

# Parte II

## Modulação

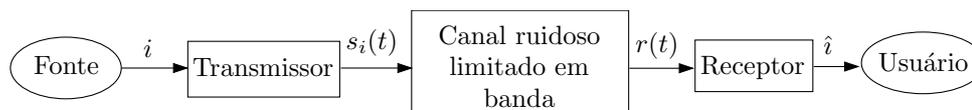
## 5 Transmissão Digital

Neste capítulo, a teoria da transmissão digital de sinais é revisada. Esta teoria fornece a base matemática para a construção de sistemas que permitam transportar, da maneira mais eficiente possível, uma informação digital através de um canal de forma de onda.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 5.1 desenvolve um modelo vetorial para a transmissão de sinais através de um canal limitado em banda sujeito à adição de ruído gaussiano branco. Uma extensão desse modelo para canais com outros tipos de perturbações é também discutida nesta seção. Na Seção 5.2, os parâmetros utilizados para a comparação entre diferentes sistemas de transmissão são apresentados. Alguns exemplos de sistemas que podem ser construídos a partir desta teoria são descritos na Seção 5.3.

### 5.1 Modelo Vetorial

Considere o modelo de um sistema de comunicações mostrado na Fig. 5.1 [39]. A cada intervalo de duração  $T$ , uma dentre  $M$  mensagens equiprováveis é escolhida para transmissão. Cada mensagem  $i \in \{1, \dots, M\}$  está associada a um sinal  $s_i(t)$ ,  $0 < t \leq T$ , pertencente a um conjunto  $\mathcal{S} = \{s_i(t)\}_{i=1}^M$ . O transmissor envia o sinal correspondente através de um canal ruidoso limitado a uma banda  $W$ , o qual transforma o sinal transmitido no sinal recebido  $r(t)$ . O receptor então processa o sinal recebido e decide que a mensagem  $\hat{i}$  foi transmitida.



**Figura 5.1:** Modelo de um sistema de transmissão digital.

A abordagem tradicional para o projeto de transmissor e receptor é inicialmente substituir o canal de forma de onda por um canal vetorial (Fig. 5.2). Isso é realizado expandindo-se os sinais  $s_i(t)$  em uma série de funções. Os sinais  $s_i(t)$  podem então ser escritos como

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N x_{ij} \phi_j(t), \quad i = 1, \dots, M \quad (5-1)$$

onde os coeficientes  $x_{ij}$  são números reais, e as *funções de base*  $\phi_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , são ortonormais e limitadas a uma duração  $T$  e a uma banda  $W$ . É matematicamente possível encontrar um máximo de  $N = 2TW$  funções distintas obedecendo a essas restrições.<sup>1</sup>

Os coeficientes  $x_{ij}$  podem ser obtidos através da correlação do sinal  $s_i(t)$  com as funções de base:

$$x_{ij} = \int_0^T s_i(t) \phi_j(t) dt, \quad j = 1, \dots, N. \quad (5-2)$$

Quando  $s_i(t)$  é transmitido através de um canal com ruído aditivo gaussiano branco (AWGN), o sinal recebido é dado por

$$r(t) = s_i(t) + z(t) \quad (5-3)$$

onde  $z(t)$  é um processo estocástico gaussiano de média nula e densidade espectral de potência  $S_z(f) = N_0/2$ . Mostra-se que quando o sinal recebido é decomposto nas funções de base, os coeficientes do vetor recebido são dados por

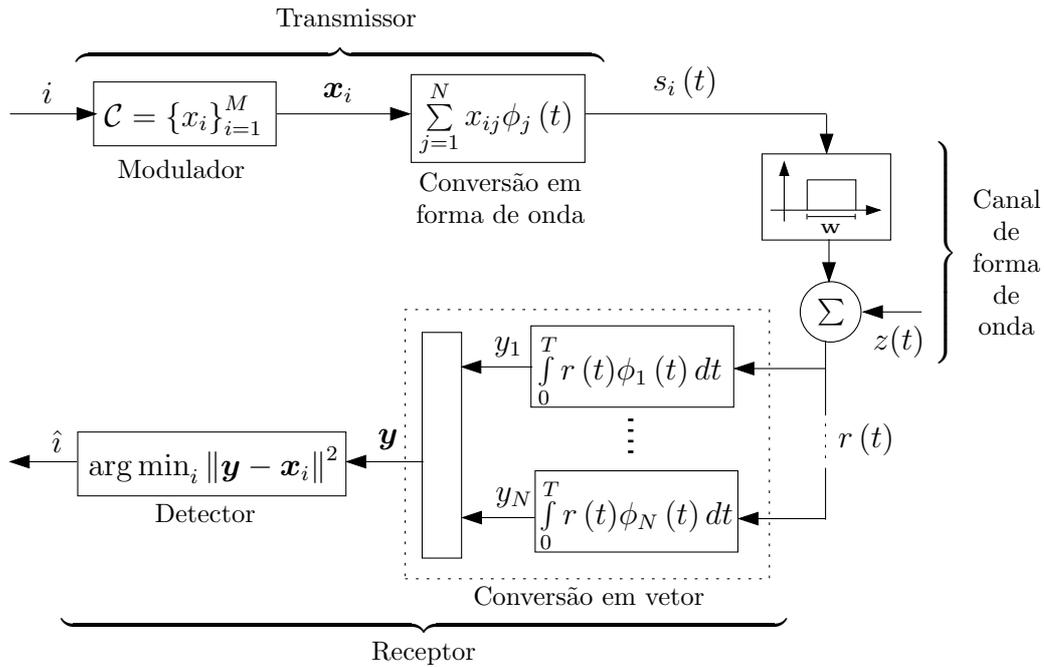
$$y_j = x_{ij} + z_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (5-4)$$

onde  $z_j$  é uma variável aleatória gaussiana de média nula e variância  $N_0/2$ .

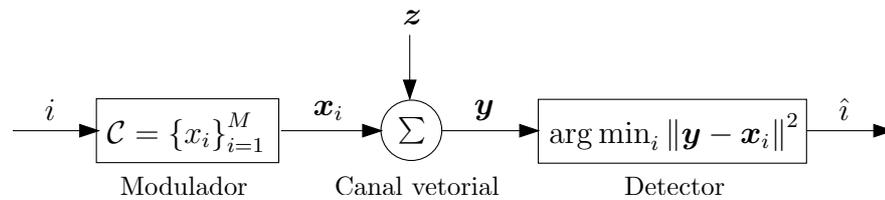
Este procedimento nos permite representar os sinais  $s_i(t)$  e  $r(t)$ , respectivamente, como os vetores  $N$ -dimensionais  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{iN})^T$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$  definidos no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^N$ . O conjunto de todos os vetores de transmissão  $\mathcal{C} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^M$  é denominado *constelação* ou *código*. Cada vetor  $\mathbf{x}_i$  é também chamado de *palavra do código*. A expressão para o vetor recebido se torna portanto

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_i + \mathbf{z} \quad (5-5)$$

<sup>1</sup>Note que o número de funções ortonormais de duração  $T$  que podem ser acomodadas em uma banda  $W$  depende das definições de “banda” e de “duração”, uma vez que nenhuma função é simultaneamente limitada no tempo e na frequência. A expressão  $N = 2TW$  representa um limite teórico [31, 39], conveniente para fins de comparação.



**Figura 5.2:** Modelo de um sistema de transmissão utilizando formas de onda associadas a vetores.



**Figura 5.3:** Modelo vetorial de um sistema de transmissão.

onde  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)^T$  é um vetor aleatório gaussiano com componentes independentes de média nula e variância  $N_0/2$ .

Quando o vetor  $\mathbf{y}$  é recebido, o receptor de máxima verossimilhança decide que foi transmitida a mensagem  $\hat{i}$  associada ao vetor de  $\mathcal{C}$  que está à menor distância euclidiana de  $\mathbf{y}$ , ou seja,

$$\hat{i} = \arg \min_{i \in \{1, \dots, M\}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2. \quad (5-6)$$

Como as mensagens são equiprováveis, este receptor é também o que minimiza a probabilidade de uma decisão errada.

O modelo de transmissão que utiliza formas de onda associadas a vetores e o modelo vetorial simplificado são ilustrados nas figuras 5.2 e 5.3.

Note que o modelo apresentado nesta seção considera uma única mensagem transmitida  $i$  em um intervalo de transmissão  $0 < t \leq T$ , mas pode ser diretamente estendido para a transmissão de várias mensagens  $i_k$  em intervalos  $(k - 1)T < t \leq kT$ .

### 5.1.1

#### Canal com imperfeições

O desenvolvimento acima assume que o canal tem como única perturbação o ruído aditivo. Outros tipos de perturbações podem ser incorporados ao modelo através de uma *matriz de imperfeições*  $H$  que multiplica o vetor transmitido  $\mathbf{x}_i$  [19]. A expressão para o vetor recebido pode então ser escrita como

$$\mathbf{y} = H\mathbf{x}_i + \mathbf{z} \quad (5-7)$$

onde  $H$  é uma matriz real  $n \times n$ . Note que o modelo permite que a matriz  $H$  varie a cada intervalo de transmissão.

Assumindo que o estado do canal é conhecido pelo receptor (estimação de canal perfeita), a detecção de máxima verossimilhança é dada por

$$\hat{i} = \arg \min_{i \in \{1, \dots, M\}} \|\mathbf{y} - H\mathbf{x}_i\|^2. \quad (5-8)$$

Alguns tipos de imperfeições que podem ser caracterizadas por esse modelo são o *desvanecimento* e a *seletividade em frequência*. Neste trabalho, estamos apenas interessados no caso de desvanecimento sem seletividade em frequência.

Neste caso, quando as funções de base  $\phi_j(t)$  são escolhidas de forma a não se sobreporem no tempo (por exemplo, o mesmo pulso definido em intervalos disjuntos), a matriz de imperfeições pode ser caracterizada como

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_N \end{pmatrix}. \quad (5-9)$$

O canal é dito com desvanecimento *rápido* quando os coeficientes  $h_1, \dots, h_N$  podem ser diferentes, e com desvanecimento *lento* quando  $H = hI$ , ou seja,  $h_1 = \dots = h_N = h$ . Note que quando  $H = I$  o modelo se reduz ao do canal AWGN.

## 5.2

### Parâmetros de Comparação

Na escolha de um sistema de comunicações, estamos interessados no compromisso entre três grandezas: a ocupação espectral, a confiabilidade da transmissão e a razão entre a potência de sinal e o nível espectral de ruído

requerida na recepção para que se atinja tal confiabilidade. Estes parâmetros são tradicionalmente expressos através da *eficiência espectral*  $\eta = R_b/W$ , da probabilidade de erro de símbolo  $P(e)$  e da razão  $E_b/N_0$ , respectivamente, onde  $R_b$  é a taxa de transmissão em bits por segundo,  $E_b = \mathcal{P}/R_b$  é a energia transmitida por bit e  $\mathcal{P}$  é a potência de transmissão.<sup>2</sup>

Nesta seção, desenvolvemos algumas versões desses parâmetros que são mais adequadas à comparação de códigos de diferentes dimensões  $N$ .

### Taxa de informação

A *taxa de informação* de um código, em bits por uso de canal unidimensional, é definida como

$$R \triangleq \frac{1}{N} \log M \quad (\text{bits/uso de canal 1-D}). \quad (5-10)$$

A justificativa para  $R$  é baseada na eficiência espectral. Uma vez que  $R_b = \frac{1}{T} \log M$  e  $N = 2TW$ , vemos que  $\eta = R_b/W = 2R$ , ou seja, a eficiência espectral é proporcional a taxa de informação  $R$ .

### Energia média

A *energia média por palavra por dimensão* de um código é definida como

$$E \triangleq \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{x}_i\|^2 \quad (5-11)$$

Como as palavras  $\mathbf{x}_i$  são usadas com igual probabilidade, a energia média por palavra pode ser escrita como  $E_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{x}_i\|^2$ . Uma vez que  $E_b = E_s/\log M$ , encontramos que  $E_b = NE/\log M = \frac{1}{R}E$ , isto é, entre códigos com a mesma taxa  $R$ , aqueles que apresentam menor  $E$  contém menor energia por bit.

<sup>2</sup>Note que não utilizamos o parâmetro mais comum para medida de confiabilidade, a probabilidade de erro de bit  $P_b(e)$ , porque seu valor depende fortemente do mapeamento utilizado entre os bits de informação e os vetores  $\mathbf{x}_i$ . Enquanto, em algumas modulações, um mapeamento Gray pode ser utilizado, ou ainda, uma expressão simples para  $P_b(e)$  existe, o mesmo não necessariamente acontece em modulações genéricas. Em todo caso, as probabilidades de erro de símbolo e de bit estão, obviamente, relacionadas:  $P(e)/\log M \leq P_b(e) \leq P(e)$ .

## Distância mínima

A *distância euclidiana mínima* entre as palavras de um código é definida como

$$d_{\min} \triangleq \min_{i,j, i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \quad (5-12)$$

Para valores de razão sinal-ruído moderados a altos, uma aproximação satisfatória da probabilidade de erro de um sistema pode ser obtida a partir da distância mínima entre as palavras [24]. Assim, consideramos a distância mínima como nossa medida de confiabilidade neste trabalho.<sup>3</sup>

Para ilustrar a utilização desses parâmetros, suponha, por exemplo, que a confiabilidade de um sistema é dada por uma função de  $d_{\min}^2/2N_0$ , isto é

$$P(e) = f\left(\frac{d_{\min}^2}{2N_0}\right). \quad (5-13)$$

Aplicando as definições acima, obtemos

$$P(e) = f\left(\frac{d_{\min}^2}{2E} \frac{E}{N_0}\right) = f\left(\frac{d_{\min}^2}{2E} \frac{E_b}{N_0} R\right) = f\left(\gamma \frac{E_b}{N_0}\right) \quad (5-14)$$

onde

$$\gamma = \frac{d_{\min}^2}{2E} R. \quad (5-15)$$

Conclui-se que, para uma mesma taxa  $R$  (e, conseqüentemente, uma mesma eficiência espectral  $\eta$ ), códigos com maior razão  $d_{\min}^2/E$  apresentam melhor desempenho.

Assim, com relação ao projeto de sistemas, estamos interessados em encontrar códigos que, para uma dada taxa  $R$  e uma distância mínima  $d_{\min}$ , possuem o menor valor de  $E$  possível; isto é, códigos que requerem o menor valor da razão  $E_b/N_0$  tal que sejam obtidas a confiabilidade especificada por  $d_{\min}^2/2N_0$  e a eficiência espectral especificada por  $R$ .

<sup>3</sup>Note que, em alguns casos,  $d_{\min}$  é um parâmetro ainda mais significativo que  $P(e)$ . Considere um sistema com um código corretor de erros projetado com o objetivo de se beneficiar da modulação utilizada (um código de Ungerboeck [36], por exemplo). Nesse caso, é fácil ver que o desempenho do sistema é muito mais influenciado pela distância entre os símbolos da modulação codificada do que pela probabilidade de erro de símbolo (ou de bits) da modulação sem codificação.

### 5.3

#### Exemplos

Diversos tipos de sistemas podem ser obtidos de acordo com a escolha das funções de base e da correspondente constelação. Por exemplo, considere  $N = 2$  e as funções de base

$$\phi_1(t) = \phi^{(I)}(t) = \sqrt{2} \bar{g}(t) \cos(2\pi f_c t + \theta), \quad 0 < t \leq T \quad (5-16)$$

$$\phi_2(t) = \phi^{(Q)}(t) = -\sqrt{2} \bar{g}(t) \sin(2\pi f_c t + \theta), \quad 0 < t \leq T. \quad (5-17)$$

onde  $\bar{g}(t)$  é o pulso formatador normalizado para energia unitária  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{g}(t)|^2 dt = 1$ . Esse é um sistema do tipo AM-PM. Uma modulação específica pode ser obtida combinando-se um sistema “base” com uma constelação ou código  $\mathcal{C}$ . Por exemplo, se

$$\mathcal{C} = \{(a, a)^T, (a, -a)^T, (-a, a)^T, (-a, -a)^T\} \quad (5-18)$$

então a modulação resultante é um QPSK.

#### Múltiplos intervalos

Um outro sistema de interesse (que pode ser entendido como um extensão do sistema descrito no exemplo anterior) pode ser obtido agrupando-se  $N_T$  intervalos de transmissão (consecutivos) de duração  $\tau$  em um novo intervalo de transmissão de duração  $T$ . Isto é, consideramos  $N = 2N_T$  e

$$\begin{aligned} \phi_{2j-1}(t) &= \phi_j^{(I)}(t) \\ &= \sqrt{2} \bar{g}(t) \cos(2\pi f_c(t - (j-1)\tau) + \theta), \quad (j-1)\tau < t \leq j\tau \end{aligned} \quad (5-19)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2j}(t) &= \phi_j^{(Q)}(t) \\ &= -\sqrt{2} \bar{g}(t) \sin(2\pi f_c(t - (j-1)\tau) + \theta), \quad (j-1)\tau < t \leq j\tau \end{aligned} \quad (5-20)$$

onde  $\tau = T/N_T$  e  $j = 1, \dots, N_T$ . Uma palavra  $\mathbf{x}_i$  desse sistema tem os seguintes componentes:<sup>4</sup>

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & \dots & N_T \\ \begin{matrix} I \\ Q \end{matrix} & \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_5 & \dots & x_{N-1} \\ x_2 & x_4 & x_6 & \dots & x_N \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (5-21)$$

<sup>4</sup>Note que  $\mathbf{x}_i$  é um vetor  $N \times 1$ . Os coeficientes  $x_1, \dots, x_N$  são apresentados em forma de matriz apenas para destacar sua formação.

Um outro sistema de interesse pode ser obtido a partir do sistema acima simplesmente descartando-se<sup>5</sup> as funções em quadratura  $\phi_j^{(Q)}(t)$ . Nesse caso, temos que  $N = N_T$  e as palavras do código tem componentes que correspondem a

$$I \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & N_T \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_N \end{pmatrix}. \quad (5-22)$$

Se, por exemplo,  $N = 4$  e

$$\mathcal{C} = \{(a, 0, 0, 0)^T, (0, a, 0, 0)^T, (0, 0, a, 0)^T, (0, 0, 0, a)^T\} \quad (5-23)$$

então obtemos uma modulação PPM (*pulse position modulation*).

### Múltiplas portadoras

Outra possibilidade de extensão é a extensão freqüencial: consideramos  $N = N_W$  funções de base em  $N_W$  freqüências adjacentes com espaçamento  $W/N_W$ , ou seja,

$$\phi_j(t) = \phi_j^{(I)}(t) = \sqrt{2} \bar{g}(t) \cos(2\pi f_j t + \theta), \quad 0 < t \leq T \quad (5-24)$$

onde  $f_j - f_{j-1} = W/N_W = 1/2T$  e  $j = 1, \dots, N_W$ . Nesse caso, as palavras  $\mathbf{x}_i$  tem os seguintes componentes

$$I \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & N_W \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_N \end{pmatrix}. \quad (5-25)$$

Novamente, se  $N = 4$  e

$$\mathcal{C} = \{(a, 0, 0, 0)^T, (0, a, 0, 0)^T, (0, 0, a, 0)^T, (0, 0, 0, a)^T\} \quad (5-26)$$

então obtemos uma modulação 4-FSK. Note que os códigos em (5-23) e (5-26) são exatamente os mesmos; devem, portanto, possuir o mesmo desempenho em canal AWGN (*cf.* seção anterior). Este exemplo ilustra uma propriedade interessante dessa formalização: na avaliação do desempenho de uma modulação, não é necessário considerar a base de funções utilizada, basta considerar o *código*.

Se incluirmos no sistema acima as funções em quadratura  $\phi_j^{(Q)}(t)$ , obteremos um novo sistema com  $N = 2N_W$  funções de base ocupando um

<sup>5</sup>Observa-se que, para um mesmo  $N$ , este sistema ocupa o dobro da banda do sistema anterior, pois metade das dimensões são “desperdiçadas.”

total de  $N_W$  frequências igualmente espaçadas de  $W/N_W$ , isto é,

$$\phi_{2j-1}(t) = \phi_j^{(I)}(t) = \sqrt{2} \bar{g}(t) \cos(2\pi f_j t + \theta), \quad 0 < t \leq T \quad (5-27)$$

$$\phi_{2j}(t) = \phi_j^{(Q)}(t) = -\sqrt{2} \bar{g}(t) \sin(2\pi f_j t + \theta), \quad 0 < t \leq T. \quad (5-28)$$

onde  $f_j - f_{j-1} = W/N_W = 1/T$  e  $j = 1, \dots, N_W$ . Note que a faixa de separação frequencial aumenta em relação ao sistema anterior de forma a permitir que as funções em fase e quadratura sejam ortogonais. As palavras desse sistema tem componentes que podem ser representados de forma análoga a (5-21), como

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & \dots & N_W \\ I & \left( \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_5 & \dots & x_{N-1} \end{matrix} \right) \\ Q & \left( \begin{matrix} x_2 & x_4 & x_6 & \dots & x_N \end{matrix} \right) \end{matrix}. \quad (5-29)$$

Este tipo de sistema corresponde ao conhecido sistema OFDM. Como exemplo, suponha uma constelação para o QPSK dada por

$$\mathcal{A} = \{(a, a)^T, (a, -a)^T, (-a, a)^T, (-a, -a)^T\}. \quad (5-30)$$

O código para uma modulação OFDM/QPSK (isto é, um sistema OFDM com modulação de portadora QPSK) pode ser obtido como

$$\mathcal{C} = \overbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}^{N_W}. \quad (5-31)$$

Uma vez desenvolvidas as extensões no tempo, na frequência e em quadratura, é fácil ver que outras duas combinações ainda podem ser obtidas: extensão no tempo e na frequência de uma portadora em fase, e extensão no tempo e na frequência de um par de portadoras em fase e quadratura. No primeiro caso, temos  $N = 2TW = N_T N_W$  funções de base, e no segundo caso,  $N = 2TW = 2N_T N_W$ , sendo que em ambos os casos as funções têm duração  $\tau = T/N_T$  e espaçamento de frequências  $f_j - f_{j-1} = W/N_W$ .

A discussão apresentada nesta seção visa ilustrar como as funções de base podem ser escolhidas de acordo com o sistema que se pretende obter. A partir de um mesmo código  $\mathcal{C}$ , diferentes sistemas podem ser obtidos de acordo com a base de funções utilizada, a qual pode ser escolhida tendo em vista a aplicação pretendida. No próximo capítulo, a não ser quando mencionado o contrário, desconsideramos a escolha da base de funções e nos restringimos apenas ao código utilizado.