

2. Formulação do Problema

Neste capítulo é apresentada a formulação utilizada para a obtenção do funcional de energia e das equações diferenciais do problema.

Partindo do funcional de energia, e utilizando as ferramentas do Cálculo Variacional, chegam-se às equações diferenciais, a partir das quais podem ser obtidas as cargas críticas e os modos críticos.

Em seguida são apresentados os passos para a resolução do problema linear, bem como suas soluções analítica e aproximada, sendo esta última obtida através do Método de Ritz.

Nos itens 2.1 à 2.6 são utilizadas coordenadas globais para a coluna, e no item 2.7, coordenadas locais, conforme ilustrado na Figura 1.1.

2.1. Funcional de Energia Não-Linear da Coluna

A energia potencial total de uma estrutura, denominada π , é dada pela soma da energia interna de deformação (U), com o potencial das cargas externas (V_p), ou seja:

$$\pi = U + V_p \quad (2.1)$$

Na expressão anterior, U refere-se ao somatório da energia de membrana gerada pela deformação axial (U_m) e da energia de flexão gerada pelo alongamento das fibras tracionadas e o encurtamento das fibras comprimidas (U_f), podendo ser expressa, portanto, como:

$$U = U_m + U_f = \int_0^L \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (2.2)$$

onde E é o módulo de elasticidade transversal da coluna (ou módulo de Young), I , o momento de inércia da sua seção transversal, A , a área desta seção transversal, χ , a mudança de curvatura e ε , a deformação específica da linha neutra.

Seguindo procedimento comumente adotado na literatura na análise de colunas esbeltas (Dym e Shames, 1973), despreza-se a parcela relativa à deformação axial, ficando-se apenas com a parcela relativa à energia de flexão, ou seja:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (2.3)$$

O trabalho realizado pelo sistema (W) é dado pelo produto da carga axial, P , pelo encurtamento gerado na extremidade da coluna, Δ , conforme mostrado na Figura 2.1. Logo, tem-se a equação:

$$W = P\Delta \quad (2.4)$$

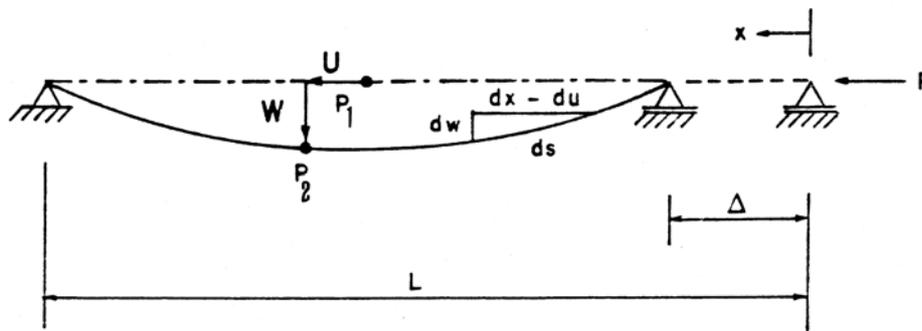


Figura 2.1: Coluna deformada.

O sinal positivo do trabalho é explicado pelo fato da carga P e do deslocamento axial Δ estarem em um mesmo sentido.

Já o potencial das cargas externas é igual ao trabalho realizado, com sinal invertido, ou seja,

$$V_p = -W = -P\Delta \quad (2.5)$$

Logo, substituindo-se as expressões (2.3) e (2.5) em (2.1), chega-se à seguinte equação para π :

$$\pi = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx - P\Delta \quad (2.6)$$

Considerando-se a estrutura da Figura 2.1, tem-se que o deslocamento de um ponto P_1 para um ponto P_2 pode ser descrito por um vetor de deslocamentos que é decomposto em duas componentes, um deslocamento axial, u , e um deslocamento transversal, w . Admitindo-se a hipótese da linha neutra da estrutura ser inextensível, tem-se que o comprimento L da estrutura indeformada permanece

inalterado após a sua deformação. Dessa forma, pode-se dizer que o elemento linear dx é igual ao elemento curvo ds , conforme ilustrado na Figura 2.2.

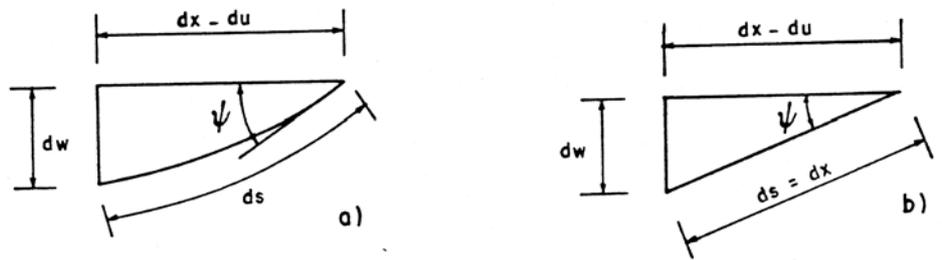


Figura 2.2: Elemento infinitesimal deformado.

Sendo assim, pode-se dizer que o elemento diferencial da Figura 2.2.a é semelhante ao elemento diferencial da Figura 2.2.b, permitindo-se escrever as seguintes relações entre estes elementos:

$$\text{sen } \psi = \frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx} = w_{,x} \quad (2.7)$$

$$\psi = \text{sen}^{-1}(w_{,x}) \quad (2.8)$$

onde ψ é o ângulo formado entre o eixo axial e o eixo da estrutura deformada.

A curvatura do eixo deformado é dada por:

$$\frac{1}{R_f} = \psi_{,x} = (\text{sen}^{-1} w_{,x})_{,x} = \frac{w_{,xx}}{(1 - w_{,x}^2)^{1/2}} \quad (2.9)$$

onde $1/R_f$ é o raio de curvatura do eixo deformado.

A curvatura da estrutura indeformada é:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (2.10)$$

sendo $1/R_0$ o raio de curvatura do eixo indeformado.

A variação da curvatura é dada pela diferença entre a curvatura do eixo deformado e a curvatura da estrutura indeformada, ou seja:

$$\chi = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_0} = \frac{w_{,xx}}{(1 - w_{,x}^2)^{1/2}} - 0 = \frac{w_{,xx}}{(1 - w_{,x}^2)^{1/2}} \quad (2.11)$$

Substituindo a expressão (2.11) em (2.3), tem-se:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\frac{w_{,xx}^2}{1 - w_{,x}^2} \right) dx \quad (2.12)$$

Expandindo a Equação 2.11 em séries de Taylor até a segunda ordem, chega-se à aproximação:

$$\chi = w_{,xx} \left(1 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) \quad (2.13)$$

Admitindo que as grandezas E e I são constantes ao longo da estrutura, e substituindo (2.13) em (2.3), pode-se reescrever a energia interna de deformação U da seguinte forma:

$$U \cong \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) dx \quad (2.14)$$

Em seu trabalho, Andrade (1993) mostra que esta expressão é suficiente para a descrição precisa do caminho pós-crítico da coluna, inclusive nas regiões onde ocorrem grandes deslocamentos transversais. Dessa forma, a expressão (2.14) é adotada para a energia interna de deformação.

Buscando-se descrever o potencial das cargas externas a partir dessas mesmas grandezas, prossegue-se com as constatações a seguir.

O parâmetro Δ , relativo ao encurtamento da coluna, pode ser escrito em termos do vetor de deslocamentos. Logo, a partir da Figura 2.2.b e com a utilização do Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(ds)^2 = (dx - du)^2 + (dw)^2 \quad (2.15)$$

Dividindo todos os termos da Equação 2.15 por $(dx)^2$, obtém-se

$$\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = \left(\frac{dx - du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (2.16)$$

Admitindo-se que $ds = dx$, e derivando a Equação 2.16 com relação a x , tem-se que:

$$1 = (1 - u_{,x})^2 + w_{,x}^2 \quad (2.17)$$

Desenvolvendo-se então a expressão anterior pode-se reescrevê-la na forma:

$$\frac{du}{dx} = 1 - (1 - w_{,x}^2)^{1/2} \quad (2.18)$$

Passando agora dx para o lado direito da equação e observando que

$$\int_0^L du = \Delta \quad (2.19)$$

chega-se à:

$$\Delta = \int_0^L du = \int_0^L \left[1 - (1 - w_{,x}^2)^{1/2} \right] dx \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.5), pode-se escrever:

$$V_p = \int_0^L P \left[1 - (1 - w_{,x}^2)^{1/2} \right] dx \quad (2.21)$$

A partir da Equação 2.21, após expandir-se o termo $(1 - w_{,x}^2)^{1/2}$ até a quarta ordem em séries de Taylor, chega-se à expressão final para o potencial das cargas externas V_p , ou seja:

$$V_p = \int_0^L P \left(-\frac{1}{2} w_{,x}^2 - \frac{1}{8} w_{,x}^4 \right) dx \quad (2.22)$$

Finalmente, de posse das equações (2.14) e (2.22) referentes, respectivamente, à energia interna de deformação e ao potencial das cargas externas, pode-se escrever o funcional completo de energia potencial total da coluna. Tem-se, portanto,

$$\pi = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) dx - \frac{1}{2} P \left(w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,x}^4 \right) dx \quad (2.23)$$

2.2. Contribuição da Fundação Elástica

Diversos modelos podem ser utilizados a fim de descrever o comportamento da fundação.

Segundo Coskun (1999), o modelo de fundação elástica de Winkler caracteriza-se como uma distribuição infinita, porém contínua, de molas lineares, no qual a fundação aplica somente uma única reação na direção normal à coluna e que é proporcional a deflexão desta. Dessa forma, a resistência da fundação pode ser expressa através de um único parâmetro de rigidez, denominado por k .

Em função de sua simplicidade, combinado com um histórico de bons resultados obtidos em trabalhos anteriores, o modelo de Winkler é o mais usado na prática e será o modelo adotado para descrever o comportamento da fundação também neste trabalho.

Ainda sobre o modelo de Winkler, sabe-se que sua maior limitação é o fato deste modelo não considerar a existência de interações entre as molas. Dessa forma, outros modelos encontrados na literatura utilizam mais de um parâmetro

para descrever o comportamento da fundação elástica. São os casos dos modelos propostos por Hetényi (1946), Pasternack (1954), Reissenner (1958), dentre outros.

Com base nesses modelos, a força exercida pela fundação sobre a coluna, F , pode ser descrita pela equação geral a seguir:

$$F = kw + k_1 w_{,xx} + k_2 w_{,xxx} \pm 2k_3 w^3 \quad (2.24)$$

onde k_1 e k_2 são constantes lineares de rigidez da fundação e w , $w_{,x}$, $w_{,xx}$ e $w_{,xxx}$, funções correspondentes ao deslocamento transversal ao longo da coluna e sua primeira, segunda e terceira derivadas, respectivamente.

Nessa mesma expressão, k_3 corresponde ao coeficiente de rigidez do termo não-linear cúbico. O sinal positivo neste termo corresponde a uma fundação com ganho de rigidez (ou *hardening foundation*), da mesma forma que o sinal negativo neste mesmo termo está relacionado a uma fundação com perda de rigidez (ou *softening foundation*).

No Capítulo 4, quando se adotar um comportamento não-linear para a fundação elástica, se utilizará o modelo de Winkler Não-Linear com perda de rigidez. Esse modelo foi escolhido baseado na suposição de que a maioria dos solos apresenta esse tipo de comportamento à medida que se aumentam as forças exercidas sobre eles.

A Tabela 2.1 apresenta as constantes consideradas nos modelos citados.

Modelos	Constantes da fundação
Winkler (linear)	$k \neq 0$ $k_1, k_2, k_3 = 0$
Winkler Não-Linear	$k > 0$ $k_3 \neq 0$ $k_1, k_2 = 0$
Hetényi	$k, k_2 \neq 0$ $k_1, k_3 = 0$
Pasternack	$k, k_1 \neq 0$ $k_2, k_3 = 0$
Reissenner	$k, k_1 \neq 0$ $k_2, k_3 = 0$

Tabela 2.1: Modelos de fundação elástica.

A energia interna de deformação da fundação elástica, segundo o modelo de Winkler linear, é dada por:

$$U_{fd} = \int_0^H \frac{1}{2} k w^2 dx \quad (2.25)$$

e segundo o modelo de Winkler Não-Linear com perda de rigidez, por:

$$U_{fd} = \int_0^H \frac{1}{2} k w^2 dx - \int_0^H \frac{1}{2} k_3 w^4 dx \quad (2.26)$$

2.3. Funcional Completo de Energia Não-Linear

O funcional completo de energia não-linear, expresso a seguir é obtido a partir da soma das equações (2.23) com (2.26), ou seja,

$$\begin{aligned} \pi = & \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) - \frac{1}{2} P \left(w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,x}^4 \right) \right] dx \\ & + \int_0^H \frac{1}{2} k w^2 dx - \int_0^H \frac{1}{2} k_3 w^4 dx \end{aligned} \quad (2.27)$$

No caso de se considerar a fundação elástica com comportamento linear, o funcional de energia não-linear passa a ser dado por:

$$\begin{aligned} \pi = & \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) - \frac{1}{2} P \left(w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,x}^4 \right) \right] dx \\ & + \int_0^H \frac{1}{2} k w^2 dx \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.4. Funcional de Energia Linear

O funcional de energia linear é obtido a partir da consideração de que a coluna sofre pequenas rotações após a sua deformação. Com isso, tem-se que o ângulo ψ , visto na Figura 2.2, é muito pequeno e, dessa forma, pode-se fazer a aproximação a seguir:

$$(1 - w_{,x}^2)^{1/2} \cong 1 \quad (2.29)$$

Em conseqüência dessa aproximação, a energia interna de deformação (2.12) pode ser escrita como:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI w_{,xx}^2 dx \quad (2.30)$$

e o potencial das cargas externas, como:

$$V_p = \int_0^L -\frac{1}{2} P w_{,x}^2 dx \quad (2.31)$$

Logo, o funcional de energia linear, usado apenas para pequenas rotações, pode ser descrito pela equação

$$\pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI (w_{,xx}^2) - \frac{1}{2} P (w_{,x}^2) \right] dx \quad (2.32)$$

2.5. Funcional Completo de Energia Linear

Incluindo-se os termos relativos à fundação (obtidos em 2.25), o funcional completo de energia linear adquire a forma:

$$\pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI (w_{,xx}^2) - \frac{1}{2} P (w_{,x}^2) \right] dx + \int_0^H \frac{1}{2} k w^2 dx \quad (2.33)$$

2.6. Equações Diferenciais da Coluna

Neste item faz-se a dedução das equações diferenciais da coluna para os trechos com e sem fundação, a partir dos funcionais de energia obtidos em (2.33) e (2.32), respectivamente.

Ambas as expressões são da forma:

$$\int_0^L f(x, w, w_{,x}, w_{,xx}) dx \quad (2.34)$$

Para se determinar estas equações diferenciais são aplicadas as ferramentas do Cálculo Variacional. Vários autores já resolveram este problema, como, por exemplo, Chajes (1993) e Dym e Shames (1973).

Será apresentado a seguir, e de forma concisa, como se obter as equações diferenciais a partir dos funcionais de energia.

Para um funcional como o da expressão (2.34), a Equação de Euler que representa a equação diferencial do problema, é do tipo:

$$f_w - \frac{d}{dx}(f_{w'}) + \frac{d^2}{dx^2}(f_{w''}) = 0 \quad (2.35)$$

onde:

f : função que corresponde ao integrando do funcional de energia linear;

f_w : derivada da função f com relação à $w(x)$;

$f_{w'}$: derivada da função f com relação à $w'(x)$ e

$f_{w''}$: derivada da função f com relação à $w''(x)$.

Para o trecho da coluna sem fundação, a função f é aquela contida no funcional da expressão (2.32), ou seja,

$$f = \left[\frac{1}{2} EI (w_{,xx})^2 - \frac{1}{2} P (w_{,x})^2 \right] \quad (2.36)$$

Calculando-se os termos f_w , $f_{w'}$ e $f_{w''}$, obtém-se:

$$f_w = 0 \quad (2.37)$$

$$f_{w'} = -P \left(\frac{dw(x)}{dx} \right) \quad (2.38)$$

$$f_{w''} = EI \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) \quad (2.39)$$

os quais, quando substituídos em (2.35), fornecem:

$$0 - \frac{d}{dx} \left[-P \left(\frac{dw(x)}{dx} \right) \right] + \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) \right] = 0 \quad (2.40)$$

Consequentemente,

$$\left(\frac{d^4 w(x)}{dx^4} \right) + \frac{P}{EI} \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = 0 \quad (2.41)$$

A Equação (2.41) corresponde ao trecho sem fundação da coluna, o qual se denominará daqui por diante, *trecho 1*, e a função $w(x)$ correspondente a este trecho, $w_1(x)$.

Logo, reescrevendo a expressão (2.41) em função de $w_1(x)$, chega-se à:

$$\left(\frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} \right) + \frac{P}{EI} \left(\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \right) = 0 \quad (2.42)$$

Seguindo o mesmo procedimento e partindo-se desta vez da expressão (2.33), obtém-se a equação diferencial para o trecho sem fundação, ou *trecho 2*, expressa a seguir.

$$\left(\frac{d^4 w_2(x)}{dx^4}\right) + \frac{P}{EI} \left(\frac{d^2 w_2(x)}{dx^2}\right) + \frac{k}{EI} w_2(x) = 0 \quad (2.43)$$

onde $w_2(x)$ corresponde à função que define os deslocamentos transversais ao longo do trecho 2 da coluna.

2.7. Solução Analítica do Problema de Autovalor

Neste item, objetiva-se, a partir das equações diferenciais da coluna, em seus trechos com e sem fundação, juntamente com as condições de contorno e de continuidade do problema, encontrar a sua solução analítica.

Por se tratar de um problema de valor de contorno, sua solução analítica corresponde a uma família de autovalores e autofunções que são, respectivamente, as cargas de bifurcação e os respectivos modos de bifurcação, também chamados de cargas críticas e modos críticos.

A introdução de parâmetros adimensionais, mostrados a seguir, é feita com o objetivo de facilitar o desenvolvimento do problema, permitindo assim uma maior eficiência na análise paramétrica.

De forma a considerar a coluna com comprimento total igual a um, normalizam-se a coordenada axial, x , e os deslocamentos transversais, w , dividindo-os pelo comprimento total da coluna, L .

$$x = \frac{x}{L} \quad (2.44)$$

$$w = \frac{w}{L} \quad (2.45)$$

São também introduzidos os parâmetros adimensionais:

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{P}{EI}} L^2 \quad (2.46)$$

$$K = \frac{k}{EI} L^4 \quad (2.47)$$

$$K_{nl} = \frac{k_3}{EI} L^6 \quad (2.48)$$

onde λ , K e K_{nl} correspondem, respectivamente, ao parâmetro de carga e aos parâmetros de rigidez da fundação elástica linear e não-linear, respectivamente.

Assim, pode-se reescrever as equações (2.42) e (2.43) em função das novas variáveis, isto é, a equação diferencial parametrizada para o trecho sem fundação é dada por:

$$\left(\frac{d^4 w_1(x)}{dx^4}\right) + \lambda^2 \pi^2 \left(\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2}\right) = 0 \quad (2.49)$$

e a equação diferencial parametrizada para o trecho com fundação:

$$\left(\frac{d^4 w_2(x)}{dx^4}\right) + \lambda^2 \pi^2 \left(\frac{d^2 w_2(x)}{dx^2}\right) + K w_2(x) = 0 \quad (2.50)$$

Como mostrado por Boyce e Di Prima (1998), a solução geral de uma equação diferencial linear de quarta ordem, com coeficientes constantes é uma expressão da seguinte forma:

$$w_i(x) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\alpha_i x} \quad (2.51)$$

onde C_i são as constantes da solução geral, e α_i as raízes da equação característica.

A solução geral de uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, terá um número de constantes igual ao número de sua ordem. Logo, como as equações diferenciais deste problema são de quarta ordem, serão quatro as constantes C_i envolvidas em cada uma destas equações.

Como a coluna está dividida em dois trechos (*trecho 1* – sem fundação e *trecho 2* – com fundação), para facilitar o desenvolvimento do problema, cada trecho terá a sua própria solução geral, ou seja,

Trecho sem fundação:

$$w_1(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + C_4 e^{\alpha_4 x} \quad (2.52)$$

Trecho com fundação:

$$w_2(x) = C_5 e^{\alpha_5 x} + C_6 e^{\alpha_6 x} + C_7 e^{\alpha_7 x} + C_8 e^{\alpha_8 x} \quad (2.53)$$

Com o objetivo de se escrever as equações características dos dois trechos coluna, tem-se:

$$\frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} = C \alpha^4 e^{\alpha x} \quad ; \quad \frac{d^2 w_n(x)}{dx^2} = C \alpha^2 e^{\alpha x} \quad (2.54)$$

onde $n = 1$ (trecho sem fundação) e $n = 2$ (trecho com fundação).

Substituindo as expressões escritas em (2.54) na equação diferencial (2.49), correspondente ao trecho sem fundação, chega-se à sua equação característica,

$$\alpha^4 + \lambda^2 \pi^2 \alpha^2 = 0 \quad (2.55)$$

ou seja,

$$\alpha^2 (\alpha^2 + \lambda^2 \pi^2) = 0 \quad (2.56)$$

Assim, pode-se facilmente encontrar as seguintes soluções para α :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (2.57)$$

$$\alpha_3 = \sqrt{-\lambda^2 \pi^2} = \lambda \pi i \quad (2.58)$$

$$\alpha_4 = -\sqrt{-\lambda^2 \pi^2} = -\lambda \pi i \quad (2.59)$$

onde $i = \sqrt{-1}$, número imaginário.

Substituindo as expressões (2.57), (2.58) e (2.59) na expressão (2.52), e multiplicando-se a parcela correspondente a raiz repetida α_2 por x , chega-se à solução geral da equação diferencial do trecho da coluna sem fundação:

$$w_1(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\lambda \pi i x} + C_4 e^{-\lambda \pi i x} \quad (2.60)$$

ou, em termos de funções trigonométricas:

$$w_1(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \text{sen}(\lambda \pi x) + C_4 \text{cos}(\lambda \pi x) \quad (2.61)$$

Da mesma forma, para o trecho com fundação, segue-se o mesmo desenvolvimento. Nesse caso, a equação característica é:

$$\alpha^4 + \lambda^2 \pi^2 \alpha^2 + K = 0 \quad (2.62)$$

a qual possui as seguintes soluções para α :

$$\alpha_5 = 1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}} \quad (2.63)$$

$$\alpha_6 = 1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}} \quad (2.64)$$

$$\alpha_7 = -1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}} \quad (2.65)$$

$$\alpha_8 = -1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}} \quad (2.66)$$

Substituindo-se as raízes (2.63) à (2.66) na Equação 2.53, chega-se à solução geral da equação diferencial para o trecho com fundação, expressa a seguir.

$$w_2(x) = C_5 e^{(1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}})x} + C_6 e^{(1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}})x} + C_7 e^{(-1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}})x} + C_8 e^{(-1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}})x} \quad (2.67)$$

Fazendo uma análise mais detalhada dessas raízes, observa-se que, dependendo da relação entre os valores de λ e K , as mesmas podem vir a ser reais

ou imaginárias e que podem ser escritas soluções simplificadas para cada um desses casos, conforme mostrado a seguir.

Caso 1) $K = \frac{\lambda^4 \pi^4}{4}$	$\alpha_5 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda \pi i$
	$\alpha_6 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda \pi i$
	$\alpha_7 = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda \pi i$
	$\alpha_8 = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \lambda \pi i$

Nesse caso obtêm-se quatro raízes imaginárias iguais e de mesmo módulo, sendo duas delas com sinal positivo e outras duas com sinal negativo. A solução geral da equação diferencial é:

$$w_2(x) = C_5 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}\lambda\pi x}{2}\right) + C_6 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}\lambda\pi x}{2}\right)x + C_7 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\lambda\pi x}{2}\right) + C_8 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\lambda\pi x}{2}\right)x \quad (2.68)$$

Caso 2) $K = 0$	$\alpha_5 = 0$
	$\alpha_6 = \lambda \pi i$
	$\alpha_7 = 0$
	$\alpha_8 = -\lambda \pi i$

As raízes obtidas no caso 2 são iguais àquelas encontradas no problema sem fundação e a solução geral da equação diferencial volta à da Equação (2.61).

Caso 3) $K < \frac{\lambda^4 \pi^4}{4}$	$\alpha_5 = \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K} i}$
	$\alpha_6 = \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K} i}$
	$\alpha_7 = -\frac{1}{2} \sqrt{2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K} i}$
	$\alpha_8 = -\frac{1}{2} \sqrt{2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K} i}$

No caso 3 as raízes são dadas por dois pares imaginários, e a solução geral da equação diferencial é:

$$w_2(x) = C_5 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K} x}\right) + C_6 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K} x}\right) + \quad (2.69)$$

$$C_7 \operatorname{cos}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K} x}\right) + C_8 \operatorname{cos}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K} x}\right)$$

Caso 4) $K > \frac{\lambda^4 \pi^4}{4}$	$\alpha_5 = \frac{1}{2} \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{4K - \lambda^4 \pi^4} i}$
	$\alpha_6 = \frac{1}{2} \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{4K - \lambda^4 \pi^4} i}$
	$\alpha_7 = -\frac{1}{2} \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{4K - \lambda^4 \pi^4} i}$
	$\alpha_8 = -\frac{1}{2} \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{4K - \lambda^4 \pi^4} i}$

Este caso apresenta-se como o mais complexo, e após simplificar as expressões das raízes α_5 , α_6 , α_7 e α_8 , pode-se reescrevê-las da seguinte forma:

$$\alpha_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \pi \left(r \cos \frac{\theta}{2} + ir \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\alpha_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \pi \left(r \cos \frac{\theta}{2} - ir \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\alpha_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \pi \left(r \cos \frac{\theta}{2} + ir \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\alpha_8 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \pi \left(r \cos \frac{\theta}{2} - ir \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

onde:

$$r = \frac{2\sqrt{K}}{\lambda^2 \pi^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\sqrt{\frac{4K}{\lambda^4 \pi^4} - 1}\right)$$

E, portanto, para este caso, a solução geral da equação diferencial fica sendo:

$$\begin{aligned} w_2(x) = & e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x} \left(C_5 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \pi \sin\frac{\theta}{2} x\right) + C_6 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \pi \sin\frac{\theta}{2} x\right) \right) \\ & + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x} \left(C_7 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \pi \sin\frac{\theta}{2} x\right) + C_8 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \pi \sin\frac{\theta}{2} x\right) \right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Conforme dito anteriormente, as soluções das equações diferenciais para cada trecho da coluna são dadas em função de quatro constantes. Como a coluna foi dividida em dois trechos, o número total de constantes envolvidas é igual a oito.

A fim de se obter os valores numéricos destas oito constantes, é preciso que se tenham também oito equações, as quais são obtidas da seguinte forma: quatro delas provêm das condições de contorno, ou seja, dos apoios nas duas extremidades da coluna, e as outras quatro das condições de continuidade, definidas na interface física entre os trechos com e sem fundação.

Com relação às condições de contorno, cada apoio fornece duas condições de contorno homogêneas que podem ser em função dos deslocamentos transversais, rotações, momentos ou cortantes, dependendo do tipo de apoio. A Figura 2.3 mostra as condições de contorno homogêneas para diferentes condições de apoio da coluna.

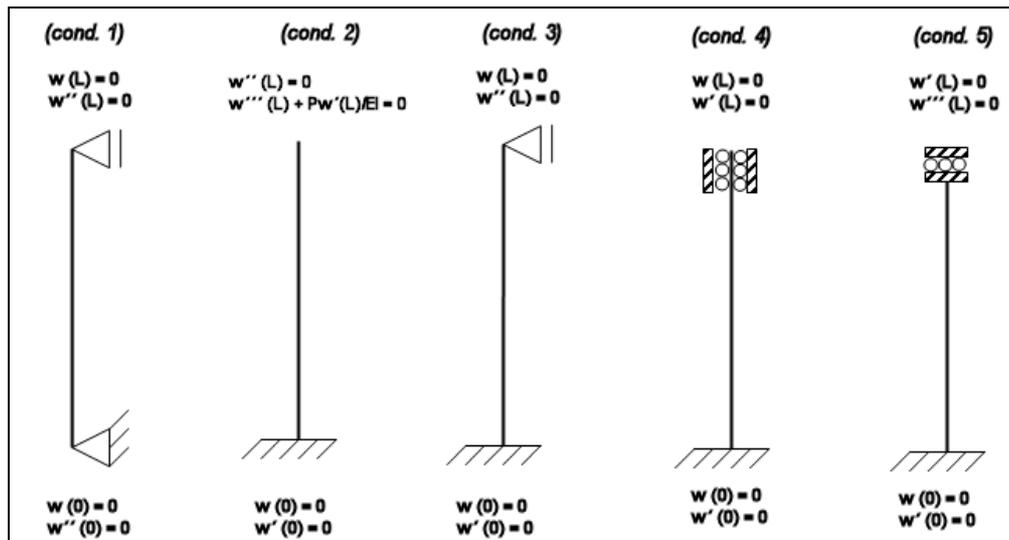


Figura 2.3: Condições de contorno homogêneas para diferentes tipos de apoio.

Com relação às condições de continuidade, sabe-se que elas são definidas em um ponto intermediário localizado exatamente na interface física que subdivide a coluna em seus dois trechos.

Para que se garanta a continuidade da coluna como um todo, é necessário que, neste ponto, se imponham as relações estabelecidas na Tabela 2.2:

$$\begin{aligned}
 w_1(x=0) &= w_2(x=H_2) \\
 w_1'(x=0) &= w_2'(x=H_2) \\
 w_1''(x=0) &= w_2''(x=H_2) \\
 w_1'''(x=0) &= w_2'''(x=H_2)
 \end{aligned}$$

Tabela 2.2: Condições de continuidade, definidas pelas coordenadas locais.

Após definidas as oito expressões a partir das condições de contorno e de continuidade, tem-se então um sistema homogêneo composto por oito equações e oito incógnitas que pode ser escrito na forma matricial:

$$Ac = 0 \quad (2.71)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{81} & a_{82} & \cdots & a_{88} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

onde A é denominada *matriz dos coeficientes* e c , *vetor das constantes*. Na matriz A , cada elemento a_{ij} corresponde ao coeficiente que multiplica a constante C_j na equação i .

A solução trivial desse sistema fornece:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0 \quad (2.73)$$

que corresponde à coluna na sua posição vertical, sem deformações transversais.

Para que um sistema de equações homogêneo tenha solução não-trivial é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja igual a zero. Ao se igualar o determinante da matriz A à zero, obtém-se uma equação em função do parâmetro de carga λ , denominada equação característica do problema de autovalor, isto é:

$$\det A = 0 \quad (2.74)$$

As raízes dessa equação são as cargas críticas da coluna e a melhor forma de se obter esses valores é através da análise do gráfico da equação característica. Nesse gráfico, no eixo das ordenadas são plotados os valores do determinante, e, no eixo das abscissas, os valores do parâmetro de carga λ . As cargas críticas correspondem aos valores de λ quando a curva corta o eixo das abscissas.

Para a obtenção precisa desses pontos é importante fazer uma análise numérica cuidadosa nos intervalos próximos aos pontos onde a curva muda de sinal. Em uma simples rotina computacional, define-se um pequeno intervalo no qual o seu limite inferior é um valor de λ antes da mudança de sinal da curva, e o limite superior, um ponto posterior a esta mudança. Calcula-se então o valor do determinante para cada um dos pontos deste intervalo, repetindo-se esse mesmo procedimento até que se obtenha um valor do determinante na ordem de grandeza de 10^{-5} , que pode ser considerada uma boa aproximação da solução exata.

Em todo problema de estabilidade, a estrutura analisada possui diversas cargas críticas, sendo que aquela com o menor valor numérico dentre elas é denominada *primeira carga crítica ou carga de flambagem*. Fisicamente analisando, essa carga representa um valor numérico para o qual a estrutura perde sua estabilidade.

As cargas críticas são os autovalores da matriz A , assim como os seus autovetores estão associados aos modos críticos (também denominados modos de flambagem). A cada autovalor está associado um autovetor, ou seja, a cada carga crítica está associado um certo modo de flambagem da coluna.

Para se determinar os autovetores, arbitra-se uma das constantes multiplicativas e obtém-se a solução do sistema (2.71).

Após se obter um autovetor, o mesmo deve ser normalizado. Isto é feito, dividindo-se cada um de seus elementos pela norma do vetor, ou seja,

$$amp_{norm} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + v_6^2 + v_7^2 + 1^2} \quad (2.75)$$

$$V_{norm} = \frac{1}{amp_{norm}} \quad (2.76)$$

onde amp_{norm} é a amplitude normalizada do autovetor V , v_j são os elementos deste autovetor, antes da sua normalização e V_{norm} é o autovetor normalizado.

Em seguida, substituem-se os elementos do autovetor normalizado nas soluções analíticas (2.61) e (2.67), encontrando-se, portanto, o modo crítico correspondente (autofunção).

Finalmente, a fim de se obterem gráficos nos quais as amplitudes máximas dos modos críticos sejam sempre unitárias, o deslocamento transversal calculado em cada ponto desses gráficos foi dividido pelo valor máximo dos deslocamentos ao longo de todo o comprimento da coluna. Dessa forma, todos os gráficos são uniformizados, facilitando, assim, a observação dos resultados.

2.8. Solução Aproximada de Rayleigh-Ritz

A fim de se analisar a qualidade do programa desenvolvido, decidiu-se determinar também a sua solução aproximada, a qual foi baseada no Método de Rayleigh-Ritz (ou somente Método de Ritz). Esse método foi escolhido, pois se apresenta como uma boa ferramenta na análise linear quando deseja-se estudar sistemas que apresentem equações e condições de contorno complexas.

Através do método de Ritz substitui-se a solução analítica por uma função de aproximação, f_n , no funcional de energia da coluna. Essa função de aproximação é usualmente expressa na forma de séries, de acordo com a expressão,

$$f_n = \sum_{j=1}^n A_j \phi_j \quad (2.77)$$

onde A_j são constantes que multiplicam as funções ϕ_j adotadas, e n é o número de termos usado na série.

A quantidade de termos empregados nesta função é determinante na precisão da solução do problema. Ou seja, quanto mais termos forem utilizados na

função de aproximação adotada, mais próxima da solução exata será a solução pelo Método de Ritz.

Por exemplo, para o caso particular de uma coluna bi-apoiada, suas condições de contorno são definidas por:

$$w(x=0) = 0; \quad w'(x=0) = 0; \quad w(x=L) = 0; \quad w'(x=L) = 0 \quad (2.78)$$

A Figura 2.4 mostra que a função seno atende as condições de contorno mencionadas anteriormente, logo sua adoção neste problema particular é, sem dúvida, uma boa aproximação para a solução do mesmo.

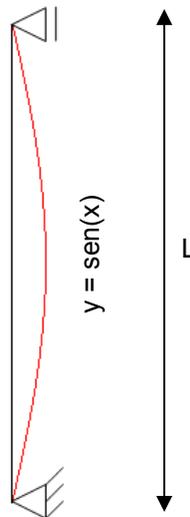


Figura 2.4: Função seno como aproximação para a função que mede os deslocamentos transversais em uma coluna bi-apoiada.

Definida a função de aproximação ϕ_j com o seu respectivo número de termos, substitui-se a mesma no funcional de energia linear, definido em (2.33). Integrando-se esse funcional ao longo do comprimento da coluna, obtém-se uma função, π_{approx} , das amplitudes modais A_j .

Empregando-se então o princípio da energia potencial estacionária obtêm-se as n equações de equilíbrio, definidas pelas equações:

$$\frac{\partial \pi_{approx}}{\partial A_j} = 0 \quad j = 1, n \quad (2.79)$$

Assim, chega-se a um sistema com n equações e n incógnitas (A_j), cuja resolução segue o mesmo raciocínio adotado no problema para a determinação das cargas críticas a partir da solução analítica (item 2.7). Ou seja, monta-se a matriz dos coeficientes que multiplicam as constantes A_j nas suas respectivas equações, calcula-se o determinante desta matriz e iguala-o à zero. Em seguida, constrói-se o

gráfico *determinante* $\times \lambda$, onde os valores de λ nos quais a curva corta o eixo das abscissas representam as cargas críticas do problema (os seus autovalores).