

3. Resultados da Análise Linear

Neste capítulo são apresentados todos os resultados das análises feitas para o problema linear, incluindo variações na rigidez e na altura da fundação, e também variações nas condições de apoio da coluna. Para todos esses casos é verificada a influência destes parâmetros nas cargas críticas e modos críticos da coluna.

No final do capítulo é feita ainda uma análise mais detalhada do problema particular da coluna bi-apoiada, onde os resultados obtidos através da solução analítica são comparados com aqueles obtidos pelo Método de Ritz para diferentes números de termos utilizados na solução aproximada.

3.1. Nota sobre a Apresentação do Problema e dos Resultados

É importante mencionar que o problema analisado nesse capítulo refere-se à coluna bi-apoiada, com fundação até a metade do seu comprimento, conforme mostrado na Figura 3.1. No entanto, o problema se modificará na medida em que forem sendo feitas alterações nas suas condições de apoio e altura e rigidez da fundação, a partir do item 3.2.

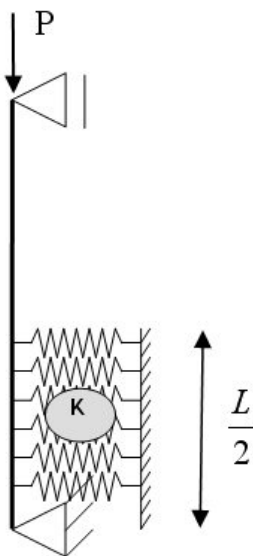


Figura 3.1: Problema padrão.

Quanto aos resultados apresentados nesse capítulo, os mesmos serão dados em função dos parâmetros λ_{cr} e K , relacionados à carga crítica e à rigidez da fundação elástica, respectivamente.

Entretanto, caso deseje-se obtê-los em função de P_{cr} e k , pode-se facilmente alternar entre esses parâmetros, utilizando-se as relações:

$$\lambda_{cr} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} L^2 \quad (3.1)$$

$$K = \frac{k}{EI} L^4 \quad (3.2)$$

3.2. Influência da Rigidez da Fundação

3.2.1. Influência na Carga Crítica

Para o caso estudado neste item, foram calculados os valores das primeiras cargas críticas da coluna à medida que se atribuíam valores distintos para a rigidez da fundação elástica. A Tabela 3.1 apresenta estes resultados, calculados para K e λ_{cr} .

K	λ_{cr}
0,00	1,00
0,01	1,00
0,10	1,00
1,00	1,00
10,00	1,03
20,00	1,05
40,00	1,10
60,00	1,14
80,00	1,18
100,00	1,22
500,00	1,70
1.000,00	1,86
5.000,00	2,10
10.000,00	2,20
20.000,00	2,29
50.000,00	2,40
100.000,00	2,46

Tabela 3.1: Valores de λ_{cr} associados a valores de K .

Essa mesma análise também foi feita com os parâmetros de carga crítica e rigidez da fundação elástica, expressos em função de P_{cr} e k . Isso foi feito de duas maneiras: a primeira, através da modificação do programa com as devidas alterações nas equações diferenciais do problema; e a segunda, através da transformação direta pelas relações (3.1) e (3.2).

Comparando-se os resultados obtidos das duas maneiras, notou-se o aparecimento de uma pequena diferença numérica entre os resultados, que variava entre a ordem de grandeza de 10^{-11} a 10^{-5} . Essa diferença não pode ser considerada um erro, visto que o processo de cálculo envolve uma seqüência de operações complexas, gerando assim essa diferença mínima entre os resultados obtidos das duas maneiras.

Os resultados da Tabela 3.1 estão representados graficamente nas Figuras (3.2) e (3.3), mostradas a seguir:

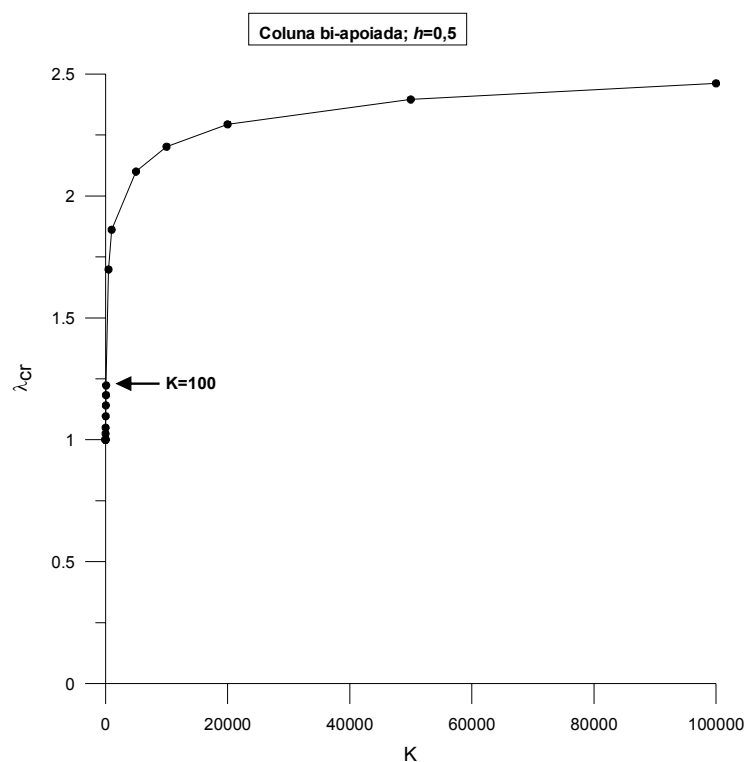


Figura 3.2: Variação de λ_{cr} em função de K .

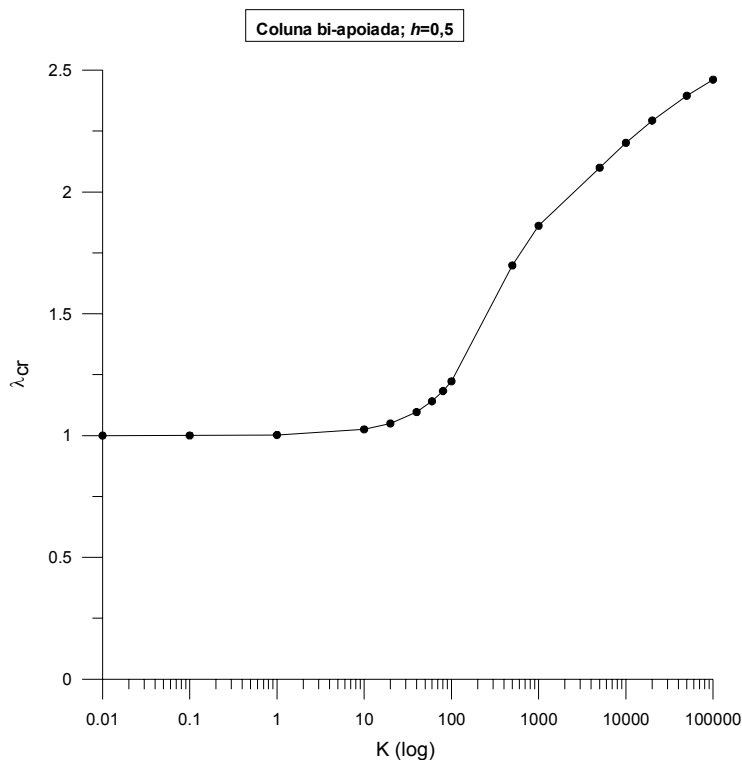


Figura 3.3: Variação de λ_{cr} em função de K , no formato semi-log.

Na Figura 3.2 percebe-se a influência da rigidez da fundação na carga crítica associada. Conforme esperado, quando se aumenta a rigidez da fundação, maiores valores são obtidos para a carga crítica.

Fisicamente, isso é perfeitamente coerente já que, quanto mais rígido for o meio no qual a coluna está apoiada, maior será a sua capacidade de resistir às cargas atuantes.

Dispondo os valores de K em escala logarítmica, todos os valores de K e λ_{cr} calculados podem ser observados com maior nitidez, como mostra a Figura 3.3.

Para valores baixos de K , a rigidez da fundação exerce grande influência na carga crítica obtida no problema, e o crescimento da curva é muito maior do que o ocorrido quando K atinge valores mais elevados. Nesse último caso, com a taxa de crescimento sendo muito mais lenta, as cargas críticas tendem a se estabilizar. Nesse momento, a capacidade de carga da coluna chega ao seu limite e não se conseguem obter valores mais elevados mesmo que se continue aumentando ainda mais a rigidez do meio.

3.2.2. Influência no Modo Crítico

A influência da rigidez da fundação no modo crítico da coluna também é claramente identificada. Para essa análise foram tomados valores para K em um intervalo entre 10 e 100.000, de modo a se comprovar tal influência.

Os modos críticos associados foram divididos em dois grupos com comportamento bastante distintos entre si, e que são mostrados nas Figuras 3.4 e 3.5.

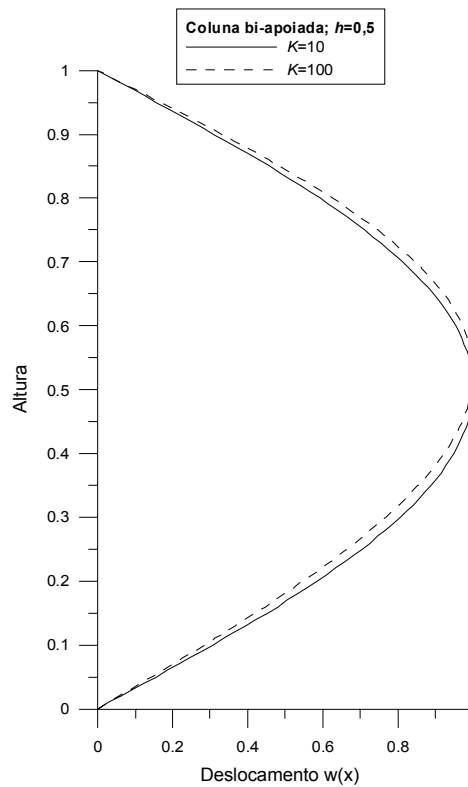


Figura 3.4: Modos críticos da coluna para $K=10$ e $K=100$.

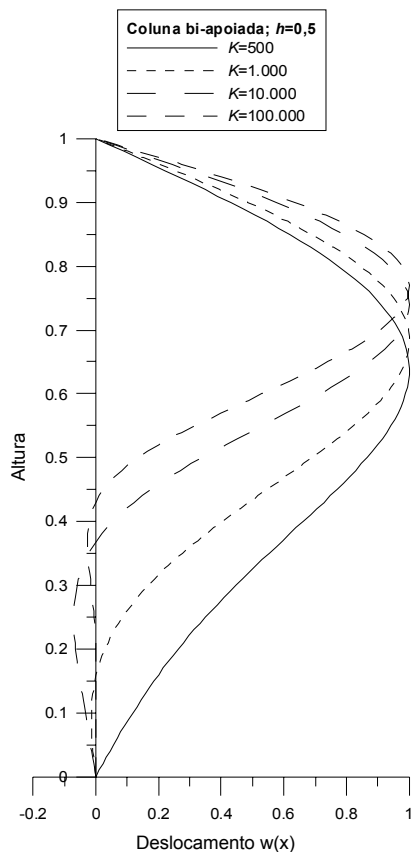


Figura 3.5: Modos críticos da coluna para $K=500$, $K=1.000$, $K=10.000$ e $K=100.000$.

Nos gráficos mostrados na Figura 3.4, observa-se que, por estarem sendo plotados valores baixos de K , sua influência na rigidez da coluna não pode ser muito notada, e a coluna flamba com uma forma muito semelhante ao de uma coluna sem fundação, ou seja, com um formato senoidal, e apenas uma meia onda.

Já na Figura 3.5, onde os valores de K são bem mais elevados, nota-se o efeito inverso, ou seja, há uma grande influência da rigidez da fundação no comportamento da coluna, e a sua configuração deformada torna-se bastante diferente da observada na Figura 3.4. Neste caso, pode-se notar que as deformações transversais máximas tendem a se concentrar no trecho superior da coluna, e não mais a meia altura, e que, quanto maior for o valor de K , mais próximo ao topo da coluna ocorrerão essas deformações máximas.

Vale notar que para o caso da base elástica com $K=100.000$, praticamente inexistem deformações transversais no trecho inferior da coluna. Nesse caso, é como se a fundação funcionasse como um engaste, ou seja, como se esta fosse composta por um material muito rígido, com características semelhantes ao de uma rocha, e como se a coluna tivesse apenas a altura do trecho desenterrado, sendo engastada na base.

3.3. Influência da Altura da Fundação

Conforme se varia a altura da fundação com relação ao comprimento total da coluna, ou seja, ao se modificar a relação $h = H/L$, observa-se que o comportamento da coluna também se altera. Isso ocorre tanto para os valores obtidos para as cargas críticas quanto para os modos críticos associados.

3.3.1. Influência na Carga Crítica

Os resultados dessa análise são apresentados nas Tabelas 3.2 à 3.6, e nas Figuras 3.6 e 3.7.

$h=0$	
K	λ_{cr}
1,00	1,00
10,00	1,00
100,00	1,00
500,00	1,00
1.000,00	1,00
5.000,00	1,00
10.000,00	1,00

Tabela 3.2: Valores de λ_{cr} associados a valores de K , para $h=0$.

$h=0,25$	
K	λ_{cr}
1,00	1,00
10,00	1,00
100,00	1,04
500,00	1,19
1.000,00	1,31
5.000,00	1,56
10.000,00	1,61

Tabela 3.3: Valores de λ_{cr} associados a valores de K , para $h=0,25$.

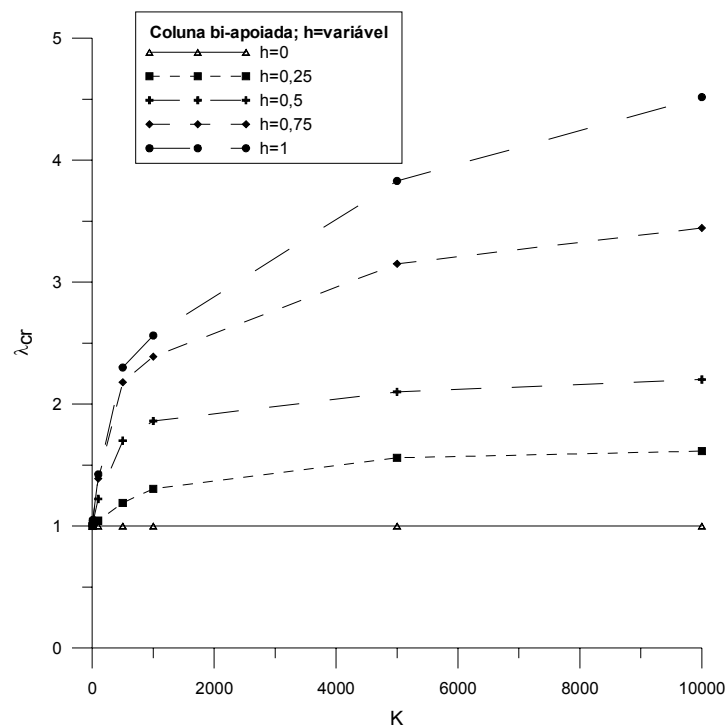
$h=0,50$	
K	λ_{cr}
1,00	1,00
10,00	1,03
100,00	1,22
500,00	1,70
1.000,00	1,86
5.000,00	2,10
10.000,00	2,20

Tabela 3.4: Valores de λ_{cr} associados a valores de K , para $h=0,50$.

$h=0,75$	
K	λ_{cr}
1,00	1,00
10,00	1,05
100,00	1,39
500,00	2,18
1.000,00	2,39
5.000,00	3,15
10.000,00	3,44

Tabela 3.5: Valores de λ_{cr} associados a valores de K , para $h=0,75$.

$h=1,00$	
K	λ_{cr}
1,00	1,01
10,00	1,05
100,00	1,42
500,00	2,30
1.000,00	2,56
5.000,00	3,83
10.000,00	4,52

Tabela 3.6: Valores de λ_{cr} associados a valores de K , para $h=1$.Figura 3.6: Variação de λ_{cr} em função de K , para cinco valores distintos de h .

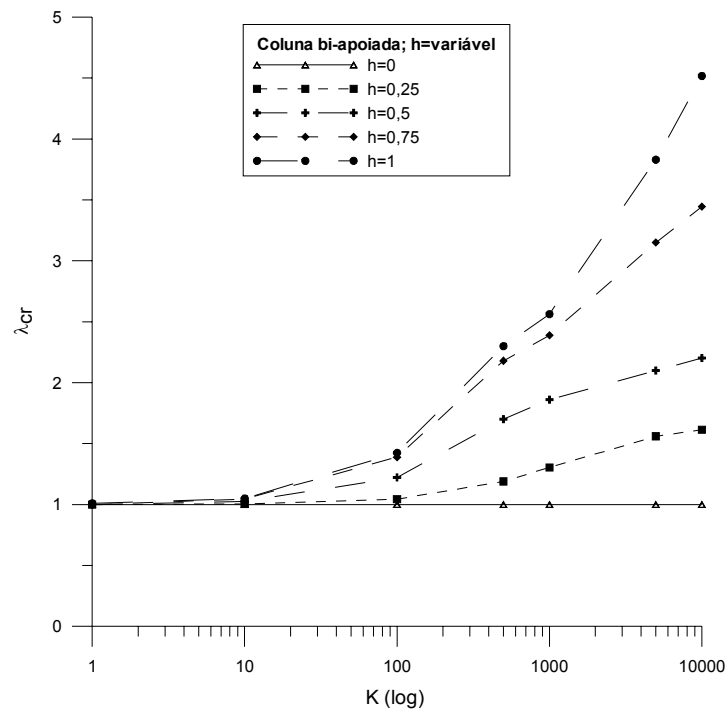


Figura 3.7: Variação de λ_{cr} em função de K , para cinco valores distintos de h , no formato semi-log.

Observa-se através da Figura 3.6 um comportamento da coluna muito semelhante para diversas relações de $h = H/L$.

As cinco curvas representadas seguem um mesmo padrão, com crescimento inicial acentuado e tendência à estabilização para valores elevados de K .

Entretanto, para os casos $h = 0,75$ e $h = 1$, a tendência a estabilização das curvas ainda não pode ser notada neste gráfico, pois, para isso acontecer, seria necessária a imposição de valores maiores para a rigidez da fundação.

Na Tabela 3.2, quando são apresentadas as cargas críticas da coluna para $h = 0$, observa-se que as mesmas possuem sempre o mesmo valor ($\lambda_{cr} = 1$), pois o problema independe do valor de K já que não há fundação. Assim, nos gráficos das Figuras 3.6 e 3.7, sua representação é dada por uma reta.

Comparando as curvas entre si, observa-se que as maiores cargas críticas são obtidas para o caso da coluna totalmente enterrada ($H/L = 1$), e as menores para a coluna sem fundação ($H/L = 0$). Ainda, quanto maior for o comprimento enterrado da coluna, maiores serão as cargas críticas, comprovando-se assim a importante influência exercida pela fundação na rigidez do sistema.

Novamente, o mesmo gráfico é também representado no formato semi-log, para melhor visualização dos pontos analisados (Figura 3.7). Nesse gráfico pode-

se observar claramente que nos pontos iniciais dos gráficos, as cargas críticas possuem valores muito próximos entre si, tendendo a se afastar à medida que crescem os valores de K .

Também é possível analisar a influência da altura da fundação nas cargas críticas da coluna, ao fixarem-se os valores de K , verificando-se como as cargas críticas se modificam à medida que se alteram os valores de h .

Nas Tabelas 3.7, 3.8 e 3.9 são apresentados os valores das cargas críticas associadas a diversas relações de $h = H / L$, com os valores de K estabelecidos em 100, 1.000 e 10.000.

$K=100$	
h	λ_{cr}
0,00	1,00
0,13	1,01
0,25	1,04
0,38	1,12
0,50	1,22
0,63	1,32
0,75	1,39
0,88	1,42
1,00	1,42

Tabela 3.7: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=100$.

$K=1.000$	
h	λ_{cr}
0,00	1,00
0,13	1,06
0,25	1,31
0,38	1,60
0,50	1,86
0,63	2,13
0,75	2,39
0,88	2,54
1,00	2,56

Tabela 3.8: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=1.000$.

$K=10.000$	
h	λ_{cr}
0,00	1,00
0,13	1,32
0,25	1,61
0,38	1,85
0,50	2,20
0,63	2,71
0,75	3,44
0,88	4,32
1,00	4,52

Tabela 3.9: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=10.000$.

Os valores apresentados nas Tabelas 3.7 à 3.9 são plotados na Figura 3.8.

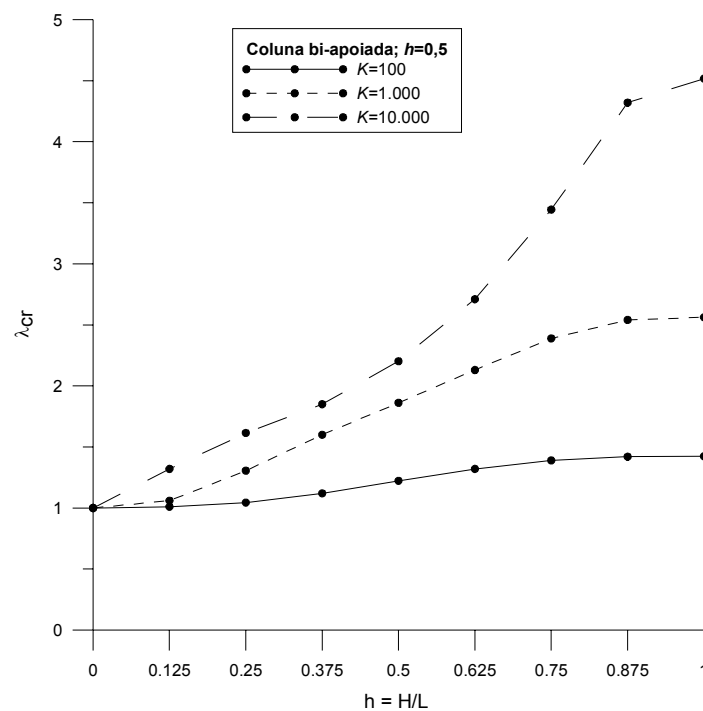


Figura 3.8: Variação de λ_{cr} em função de h , para três valores de K .

Na Figura 3.8 comprova-se a constatação feita nas Figuras 3.6 e 3.7 de que a rigidez do sistema está diretamente relacionada com o comprimento enterrado da coluna. Na Figura 3.8 são apresentados apenas os casos da rigidez da base elástica $K = 100$, 1.000 e 10.000 , porém esse mesmo comportamento ocorre para qualquer valor de K .

3.3.2. Influência no Modo Crítico

Os resultados dessa análise foram obtidos para valores de K iguais a 100 , 1.000 e 10.000 , e estão apresentados na Figura 3.9.

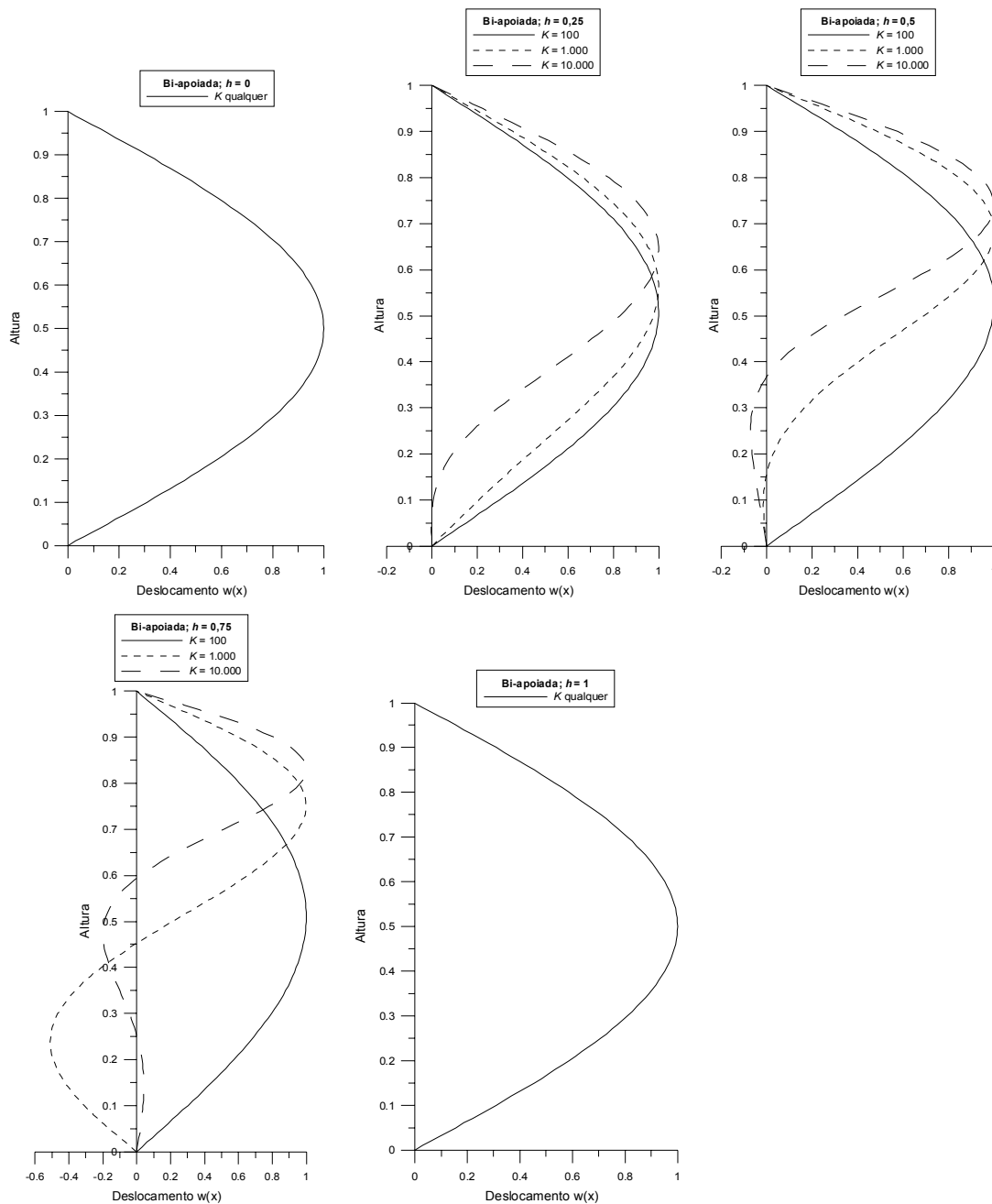


Figura 3.9: Primeiro modo crítico da coluna para cinco valores de h , em função de K .

Através dos gráficos representados na Figura 3.9, observa-se que conforme é aumentada a relação $h = H/L$, maiores variações são observadas nos modos críticos da coluna. Entretanto, essas variações são mais perceptíveis para valores elevados da rigidez da fundação já que para valores baixos de K (ver curvas para $K=100$, por exemplo), essas variações quase não são notadas, e a influência do trecho enterrado é muito pequena.

Vale notar também que os deslocamentos transversais atingem os seus valores máximos em posições diferentes da coluna à medida que se modifica o comprimento do seu trecho enterrado.

A Tabela 3.10 mostra uma comparação entre as posições da coluna em que são observados os deslocamentos transversais máximos, para cinco relações de $h = H / L$.

H	x
0,00	0,50
0,25	0,65
0,50	0,73
0,75	0,82
1,00	0,50

Tabela 3.10: Posição dos deslocamentos transversais máximos para a coluna com cinco relações distintas de $h=H/L$, e $K = 10.000$.

Verifica-se que, conforme a relação $h = H / L$ aumenta, os deslocamentos transversais máximos tendem a ocorrer mais próximos ao topo da coluna. Entretanto, para a coluna totalmente enterrada ($h = 1$), sua deformada retorna à da coluna totalmente desenterrada ($h = 0$), com os deslocamentos máximos voltando a ocorrer em $x = 0,50$, encerrando a tendência verificada para $0 \leq h < 1$.

3.4. Influência das Condições de Apoio

Para analisar a influência das condições de contorno do problema nas cargas críticas e modos críticos da coluna em contato com uma base elástica, foram feitas análises para cinco tipos distintos de condições de apoio da coluna, conforme mostrado na Figura 3.10.

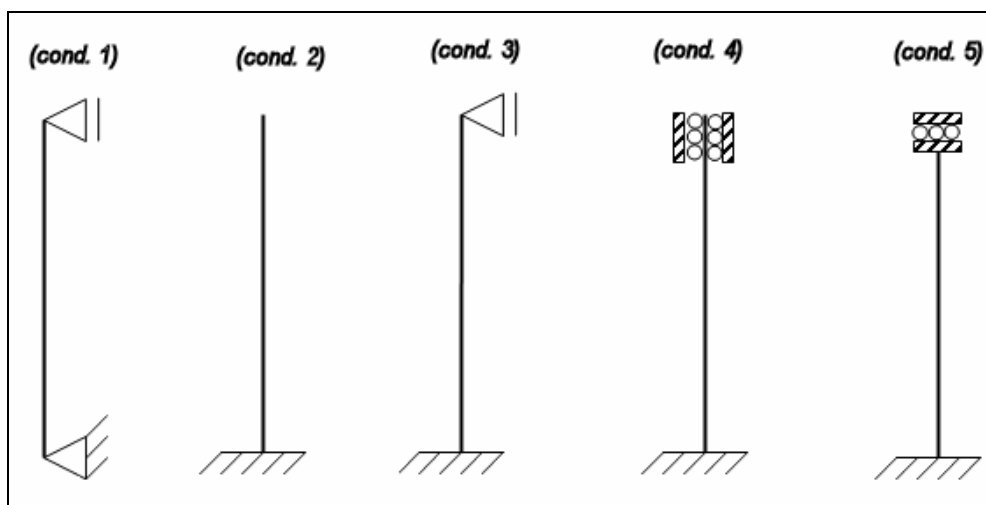


Figura 3.10: Definição das condições de apoio.

3.4.1. Influência na Carga Crítica

Os resultados dessa análise são apresentados nas Tabelas 3.11 à 3.15, e nas Figuras 3.11 e 3.12.

Condição de apoio 1	
K	λ_{cr}
1,00	1,00
10,00	1,03
100,00	1,22
500,00	1,70
1.000,00	1,86
5.000,00	2,10
10.000,00	2,20



Tabela 3.11: Valores de λ_{cr} associados a valores crescentes de K , para a condição de apoio 1.

Condição de apoio 2	
K	λ_{cr}
1,00	0,50
10,00	0,51
100,00	0,56
500,00	0,64
1.000,00	0,68
5.000,00	0,75
10.000,00	0,78



Tabela 3.12: Valores de λ_{cr} associados a valores crescentes de K , para a condição de apoio 2.

Condição de apoio 3	
K	λ_{cr}
1,00	1,43
10,00	1,44
100,00	1,51
500,00	1,73
1.000,00	1,86
5.000,00	2,11
10.000,00	2,21



Tabela 3.13: Valores de λ_{cr} associados a valores crescentes de K , para a condição de apoio 3.

Condição de apoio 4	
K	λ_{cr}
1,00	2,00
10,00	2,01
100,00	2,09
500,00	2,38
1.000,00	2,59
5.000,00	2,92
10.000,00	3,06



Tabela 3.14: Valores de λ_{cr} associados a valores crescentes de K , para a condição de apoio 4.

Condição de apoio 5	
K	λ_{cr}
1,00	1,00
10,00	1,01
100,00	1,10
500,00	1,27
1.000,00	1,35
5.000,00	1,49
10.000,00	1,55



Tabela 3.15: Valores de λ_{cr} associados a valores crescentes de K , para a condição de apoio 5.

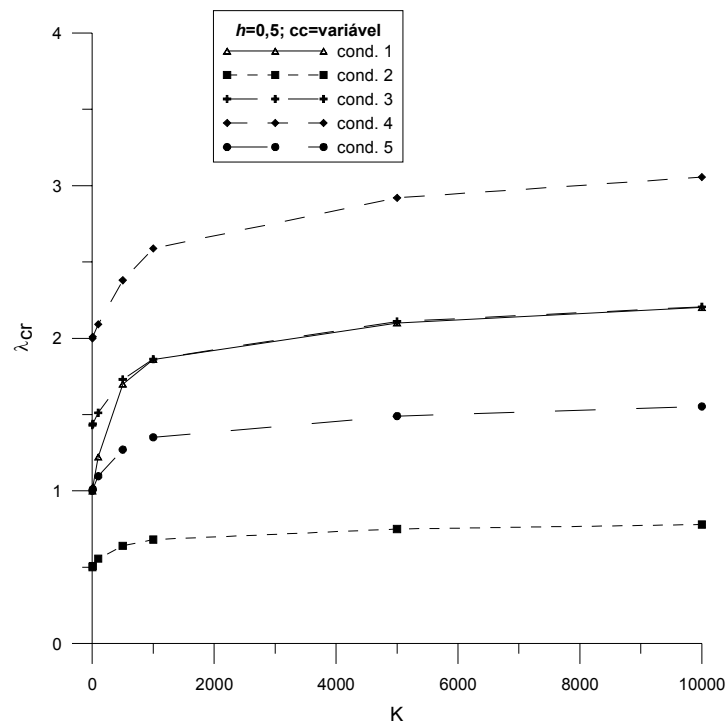


Figura 3.11: Variação de λ_{cr} em função de K , para cinco condições de apoio distintas.

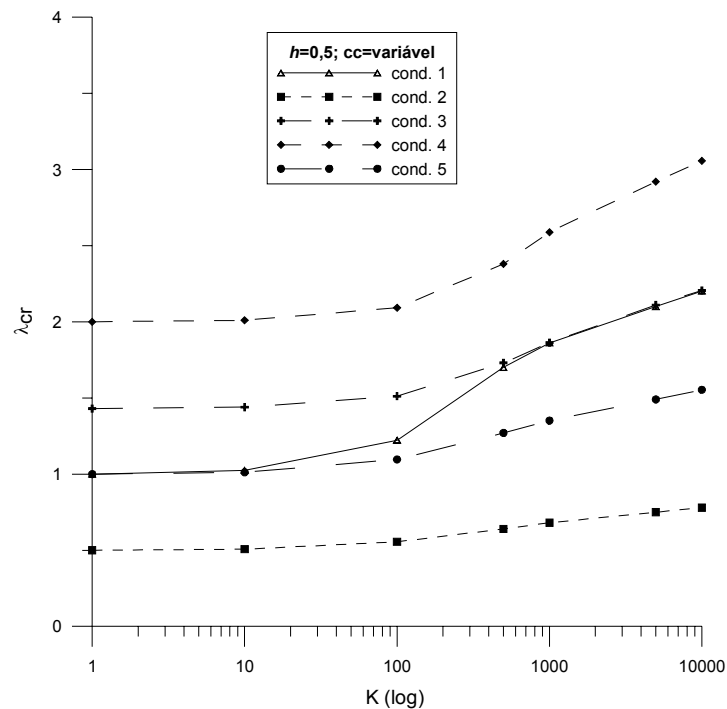


Figura 3.12: Variação de λ_{cr} em função de K , para cinco condições de apoio distintas, no formato semi-log.

Através das Figuras 3.11 e 3.12 observa-se a influência das condições de contorno da coluna nos valores obtidos para as cargas críticas. Como esperado, dependendo das condições de apoio da coluna, suas cargas críticas adquirem valores diferentes.

Observa-se que as maiores cargas críticas são obtidas para a coluna bi-engastada na base e com deslocamento axial livre no topo (condição 4), sendo esta condição, portanto, a que fornece maior rigidez à estrutura. Da mesma forma, as menores cargas críticas ocorrem para a coluna sob a condição 2 devido às deslocabilidades estarem livres no topo.

Percebe-se, também, que, para as colunas bi-apoiada (condição 1) e engastada e apoiada (condição 3), suas cargas críticas possuem valores muito próximos entre si a medida que aumenta-se a rigidez da fundação (a partir de $K = 700$, aproximadamente). Já para $K \leq 10$, as colunas sob as condições 1 e 5 possuem cargas críticas praticamente idênticas.

Quanto à forma dos gráficos, observa-se uma semelhança com aqueles apresentados nas análises anteriores feitas neste capítulo, onde há um crescimento das cargas críticas com o aumento da rigidez da fundação e tendência à estabilização das curvas para valores elevados de K . Quanto mais rígida for a estrutura, maiores serão os valores de K nos quais a estabilização ocorrerá.

3.4.2. Influência no Modo Crítico

Os resultados dessa análise foram obtidos para valores de K iguais a 100, 1.000 e 10.000, e estão apresentados na Figura 3.13.

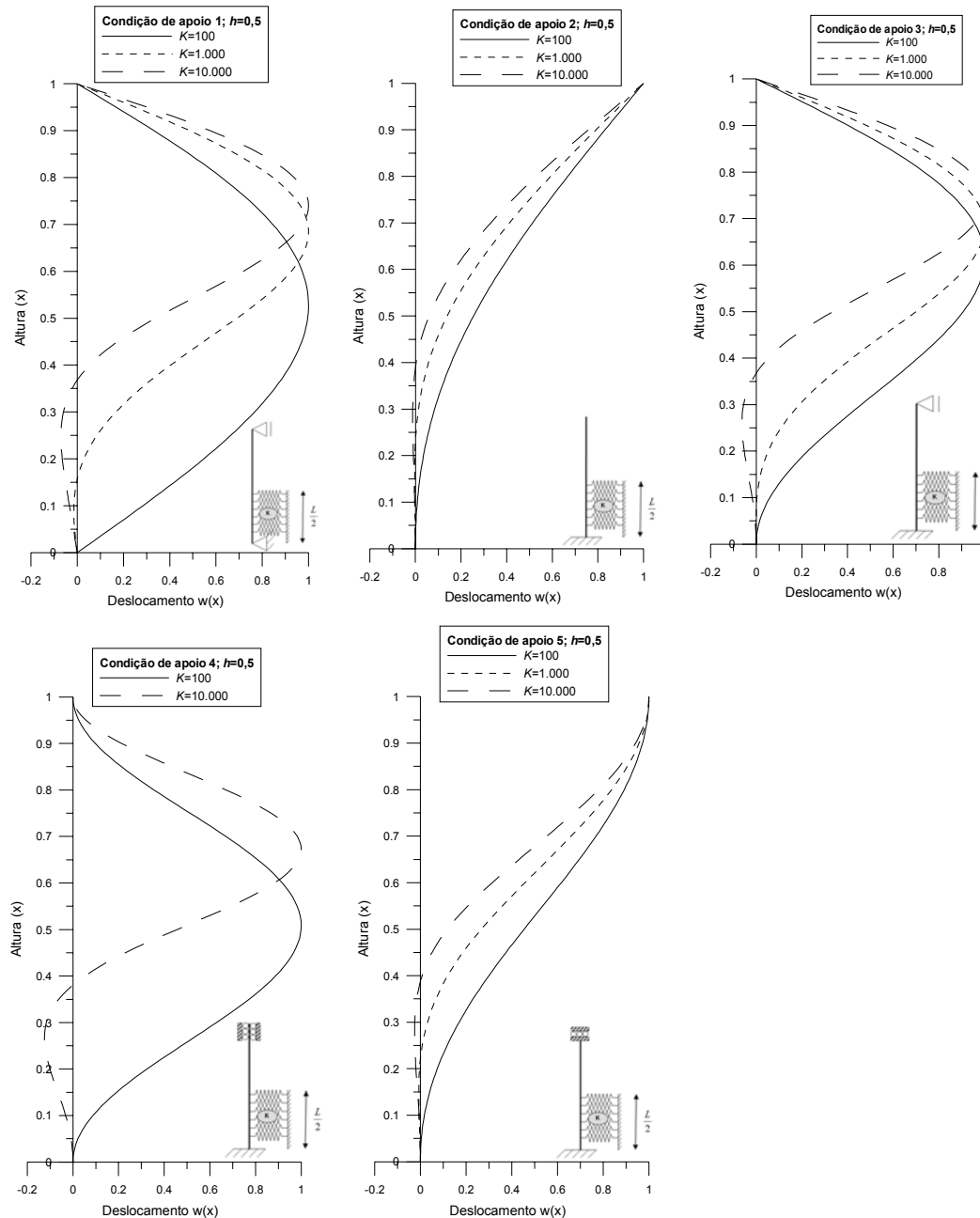


Figura 3.13: Primeiro modo crítico da coluna para cinco condições de apoio distintas.

Na Figura 3.13 observa-se a grande influência das condições de apoio da coluna nos seus respectivos modos de flambagem.

A rigidez da fundação também influi diretamente na forma da deformada das colunas, as quais tendem a sofrer deslocamentos transversais cada vez menores no seu trecho inferior à medida que a rigidez da fundação vai sendo aumentada. Para as colunas com fundação com rigidez muito elevada

($K = 10.000$, por exemplo), chega a ocorrer uma inversão nas curvaturas destas colunas ao longo de seu comprimento, fazendo com que estas deformadas sejam bastante irregulares, com a presença de mais de uma semi-onda.

3.5. Análise da Coluna com a Extremidade Inferior Livre

Colunas com a extremidade inferior livre, ou seja, sem nenhum tipo de apoio, são comumente encontradas em problemas de Engenharia.

A fim de se analisar o comportamento destas colunas, foram feitas análises para outras quatro condições de apoio, ilustradas na Figura 3.14.

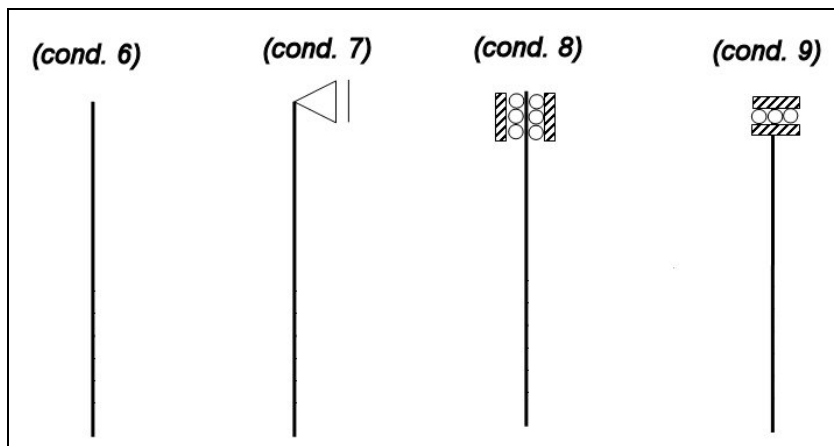


Figura 3.14: Condições de apoio para a coluna com a extremidade inferior livre.

3.5.1. Influência da Rigidez da Fundação

3.5.1.1. Influência na Carga Crítica

Condição de apoio 6	
K	λ_{cr}
1,00	0,03
10,00	0,10
100,00	0,31
500,00	0,56
1.000,00	0,64
5.000,00	0,75
10.000,00	0,78

Tabela 3.16: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de K (condição de apoio 6).

Condição de apoio 7	
K	λ_{cr}
1,00	0,17
10,00	0,53
100,00	1,00
500,00	1,29
1.000,00	1,55
5.000,00	2,10
10.000,00	2,20

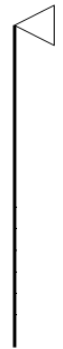


Tabela 3.17: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de K (condição de apoio 7).

Condição de apoio 8	
K	λ_{cr}
1,00	0,52
10,00	0,65
100,00	1,10
500,00	1,45
1.000,00	1,71
5.000,00	2,65
10.000,00	2,97

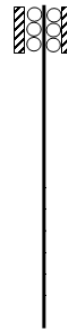


Tabela 3.18: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de K (condição de apoio 8).

Condição de apoio 9	
K	λ_{cr}
1,00	0,50
10,00	0,52
100,00	0,65
500,00	1,01
1.000,00	1,24
5.000,00	1,48
10.000,00	1,55



Tabela 3.19: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de K (condição de apoio 9).

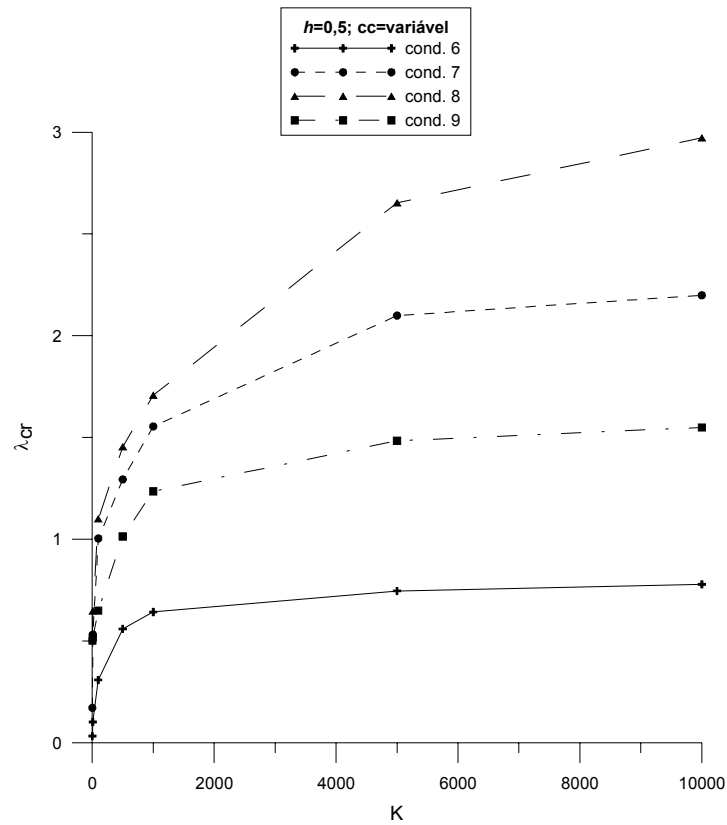


Figura 3.15: Variação de λ_{cr} em função de K , para a coluna com quatro condições de apoio distintas.

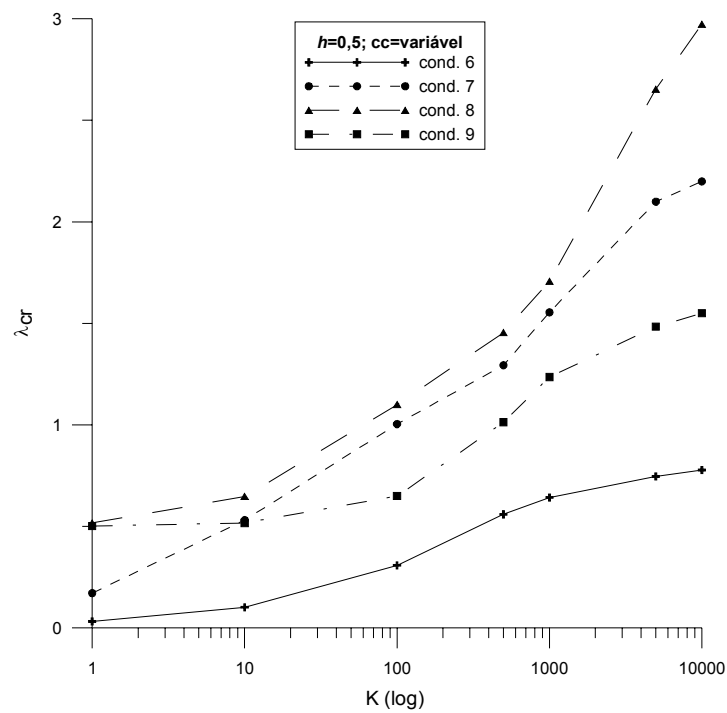


Figura 3.16: Variação de λ_{cr} em função de K , para a coluna com quatro condições de apoio distintas, no formato semi-log.

3.5.1.2. Influência no Modo Crítico

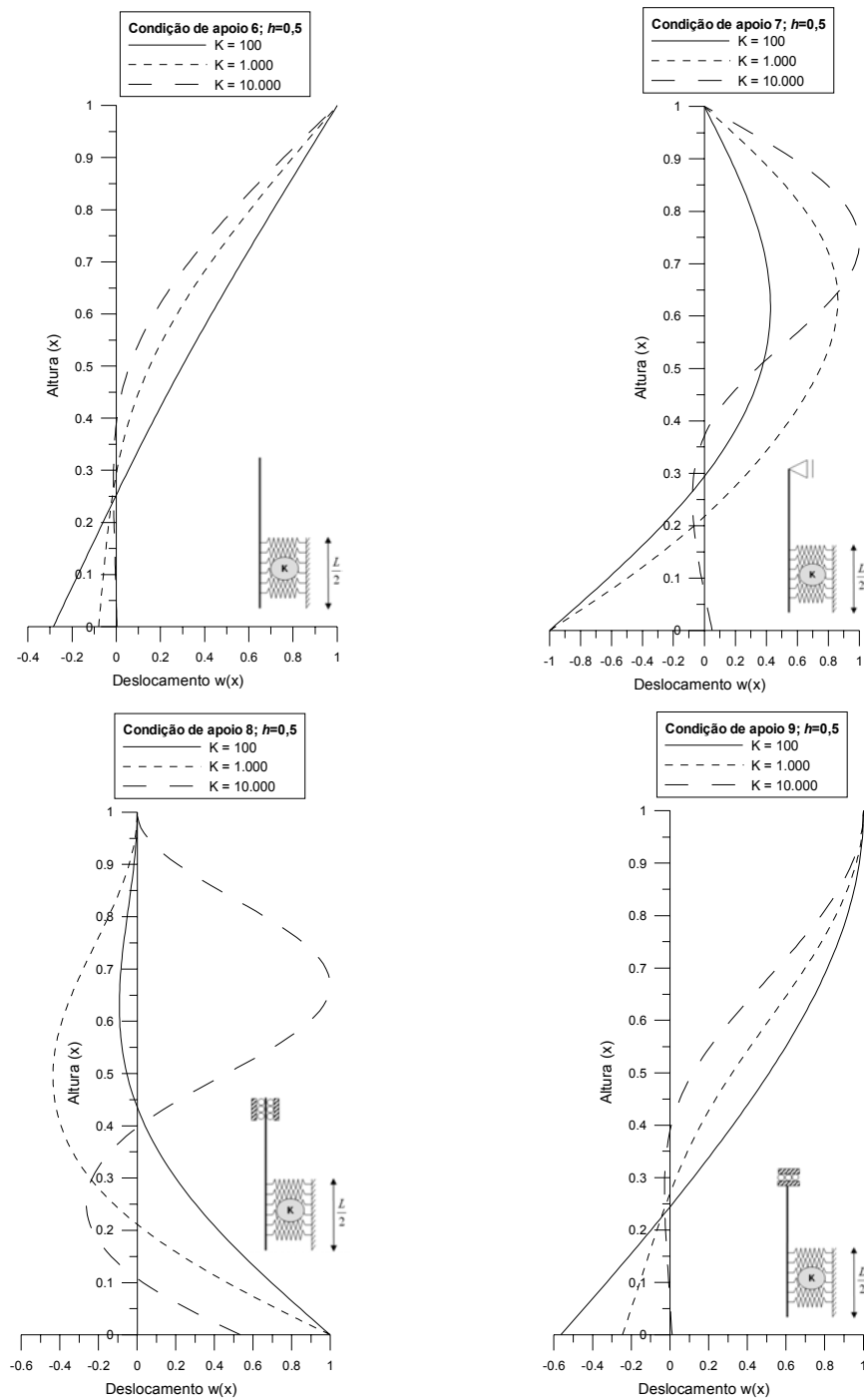


Figura 3.17: Primeiro modo crítico da coluna com a extremidade inferior livre e com quatro condições de apoio distintas na extremidade superior.

3.5.2. Influência da Altura da Fundação

3.5.2.1. Influência na Carga Crítica

Condição de apoio 6		
	$K=1.000$	$K=10.000$
h	λ_{cr}	λ_{cr}
0,00	0,00	0,00
0,25	0,32	0,54
0,50	0,64	0,78
0,75	0,98	1,27
1,00	3,20	4,87



Tabela 3.20: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=1.000$ e $K=10.000$ (condição de apoio 6).

Condição de apoio 7		
	$K=1.000$	$K=10.000$
h	λ_{cr}	λ_{cr}
0,00	1,00	1,00
0,25	1,11	1,54
0,50	1,55	2,20
0,75	1,79	3,18
1,00	2,70	4,62



Tabela 3.21: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=1.000$ e $K=10.000$ (condição de apoio 7).

Condição de apoio 8		
	$K=1.000$	$K=10.000$
h	λ_{cr}	λ_{cr}
0,00	0,50	0,50
0,25	1,42	2,10
0,50	1,71	2,97
0,75	1,79	3,18
1,00	1,79	3,18

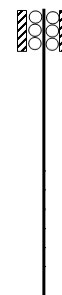


Tabela 3.22: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=1.000$ e $K=10.000$ (condição de apoio 8).

Condição de apoio 9		
	$K=1.000$	$K=10.000$
h	λ_{cr}	λ_{cr}
0,00	0,00	0,00
0,25	0,69	1,08
0,50	1,24	1,55
0,75	1,75	2,50
1,00	1,79	3,18

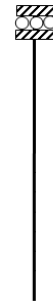


Tabela 3.23: Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=1.000$ e $K=10.000$ (condição de apoio 9).

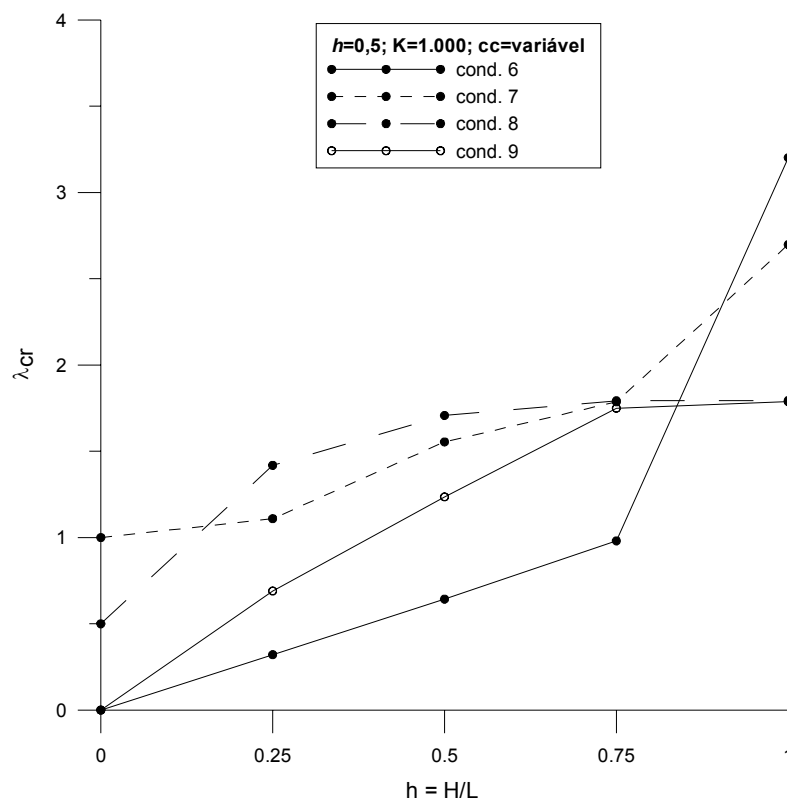


Figura 3.18: Variação de λ_{cr} em função de h , para as quatro condições de contorno da coluna com a extremidade inferior livre e $K=1.000$.

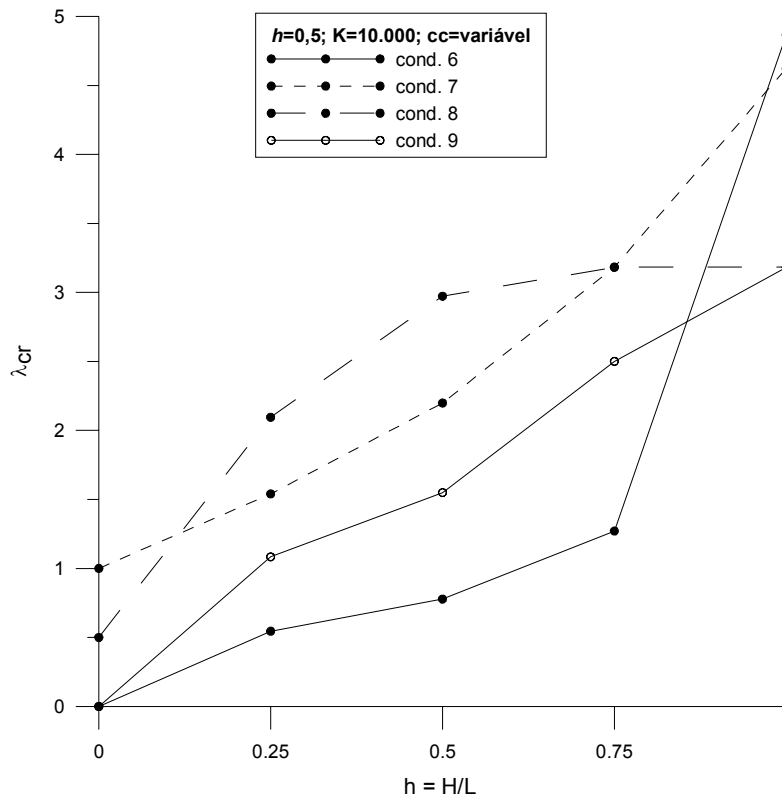


Figura 3.19: Variação de λ_{cr} em função de h , para as quatro condições de contorno da coluna com a extremidade inferior livre e $K=10.000$.

3.5.2.2. Influência no Modo Crítico

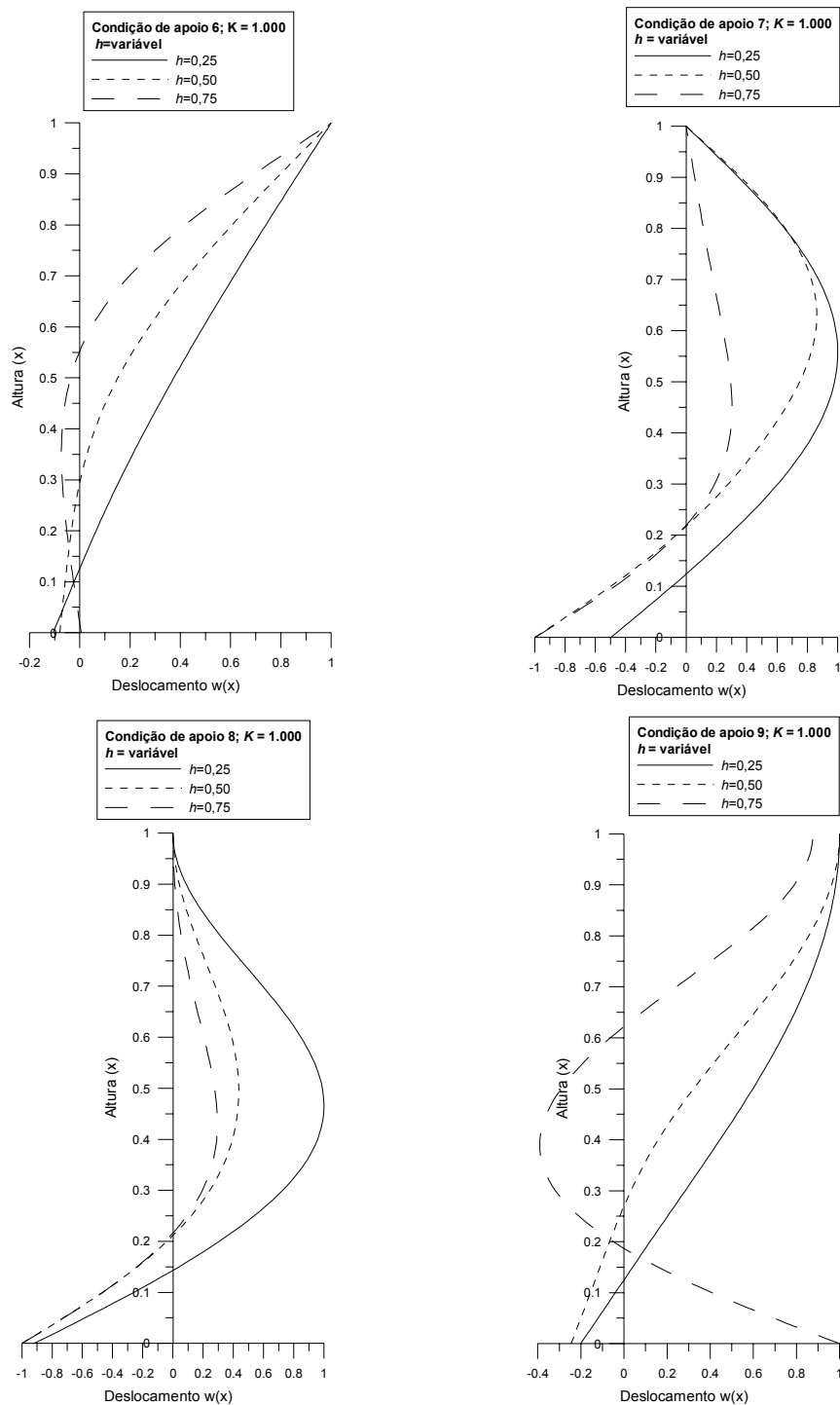


Figura 3.20: Variação do primeiro modo crítico da coluna com a extremidade inferior livre para quatro condições de apoio distintas em função da variação na relação $h = H/L$, para $K = 1.000$.

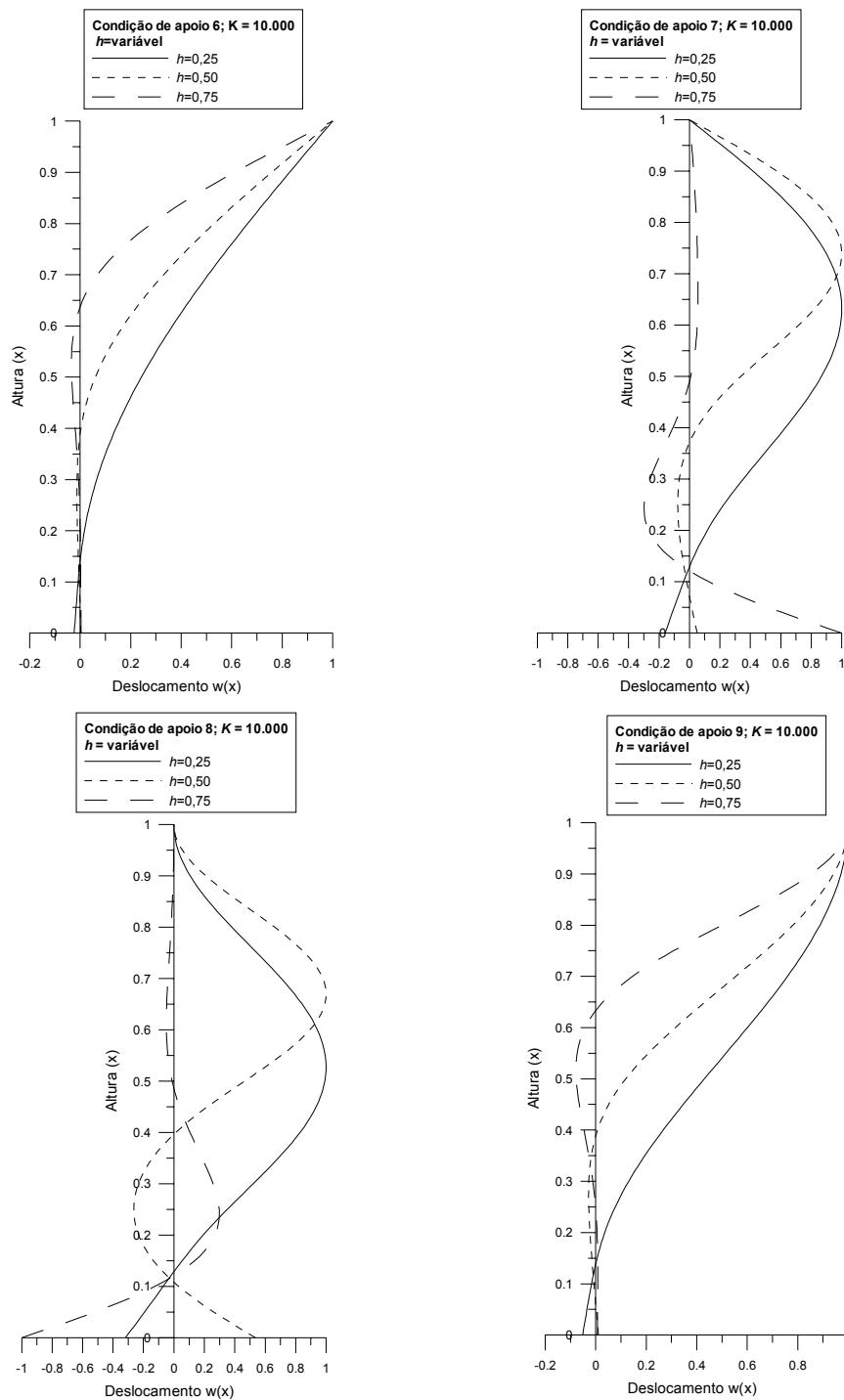


Figura 3.21: Variação do primeiro modo crítico da coluna com a extremidade inferior livre para quatro condições de apoio distintas em função da variação na relação $h=H/L$, para $K=10.000$.

3.6. Comparação dos Resultados com o Método de Ritz

Para a análise dos resultados obtidos neste item, foram testadas funções de aproximação com diferentes números de termos utilizados. Conforme mencionado

no item 2.8, uma boa função de aproximação é aquela que atende a todas as condições de contorno do problema, fazendo com que sua convergência para o resultado final seja muito mais rápida.

Para o caso particular de uma coluna bi-apoiada, foi visto que a função seno atende às condições de apoio. Dessa forma, considera-se bastante adequado o seu emprego como função de aproximação para a coluna com essas condições de apoio.

Conforme usualmente adotado, essa função será expressa na forma de séries. Entretanto, não se sabe *a priori* qual o número de termos necessário para se encontrar uma boa aproximação. Sendo assim, foram testadas funções de aproximação em forma de série de senos, com um a oito termos, ou seja,

$$f_n = \sum_{i=1}^8 A_i \text{sen}(i\pi x) \quad (3.3)$$

Foram feitas análises para três valores de K , tomados em um intervalo bastante amplo: $K=10$, $K=1.000$ e $K=10.000$. A Tabela 3.24 apresenta os valores das cargas críticas obtidas através da solução analítica para a coluna bi-apoiada, com os valores de K citados acima.

K	λ_{cr}
10,00	1,03
1.000,00	1,86
10.000,00	2,20

Tabela 3.24: Valores de λ_{cr} para três valores distintos de K .

Já as Tabelas 3.25, 3.26 e 3.27 apresentam os valores das cargas críticas obtidas através do Método de Ritz para a mesma situação, utilizando-se diferentes funções de aproximação, bem como o erro cometido ao se utilizar estas funções, o qual é calculado a partir da expressão:

$$erro = \frac{P_{aprox} - P_{exato}}{P_{exato}} \quad (3.4)$$

onde P_{aprox} é a carga crítica calculada pelo Método de Ritz e P_{exato} a carga crítica calculada pela solução analítica.

K=10		
<i>n</i>	λ_{cr}	Erro (%)
1	1,03	$7,69 \times 10^{-3}$
2	1,03	$6,63 \times 10^{-5}$
3	1,03	$6,63 \times 10^{-5}$
4	1,03	$5,85 \times 10^{-6}$
5	1,03	$5,85 \times 10^{-6}$
6	1,03	$1,17 \times 10^{-6}$
7	1,03	$1,17 \times 10^{-6}$
8	1,03	$2,93 \times 10^{-7}$

Tabela 3.25: Valores de λ_{cr} e do erro percentual cometido ao se utilizar funções de aproximação com diferentes números de termos ($K=10$).

K=1.000		
<i>n</i>	λ_{cr}	Erro (%)
1	2,48	$3,31 \times 10^1$
2	1,87	$3,52 \times 10^{-1}$
3	1,86	$8,40 \times 10^{-2}$
4	1,86	$8,88 \times 10^{-3}$
5	1,86	$7,15 \times 10^{-3}$
6	1,86	$1,45 \times 10^{-3}$
7	1,86	$1,36 \times 10^{-3}$
8	1,86	$4,01 \times 10^{-4}$

Tabela 3.26: Valores de λ_{cr} e do erro percentual cometido ao se utilizar funções de aproximação com diferentes números de termos ($K=1.000$).

K=10.000		
<i>n</i>	λ_{cr}	Erro (%)
1	7,23	$2,29 \times 10^2$
2	2,55	$1,56 \times 10^1$
3	2,21	$4,57 \times 10^{-1}$
4	2,21	$2,39 \times 10^{-1}$
5	2,20	$7,95 \times 10^{-2}$
6	2,20	$2,61 \times 10^{-2}$
7	2,20	$1,73 \times 10^{-2}$
8	2,20	$6,19 \times 10^{-3}$

Tabela 3.27: Valores de λ_{cr} e do erro percentual cometido ao se utilizar funções de aproximação com diferentes números de termos ($K=10.000$).

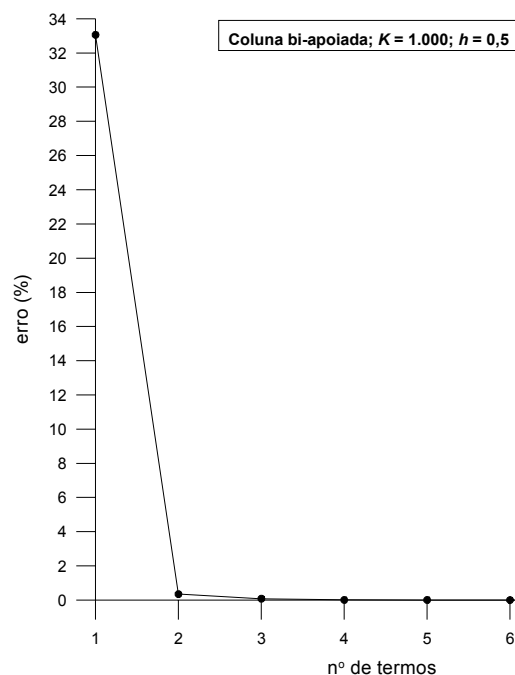


Figura 3.22: Variação do erro cometido ao se utilizar cada função de aproximação.

Analisando-se as Tabelas 3.25, 3.26 e 3.27 e a Figura 3.22, podem ser tiradas algumas conclusões:

1^a) A medida em que se utiliza um número maior de termos nas funções de aproximação, diminui-se o erro cometido em relação às cargas críticas calculadas através da solução analítica. Na Figura 3.22 está ilustrada essa situação para $K=1.000$, entretanto esse comportamento se verifica para qualquer valor de K ;

2^a) Independentemente do número de termos utilizados nas funções de aproximação, o erro cometido aumenta a medida em que se aumenta o valor de K ;

3^a) Esse erro torna-se especialmente importante quando se utilizam poucas funções de aproximação para valores mais elevados de K ;

4^a) Ao se utilizar as funções de aproximação com um e dois termos, deve-se tomar bastante cuidado, já que os erros cometidos podem ser bastante elevados, chegando a atingir os 229% para $K=10.000$, utilizando-se apenas um termo na função de aproximação.

3.7. Diagramas de Momento Fletor e Esforço Cortante

A fim de se conhecer como variam o momento fletor e o esforço cortante ao longo da coluna, foram construídos seus diagramas para valores de K iguais a 100, 1.000 e 10.000.

Para o caso linear, têm-se as seguintes expressões para o momento e o cortante, respectivamente:

$$M = EI\chi = EIw_{,xx} \quad (3.5)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = EIw_{,xxx} \quad (3.6)$$

Na formulação utilizada, emprega-se a coordenada x/L para representar o comprimento da coluna. Assim, as expressões (3.5) e (3.6) podem ser reescritas sob a forma a seguir de modo a representar da mesma maneira o momento fletor e o esforço cortante ao longo do comprimento da coluna, ou seja:

$$m = w_{,xx} = \frac{ML}{EI} \quad (3.7)$$

$$q = w_{,xxx} = \frac{QL^2}{EI} \quad (3.8)$$

Assim, após conhecidas as funções $w(x)$ para os trechos enterrados e desenterrados da coluna, basta calcular as segundas e terceiras derivadas destas funções para se conhecer os diagramas de momento fletor e esforço cortante, respectivamente. Esses diagramas apresentados a seguir representam a situação da coluna após a flambagem, instante a partir do qual surgem também esforços de flexão.

A Figura 3.23, mostrada a seguir, fornece os diagramas de momento fletor e esforço cortante da coluna, para três valores distintos de K .

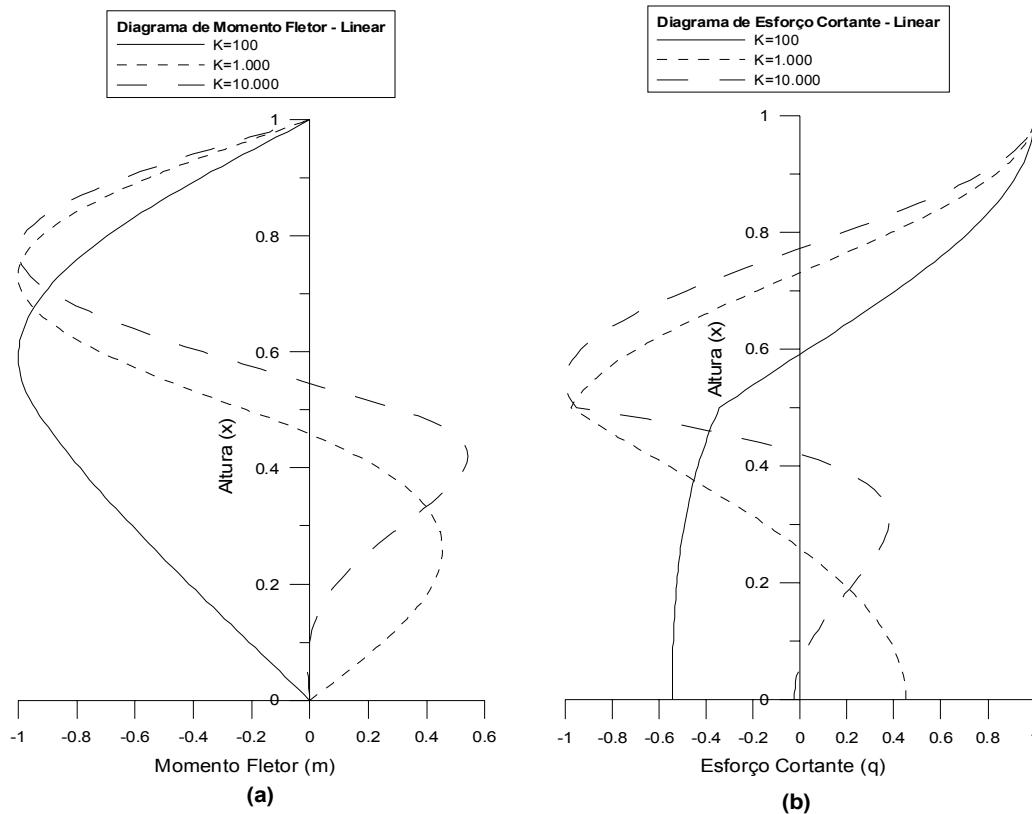


Figura 3.23: Diagramas de momento fletor linear e esforço cortante linear.

Observando-se o diagrama de momento fletor para $K=100$, verifica-se que os esforços de tração e compressão ao longo do comprimento da coluna estão sempre de um mesmo lado de sua seção transversal. Entretanto, isto não ocorre para $K=1.000$ e $K=10.000$, quando esses esforços estão ora de um lado da seção, ora do outro, resultando assim em maiores variações nos diagramas.

Vale notar também a correspondência dos gráficos quanto à relação (3.6), ou seja, como a função esforço cortante é a derivada da função momento fletor, todos os pontos de máximos locais do gráfico do momento correspondem a zeros no gráfico do cortante. Para a situação em que $K=1.000$, esses pontos são $x = 0,26$ e $x = 0,73$.