

André da Silva Porto

**As bases filosóficas do construtivismo
matemático de Wittgenstein**

**Tese apresentada ao
departamento de Filosofia da
PUC-RJ como parte dos
requisitos para obtenção do
título de Doutor em Filosofia.
Professor Orientador: Luiz
Carlos Pereira.**

**Centro de Teologia e Ciências Humanas
Departamento de Filosofia
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro**

Rio de Janeiro, setembro de 2002

**As bases filosóficas do construtivismo
matemático de Wittgenstein**

TESE DE DOUTORADO

**Departamento de Filosofia
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, setembro de 2002**

Abstract

This thesis deals with the philosophical basis behind Wittgenstein's proposals in the philosophy of mathematics. We try to show that there is a semantic core from which these proposals are derived: the idea that the meaning of a sentence should be taken to be its truth conditions. We sort out this insight from its inception in Frege through the *Tractatus* all the way to the last phase of Wittgenstein's thought. In our last two chapters we discuss the changes this approach went through in this last phase of the philosopher's thought in relation to the idea of "triangularization" of the underlying semantics. We then deal in some detail with Wittgenstein's proposed interpretation of some types of elementary mathematical propositions, especially arithmetical propositions.

Resumo

O objetivo dessa tese é expor a base filosófica por trás das propostas de Wittgenstein para a filosofia da matemática. Procuramos mostrar que há um núcleo semântico das quais essas propostas são derivadas: a idéia de que o significado de uma sentença deveria ser tomado como sendo suas condições de verdade. Procuramos acompanhar esse *insight* desde seu aparecimento em Frege, depois no *Tractatus* até a última fase do pensamento de Wittgenstein. Em nossos dois últimos capítulos discutimos as mudanças que essa abordagem sofreu nessa última fase do pensamento do filósofo em conexão com a idéia de "triangularização" da semântica subjacente. Tratamos em com algum nível de detalhamento as interpretações propostas por Wittgenstein de alguns tipos de proposições matemáticas elementares, especialmente proposições aritméticas.

Aos meus pais, Suely e Nelson, à minha esposa, Araceli e aos meus filhos, Júlia, Manoela, Ian e Sophia

Agradeço ao professor Luiz Carlos por sua rápida percepção dos problemas envolvidos, pelo seu entusiasmo e incentivo, e pelas discussões tão diretas, francas e livres que ele me proporcionou.

Apreendi, com o professor Chateaubriand, mais sobre Wittgenstein e a filosofia do que a quase totalidade de seus comentadores. Temo, no entanto, que ele não reconheça seus ensinamentos nessas propostas filosóficas tão distantes das suas.

Agradeço ao professor Pasquale Frascolla pelo grande número de *insights* que ele me ofereceu, tanto a partir de seus textos quanto em conversações.

Agradeço ao professor Luiz Henrique Lopes dos Santos pela paciência com que respondeu às minhas insistentes perguntas e pelo imenso panorama da obra de Wittgenstein que está escondido em seus textos publicados.

Sumário da Tese

Introdução Geral.....	3
I Quatro espaços semânticos e modais: a filosofia de Wittgenstein vista de fora dela.....	8
1. Introdução.....	8
2. Teria dos conjuntos e “fosso necessário” entre as possibilidades físicas e as lógico-matemáticas.....	10
3. As relações entre exprimibilidade, possibilidade física e possibilidade e lógico-matemática.....	13
4. Quantos símbolos diferentes podemos usar?.....	15
5. A ligação entre a teoria dos conjuntos e a inexprimibilidade.....	18
6. Fundamentação e exprimibilidade “completa”.....	21
7. Um novo programa de Fundamentação: o formalismo de Hilbert.....	26
8. A idéia de “linguagem formal”.....	29
9. O programa de Hilbert e os teoremas de Gödel.....	31
10. As conseqüências dos teoremas de Gödel.....	33
11. Gödel e a aceitação de conteúdos necessariamente inexprimíveis.....	35
12. Algo escaparia às limitações expressivas.....	42
13. Dummett e a vagueza da aritmética.....	45
II Tractatus.....	49
1. A equação de Bradley.....	49
2. Três abordagens para a idéia de sentido. O mentalismo.....	54
3. A abordagem composicionalista do sentido.....	57
4. A conexão sentido/possibilidade.....	62
5. “Conteúdo conceitual” e poder expressivo da lógica.....	66
6. “Condições de verdade” e “sentido”.....	69
7. Reconsiderando a identificação sentido/condições de verdade.....	72
8. Problemas com a forma sujeito/predicado.....	77
9. A solução do Tractatus.....	85
10. “Possibilidade”, “sentido” e “significatividade.....	89
11. O escândalo das proposições necessárias no Tractatus.....	95
12. O caso das Tautologias e das Contradições.....	96
13. Outros tipos de proposições necessárias.....	98
Predicações em contextos necessários.....	99
Identidades.....	100
Proposições da filosofia.....	102
III Os arredores da nova filosofia da matemática de Wittgenstein.....	106
14. Introdução.....	106
15. O antirealismo semântico de Wittgenstein.....	110
16. A impredicatividade na época do Tractatus.....	113
17. A impredicatividade na fase madura.....	115

18. Antirealismo e possibilidade lógica.....	119
19. O intuicionismo contemporâneo e a noção de possibilidade lógica.....	123
Crítica ao formalismo.....	124
Prova e evidência.....	126
A distinção canônico/não canônico.....	127
20. Os quatro espaços semânticos e modais, novamente considerados.....	130
 IV. A concepção wittgensteineana de “regra matemática”.....	 137
21. Regras gramaticais e desqualificação de testemunhos.....	137
22. O atomismo da concepção Wittgensteineana de proposição matemática.....	144
23. Exemplos retirados da geometria.....	150
24. A interpretação de afirmações aritméticas simples e a formulação “atributiva” das regras.....	155
25. Como Wittgenstein resolveria o problema das “contas muito grandes”?.....	159
26. Atemporalidade das regras matemáticas.....	162
27. O aspecto “anti-intuitivo” das propostas de Wittgenstein.....	168
28. Primeira ilustração da dialética argumentativa de Wittgenstein: a operação de “contagem”.....	177
29. Segunda ilustração da dialética argumentativa de Wittgenstein: o algoritmo da multiplicação.....	180
30. Considerações finais e vislumbre adiante: a conexão Quine/Wittgenstein.....	187
Os dois elementos anti-intuitivos na noção de regra.....	189
Ruptura de comunicação.....	190
“Ruptura comunicacional” e “tradução radical”.....	192
A lógica por trás de uma situação de rompimento comunicacional extremo.....	194
Quine, a noção wittgensteineana de “regra” e seus dois aspectos anti-intuitivos...194	
Lógica “vereditiva” e analiticidade.....	197
31. Atribuição e impossibilidade.....	199
 V Referências Bibliográficas.....	 206
Obras de Wittgenstein.....	206
Bibliografia mencionada.....	207

Introdução Geral

«...temos de encontrar alguma maneira neutra de formularmos as concepções de significados rivais de forma a sermos capazes de discutir seus méritos sem prejudicar o assunto em favor de um ou de outro.»¹

«O impasse é particularmente frustrante porque aparentemente não há um ponto de vista comum a partir do qual avaliar e julgar o assunto.»²

Há um agudo desconforto intelectual que atinge o próprio núcleo de nossa racionalidade: a matemática. Não estamos nos referindo simplesmente ao inusitado da ocorrência de um cisma naquela que deveria ser a mais exata das ciências, a sua extravagante divisão em seitas oponentes. O desconforto atinge todas essas facções, todas as tentativas de solução até agora propostas. A dificuldade não envolve propriamente desacordo sobre os métodos de demonstração e de cálculo usados *no interior* da matemática.³ Uma notável aparência de concordância reina ali.⁴ O desconforto surge, em todo o seu intenso rigor, quando procuramos pensar sobre a significação mais ampla dos resultados obtidos, a racionalidade por trás de nossos princípios de prova, enfim, o lugar ocupado pela matemática em relação ao resto de nossos conhecimentos.

O objetivo dessa tese é apresentar, da maneira a mais clara e direta que conseguirmos, uma proposta de solução para aquelas dificuldades. Essa proposta é resultado de um imenso esforço, feito pelo filósofo *Ludwig Wittgenstein* ao longo de toda uma vida, visando sempre

¹ Dummett, M., *The logical basis of metaphysics* 1993. Pg. 17. Todas as traduções de textos em inglês são de nossa autoria.

² SHAPIRO, S. *Foundations without Foundationalism: A case for second-order logic*. 1999. Pg. ix, pg. 197

³ Pelo menos dentro de cada escola.

⁴ Stewart Shapiro comenta esta aparente tranquilidade: «Há uma concordância quase universal entre aos matemáticos de hoje em dia sobre a prática da matemática informal e sobre o uso do discurso informal. Com a exceção dos construtivistas, não há nenhuma discordância geral e sistemática sobre exemplos de demonstrações corretas, pelo menos não no momento. No máximo, há alguma rusga ocasional. SHAPIRO, S. *Foundations without Foundationalism: A case for second-order logic*. 1999 Pg. ix, pg. 210

uma elucidação completa daquelas dificuldades. Uma das teses que procuraremos defender ao longo desse trabalho é exatamente o quanto esse projeto de elucidação do estatuto filosófico da lógica e da matemática esta na raiz de boa parte da obra filosófica daquele pensador. Neste trabalho, adotaremos um ponto de vista geral bastante ousado sobre a obra de Wittgenstein. Nossa tese será a de que podemos ver toda a filosofia daquele autor como interessada centralmente em duas noções fundamentais, as noções de *possibilidade* e de *sentido*, e na maneira correta como devemos conceber as relações entre elas.

Geralmente associamos a obra de Wittgenstein a uma discussão muito elaborada da noção de *sentido*. O que só recentemente tem sido percebido e convenientemente explorado⁵, no entanto, é a extraordinária importância que a noção de *possibilidade* também tem na obra daquele autor. Não nos parece exagero encarar a obra de Wittgenstein como a grande discussão contemporânea sobre as noções modais aléticas, pelo menos quando essas são tomadas desde um ponto de vista estritamente filosófico. Como veremos em detalhes no curso desta investigação, desde seus primeiros trabalhos, Wittgenstein traz uma certa intuição, central à sua filosofia, sobre como deveríamos corretamente encarar as relações entre *sentido* e *possibilidade*. Essa intuição inicial, aceita pelo filósofo durante toda a sua vida, desempenha o papel de um princípio norteador para totalidade de sua obra. Mais do que isto, tentaremos mostrar como esse “princípio norteador” estabelece mesmo uma espécie de núcleo de *identidade* para a filosofia de Wittgenstein, um fio condutor geral para seu pensamento, do *Tractatus Logico-Philosophicus às investigações Filosóficas*.

Nossa investigação estará dividida em três etapas principais. No primeiro capítulo, ainda de caráter introdutório, ofereceremos um rápido apanhado das dificuldades que mencionamos acima envolvendo nosso entendimento filosófico da matemática e de alguns de seus resultados mais recentes. Já nesta etapa inicial adotaremos como guia de nossa discussão, quatro conceitos fundamentais que nos acompanharão durante todo o desenrolar de nossa tese, os conceitos de : “concebibilidade”, “exprimibilidade”, “possibilidade real” e “possibilidade

⁵ Poderíamos mencionar aqui, principalmente, o recente volume dedicado ao *Tractatus Logico-Philosophicus*: Bradley, R. *The Nature of all Being*. 1992. Ver cap 2.

lógica”. Nessa primeira etapa, propositalmente evitaremos qualquer referência à obra de Wittgenstein. Nosso intuito é encararmos essas dificuldades ainda da maneira como elas se apresentam quando vistas *de fora* do contexto daquela filosofia, i.e., tal qual ela aparece na literatura corrente sobre filosofia da lógica e da matemática atuais.

A segunda etapa de nossa investigação tratará, já no interior da obra de Wittgenstein, da semântica baseada na conexão entre as noções de “sentido” e “possibilidade” (na versão em que ela aparece nos *Tractatus Logico-Philosophicus*). Procuraremos contrastar aquela abordagem semântica com duas outras abordagens mais tradicionais, o *composicionalismo* e o *mentalismo*. O clímax de nossa discussão se dará com o diagnóstico de um impasse envolvendo a proposta de Wittgenstein: sua quase total inabilidade em oferecer uma elucidação para o conteúdo semântico das proposições necessárias.

Na terceira e última etapa de nossa investigação (envolvendo o terceiro e quarto capítulo de nosso trabalho), entraremos finalmente na fase madura do pensamento de Wittgenstein. Nosso foco de interesse será a nova solução que o filósofo apresenta para o conteúdo semântico das proposições necessárias: o novo conceito de “regra de sentido” proposto pelo autor. Procuraremos comentar, em algum detalhe, as soluções que o filósofo propõe para a interpretação de certas proposições matemáticas elementares. Dedicaremos especial atenção ao seu tratamento da idéia de “operação matemática” no contexto de proposições da aritmética elementar. No seguimento final de nosso trabalho, discutiremos rapidamente certas conexões entre a noção wittgensteineana de “regra” e certos elementos da filosofia de Willard Van Orman Quine. Por fim, procuraremos indicar a importância que o conceito de “regra” tem para a filosofia de Wittgenstein como um todo, especialmente em relação ao que chamamos de “virada atributiva” de suas concepções semânticas.

Antes de encerrarmos essa introdução geral, uma palavra sobre a metodologia por nós empregada nessas investigações. Nossa abordagem nunca foi propriamente a de “exegeta”; nosso objetivo nunca foi o de oferecermos um registro completo e exaustivo de cada inflexão do pensamento de Wittgenstein, mesmo em relação especificamente aos temas tratados por nós.

Nosso intuito foi sempre o de delinear da forma mais clara e direta possível o que nos parece ser a *proposta filosófica* do autor. Assim, não hesitamos mesmo, quando nos pareceu necessário, em recorrermos a uma certa “reconstrução” de alguns exemplos e argumentos para explicarmos algumas nuances de seu pensamento.

Procuramos apoiar, é claro, esses vãos exegéticos mais ousados com referências textuais de apoio (que julgamos suficientes). Estamos cientes, no entanto, que muitas vezes o material textual à nossa disposição suporta mais de uma interpretação, e que, essas mesmas passagens, nas mãos de outros autores, têm servido de apoio a interpretações muito diferentes das nossas. Procuramos reduzir ao mínimo, no entanto, a polêmica com outros comentaristas. Nos pareceu mais sensato concentrarmos nossos esforços diretamente na tarefa de tornar clara e coerente nossa proposta interpretativa.

Estamos convencidos da grande relevância das soluções de Wittgenstein, mesmo para temas bem atuais da discussão filosófica, como as dificuldades envolvendo a noção de “modelo” e “computabilidade” na filosofia da matemática e as disputas em torno das abordagens “holista”, “molecularista” e “atomista” em semântica. Por outro lado, vemos com tristeza que, talvez devido ao estágio ainda incipiente de entendimento daquelas propostas, muitas vezes o formidável esforço daquele autor no sentido de compor uma concepção filosófica ampla, estruturada e coerente permanece melancolicamente isolado e incomunicável.

