

**João Domingos Gomes da Silva
Junior**

**Estimadores de Curvatura Baseados
em Aproximações por Curvas
Paramétricas**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-graduação em Matemática

Rio de Janeiro
janeiro de 2005



João Domingos Gomes da Silva Junior

**Estimadores de Curvatura Baseados em
Aproximações por Curvas Paramétricas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador : Prof. Marcos Craizer
Co-Orientador: Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Rio de Janeiro
janeiro de 2005



João Domingos Gomes da Silva Junior

**Estimadores de Curvatura Baseados em
Aproximações por Curvas Paramétricas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marcos Craizer

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Co-Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Luiz Henrique de Figueiredo

IMPA

Prof. Roberto Marcondes Cesar Junior

USP

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 31 de janeiro de 2005

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

João Domingos Gomes da Silva Junior

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Rio de Janeiro, Brasil)

Ficha Catalográfica

Gomes, João Domingos

Estimadores de Curvatura Baseados em Aproximações por Curvas Paramétricas/ João Domingos Gomes da Silva Junior; orientador: Marcos Craizer; co-orientador: Hélio Côrtes Vieira Lopes. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2005.

v., 105 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Geometria Computacional. 3. Processamento Geométrico I. Craizer, Marcos. II. Lopes, Hélio Côrtes Vieira. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

À minha família pelo apoio.

Aos professores do Departamento de Matemática, especialmente aos meus orientadores Marcos Craizer e Hélio Lopes.

À Capes pelos auxílios concedidos.

Aos funcionários do Departamento de Matemática.

À todos os colegas e amigos da PUC, em especial ao amigo Thomas Lewiner.

Resumo

Gomes, João Domingos; Craizer, Marcos; Lopes, Hélio Côrtes Vieira. **Estimadores de Curvatura Baseados em Aproximações por Curvas Paramétricas**. Rio de Janeiro, 2005. 105p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Muitas aplicações em processamento de imagens e computação gráfica recaem em propriedades geométricas de curvas, particularmente suas curvaturas. Uma outra propriedade importante mas menos explorada é a torção, sendo esta para curvas no espaço. Vários métodos para estimar curvaturas de curvas planas são conhecidos, a maioria deles para curvas digitais. Nesta dissertação fazemos um levantamento desses métodos e propomos um novo método baseado em aproximações por parábolas e cúbicas paramétricas. Apresentamos uma análise teórica do método e também estudamos a influência do ruído no cálculo da curvatura e da torção. O novo estimador foi comparado com outros estimadores e mostrou-se bastante robusto.

Palavras-chave

Geometria Diferencial, Estimação de Curvatura, Mínimos Quadrados, Processamento de Imagens

Abstract

Gomes, João Domingos; Craizer, Marcos; Lopes, Hélio Côrtes Vieira. **Curvature Estimators Based on Parametric Curve Fitting**. Rio de Janeiro, 2005. 105p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Many applications in image processing and computer vision rely on geometric properties of curves, in particular their curvatures. Another important, but less exploited, property is the torsion for curves in space. Several methods of estimating the curvature of plane curves are known, most of them for digital curves. In this dissertation we survey these methods and propose a new method based on approximations by parabolic and cubic curves. We present a theoretical analysis of this method and also study the effect of noise. The new estimator is compared to other estimators and is seen to be very robust.

Keywords

Differential Geometry, Curvature Estimation, Weighted Least-Squares and Image Processing.

Sumário

1	Introdução	12
2	Preliminares	15
2.1	Curvas no Plano	15
2.2	Curvas no Espaço	22
2.3	Curvas Discretas	27
3	Trabalhos Anteriores	28
3.1	Método para Curvas Digitais	28
3.2	Métodos que Utilizam Três Pontos	31
3.3	Métodos de Otimização que Utilizam uma Janela de n Pontos ($n \geq 3$)	33
4	Desenvolvimento Teórico	38
4.1	Curvas no Plano	38
4.2	Curvas no Espaço	51
5	Desenvolvimento Computacional	58
5.1	Curvas no Plano	58
5.2	Curvas no Espaço	64
5.3	Condições de Fronteira	68
6	Resultados	69
6.1	Curvas no Plano	69
6.2	Curvas no Espaço	87
7	Conclusão e Trabalhos Futuros	101
	Referências Bibliográficas	103

Lista de figuras

1.1	Amostragem de uma curva planar com 300 pontos.	12
2.1	Visão gométrica da Proposição 2.1.	16
2.2	Idéia geométrica de uma reparametrização.	17
2.3	Idéia geométrica da Proposição 2.2.	19
2.4	A curvatura é o inverso do raio do círculo osculador. O sinal da curvatura depende da convexidade local da curva.	22
2.5	Visualização de uma curva discreta com amostragem de 100 pontos	27
3.1	Cálculo da curvatura baseado na orientação da tangente usando a ângulo interno.	31
3.2	Visualização do circuncírculo que passa por (p_0, p_1, p_2) pertencentes a uma curva discreta.	32
3.3	Aproximação do círculo osculador numa parte da curva de equação $r(t) = (\text{sen}(t), \text{sen}(t) \cdot \cos(t)) : t \in [-\pi, \pi]$ com amostragem de 500 pontos utilizando uma vizinhança de 13 pontos para a direita e para a esquerda.	34
3.4	Reta com ruído de 0.1 e $n = 5$.	35
3.5	Aproximação obtida pelo método da aproximação por parábolas com eixos fixos para a parábola e $q = 1$.	37
3.6	Aproximação obtida pelo método da Parábola Fixa para a parábola rodada de 60° e $q = 1$.	37
4.1	Amostragem da curva com ruído	41
4.2	Análise do sinal de M e N para encontrar a intersecção da hipérbole de equação $Mx + Ny = xy$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.	50
6.1	Visualização das curvas sobre as quais serão discutidos os testes.	70
6.2	Espiral com ruído (amostragem de 1000, $\sigma = 1$).	70
6.3	Gráfico referente a circunferência com diferentes valores de q	72
6.4	Gráfico referente a parábola rodada de 60° cujo domínio varia de -1 a 1 , como podemos ver em (c). Esses erros foram calculados no ponto de maior curvatura.	73
6.5	Gráficos de erros para altas curvaturas referentes a parábola rodada de 60° no intervalo $[-1, 1]$. Os dados foram calculados em $t = 0$, ou seja, no ponto de máxima curvatura	74
6.6	Gráficos de erros para altas curvaturas referentes à elipse com t pertencente ao intervalo $[-\pi/10, \pi/10]$. Os dados foram calculados em $t = 0$, ou seja, no ponto de máxima curvatura.	75
6.7	Gráficos de erros para baixas curvaturas referentes à lemniscata com t pertencente ao intervalo $[-\pi/8, \pi/8]$. Os dados foram calculados em $t = 0$, ou seja, o ponto de inflexão.	77
6.8	Gráfico de curvas com diferentes valores de q	78
6.9	Aproximação de curvas por parábolas com diferentes valores de q	79
6.10	Gráfico do círculo com 100 pontos e diferentes valores de q	79

6.11	Gráficos de erros para alta curvaturas referentes à parábola rodada de 60° no intervalo $[-1, 1]$. Os dados foram calculados em $t = 0$, ou seja, no ponto de máxima curvatura e com $\sigma = 0.1$	80
6.12	Gráficos de erros para baixa curvaturas referentes à lemniscata com t pertencente ao intervalo $[-\pi/8, \pi/8]$. Os dados foram calculados em $t = 0$, ou seja, ponto de inflexão.	81
6.13	Amostragem irregular com espaçamento crescente para a circunferência com $n = 50$	82
6.14	Amostragem irregular aleatória para a circunferência com $n = 50$	82
6.15	Gráficos de erros para parábola não uniformemente amostrada e rodada de 60° no intervalo $[-1, 1]$	83
6.16	Gráficos de erros para curvas com amostragem irregular aleatória	84
6.17	Aproximação da parábola rodada de 60° e $q = 1$	85
6.18	Grandes erros são representados por linhas grossas e a escala é a mesma para as figuras .	86
6.19	Aproximação da reta com $q = 2$, ruído de 0.1 e $n = 5$	87
6.20	Hélice cilíndrica com ruído (amostragem de 500, $\sigma = 1$).	88
6.21	Curvatura da hélice cilíndrica no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ com diferentes valores de q .	89
6.22	Gráfico da hélice cilíndrica com diferentes valores de q para a estimativa da torção	90
6.23	Gráfico da Clélia para verificarmos a influência do peso na estimativa da curvatura	91
6.24	Gráfico de erros para altas curvatura referentes à onda senoidal cilíndrica no intervalo $[-\pi/10, \pi/10]$. Os dados foram calculados em $t = 0$.	93
6.25	Gráfico de erros para altas curvatura referentes à Espiral Cônica de Pappus no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. os dados foram calculados em $t = 0$.	94
6.26	Gráfico de erros para baixa curvatura referentes à Curva de Crepe no intervalo $[\pi/4 - \pi/10, \pi/4 + \pi/10]$. Os dados foram calculados em $t = \pi/4$.	95
6.27	Grandes erros são representados por linhas grossas e a escala é a mesma para as figuras. Essas figuras representam a Curva de Crepe.	96
6.28	Gráfico de referente a Clélia com 500 pontos e $\sigma = 0.1$ para diferente valores de q na estimativa da curvatura.	97
6.29	Gráfico de referente a Clélia com 500 pontos e $\sigma = 0.1$ para diferente valores de q na estimativa da torção	98
6.30	Gráfico de erros para altas curvatura referentes a onda senoidal cilíndrica no intervalo $[-\pi/10, \pi/10]$. Os dados foram calculados em $t = 0$ e com $\sigma = 0.1$.	99
6.31	Gráfico de erros para baixa curvatura referentes a curva de Crepe no intervalo $[\pi/4 - \pi/10, \pi/4 + \pi/10]$. Os dados foram calculados em $t = \pi/4$ e com $\sigma = 0.1$	100

Lista de tabelas

5.1	Tabela dos métodos para curvas no plano	58
5.2	Tabela dos métodos para curvas no espaço	58

Notações e Símbolos

\mathbf{r} curva paramétrica

\mathbf{r}' derivada

PPCA parametrizada pelo comprimento de arco

\mathbf{T} vetor tangente

\mathbf{N} vetor normal

\mathbf{B} vetor binormal

$x \cdot y$ produto interno

$x \times y$ produto vetorial

$\| \cdot \|$ norma do vetor

$| \cdot |$ valor absoluto

Δl_k comprimento do vetor $\mathbf{p}_k \mathbf{p}_{k+1}$

s, t parâmetro da curva

s_i parâmetro associado ao ponto \mathbf{p}_i

l_i estimativa do parâmetro s_i

κ curvatura

τ torção

$\hat{\kappa}$ curvatura estimada

$\hat{\tau}$ torção estimada

q tamanho da janela, ou seja, número de pontos utilizado

w_i peso do ponto \mathbf{p}_i

η_i ruído presente no ponto \mathbf{p}_i