João Domingos Gomes da Silva Junior

Estimadores de Curvatura Baseados em Aproximações por Curvas Paramétricas

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Programa de Pós–graduação em Matemática

Rio de Janeiro
janeiro de 2005

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

João Domingos Gomes da Silva Junior

Estimadores de Curvatura Baseados em Aproximações por Curvas Paramétricas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientador : Prof. Marcos Craizer
Co–Orientador: Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Rio de Janeiro
janeiro de 2005

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

João Domingos Gomes da Silva Junior

Estimadores de Curvatura Baseados em Aproximações por Curvas Paramétricas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marcos Craizer
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes
Co–Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Luiz Henrique de Figueiredo
IMPA

Prof. Roberto Marcondes Cesar Junior
USP

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 31 de janeiro de 2005

João Domingos Gomes da Silva Junior

Graduou–se em Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Rio de Janeiro, Brasil)

Ficha Catalográfica

Gomes, João Domingos

Estimadores de Curvatura Baseados em Aproximações por Curvas Paramétricas/ João Domingos Gomes da Silva Junior; orientador: Marcos Craizer; co–orientador: Hélio Côrtes Vieira Lopes. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2005.

v., 105 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Geometria Computacional. 3. Processamento Geométrico I. Craizer, Marcos. II. Lopes, Hélio Côrtes Vieira. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

À minha família pelo apoio.

Aos professores do Departamento de Matemática, especialmente aos meus orientadores Marcos Craizer e Hélio Lopes.

À Capes pelos auxílios concedidos.

Aos funcionários do Departamento de Matemática.

À todos os colegas e amigos da PUC, em especial ao amigo Thomas Lewiner.

Resumo

Gomes, João Domingos; Craizer, Marcos; Lopes, Hélio Côrtes Vieira. **Estimadores de Curvatura Baseados em Aproximações por Curvas Paramétricas**. Rio de Janeiro, 2005. 105p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Muitas aplicações em processamento de imagens e computação gráfica recaem em propriedades geométricas de curvas, particularmente suas curvaturas. Uma outra propriedade importante mas menos explorada é a torção, sendo esta para curvas no espaço. Vários métodos para estimar curvaturas de curvas planas são conhecidos, a maioria deles para curvas digitais. Nesta dissertação fazemos um levantamento desses métodos e propomos um novo método baseado em aproximações por parábolas e cúbicas paramétricas. Apresentamos uma análise teórica do método e também estudamos a influência do ruído no cálculo da curvatura e da torção. O novo estimador foi comparado com outros estimadores e mostrou-se bastante robusto.

Palavras–chave

Geometria Diferencial, Estimação de Curvatura, Mínimos Quadrados, Processamento de Imagens

Abstract

Gomes, João Domingos; Craizer, Marcos; Lopes, Hélio Côrtes Vieira. **Curvature Estimators Based on Parametric Curve Fitting**. Rio de Janeiro, 2005. 105p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Many applications in image processing and computer vision rely on geometric properties of curves, in particular their curvatures. Another important, but less exploited, property is the torsion for curves in space. Several methods of estimating the curvature of plane curves are known, most of them for digital curves. In this dissertation we survey these methods and propose a new method based on approximations by parabolic and cubic curves. We present a theoretical analysis of this method and also study the effect of noise. The new estimator is compared to other estimators and is seen to be very robust.

Keywords

Differential Geometry, Curvature Estimation, Weighted Least–Squares and Image Processing.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Notações e Símbolos

$\mathbf{r}$ curva paramétrica

$\mathbf{r}'$ derivada

PPCA parametrizada pelo comprimento de arco

$\mathbf{T}$ vetor tangente

$\mathbf{N}$ vetor normal

$\mathbf{B}$ vetor binormal

$x \cdot y$ produto interno

$x \times y$ produto vetorial

$|| \; ||$ norma do vetor

$| \; |$ valor absoluto

Δl_k comprimento do vetor $\mathbf{p}_k\mathbf{p}_{k+1}$

s, t parâmetro da curva

s_i parâmetro associado ao ponto $\mathbf{p}_i$

l_i estimativa do parâmetro s_i

κ curvatura

τ torção

$\hat{\kappa}$ curvatura estimada

$\hat{\tau}$ torção estimada

q tamanho da janela, ou seja, número de pontos utilizado

w_i peso do ponto $\mathbf{p}_i$

η_i ruído presente no ponto $\mathbf{p}_i$