4. Formulação do Problema Não-Linear

Neste capítulo é apresentada a resolução do problema não-linear, formulado a partir do funcional de energia não-linear. É feita a análise do equilíbrio e da estabilidade da coluna para dois casos: o primeiro, quando a fundação for considerada com comportamento linear de acordo com o Modelo de Winkler Linear; e o segundo, com a fundação com comportamento não-linear, de acordo com o Modelo de Winkler Não-Linear.

Assim como formulado no Capítulo 2, deseja-se obter as equações diferenciais não-lineares da coluna e as soluções destas.

No final deste capítulo é apresentada uma metodologia para resolução deste problema através do Método de Ritz, objetivando-se obter uma função aproximada que descreva o caminho pós-crítico não-linear da coluna.

Neste capítulo são utilizadas as coordenadas locais da coluna, definidas na Figura 1.1.

4.1. Equações Diferenciais para a Coluna com um Trecho sem Fundação e outro sob Fundação Elástica Não-Linear

Inicialmente será analisado o problema da coluna com um trecho sem fundação e outro com fundação elástica não-linear, tomando como ponto de partida os funcionais de energia não-lineares.

Para o trecho da coluna sem fundação, o funcional de energia não-linear, com os limites de integração definidos pelas coordenadas locais é dado por:

$$\pi = \int_0^{H_1} \left[\frac{1}{2} EI \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2\, w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2\, w_{,x}^4 \right) - \frac{1}{2} P \left(w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,x}^4 \right) \right] dx\,, \qquad (4.1)$$

e para o trecho com fundação, por

$$\pi = \int_0^{H_2} \left[\frac{1}{2} EI \left(w,_{xx}^2 + w,_{xx}^2 \, w,_x^2 + \frac{1}{4} w,_{xx}^2 \, w,_x^4 \right) - \frac{1}{2} P \left(w,_x^2 + \frac{1}{4} w,_x^4 \right) \right] dx$$
$$+ \int_0^{H_2} \frac{1}{2} k w^2 dx - \int_0^{H_2} \frac{1}{2} k_3 w^4 dx \tag{4.2}$$

Observa-se que ambos os funcionais são da forma:

$$\int f(x, w, w,_x w,_{xx}) dx \tag{4.3}$$

ou seja, possuem os mesmos termos do funcional de energia quadrático descrito pela expressão (2.34).

Para se deduzir as equações diferenciais não-lineares, são aplicadas mais uma vez as ferramentas do Cálculo Variacional, da mesma forma como foi feito no Capítulo 2. Já foi visto que a Equação de Euler para um funcional como o da expressão (4.3) é a seguinte:

$$f_w - \frac{d}{dx}(f_{w'}) + \frac{d^2}{dx^2}(f_{w''}) = 0 \tag{4.4}$$

Para o trecho sem fundação, a função f é dada pela expressão:

$$f = \left[\frac{1}{2} EI \left(w,_{xx}^2 + w,_{xx}^2 \, w,_x^2 + \frac{1}{4} w,_{xx}^2 \, w,_x^4 \right) - \frac{1}{2} P \left(w,_x^2 + \frac{1}{4} w,_x^4 \right) \right] \tag{4.5}$$

Calculando-se individualmente os termos f_w, $f_{w'}$ e $f_{w''}$, obtém-se:

$$f_w = 0 \tag{4.6}$$

$$f_{w'} = \frac{1}{2} EI \left(2 \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 \left(\frac{dw(x)}{dx} \right) + \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^3 \right)$$
$$- \frac{1}{2} P \left(2 \left(\frac{dw(x)}{dx} \right) + \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^3 \right) \tag{4.7}$$

$$f_{w''} = \frac{1}{2} EI \left(\begin{array}{l} 2 \left(\dfrac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) + 2 \left(\dfrac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) \left(\dfrac{dw(x)}{dx} \right)^2 \\ + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) \left(\dfrac{dw(x)}{dx} \right)^4 \end{array} \right) \tag{4.8}$$

Substituindo-os então na Equação de Euler e fazendo as simplificações possíveis, chega-se à equação diferencial não-linear do trecho sem fundação:

$$4EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^3w(x)}{dx^3}\right)+EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^3$$
$$+2EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^3\left(\frac{d^3w(x)}{dx^3}\right)$$
$$+\frac{3}{2}EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^3\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2+P\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right) \tag{4.9}$$
$$+\frac{3}{2}P\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2+EI\left(\frac{d^4w(x)}{dx^4}\right)$$
$$+EI\left(\frac{d^4w(x)}{dx^4}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2+\frac{1}{4}EI\left(\frac{d^4w(x)}{dx^4}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^4=0$$

Para o trecho com fundação, parte-se do funcional obtido na Equação 4.2. A função f, nesse caso, é dada pela expressão:

$$f=\left[\frac{1}{2}EI\left(w,_{xx}^2+w,_{xx}^2\,w,_x^2+\frac{1}{4}w,_{xx}^2\,w,_x^4\right)-\frac{1}{2}P\left(w,_x^2+\frac{1}{4}w,_x^4\right)\right]+\frac{1}{2}kw^2$$
$$-\frac{1}{2}k_3w^4 \tag{4.10}$$

Em seguida são calculados os termos f_w, $f_{w'}$ e $f_{w''}$, isto é:

$$f_w=kw(x)-2k_3w(x)^3 \tag{4.11}$$

$$f_{w'}=\frac{1}{2}EI\left(2\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^2\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)+\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^2\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^3\right)$$
$$-\frac{1}{2}P\left(2\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)+\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^3\right) \tag{4.12}$$

$$f_{w''}=\frac{1}{2}EI\begin{pmatrix}2\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2\\+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^4\end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Notar que os termos $f_{w'}$ e $f_{w''}$ são os mesmos que os calculados anteriormente para a coluna sem fundação.

Após a substituição dos três termos na Equação de Euler e sua conseqüente simplificação, chega-se à equação diferencial não-linear deste trecho da coluna, expressa em (4.14).

$$
\begin{aligned}
& kw(x) - 2k_3 w(x)^3 + 4EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^3w(x)}{dx^3}\right) \\
& + EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^3 + 2EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^3\left(\frac{d^3w(x)}{dx^3}\right) \\
& + \frac{3}{2}EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^3\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 + P\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right) \\
& + \frac{3}{2}P\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 + EI\left(\frac{d^4w(x)}{dx^4}\right) \\
& + EI\left(\frac{d^4w(x)}{dx^4}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}EI\left(\frac{d^4w(x)}{dx^4}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^4 = 0
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Por fim, observa-se que esta equação é idêntica àquela obtida em (4.9) para o caso da coluna sem fundação, diferindo-se apenas nos dois primeiros termos, relativos à fundação.

4.2. Equações Diferenciais para a Coluna com Um Trecho Sem Fundação e Outro Sob Fundação Elástica Linear

A dedução das equações diferenciais não-lineares, para o caso da coluna com trecho sob fundação elástica com comportamento linear é exatamente igual a que foi feita no item anterior.

Para o trecho sem fundação, a equação já foi definida em (4.9) e para o trecho com fundação elástica linear, parte-se do funcional de energia não-linear do caso em questão, escrito em (4.15), com os seus limites de integração definidos pelas coordenadas locais,

$$
\begin{aligned}
\pi = & \int_0^{H_2}\left[\frac{1}{2}EI\left(w,_{xx}^2 + w,_{xx}^2\, w,_x^2 + \frac{1}{4}w,_{xx}^2\, w,_x^4\right) - \frac{1}{2}P\left(w,_x^2 + \frac{1}{4}w,_x^4\right)dx\right] \\
& + \int_0^{H_2}\frac{1}{2}kw^2 dx
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Seguindo o mesmo procedimento apresentado anteriormente, obtém-se a equação diferencial descrita a seguir:

$$
\begin{aligned}
& kw(x) + 4EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^3w(x)}{dx^3}\right) \\
& + EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^3 + 2EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^3\left(\frac{d^3w(x)}{dx^3}\right) \\
& + \frac{3}{2}EI\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^3\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 + P\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right) \\
& + \frac{3}{2}P\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 + EI\left(\frac{d^4w(x)}{dx^4}\right) \\
& + EI\left(\frac{d^4w(x)}{dx^4}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}EI\left(\frac{d^4w(x)}{dx^4}\right)\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^4 = 0
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Observe que partindo-se da equação (4.14) e:

a) eliminando-se os dois primeiros termos, obtém-se a equação diferencial da coluna sem fundação (4.9);

b) eliminando-se apenas o segundo termo, obtém-se a equação diferencial da coluna com fundação linear (4.16);

c) não eliminando-se nenhum termo, obtém-se a própria equação diferencial da coluna com fundação não-linear (4.14).

4.3. Método de Ritz – Caminho Pós-Crítico Não-Linear

Como pode ser visto, as equações diferenciais não-lineares são equações muito complexas e não possuem soluções analíticas. Dessa forma, buscam-se outros métodos que tornem possível a resolução do problema não-linear.

O método adotado neste trabalho é o Método de Ritz, já descrito anteriormente no Capítulo 2. Relembrando o que foi dito, esse método consiste basicamente na substituição da solução analítica por uma função de aproximação no funcional de energia. A função de aproximação possui, usualmente, a forma de uma série onde cada termo deve respeitar as condições de contorno forçadas do problema. Caso as funções também atendam as condições de contorno naturais, a convergência torna-se mais rápida.

As funções de aproximação têm a seguinte forma:

$$
f_n = \sum_{j=1}^{n} A_j \phi_j \tag{4.17}
$$

Neste problema, as funções ϕ_j adotadas na análise não-linear são exatamente as autofunções obtidas analiticamente no Capítulo 2, já que todas elas atendem às condições de contorno e continuidade. Em virtude dessa escolha, um único termo da série (4.17) já é suficiente para se obter uma solução precisa do caminho pós-crítico na vizinhança do ponto crítico. Vale mencionar que essa escolha foi motivada pelos bons resultados obtidos, combinados com sua simplicidade de implementação computacional.

Como a coluna está subdividida em dois trechos, a função ϕ_j foi dividida em duas partes.

$$\phi_j = \begin{cases} w_1(x); & 0 \le x \le H_1 \\ w_2(x); & 0 \le x \le H_2 \end{cases} \tag{4.18}$$

Vale lembrar que os limites de cada função estão definidos em termos das coordenadas locais. Cada função deve ser substituída no seu funcional correspondente. No caso da coluna sob fundação elástica linear, a função $\phi_j=w_1(x)$ é substituída no funcional da expressão (4.1) e a função $\phi_j=w_2(x)$, em (4.15). Para o caso da coluna sob fundação elástica não-linear, a substituição das funções $\phi_j=w_1(x)$ e $\phi_j=w_2(x)$ devem ser, respectivamente, nos funcionais das expressões (4.1) e (4.2).

Em ambos os casos, o funcional de energia não-linear resultante, π_{col}, é dado pela soma dos dois funcionais,

$$\pi_{col} = \pi_1 + \pi_2 \tag{4.19}$$

onde π_1 e π_2 são os funcionais não-lineares da coluna dos seus trechos sem e com fundação, respectivamente.

No programa desenvolvido com o software MAPLE 7.0, para que se obtenham as expressões completas das soluções analíticas de cada trecho, é preciso que se forneçam valores numéricos para os parâmetros de carga crítica e de rigidez da fundação elástica. Ou seja, de uma forma geral, as soluções analíticas $w_1(x)$ e $w_2(x)$ só podem ser escritas em função das constantes C_j (j=1..8), as quais, como já foi visto, são determinadas pelas autofunções correspondentes.

Sendo assim, são escritas a seguir, de uma forma geral, as funções f_n, correspondentes à solução analítica do problema e adotadas em cada um dos trechos da coluna.

Para o trecho sem fundação:

$$f_n = w_1(x) = C_1 + C_2 x + C_3 sen(\lambda \pi x) + C_4 \cos(\lambda \pi x) \tag{4.20}$$

Para o trecho com fundação linear:

$$\begin{aligned} f_n = w_2(x) = C_5 e^{\left(1/2\sqrt{-2\lambda^2\pi^2+2\sqrt{\lambda^4\pi^4-4K}}\,x\right)} + C_6 e^{\left(1/2\sqrt{-2\lambda^2\pi^2-2\sqrt{\lambda^4\pi^4-4K}}\,x\right)} + \\ C_7 e^{\left(-1/2\sqrt{-2\lambda^2\pi^2+2\sqrt{\lambda^4\pi^4-4K}}\,x\right)} + C_8 e^{\left(-1/2\sqrt{-2\lambda^2\pi^2-2\sqrt{\lambda^4\pi^4-4K}}\,x\right)} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Pelo Método de Ritz, em seguida, multiplicam-se as expressões (4.20) e (4.21) por uma constante, aqui denominada por η, que será o deslocamento transversal máximo da coluna, já que o modo crítico foi normalizado de tal forma que a amplitude máxima seja igual a um. As expressões resultantes são denominadas $w_{1m}(x)$ e $w_{2m}(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} w_{1m}(x) &= \eta w_1(x) \\ w_{2m}(x) &= \eta w_2(x) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Feito isso, substituem-se as expressões (4.22) no funcional de energia não-linear, π_{col}. Em seguida, faz-se a integração deste funcional resultante nos limites correspondentes a cada um dos trechos da coluna. Prossegue-se diferenciando a expressão resultante com relação a constante η e igualando-a à zero.

Após a simplificação dessa última expressão, obtém-se a equação de equilíbrio não-linear que tem a seguinte forma polinomial:

$$N_1\eta + N_2\eta^3 + N_3\eta^5 - N_4\eta\lambda^2 - N_5\eta^3\lambda^2 = 0 \tag{4.23}$$

onde N_1, N_2, N_3, N_4 e N_5 são valores numéricos que multiplicam cada parcela desta equação. A solução desse polinômio é uma expressão na qual λ é dado em função de η, na forma

$$\lambda = g(\eta) \tag{4.24}$$

Finalmente, ao se plotar esta equação, tem-se o gráfico do caminho pós-crítico da coluna.