

## 5. Resultados da Análise Não-Linear

Neste capítulo são apresentados os resultados das análises feitas para o problema não-linear, incluindo variações na rigidez e altura da fundação bem como nas condições de apoio da coluna.

O problema é analisado para a fundação ora com comportamento linear, segundo o Modelo Linear de Winkler, ora com comportamento não-linear, segundo o Modelo Não-Linear de Winkler.

O objetivo maior neste ponto do trabalho é estudar o caminho pós-crítico da coluna a partir do momento em que esta perde sua estabilidade.

Nos resultados apresentados, o caminho pós-crítico é representado através de um gráfico no qual no eixo das abscissas são apresentados os valores dos deslocamentos transversais máximos e no eixo das ordenadas, a relação entre carga aplicada e a carga crítica da coluna.

O caminho pós-crítico também poderia ser representado através de grandezas proporcionais às adotadas, como, por exemplo, tensão/tensão crítica  $\times$  deformação específica máxima, ou ainda, momento/momento crítico  $\times$  curvatura máxima.

Os resultados deste capítulo foram comparados com os obtidos através de um programa computacional baseado no método dos elementos finitos.

Da mesma forma como foi feito no Capítulo 3, é novamente importante mencionar que o problema aqui analisado refere-se à coluna bi-apoiada, com fundação até metade do seu comprimento, conforme ilustrado na Figura 5.1. O problema se modificará na medida em que forem sendo feitas alterações nas suas condições de apoio e altura e rigidez da fundação.

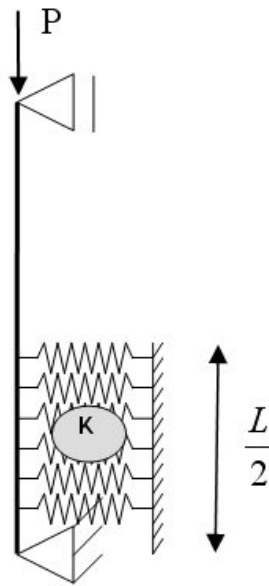


Figura 5.1: Problema padrão.

## 5.1. Resultados Obtidos pelo Método de Ritz para a Coluna com Fundação Elástica Linear

Neste item são apresentados os resultados obtidos através do método de Ritz para o caso da coluna com uma fundação elástica linear, conforme descrito no Capítulo 4.

São analisados os casos da coluna sob diferentes condições de apoio e altura e rigidez da fundação, de modo a se verificar a influência destes parâmetros no comportamento do caminho pós-crítico da coluna.

### 5.1.1. Influência da Rigidez da Fundação

Nas Figuras 5.2.a e 5.2.b são apresentados os caminhos pós-críticos de uma coluna bi-apoiada, com  $h = H/L = 0,5$ , em função de diversos valores adotados para o parâmetro de rigidez do solo,  $K$ .

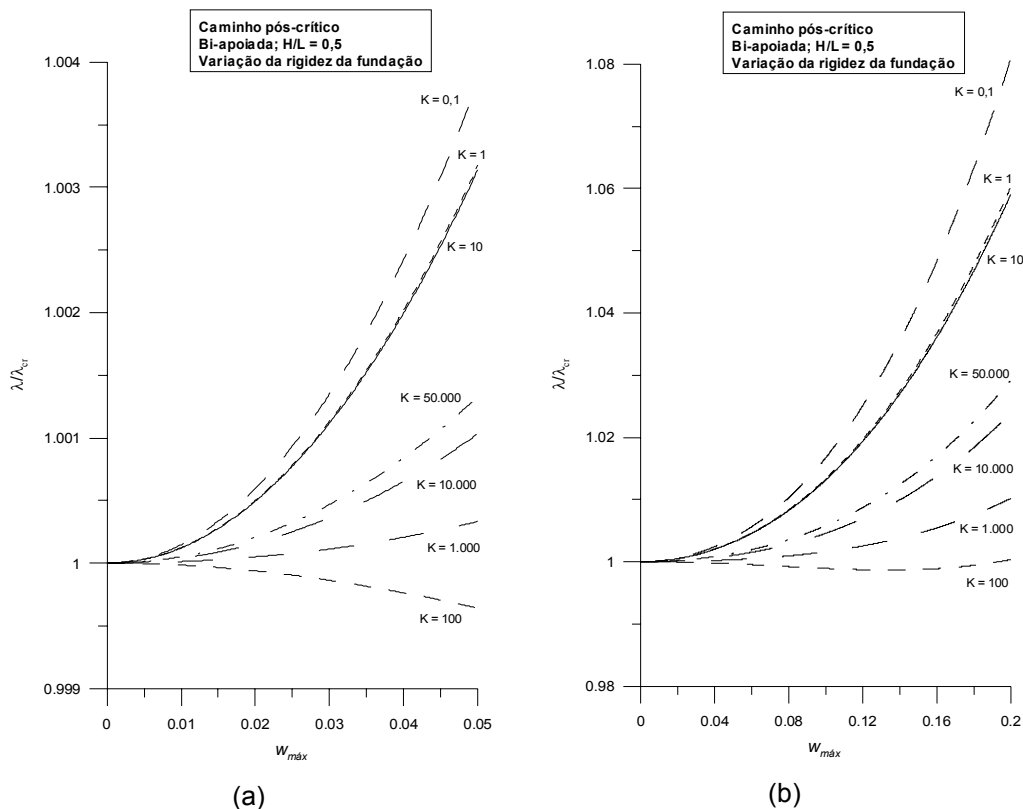


Figura 5.2: Variação do caminho pós-crítico de uma coluna bi-apoiada, com fundação até a metade de seu comprimento, em função de diversos valores adotados para  $K$ .

A única diferença entre essas figuras é a escala em que estão apresentados os resultados. Enquanto a primeira mostra o caminho pós-crítico em seu trecho inicial, a segunda mostra esses mesmos resultados para maiores deflexões. No eixo das ordenadas estão plotados os valores de  $\lambda/\lambda_{cr}$  e todas as curvas partem do valor um. Sendo assim, este ponto representa o início do caminho pós-crítico.

Para valores de  $\lambda/\lambda_{cr}$  inferiores a um, a coluna ainda não atingiu a sua carga crítica, logo não existem deformações transversais. Ou seja, até esse momento, as únicas deformações sofridas pela coluna são deformações axiais, e estes pontos constituem o caminho fundamental o qual é representado pelo eixo vertical do gráfico  $\lambda/\lambda_{cr} \times w_{m\acute{a}x}$ .

Ao atingir a carga crítica, a coluna perde a estabilidade e passa a sofrer também deformações transversais causadas pelos esforços de flexão. Desse momento em diante, a carga pode aumentar ou diminuir à medida que a coluna continua a deformar-se, o que irá depender do tipo de solo no qual parte da coluna está imersa.

Pelos gráficos da Figura 5.2, observa-se que não existe uma relação direta entre a rigidez da fundação e a rigidez efetiva do caminho pós-crítico. Nota-se,

inicialmente, que a curvatura do caminho pós-crítico decresce com a rigidez da fundação, apresentando uma bifurcação simétrica estável. Entretanto, para valores de  $K$  em torno de 100, há uma pequena mudança de concavidade, apresentando a coluna uma bifurcação simétrica instável (visível para pequenas deformações, no gráfico da Figura 5.2.a). A seguir a rigidez pós-crítica volta a crescer com o aumento da rigidez da fundação. Cabe lembrar que a rigidez global do sistema está intimamente ligada à forma do modo crítico bem como a relação entre a energia interna de deformação do trecho enterrado e do trecho desenterrado.

Entretanto, quando esses mesmos resultados são plotados em um gráfico onde o eixo das ordenadas representa a variação da carga aplicada  $\lambda$  (e não mais a relação  $\lambda / \lambda_{cr}$ ), conforme mostrado na Figura 5.3, é possível notar diretamente a influência da rigidez da fundação na capacidade de carga da estrutura.

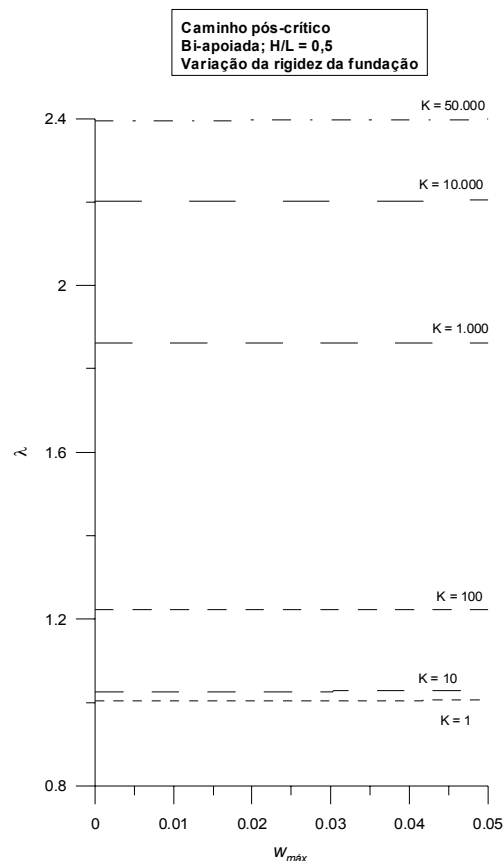


Figura 5.3: Variação das cargas com as deflexões em colunas com as mesmas condições citadas na Figura 5.2.

Pode-se acrescentar ao que foi dito no parágrafo anterior que, quanto maior for a rigidez da fundação, maiores serão as cargas que a coluna conseguirá suportar para uma mesma deformação.

### 5.1.2. Influência da Altura da Fundação

Observa-se através da Figura 5.4 que, para o valor de  $K$  aqui analisado, o caminho pós-crítico é sempre estável independente da relação  $h = H/L$ . Entretanto, como no caso anterior, não há uma relação direta entre a curvatura inicial do caminho pós-crítico e a profundidade da fundação. A influência da rigidez na capacidade de carga da coluna pode ser melhor observada na Figura 5.5 que apresenta a variação da flecha máxima com o parâmetro de carga  $\lambda$ .

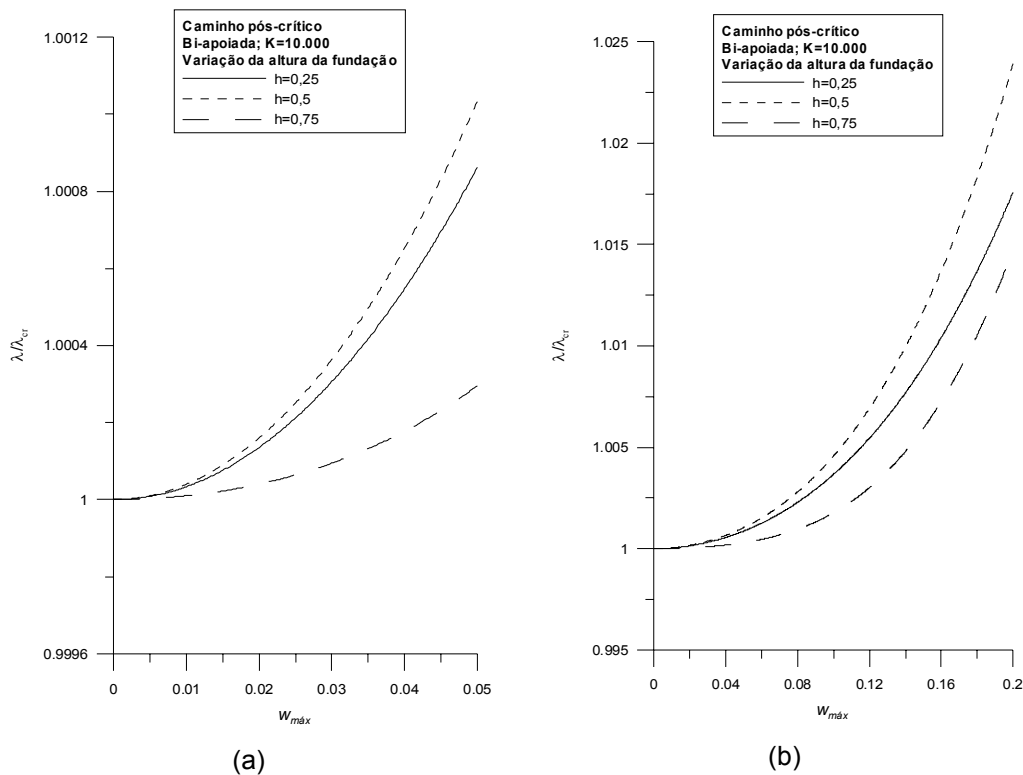


Figura 5.4: Variação do caminho pós-crítico de uma coluna bi-apoiada, com fundação elástica com  $K = 10.000$ , em função de três relações distintas de  $H/L$ .

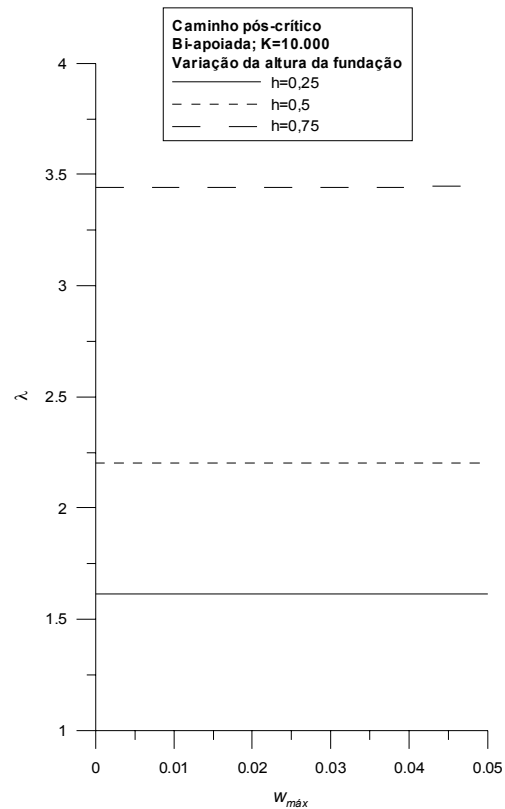


Figura 5.5: Variação das cargas com as deflexões em colunas com as mesmas condições citadas na Figura 5.4.

### 5.1.3. Influência das Condições de Contorno

A influência das condições de contorno no caminho pós-crítico é ilustrada nas Figuras 5.7 e 5.8, onde são mostrados os caminhos pós-críticos para uma coluna semi-enterrada com  $K=10.000$ , considerando as cinco configurações já analisadas no Capítulo 3 e rerepresentadas na Figura 5.6.

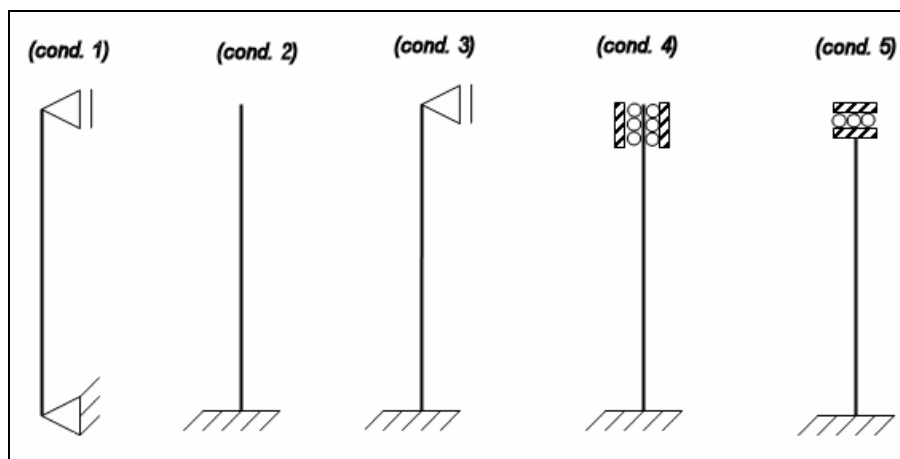


Figura 5.6: Condições de contorno.

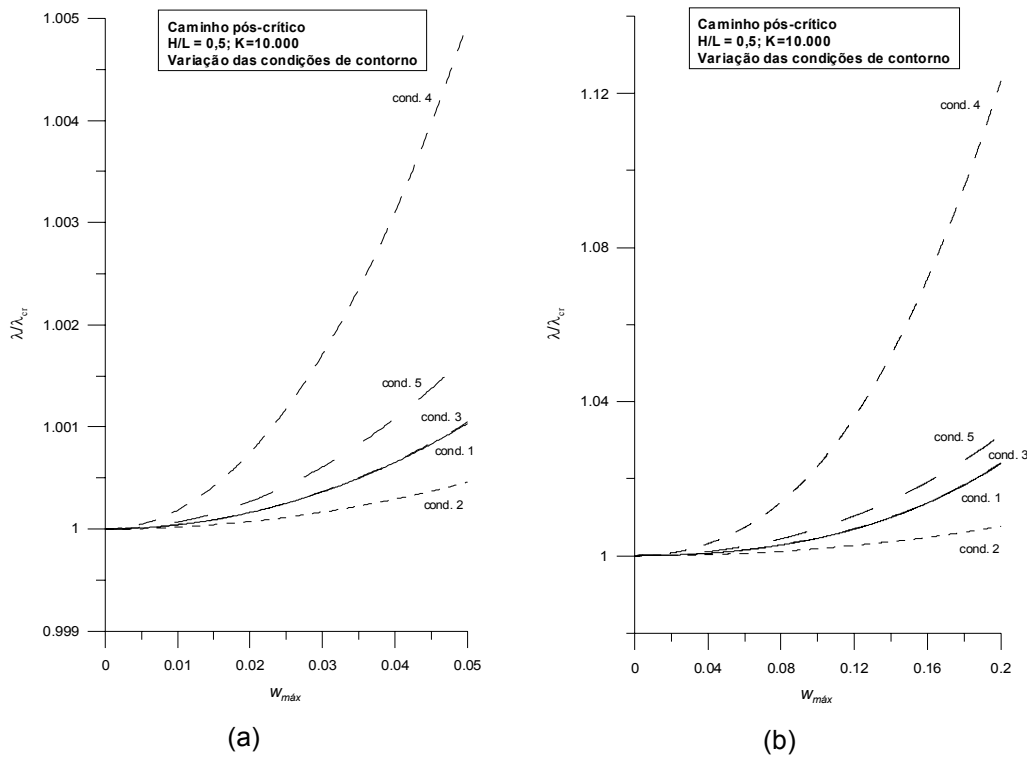


Figura 5.7: Variação do caminho pós-crítico de uma coluna com fundação até metade do seu comprimento e  $K=10.000$ , em função de cinco condições de apoio distintas.

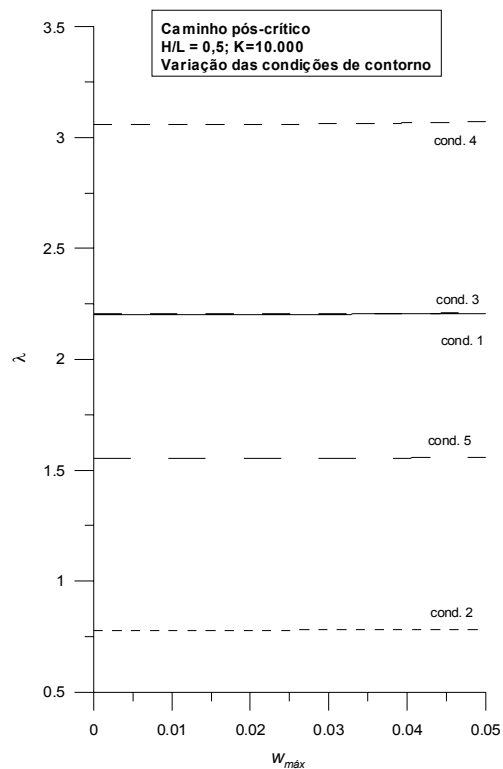


Figura 5.8: Variação das cargas com as deflexões em colunas com as mesmas condições citadas na Figura 5.7.

Observa-se que para as condições de contorno aqui analisadas, o caminho pós-crítico é sempre estável. Nota-se também que há uma influência marcante das condições de contorno no comportamento pós-crítico da coluna.

Em resumo, observa-se uma grande influência de todas as variáveis no caminho pós-crítico e, portanto, na capacidade de carga pós-flambagem da estrutura.

## 5.2. Resultados Obtidos pelo Método de Ritz para a Coluna com Fundação Elástica Não-Linear

De modo a considerar a fundação com um comportamento não-linear, foi adotado o modelo de Winkler Não-Linear. Esse modelo é muito utilizado para representar a maioria dos solos usualmente encontrados na natureza, pois considera que ocorre perda de rigidez à medida que se aumentam as forças exercidas pela estrutura sobre o solo (Greimann, *et al.*, 1987). Nesse caso, diferentemente de em um modelo linear, a reação exercida pelo solo não é proporcional às deflexões da coluna.

Desta forma, o funcional (2.27), apresentado no Capítulo 2, e reescrito em (5.1), é o que representa o problema estudado neste item.

$$\begin{aligned} \pi = & \int_0^L \left[ \frac{1}{2} EI \left( w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) - \frac{1}{2} P \left( w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,x}^4 \right) \right] dx \\ & + \int_0^H \frac{1}{2} k w^2 dx - \int_0^H \frac{1}{2} k_3 w^4 dx \end{aligned} \quad (5.1)$$

A fim de se verificar a influência da rigidez não-linear do solo no caminho pós-crítico da coluna, foi construído o gráfico apresentado na Figura 5.9.



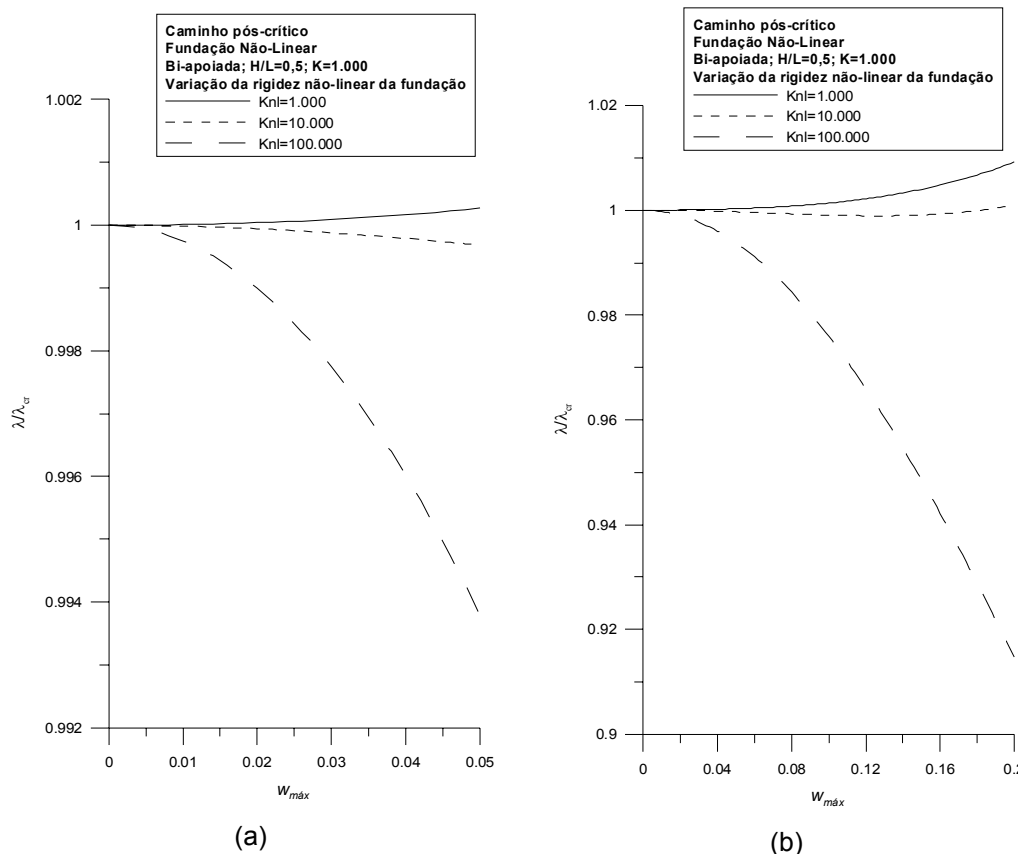


Figura 5.9: Variação do caminho pós-crítico de uma coluna bi-apoiada, com fundação até metade do seu comprimento e  $K = 1.000$ , em função de diversos valores adotados para  $K_{nl}$ .

A Figura 5.9 mostra que à medida que a rigidez da base aumenta, a coluna sofre uma perda de rigidez global, passando a apresentar uma bifurcação instável. Isso pode ser visto ao se tomar um valor constante para o deslocamento transversal máximo e observar o valor correspondente da relação  $\lambda / \lambda_{cr}$ . Nota-se, no gráfico da Figura 5.9.a que, por exemplo, para uma deformação igual a 0,05, a relação  $\lambda / \lambda_{cr}$  da coluna com  $K_{nl} = 1.000$  é um pouco superior a 1,00, enquanto para a coluna com  $K_{nl} = 100.000$ , este valor é menor ( $\lambda / \lambda_{cr} \cong 0,994$ ). Ou seja, essa última coluna tem uma capacidade de suporte menor do que a primeira.

Na Figura 5.10, onde estão apresentados os resultados de um problema idêntico ao anterior, porém com um valor maior para a rigidez linear do solo, observa-se que a forma do caminho pós-crítico é muito semelhante à das figuras anteriores, inclusive com a ordem das curvas sendo mantida. A diferença, nesse caso, é que, por se tratar de uma coluna cuja fundação possui maior rigidez linear, consegue-se atingir cargas com valores mais elevados do que as verificadas no caso anterior.

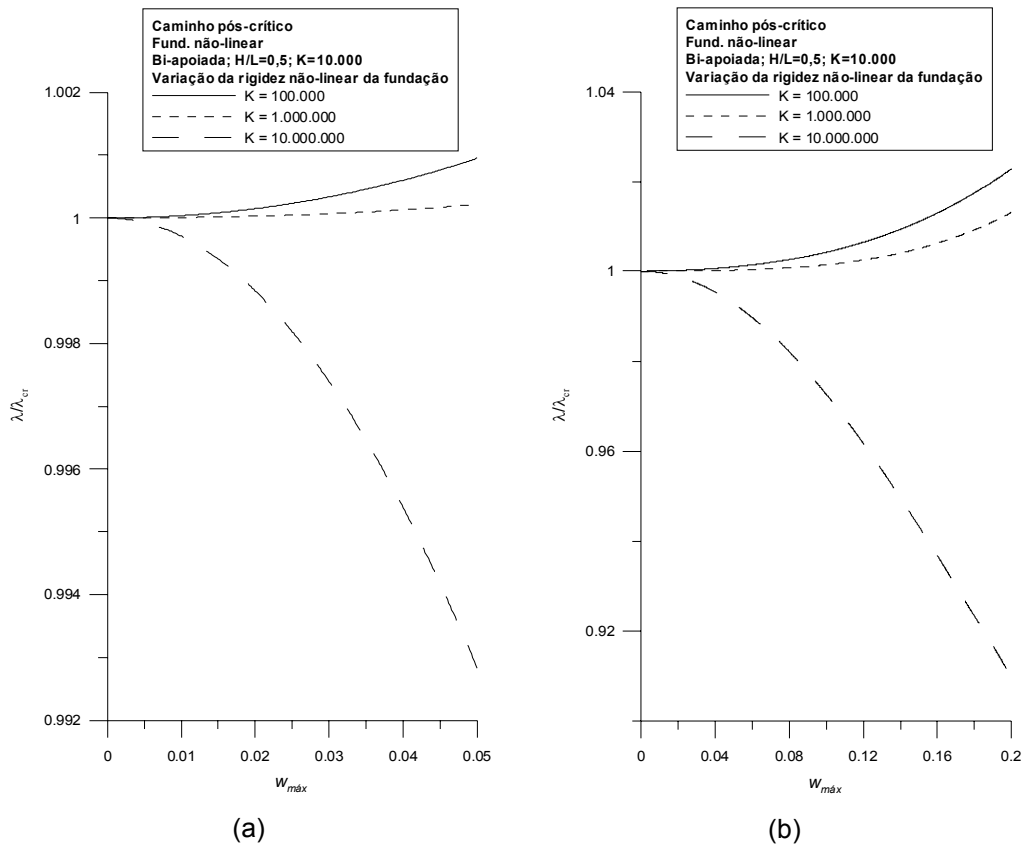


Figura 5.10: Variação do caminho pós-crítico de uma coluna bi-apoiada, com fundação até metade do seu comprimento e  $K = 10.000$ , em função de diversos valores adotados para  $K_{nl}$ .

Foi estudado também o caminho pós-crítico da coluna engastada e livre, chegando-se à resultados muito semelhantes aos da coluna bi-apoiada.

### 5.3. Resultados Obtidos pelo Programa de Elementos Finitos

A título de comparação dos resultados aqui obtidos para a carga crítica e para o comportamento inicial do caminho pós-crítico, a coluna também foi analisada a partir de um programa computacional baseado no método dos elementos finitos, desenvolvido por Silveira (1995).

Nesse programa, a coluna é discretizada em vinte elementos, os quais correspondem a vinte e um pontos nodais, sendo que cada um deles possui três deslocabilidades. Nessa análise, utilizou-se uma coluna com as características apresentadas na Tabela 5.1.

$E$	1.000
$I$	1
$L$	10

Tabela 5.1: Dados do problema analisado pelo método dos elementos finitos.

No programa, as cargas são escritas em função da variável  $P$ , e a rigidez da fundação, em função de  $k$ . A seguir, são apresentados os resultados fornecidos pelo programa.

### 5.3.1. Influência das Imperfeições na Coluna

No programa dos elementos finitos foi simulada, inicialmente, a situação da coluna com imperfeições.

Estas imperfeições podem ter várias origens. As mais comuns são:

(a) Imperfeições quanto à posição da aplicação da carga axial – neste caso a coluna pode estar recebendo cargas de forma que haja uma excentricidade entre o eixo vertical da coluna e o seu ponto de aplicação.

(b) Imperfeições quanto à geometria do eixo da coluna – geralmente causadas por defeitos durante o seu processo de construção.

(c) Imperfeições nos apoios – nem sempre os apoios são executados ou trabalham de forma a representar perfeitamente aqueles usados na modelagem do problema.

Para a coluna engastada na base e livre no topo (condição 2), essas imperfeições foram representadas através da introdução de uma pequena carga lateral,  $\rho$ , no seu topo, fazendo com que o seu comportamento fosse visivelmente modificado, como pode ser observado na Figura 5.11.

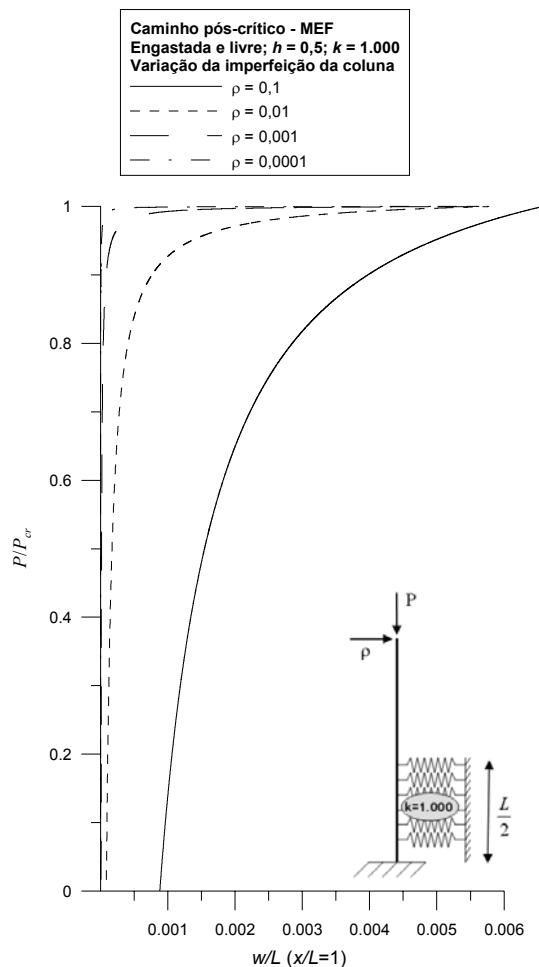


Figura 5.11: Influência da imperfeição da coluna no caminho pós-crítico.

Nesta análise, verifica-se que quanto menor for o valor da força  $\rho$ , que caracteriza a imperfeição da coluna, mais as curvas se aproximam do eixo vertical. Dessa forma, projeta-se que o caminho pós-crítico descrito pela coluna sem imperfeições, seja representado no gráfico anterior através de uma reta que coincide com o eixo das ordenadas até  $P/P_{cr} = 1$ , seguido por uma reta paralela ao eixo das abscissas.

Percebe-se, também, que uma coluna submetida a grandes imperfeições tem sua rigidez diminuída, devido aos maiores deslocamentos observados, resultantes do processo de carregamento.

#### 5.4. Comparação dos Resultados

Para que fosse feita uma comparação entre os resultados obtidos pelos programas baseados na utilização da solução analítica com aqueles obtidos pelo

programa de elementos finitos, fez-se necessário o estabelecimento de uma correlação entre os dados do problema.

No programa de elementos finitos foram utilizados os seguintes dados:

$$L = 10 \quad ; \quad k = 1.000$$

Porém, todas as análises até este ponto do trabalho haviam sido feitas com a consideração da coluna com comprimento unitário.

Dessa forma, resolveu-se reescrever os programas para a condição acima e os resultados foram obtidos em função da variável  $P$ , garantindo-se, assim, uma uniformidade entre os mesmos.

#### **5.4.1. Comparação entre os Caminhos Pós-Críticos**

A comparação entre os caminhos pós-críticos possui grande importância na comparação entre os dois métodos, pois representa um resultado que só é obtido no final do processo de cálculo realizado pelo programa desenvolvido neste trabalho.

Sendo assim, caso fossem constatadas grandes diferenças entre os caminhos pós-críticos, os possíveis erros seriam facilmente denunciados neste momento.

Para a comparação, foi escolhida, portanto, a situação da coluna bi-apoiada, cuja fundação se estende até a meia-altura da coluna e com coeficiente de rigidez linear igual a 1.000.

A Figura 5.12 apresenta os resultados, representados através dos caminhos pós-críticos obtidos pelos dois métodos.

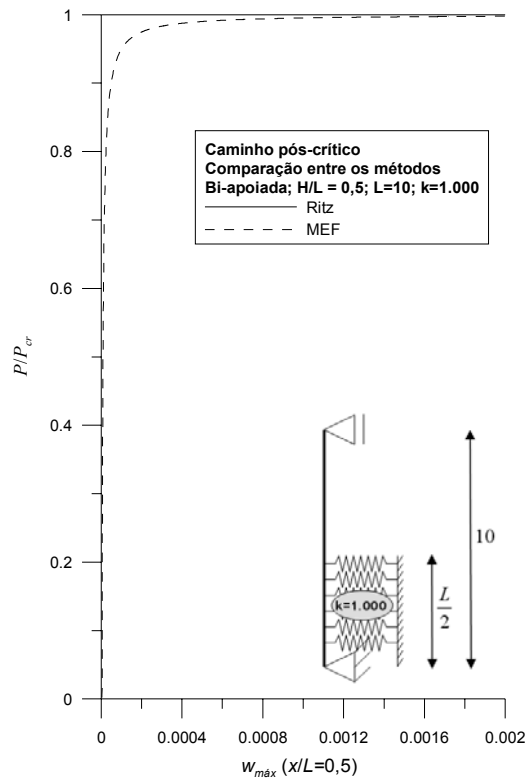


Figura 5.12: Caminhos pós-críticos obtidos através dos dois métodos.

A curva cheia, correspondente ao caminho pós-crítico calculado através do método de Ritz, caracteriza-se por uma reta paralela ao eixo das abscissas, com  $P/P_{cr} = 1$ , enquanto a curva tracejada, correspondente ao método dos elementos finitos, aproxima-se bastante desta solução. As diferenças entre as duas soluções, observadas apenas nos trechos iniciais dos gráficos, tendem a inexistir para maiores deflexões e se devem às pequenas imperfeições consideradas no modelo de elementos finitos e que são necessárias para se obter o caminho não-linear de equilíbrio. Essas diferenças podem ser minimizadas diminuindo-se as imperfeições usadas na modelagem por elementos finitos.

A origem dessa diferença entre as soluções é explicada nos parágrafos seguintes.

No programa baseado no método de Ritz, conforme descrito no Capítulo 4, a solução analítica obtida para o problema linear é substituída no funcional de energia não-linear, obtendo-se, assim, uma excelente aproximação para a solução do problema não-linear.

Já no programa dos elementos finitos é necessário que se imponha uma pequena imperfeição na coluna para que o programa funcione corretamente.

Assim, de modo a se representar esta imperfeição, foram aplicados momentos em ambas as extremidades da coluna, com valor igual a 0,01.

#### 5.4.2. Comparação entre as Cargas Críticas

Apesar das cargas críticas não serem resultados obtidos a partir da análise não-linear, considera-se importante sua inclusão neste capítulo pois servem como mais um elemento na comparação entre os resultados obtidos através da solução analítica com aqueles fornecidos pelo programa de elementos finitos.

Na Tabela 5.2 são relacionadas algumas situações para as quais essas comparações foram feitas, bem como os respectivos valores obtidos para as cargas críticas.

Coluna bi-apoiada (cond. 1) $h = H / L = 0,5$			
$k$	MEF	Sol. analítica	Diferença (%)
10	147,18	147,56	0,26
100	341,66	341,90	0,07
1.000	478,33	478,52	0,04
Coluna bi-apoiada (cond. 1) $h = H / L = 1$			
$k$	MEF	Sol. analítica	Diferença (%)
10	199,63	200,00	0,18
100	647,80	648,09	0,04
1.000	2.013,28	2014,06	0,04
Coluna engastada e livre (cond. 2) $h = H / L = 0$			
$k$	MEF	Sol. analítica	Diferença (%)
1.000	24,51	24,68	0,68
Coluna engastada e livre (cond. 2) $h = H / L = 0,5$			
$k$	MEF	Sol. analítica	Diferença (%)
1.000	59,84	59,93	0,15

Tabela 5.2: Comparação entre as cargas críticas.

Analisando-se os resultados acima, observa-se que as cargas críticas obtidas através dos dois métodos possuem valores muito próximos, com a diferença entre elas sendo sempre inferior a 1%. Essa pequena diferença é devida a erros numéricos inerentes aos programas, causados por arredondamentos de resultados e propagados com os processos de cálculo.

Sendo assim, os resultados obtidos para as cargas críticas através de ambos os programas podem ser considerados compatíveis.

Outras comparações poderiam ainda vir a ser apresentadas, envolvendo cargas críticas e caminho pós-críticos, entretanto, considerando-se que todos os resultados apresentados neste capítulo estavam de acordo com os fornecidos pelo programa dos elementos finitos, considerou-se os mesmos suficientes para comprovar que o programa desenvolvido neste trabalho, baseado na utilização da solução exata, está correto.

### 5.5. Diagramas de Momento Fletor e Esforço Cortante

Da mesma forma como foi feito no Capítulo 3 para o caso linear, neste item são apresentados os diagramas de momento fletor e de esforço cortante para o caso não-linear.

Como mostrado no Capítulo 3, as expressões do momento e do cortante são dadas por

$$M = EI\chi \quad (5.2)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (5.3)$$

No problema não-linear, tem-se que

$$\chi = w_{,xx} \left( 1 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) \quad (5.4)$$

Logo, nesse caso, as expressões do momento e do cortante ficam

$$M = EIw_{,xx} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \right\} \quad (5.5)$$

$$Q = EIw_{,xxx} \left[ 1 + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \right] + EI(w_{,xx})^2 (w_{,x}) \quad (5.6)$$

Já foi visto anteriormente neste capítulo, que no problema não-linear o caminho pós-crítico é representado por uma curva que varia na medida em que a coluna se deforma. A Figura 5.13 mostra o gráfico do caminho pós-crítico para a situação da coluna bi-apoiada, com fundação até a metade da sua altura e  $K=1.000$ .



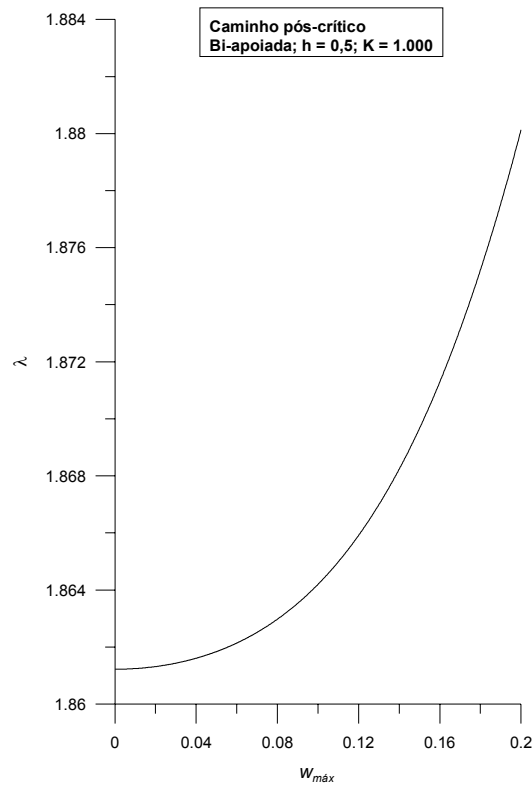


Figura 5.13: Caminho pós-crítico.

Sendo assim, para se construir os diagramas, faz-se necessário definir em que pontos do processo a coluna está sendo analisada. São tomados, portanto, os deslocamentos transversais máximos iguais a 0,02 e 0,20 e seus respectivos valores de carga correspondentes.

$w_{máx}$	$P$
0,02	1,86
0,20	1,88

Tabela 5.3: Pontos do caminho pós-crítico.

Os diagramas para o caso não-linear estão apresentados na Figura 5.14.

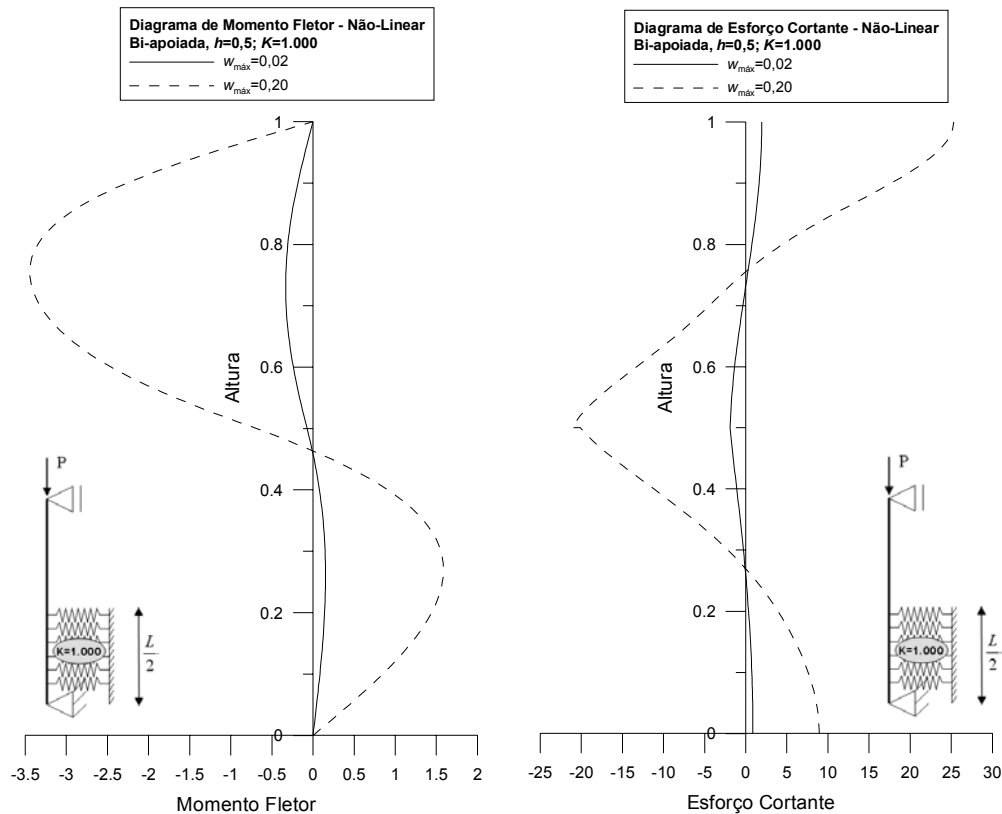


Figura 5.14: Diagramas de momento fletor linear e esforço cortante não-linear.

Observa-se que, tanto nos diagramas de momento fletor como nos de esforço cortante, há uma grande variação nas suas amplitudes na medida em que se tomam pontos onde a deformação sofrida pela coluna é maior. Conforme era esperado, esses esforços tendem a aumentar com o decorrer do processo de carregamento.

Por fim, comparando-se estes diagramas com os obtidos para o caso linear, percebe-se que ambos possuem exatamente a mesma forma, distinguindo-se apenas nas amplitudes, que, neste caso, não foram normalizadas.