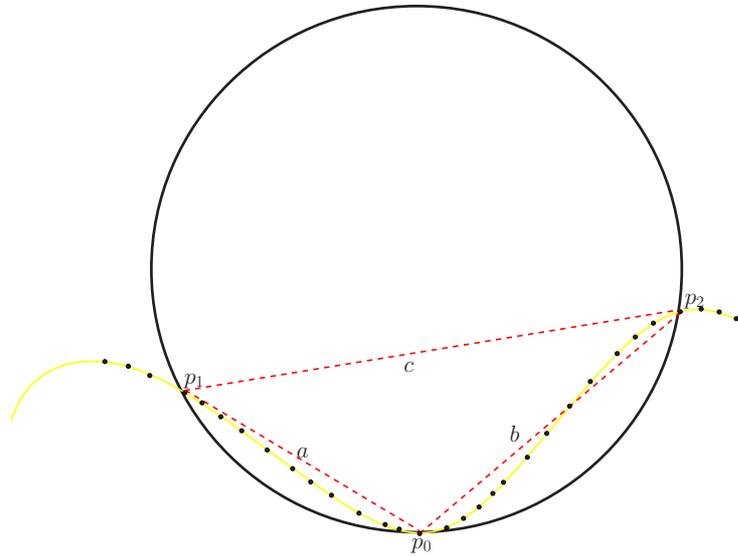


Figura 3.2: Visualização do circuncírculo que passa por  $(p_0, p_1, p_2)$  pertencentes a uma curva discreta.

Para tal estimação considere  $a$  a norma de  $\mathbf{p}_0$  a  $\mathbf{p}_1$ ,  $b$  a norma de  $\mathbf{p}_0$  a  $\mathbf{p}_2$ ,  $c$  a norma de  $\mathbf{p}_1$  a  $\mathbf{p}_2$  e  $A$  a área do triângulo  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  dada por

$$A = \frac{\sqrt{(b+c)^2 - a^2} \cdot \sqrt{a^2 - (b-c)^2}}{4}.$$

Assim temos que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  é dada por

$$R_c = \frac{abc}{4A}.$$

Considerando que a circunferência circunscrita a  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  é uma boa aproximação do círculo osculador à curva em  $\mathbf{p}_0$ , temos pela Definição 2.8 que

$$\hat{\kappa}(p_0) = \frac{4A}{abc} \quad .$$

### 3.2.3

#### Método da Estimativa da Derivada

Neste método utiliza-se três pontos  $(\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_O, \mathbf{p}_B)$  pertencentes à curva e calcula-se aproximadamente o vetor velocidade e sua derivada em um ponto centrado  $\mathbf{p}_O$ .

O vetor velocidade da curva em  $\mathbf{p}_O$  e sua derivada podem ser aproximados por

$$r' = \frac{\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O}{b} + \frac{\mathbf{p}_O - \mathbf{p}_A}{a} - \frac{\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A}{a + b} \quad ,$$

onde  $a$  é a norma entre  $\mathbf{p}_O$  e  $\mathbf{p}_A$ ,  $b$  é a norma entre  $\mathbf{p}_O$  e  $\mathbf{p}_B$ , com  $\mathbf{p}_A$  e  $\mathbf{p}_B$  pontos distintos da curva.

Já para a derivada segunda em  $\mathbf{p}_O$ , pode-se aproximá-la por

$$r'' = \frac{2\mathbf{p}_A}{a(a + b)} - \frac{2\mathbf{p}_O}{ab} + \frac{2\mathbf{p}_B}{b(a + b)} \quad .$$

Uma vez obtidas as derivada primeira e segunda substituímos na fórmula dada em (2-2) para obtermos a curvatura.

### 3.3

#### Métodos de Otimização que Utilizam uma Janela de $n$ Pontos ( $n \geq 3$ )

Os métodos presentes nesse grupo calculam a curvatura utilizando três ou mais pontos. Esses métodos tentam reduzir o efeito do ruído na amostragem das curvas. Para detalhes dos métodos apresentados em 3.3.1 ver [21, 26]. Para maiores detalhes sobre o método apresentado em 3.3.2 ver [8].

#### 3.3.1

##### Método do Ajustamento da Circunferência

Neste método estima-se a melhor circunferência que se aproxima de uma amostragem de pontos de uma curva. Ou seja, procura-se minimizar

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} - R)^2 \quad ,$$

onde  $(x_0, y_0)$  é o centro da circunferência estimada e  $R$  é o raio da mesma. Para evitar o uso de raízes, propõe-se uma saída alternativa utilizando a distância algébrica ao invés da euclidiana. Ou seja, procuraremos minimizar a função

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2)^2 \quad .$$

Para a minimização da função acima utiliza-se a idéia apresentada em [21] que consiste em resolver mínimos quadrados para obter os coeficientes da equação da circunferência

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad , \quad (3-14)$$

fixando o valor de  $A$  igual a 1. Uma vez resolvido o sistema obtemos a equação da circunferência que melhor se aproxima aos  $N$  pontos da curva, fornecendo assim uma aproximação para o círculo osculador como podemos ver na figura 3.3.

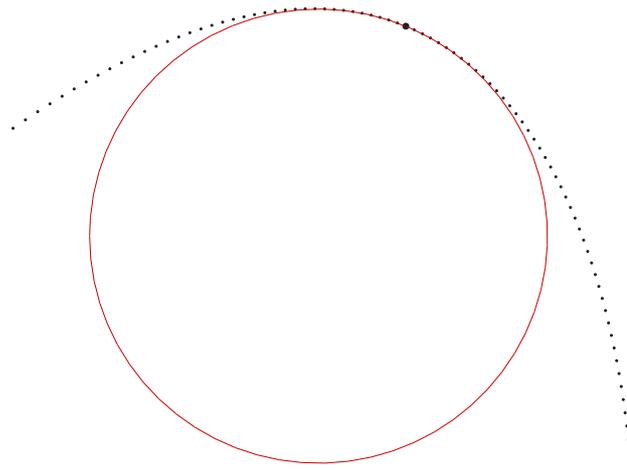


Figura 3.3: Aproximação do círculo osculador numa parte da curva de equação  $r(t) = (\text{sen}(t), \text{sen}(t) \cdot \cos(t)) : t \in [-\pi, \pi]$  com amostragem de 500 pontos utilizando uma vizinhança de 13 pontos para a direita e para a esquerda.

Como o próprio Pratt menciona em [21], fazer uma aproximação fixando o valor de  $A$  podemos verificar erros na hora de obtermos o melhor círculo de aproximação. Podemos observar esse fenômeno na figura 3.4. Caso fixemos outro coeficiente serão obtidos outros resultados, porém em qualquer caso teremos dificuldades para certas classes de curvas.

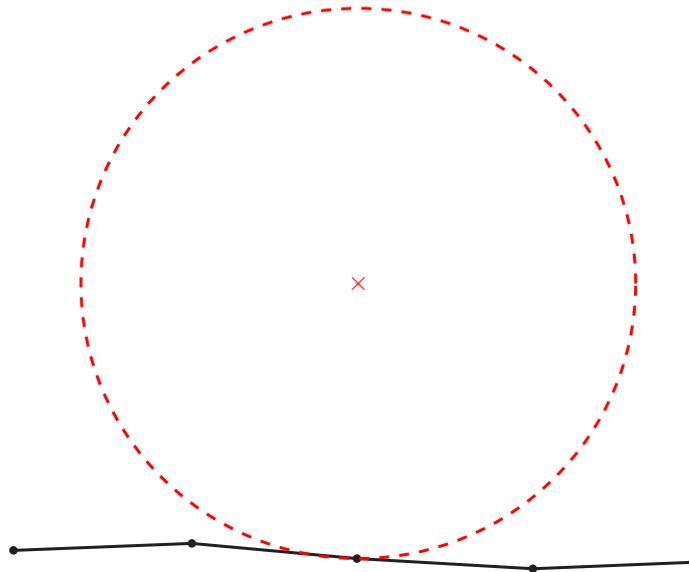


Figura 3.4: Reta com ruído de 0.1 e  $n = 5$ .

### 3.3.2

#### Método da Aproximação por Parábolas com Eixos Fixos

Neste método usa-se a idéia da proposição 2.1 presente no capítulo 2 para o cálculo da curvatura. Queremos representar a curva como gráfico de  $y = f(x)$  ou  $x = f(y)$ . Para tal escolha observa-se a variação de  $x$  e de  $y$ . Caso a variação de  $x$  seja maior do que a de  $y$ , escolhe-se  $y = f(x)$ , e caso a variação de  $y$  for maior que a variação de  $x$ , escolhe-se  $x = f(y)$ . Desenvolveremos a idéia para o caso  $y = f(x)$ , pois o outro caso é análogo.

Uma vez feita esta decisão adotamos algumas notações antes de partirmos para o cálculo da curvatura em  $\mathbf{p}_j = (x_j, y_j)$  pertencente a amostragem. Considere  $Dx_i^j = x_i - x_j$ ,  $Dy_i^j = y_i - y_j$ .

Como o objetivo é o cálculo da curvatura  $\kappa$  em  $\mathbf{p}_j$  necessita-se da derivada da função  $f$ . Logo, tem-se pela expansão de Taylor

$$f(x_i) = f(x_j) + (x_i - x_j)f'(x_j) + (x_i - x_j)^2 \frac{f''(x_j)}{2} + O((x_i - x_j)^3) \quad . \quad (3-15)$$

Reescrevendo, obtemos

$$y_i = y_j + Dx_i^j f'(x_j) + (Dx_i^j)^2 \frac{f''(x_j)}{2} + O((Dx_i^j)^3) \quad , \quad (3-16)$$

para todo  $i = j - q, \dots, j + q$ . Assim obtém-se um sistema da forma  $Ax = B$  dado por

$$\begin{pmatrix} Dx_{i-q}^j & \frac{(Dx_{i-q}^j)^2}{2} \\ Dx_{i-q+1}^j & \frac{(Dx_{i-q+1}^j)^2}{2} \\ \vdots & \vdots \\ Dx_{i+q}^j & \frac{(Dx_{i+q}^j)^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x_j) \\ f''(x_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dy_{i-q}^j \\ Dy_{i-q+1}^j \\ \vdots \\ Dy_{i+q}^j \end{pmatrix} .$$

Desta forma, resolver esse sistema é encontrar  $f'(x_j)$  e  $f''(x_j)$  que minimizam

$$E_x(f'(x_j), f''(x_j)) = \sum_{i=j-q}^{j+q} \left( y_i - y_j - f'(x_j) Dx_i^j - \frac{1}{2} f''(x_j) (Dx_i^j)^2 \right)^2 .$$

Quando  $q > 1$  temos a solução do sistema dada por

$$\begin{cases} f'(x_j) = \frac{cg - bh}{ac - b^2} \\ f''(x_j) = \frac{ah - bg}{ac - b^2} \end{cases} ,$$

onde

$$\begin{cases} a = \sum_{i=j-q}^{j+q} (Dx_i^j)^2 \\ b = \frac{1}{2} \sum_{i=j-q}^{j+q} (Dx_i^j)^3 \\ c = \frac{1}{4} \sum_{i=j-q}^{j+q} (Dx_i^j)^4 \\ g = \sum_{i=j-q}^{j+q} Dx_i^j Dy_i^j \\ h = \frac{1}{2} \sum_{i=j-q}^{j+q} (Dx_i^j)^2 Dy_i^j \end{cases} .$$

Com esse dados a curvatura estimada por Cazals e Pouget [8] é dada por

$$\hat{\kappa}(\mathbf{p}_j) = \frac{f''(x_j)}{(1 + f'(x_j))^{\frac{3}{2}}} . \quad (3-17)$$

Observe na figura 3.5 a aproximação obtida utilizando esse método.

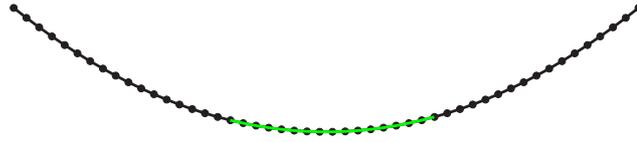


Figura 3.5: Aproximação obtida pelo método da aproximação por parábolas com eixos fixos para a parábola e  $q = 1$ .

Este método apresenta um problema numérico no caso de  $|f'(x_j)|$  ser próximo de 1, pois nesse caso a primeira coluna da matriz

$$A^t A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

fica muito próxima da matriz

$$A^t B = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} .$$

Isto implica que a derivada segunda estimada tende a zero, ou seja, a parábola estimada degenera para uma reta.

Outro problema apresentado por este método vem do fato de serem utilizadas parábolas com eixos fixos, ou seja,  $y = f(x)$  ou  $x = f(y)$ . Isso faz com que tenhamos aproximações como a da figura 3.6.

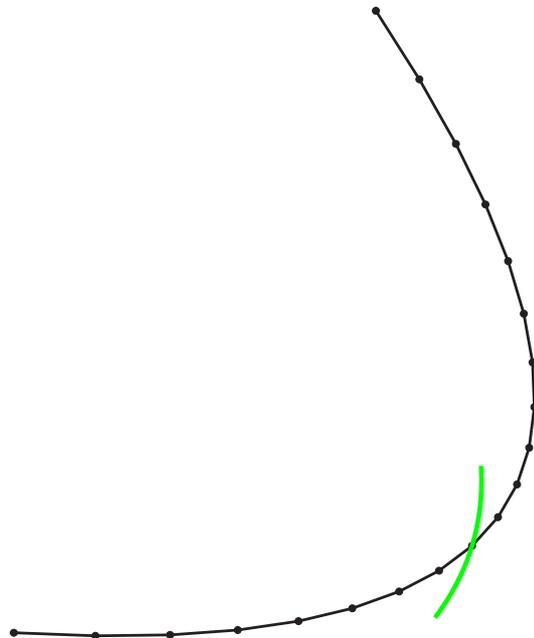


Figura 3.6: Aproximação obtida pelo método da Parábola Fixa para a parábola rodada de  $60^\circ$  e  $q = 1$ .