2
Preliminares

Neste capítulo exporemos rapidamente os conceitos necessários de geometria diferencial, tendo como principais referências [4], [7], [24], e curvas discretas.

2.1
Curvas no Plano

Nesta seção estudaremos um pouco as curvas no plano. Apresentaremos algumas definições e propriedades importantes.

Definição 2.1 *Seja I um intervalo contido em $\mathbb{R}$. Uma curva paramétrica contínua em $\mathbb{R}^2$ é uma função $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, onde x e y são funções contínuas de I para $\mathbb{R}$.*

Uma curva $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dita simples se $\mathbf{r}$ for injetiva. Se a curva $\mathbf{r}$ está definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$ e $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ dizemos que $\mathbf{r}$ é uma curva fechada. Uma curva é dita fechada e simples quando ela é simples no intervalo $I' = [a, b) \subset I$ e fechada em I.

Definição 2.2 *Seja $\mathbf{r} : I = (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva. O vetor velocidade de $\mathbf{r}$ em $t_0 \in I$ é dado por*

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \qquad .$$

A norma do vetor velocidade é uma grandeza que representa a velocidade escalar da curva $\mathbf{r}$ em um ponto arbitrário $t_0 \in I$ e é dada por

$$||\mathbf{r}'(t_0)|| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} \qquad .$$

2.1.1
Curvas Regulares, Reparametrização e Comprimento de Arco

Definição 2.3 *Dizemos que uma curva parametrizada* $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é regular em* $t_0 \in I$ *se* $\mathbf{r}'(t_0)$ *existe e não se anula. A curva* $\mathbf{r}$ *é regular em* I *se for regular, para todo* $t \in \mathrm{int}(I)$. *Se* $\mathbf{r}'(t_0) = 0$ *ou não existe dizemos que* $\mathbf{r}$ *é singular em* t_0.

Daqui em diante, e a menos de menção contrária, entenderemos por *curva* uma curva parametrizada regular de classe C^∞.

Proposição 2.1 *Seja* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma curva e* $t_0 \in I$ *arbitrário. Então existe* $\delta > 0$ *tal que restrito ao intervalo* $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ *o traço de* $\mathbf{r}$ *coincide com o traço de uma curva* $\mathbf{u}$ *da forma* $\mathbf{u}(t) = (t, f(t))$ *ou* $\mathbf{u}(t) = (f(t), t)$, *para uma função diferenciável* $f : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Prova:

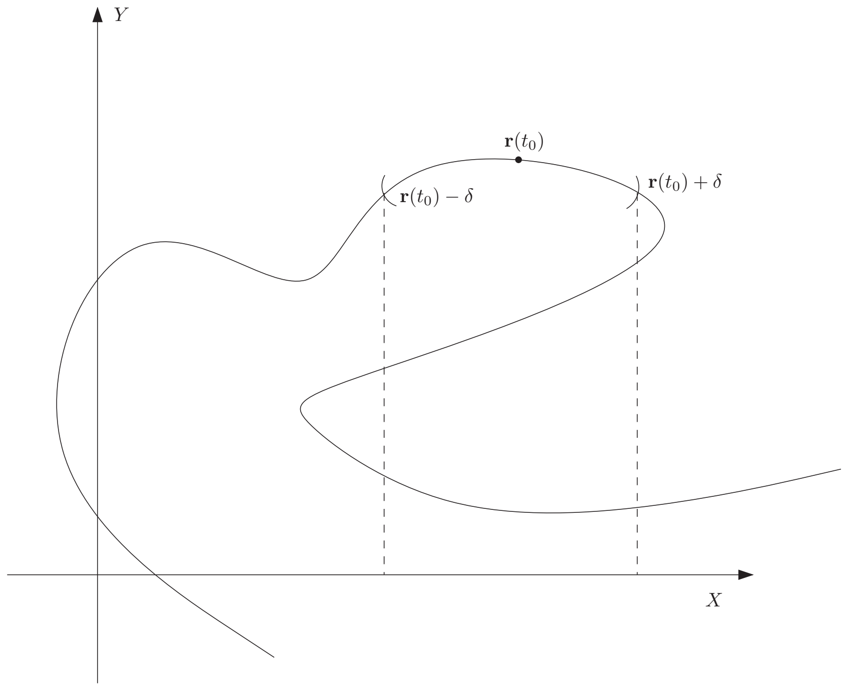

Figura 2.1: Visão gómétrica da Proposição 2.1.

Como $\mathbf{r}$ é regular em t_0, temos que $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$. Supondo sem perda de generalidade que $x'(t_0) \neq 0$, isso implica que x' é um isomorfismo. Assim pelo Teorema da Função Inversa, existe $\delta > 0$ tal que x restrita ao intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ é difeomorfismo sobre $x((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) = J$. Logo podemos definir uma função $\mathbf{u} : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(x^{-1}(t))$. Precisamos agora mostrar que com essa definição de $\mathbf{u}$ chegaremos na tese da proposição. De fato, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(x^{-1}(t)) = (x(x^{-1}(t)), y(x^{-1}(t))) = (t, y(x^{-1}(t)))$.

Assim defina $f(t) = y(x^{-1}(t))$. Note que f é diferenciável e consequentemente, $\mathbf{u}$ também. A prova, para o caso em que $y'(t_0)$ é diferente de 0 é anologa e obtemos $\mathbf{u}(t) = (f(t), t)$. $\blacksquare$

Sejam $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva e $g : J \longrightarrow I$ uma função de classe C^∞. Considere então uma nova curva $\mathbf{h} : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{r} \circ g(t) = \mathbf{r}(g(t)) \qquad .$$

A curva $\mathbf{h}$ então é uma reparametrização de $\mathbf{r}$ e vale a regra da cadeia, ou seja,

$$\mathbf{h}'(t) = \mathbf{r}'(g(t))g'(t) \qquad .$$

Observe na figura 2.2 a idéia gráfica da reparametrização da curva $\mathbf{r}$.

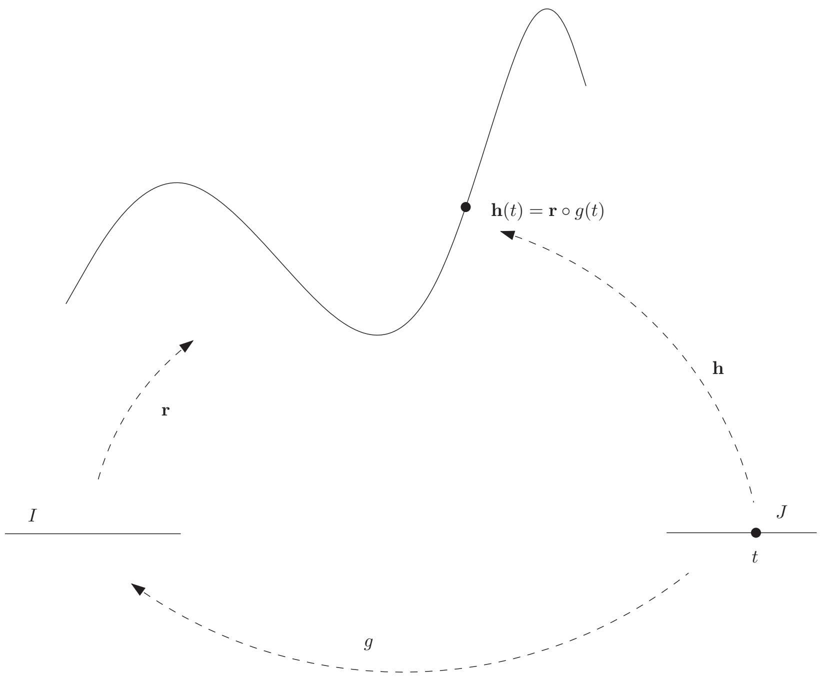

Figura 2.2: Idéia geométrica de uma reparametrização.

Definição 2.4 *Seja* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma curva e seja* $t_0 \in I$ *um ponto arbitrário. A função comprimento de arco de* $\mathbf{r}$ *a partir de* t_0 *é dada por*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\mathbf{r}'(\xi)|| d\xi \qquad .$$

Definição 2.5 *Uma curva* $\mathbf{r}$ *é dita parametrizada pelo comprimento de arco (PPCA) quando* $||\mathbf{r}'(t)|| = 1$*, para todo* $t \in I$*.*

Note que, se $\mathbf{r}$ é PPCA então $s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\mathbf{r}'(\xi)|| d\xi = \int_{t_0}^{t} d\xi = t - t_0$, ou seja, o parâmetro t é a menos de uma constante igual ao comprimento de arco.

Teorema 2.1 *Toda curva regular* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *pode ser parametrizada pelo comprimento de arco.*

Prova: Como $\mathbf{r}$ é regular temos que a função s satisfaz

$$s'(t) = ||\mathbf{r}'(t)|| > 0 \qquad .$$

Logo s é estritamente crescente e, portanto, injetiva. Como s é contínua a imagem de I por s é um intervalo J. Concluímos que s possui inversa derivável $g : J \longrightarrow I$. Fazendo $\mathbf{h}(s) = \mathbf{r} \circ g(s)$, temos que $\mathbf{h}'(s) = \mathbf{r}'(g(s))g'(s)$, portanto temos que verificar agora o valor de $||\mathbf{h}'(s)||$. Note que $g(s) = t$ e como $g = S^{-1}$ temos que $||\mathbf{h}'(s)|| = 1$ pois $g'(s) = \dfrac{1}{s'(t)} = \dfrac{1}{||\mathbf{r}'(t)||}$. ■

2.1.2
Vetor Tangente, Vetor Normal e Curvatura

Dada a curva PPCA $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $s_0 \in I$ arbitrário, o vetor tangente a $\mathbf{r}$ em s_0 é $\mathbf{T}(s_0) = \mathbf{r}'(s_0) = (x'(s_0), y'(s_0))$ e o vetor normal a $\mathbf{r}$ em s_0 é o vetor ortogonal a $\mathbf{T}$ dado por $\mathbf{N}(s_0) = (-y'(s_0), x'(s_0))$.

Observação: Os vetores $\mathbf{T}'(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ são colineares, pois derivando $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1$ obtemos $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$.

Definição 2.6 *Seja* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma curva PPCA. O referencial* $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ *é chamado referêncial de Frenet de* $\mathbf{r}$ *em* s_0*.*

Como foi visto na observação anterior $\mathbf{T}'(s)$ é colinear a $\mathbf{N}(s)$, isto significa que existe uma função $\kappa(s)$ que satisfaz

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s), \qquad s \in I. \tag{2-1}$$

Definição 2.7 *A função* κ *definida na equação (2-1) é chamada curvatura de* $\mathbf{r}$ *em* $s \in I$*. Ou seja,* $\kappa(s) = \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{N}(s)$*.*

Proposição 2.2 *Seja* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma curva, definida por* $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$*. Então a curvatura de* $\mathbf{r}$ *em* $t \in I$ *é dada pela expressão*

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}} \qquad . \tag{2-2}$$

Prova: Inicialmente façamos uma figura (fig. 2.3), para facilitar nossa demonstração.

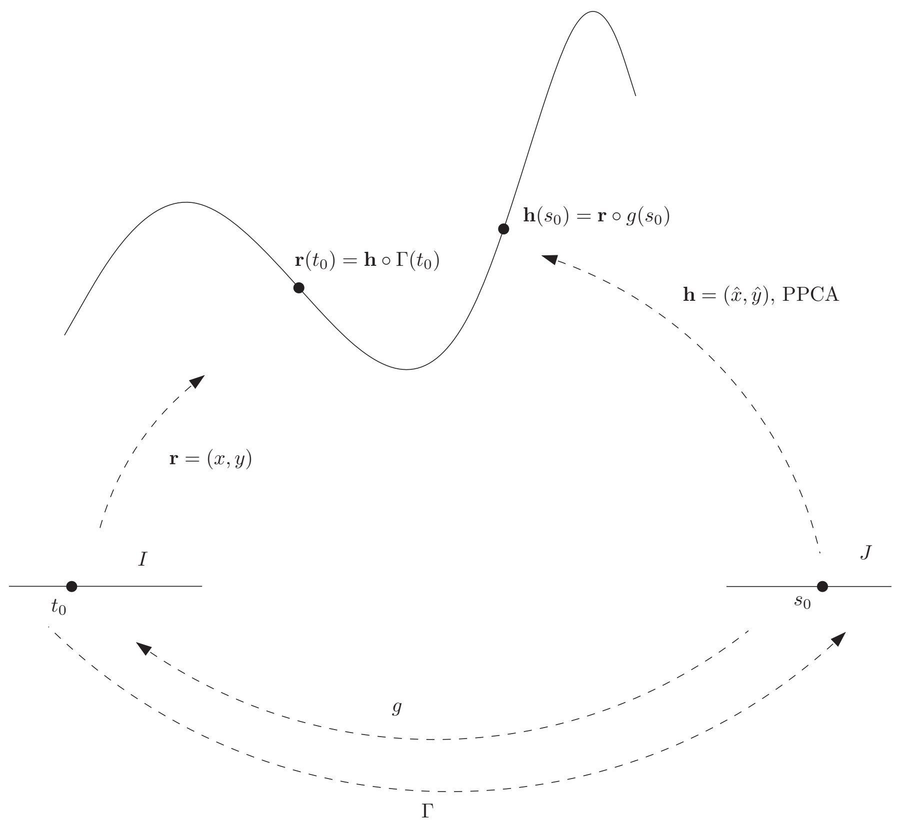

Figura 2.3: Idéia geométrica da Proposição 2.2.

Seja $t_0 \in I$, arbitrário. Considere $\mathbf{h} : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de $\mathbf{r}$ de modo que $\mathbf{h}$ seja PPCA. Assim temos que $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{h} \circ \Gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$, onde $\Gamma : I \longrightarrow J$, e $\mathbf{h}(s_0) = \mathbf{r} \circ g(s_0) = (\hat{x}(s_0), \hat{y}(s_0))$, onde $g : J \longrightarrow I$. Assim temos

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = (\mathbf{h}' \circ \Gamma(t_0))\Gamma'(t_0) = \frac{d\mathbf{h}}{ds}\Gamma'(t_0) \tag{2-3}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''(t_0) &= (x''(t_0), y''(t_0)) = (\mathbf{h}'' \circ \Gamma(t_0))\Gamma'(t_0)^2 + (\mathbf{h}' \circ \Gamma(t_0))\Gamma''(t_0) \\ &= \frac{d^2\mathbf{h}}{ds^2}(\Gamma'(t_0))^2 + \frac{d\mathbf{h}}{ds}\Gamma''(t_0) \quad . \end{aligned} \tag{2-4}$$

Sabendo que $\Gamma'(t_0) > 0$ e utilizando a equação (2-3) podemos concluir que

$$||\mathbf{r}'(t_0)|| = ||\mathbf{h}' \circ \Gamma(t_0)|||\Gamma'(t_0)| \quad .$$

Como $||\mathbf{h}' \circ \Gamma(t_0)|| = 1$, temos que

$$\Gamma'(t_0) = ||\mathbf{r}'(t_0)|| \quad . \tag{2-5}$$

Desta forma obtemos

$$\Gamma''(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \{(\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t))^{\frac{1}{2}}\} = \frac{\mathbf{r}''(t_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0)}{||\mathbf{r}'(t_0)||} \quad .$$

Seja $\mathbf{T_h}$ o vetor tangente da curva $\mathbf{h}$. Temos portanto

$$\frac{d\mathbf{h}}{ds}(s_0) = \mathbf{T_h}(s_0) = \mathbf{T_h}(\Gamma(t_0)) = \frac{d\mathbf{h}}{ds}(\Gamma(t_0)) \overset{(2-3)}{=} \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{||\mathbf{r}'(t_0)||} \quad .$$

Assim a derivada do vetor tangente é dada por

$$\mathbf{T}'_{\mathbf{h}}(s_0) = \frac{d\mathbf{T_h}}{ds}(\Gamma(t_0)) = \frac{d^2\mathbf{h}}{ds^2}(\Gamma(t_0)) = \frac{1}{\Gamma'(t_0)}(\mathbf{r}''(t_0) - \Gamma''(t_0)\mathbf{T_h}(\Gamma(t_0))) \quad .$$

Denote o vetor tangente da curva $\mathbf{r}$ por $\mathbf{T_r}$. Sabemos que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{h} \circ \Gamma(t)$, sendo assim isto implica que $\mathbf{T_r}(t) = (\mathbf{h}' \circ \Gamma(t))\Gamma(t)$. Logo,

$$\frac{\mathbf{T_r}(t)}{||\mathbf{r}'(t)||} = \mathbf{T_h}(\Gamma(t)) = (\hat{x}'(\Gamma(t)), \hat{y}'(\Gamma(t))) \quad .$$

Seja $\mathbf{N_h}$ o vetor normal da curva $\mathbf{h}$. Sabemos que este vetor é dado por

$$\mathbf{N_h}(s_0) = \mathbf{N_h}(\Gamma(t_0)) = (-\hat{y}'(\Gamma(t_0)), \hat{x}'(\Gamma(t_0))) = \frac{1}{||\mathbf{r}'(t_0)||}(-y'(t_0), x'(t_0)) \quad .$$

De acordo com a definição de curvatura dada em (2-1), temos que

$$\kappa(s_0) = \kappa(\Gamma(t_0)) = \frac{d\mathbf{T_h}}{ds}(\Gamma(t_0)) \cdot \mathbf{N_h}(\Gamma(t_0)) \quad . \tag{2-6}$$

Substituindo $\mathbf{N_h}$ e $\dfrac{d\mathbf{T_h}}{ds}$ em (2-6) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{||\mathbf{r}'(t_0)||^2}(\mathbf{r}''(t_0) - \Gamma''(t_0)\mathbf{T_h}(\Gamma(t_0)) \cdot \mathbf{N_h}(\Gamma(t_0))) &= \\
\frac{1}{||\mathbf{r}'(t_0)||^2}(\mathbf{r}''(t_0) \cdot \mathbf{N_h}(\Gamma(t_0))) &= \\
\frac{1}{||\mathbf{r}'(t_0)||^2}\Big((x''(t_0), y''(t_0)) \cdot \frac{1}{||\mathbf{r}'(t_0)||}(-y'(t_0), x'(t_0))\Big) &= \\
\frac{1}{||\mathbf{r}'(t_0)||^3}(-y'(t_0)x''(t_0) + x'(t_0)y''(t_0)) &= \\
\frac{x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}{||\mathbf{r}'(t_0)||^3}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Seja $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma curva. Definamos a função $\theta(t)$ como sendo o ângulo que o vetor velocidade faz com o eixo x. Portanto, onde $x'(t)$ não se anula temos

$$\theta(t) = \arctan\Big(\frac{y'(t)}{x'(t)}\Big) \qquad .$$

Caso $x'(t)$ se anule, podemos considerar

$$\theta(t) = \text{arccotan}\Big(\frac{x'(t)}{y'(t)}\Big) \qquad .$$

Assim obtemos o seguinte resultado envolvendo a curvatura κ e o ângulo θ.

Proposição 2.3 *Seja* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma curva, definida por* $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$*. Se* $\theta(t)$ *é o ângulo que* $\mathbf{r}'(t)$ *faz com o eixo* x*. Então*

$$\kappa(t) = \theta'(t) \qquad . \tag{2-7}$$

Prova: Seja $\mathbf{h}$ uma reparametrização de $\mathbf{r}$ pelo comprimento de arco (observe a figura 2.3). Seja $\theta_{\mathbf{h}}$ a função ângulo da curva $\mathbf{h}$ e $\theta_{\mathbf{r}}$ a função ângulo da curva $\mathbf{r}$. Vamos supor que $\theta_{\mathbf{h}} = \arctan\Big(\frac{y'(s)}{x'(s)}\Big)$, isto é, em pontos com $x'(s) \neq 0$. Assim, adotando a mesma notação da Proposição 2.2 temos que $\theta_{\mathbf{h}}(s) = \theta_{\mathbf{r}} \circ \Gamma(t)$. Diante disso obtemos

$$\theta_{\mathbf{h}}(s) = \arctan\Big(\frac{y'(s)}{x'(s)}\Big) \qquad . \tag{2-8}$$

Logo,

$$\theta_{\mathbf{h}} \circ \Gamma(t) = \arctan\Big(\frac{y' \circ \Gamma(t)}{x' \circ \Gamma(t)}\Big) \qquad . \tag{2-9}$$

Derivando e equação (2-9) em relação a t segue que

$$(\theta'_{\mathbf{h}} \circ \Gamma(t))\Gamma'(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{||\mathbf{r}'(t)||^2} \qquad . \tag{2-10}$$

Isso nos dá que

$$\underbrace{\theta'_{\mathbf{h}} \circ \Gamma}_{\theta_{\mathbf{r}}}(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{||\mathbf{r}'(t)||^3} \qquad . \tag{2-11}$$

Note que na passagem da equação (2-10) para a equação (2-11) utilizamos o resultado obtido em (2-5).

Logo, vem então da equação (2-2) e que queríamos. ∎

Definição 2.8 *Seja* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma curva e* $\mathbf{P}$ *um ponto em* $\mathbf{r}$*, o círculo osculador de* $\mathbf{r}$ *em* $\mathbf{P}$ *é o limite de uma sequência de circunferências que passam* *por pontos* **U**, **V** *e* **W**, *onde* **U**, **V** *e* **W** *estão em* **r** *e todos tendem para* **P**. *Esta circunferência se ajusta melhor à curva* **r** *em* **P**.

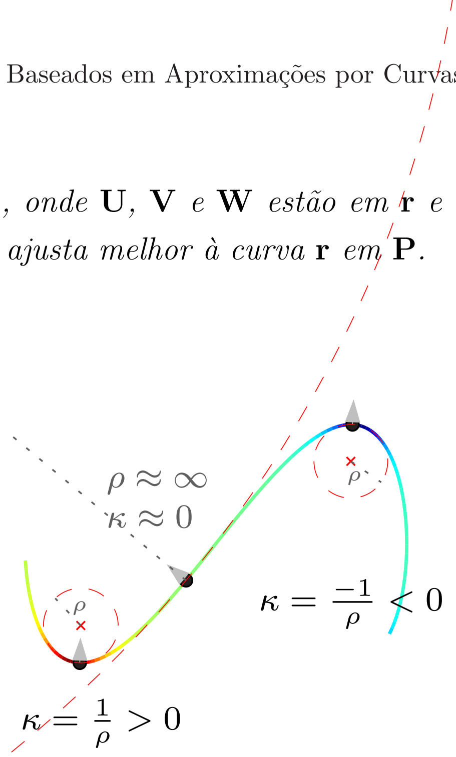

Figura 2.4: A curvatura é o inverso do raio do círculo osculador. O sinal da curvatura depende da convexidade local da curva.

2.2 Curvas no Espaço

Nesta seção estudaremos um pouco as curvas no espaço. Apresentaremos algumas definições e propriedades importantes. As demontrações de alguns Teoremas e Proposições não serão feitas uma vez que já foram demonstradas na seção anterior e são facilmente adaptadas.

Definição 2.9 *Seja I um intervalo contido em $\mathbb{R}$. Uma curva paramétrica contínua em $\mathbb{R}^3$ é uma função $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde x, y e z são funções contínuas de I para $\mathbb{R}$.*

Analogamente temos para curvas no espaço as definições de curva simples e curva fechada.

Definição 2.10 *Seja $\mathbf{r} : I = (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva. O vetor velocidade de $\mathbf{r}$ em $t_0 \in I$ é dado por*

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \qquad .$$

Sendo assim temos que sua norma num ponto arbitrário $t_0 \in I$ é dada por

$$||\mathbf{r}'(t_0)|| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 + z'(t_0)^2} \qquad .$$

2.2.1
Curvas Regulares, Reparametrização e Comprimento de Arco

Definição 2.11 *Dizemos que uma curva parametrizada* $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *é regular em* $t_0 \in I$*, se* $\mathbf{r}'(t_0)$ *existe e não se anula. A curva* $\mathbf{r}$ *é regular em* I *se for regular, para todo* $t \in \mathrm{int}(I)$*. Se* $\mathbf{r}'(t_0) = 0$ *ou não existe dizemos que* $\mathbf{r}$ *é singular em* t_0*.*

Daqui em diante, e a menos de menção contrária, uma *curva* significará uma curva parametrizada regular de classe C^∞.

Proposição 2.4 *Seja* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma curva e* $t_0 \in I$ *arbitrário. Então existe* $\delta > 0$ *tal que restrito ao intervalo* $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ *o traço de* $\mathbf{r}$ *coincide com o traço de uma curva* $\mathbf{u}$ *da forma* $\mathbf{u}(t) = (t, f_1(t), f_2(t))$ *ou* $\mathbf{u}(t) = (f_1(t), t, f_2(t))$ *ou* $\mathbf{u}(t) = (f_1(t), f_2(t), t)$*, para uma função diferenciável* $f_1 : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $f_2 : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*.*

Definição 2.12 *Seja* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma curva e seja* $t_0 \in I$ *um ponto arbitrário. A função comprimento de arco de* $\mathbf{r}$ *a partir de* t_0 *é dada por*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\mathbf{r}'(\xi)|| d\xi \qquad .$$

Definição 2.13 *Uma curva* $\mathbf{r}$ *é dita parametrizada pelo comprimento de arco (PPCA) quando* $||\mathbf{r}'(t)|| = 1$*, para todo* $t \in I$*.*

Teorema 2.2 *Toda curva regular* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *pode ser parametrizada pelo comprimento de arco.*

2.2.2
Vetor Tangente, Vetor Normal e Curvatura

Considere $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva PPCA. Como o vetor tangente a $\mathbf{r}$ é unitário, temos a seguinte definição:

Definição 2.14 *Seja* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma curva PPCA. O número* $|\mathbf{r}''(t)| = \kappa(t)$ *é denominado a curvatura de* $\mathbf{r}$ *em* t*,* $t \in I$*.*

Vimos na seção 2.1.2, no caso planar, que o vetor $\mathbf{T}(t)$ e o vetor $\mathbf{T}'(t)$ são ortogonais. Essa propriedade se repete para curvas no espaço, consequentemente os vetores $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ também são ortogonais. Considerando então os pontos onde $\kappa(t) \neq 0$, o vetor unitário $\mathbf{N}(t)$ na direção de $\mathbf{r}''(t)$ é definido pela equação $\mathbf{r}''(t) = \kappa(t)\mathbf{N}(t)$. Assim, $\mathbf{N}(t)$ é chamado o vetor normal de $\mathbf{r}$ em t e reescrevendo a equação obtemos

$$\mathbf{T}'(t) = \kappa(t)\mathbf{N}(t) \qquad . \tag{2-12}$$

Definição 2.15 *O vetor $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ é chamado de vetor binormal de $\mathbf{r}$ em t.*

Lema 2.1 *Seja $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ PPCA e seja $t \in I$ arbitrário. Então $\mathbf{B}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{T}(t)$ e colinear a $\mathbf{N}(t)$.*

Prova: Temos pela definição que

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \qquad .$$

Assim, derivando obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(t) &= \mathbf{T}'(t) \times \mathbf{N}(t) + \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}'(t) \\ &= \kappa(t) \underbrace{\mathbf{N}(t) \times \mathbf{N}(t)}_{0} + \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}'(t) \qquad . \end{aligned}$$

Isto implica que $\mathbf{B}'(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}'(t)$. Logo podemos concluir duas coisas:

1. $\left\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{B}'(t) \right\rangle = 0$, isto é, $\mathbf{B}'$ é ortogonal a $\mathbf{T}$.
2. Como $\left\langle \mathbf{B}(t), \mathbf{B}(t) \right\rangle = 1$ temos que $\mathbf{B}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{B}(t)$, assim $\mathbf{B}'(t)$ é colinear a $\mathbf{N}(t)$.

■

Segue do lema 2.1 a seguinte definição:

Definição 2.16 *Seja $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva PPCA tal que $\mathbf{r}''(t) \neq 0$, $t \in I$. O número $\tau(t)$, definido por*

$$\mathbf{B}'(t) = \tau(t)\mathbf{N}(t) \tag{2-13}$$

é denominado a torção de $\mathbf{r}$ em t, $t \in I$.

Definição 2.17 *Seja $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva. Para cada valor do parâmetro t, temos associado três vetores ortonormais $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$. O triedro então formado é denominado* Triedro de Frenet.

Associado a esse triedro temos três equações denominadas *E*quações de Frenet. Duas dessas equações são dados por (2-12) e (2-13). A terceira equação vem derivando $\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$, obtendo assim

$$\mathbf{N}'(t) = -\tau(t)\mathbf{B}(t) - \kappa(t)\mathbf{T}(t) \quad . \tag{2-14}$$

Proposição 2.5 *Seja* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma curva, definida por* $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$*, então a curvatura e a torção de* $\mathbf{r}$ *em* $t \in I$ *são dadas respectivamente pelas expressões*

$$\kappa(t) = \frac{||\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''||}{||\mathbf{r}'||^3} \quad \text{e} \quad \tau(t) = -\frac{\left(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\right) \cdot \mathbf{r}'''}{||\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''||^2}$$

Prova: Seja $\mathbf{u}$ uma reparametrização de $\mathbf{r}$ pelo comprimento de arco, assim podemos escrever $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u} \circ S(t)$. Portanto temos

$$\mathbf{r}'(t) = (\mathbf{u}' \circ S(t))S'(t) \tag{2-15}$$

e

$$\mathbf{r}''(t) = (\mathbf{u}'' \circ S(t))S'(t)^2 + (\mathbf{u}' \circ S(t))S''(t) \quad . \tag{2-16}$$

Da equação (2-15) vem que $||\mathbf{r}'(t)|| = \underbrace{||\mathbf{u} \circ S(t)||}_{1} S'(t) = S'(t)$ e consequentemente temos que $S''(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}$. Substituindo $S'(t)$ e $S''(t)$ na equação (2-16), temos

$$\mathbf{r}''(t) = (\mathbf{u}'' \circ S(t))||\mathbf{r}'(t)||^2 + (\mathbf{u}' \circ S(t))\frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{||\mathbf{r}'(t)||} \quad . \tag{2-17}$$

Tendo $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ necessitamos calcular $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) &= (\mathbf{u}' \circ S(t))||\mathbf{r}'(t)|| \times (\mathbf{u}'' \circ S(t))||\mathbf{r}'(t)||^2 \\ &= ||\mathbf{r}'(t)||^3 \mathbf{u}' \circ S(t) \times \mathbf{u}'' \circ S(t) \quad . \end{aligned} \tag{2-18}$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|| &= ||\mathbf{r}'(t)||^3 ||\mathbf{u}'(s) \times \mathbf{u}''(s)|| \\ &= ||\mathbf{r}'(t)||^3 \underbrace{||\mathbf{u}'(s)||}_{1} \underbrace{||\mathbf{u}''(s)||}_{\kappa_{\mathbf{u}}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad . \end{aligned} \tag{2-19}$$

Isso implica que $\kappa_{\mathbf{u}}(s) = \dfrac{||\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)||}{||\mathbf{r}'(t)||^3}$. Donde,

$$\kappa_{\mathbf{u}}(s) = \kappa_{\mathbf{u}} \circ S(t) = \kappa_{\mathbf{r}}(t) = \frac{||\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)||}{||\mathbf{r}'(t)||^3} \quad . \tag{2-20}$$

Chegamos assim na primeira das duas fórmulas que serão demonstradas. Partamos então para a segunda e última fórmula. Antes de iniciarmos consideremos a seguinte notação: $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$,$\mathbf{N} = \mathbf{N}(t)$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}''(t)$ e $\rho = \dfrac{d}{dt}||\mathbf{r}'(t)||$.

Sabemos que $\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}||\mathbf{r}'||$ e que $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'}{||\mathbf{r}'||}$, assim temos

$$\mathbf{T}' = \frac{||\mathbf{r}'||\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'\rho}{||\mathbf{r}'||^2} \quad . \tag{2-21}$$

Vamos agora escrever $\mathbf{r}''$ e $\mathbf{r}'''$ na base do Triedro de Frenet. Logo,

$$\mathbf{r}'' = \frac{\mathbf{r}'}{||\mathbf{r}'||}\rho + \kappa\mathbf{N}||\mathbf{r}'||^2 = \mathbf{T}\rho + \kappa\mathbf{N}||\mathbf{r}'||^2 \tag{2-22}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}''' &= \rho'\mathbf{T} + \mathbf{T}'\rho + \kappa\mathbf{N}'||\mathbf{r}'||^2 + \kappa'\mathbf{N}||\mathbf{r}'||^2 + 2\kappa\mathbf{N}||\mathbf{r}'||\rho \\
&= \rho'\mathbf{T} + \kappa\mathbf{N}||\mathbf{r}'||\rho - (\tau||\mathbf{r}'||\mathbf{B} + \kappa||\mathbf{r}'||\mathbf{T})\kappa||\mathbf{r}'||^2 + \mathbf{N}\kappa'||\mathbf{r}'||^2 + 2\mathbf{N}\kappa\rho||\mathbf{r}'|| \\
&= (\rho' - \kappa^2||\mathbf{r}'||^3)\mathbf{T} + (\rho\kappa||\mathbf{r}'|| + \kappa'||\mathbf{r}'||^2 + 2\kappa\rho||\mathbf{r}'||)\mathbf{N} - \tau||\mathbf{r}'||^3\kappa\mathbf{B}.
\end{aligned} \tag{2-23}$$

Dessa forma segue que,

$$\left\langle \mathbf{B}, \mathbf{r}''' \right\rangle = -\tau||\mathbf{r}'||^3\kappa \Rightarrow \tau = -\frac{\left\langle \mathbf{B}, \mathbf{r}''' \right\rangle}{||\mathbf{r}'||^3\kappa} = -\frac{\left\langle \mathbf{B}, \mathbf{r}''' \right\rangle}{||\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''||} \quad . \tag{2-24}$$

Precisamos agora escrever o vetor $\mathbf{B}$ de outra forma para chegarmos na fórmula desejada. Então,

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = (\mathbf{T} \times [\mathbf{r}'' - \mathbf{T}\rho])\,\frac{1}{\kappa||\mathbf{r}'||^2} = \frac{\mathbf{T} \times \mathbf{r}''}{\kappa||\mathbf{r}'||^2} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\kappa||\mathbf{r}'||^3} \quad . \tag{2-25}$$

Logo,

$$\tau = -\frac{\left\langle \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'', \mathbf{r}''' \right\rangle}{||\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''||^2} \quad . \ \blacksquare \tag{2-26}$$

Teorema 2.3 *Sejam* $\kappa(s) > 0$ *e* $\tau(s)$ *funções reais. Então existe* $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *PPCA tal que* $\kappa(s)$ *é a curvatura de* $\mathbf{r}(s)$ *e* $\tau(s)$ *é a torção de* $\mathbf{r}(s)$*. Se* $\mathbf{u} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *é uma parametrização por comprimento de arco tal que* $\kappa(s)$ *e* $\tau(s)$ *são respectivamente a curvatura e a torção de* $\mathbf{u}(s)$*, então existe isometria* A *tal que* $A(\mathbf{r}) = \mathbf{u}$

2.3 Curvas Discretas

Nesta seção estudaremos um pouco as curvas discretas, apresentando sua definição e possíveis origens.

Definição 2.18 *Uma curva discreta em* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$ *é uma sequência finita de pontos* $\{\mathbf{p}_i\}$*, com* $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ *que representam amostras de uma curva contínua (ver figura 2.5). Em outra palavras, existe* $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *ou* $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *e* $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n \in [0,1]$ *tal que* $\mathbf{p}_i = \varphi(t_i)$*.*

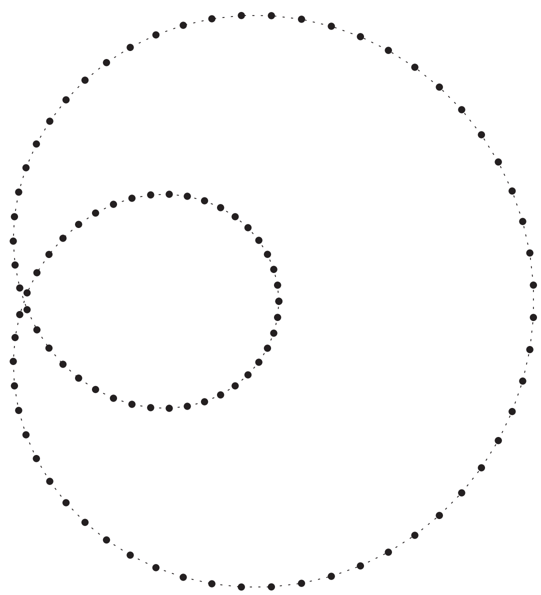

Figura 2.5: Visualização de uma curva discreta com amostragem de 100 pontos

As curvas discretas provêm de diferentes origens: curvas digitais (curvas extraídas de imagens) ([11]), paramétricas ou implícitas ([18]), reconstruções ([6, 3]), etc. Nesta dissertação utilizaremos curvas que provêm de aproximações lineares por partes, pois estas fornecem uma base que incluem os casos acima.