

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Gustavo Serebrenick

**Análise da estabilidade de colunas esbeltas parcialmente
enterradas em uma fundação elástica não-linear**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre pelo Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-
Rio. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Paulo Batista Gonçalves

Rio de Janeiro

Novembro de 2004



Gustavo Serebrenick

Análise da estabilidade de colunas esbeltas parcialmente enterradas em uma fundação elástica não-linear

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

UFOP

Profa. Djenane Cordeiro Pamplona

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial

do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 04 de Novembro de 2004

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Gustavo Serebrenick

Graduou-se em Engenharia Civil, ênfase em Estruturas, pela PUC-Rio (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro) em Dezembro de 2000. Desenvolveu seu trabalho final de curso sobre o tema Concreto de Alto Desempenho.

Ficha catalográfica

Serebrenick, Gustavo

Análise da estabilidade de colunas parcialmente enterradas em uma fundação elástica não-linear / Gustavo Serebrenick ; orientador: Paulo Batista Gonçalves. – Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2005.

115 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil .

Inclui referências bibliográficas

1. Engenharia civil – Teses. 2. Colunas. 3. Estabilidade. 4. Fundação não-linear. 5. Flambagem. 6. Estacas parcialmente enterradas. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Aos meus pais, Edmundo e Sylvia.

À minha irmã, Renata.

Agradecimentos

Ao Prof. Paulo Batista Gonçalves por sua orientação, serenidade e pelos conhecimentos transmitidos principalmente ao longo desse último ano.

Ao Prof. Ricardo Azoubel M. Silveira pelo seu enorme apoio e receptividade durante o período de estudos em Ouro Preto-MG.

Aos meus pais e à minha irmã, por tudo o que eles representam para mim.

Ao meu avô, Abrahão Serebrenick (I.M.), pelos ensinamentos e pelo prazer que me proporcionou durante o nosso convívio em comum.

Aos meus demais familiares e amigos, que me acompanham e apóiam em todos os momentos.

Aos colegas da PUC-Rio, em especial Antônio Eduardo Gonçalves Sampaio, Eduardo Pasquetti e Patrícia Cunha de Assis pelo importante apoio dado durante algumas etapas desta Dissertação.

Ao colega Bruno Moreira pela hospitalidade dada na ocasião da minha ida à Ouro Preto.

A PUC-Rio e aos demais professores do Departamento de Engenharia Civil.

A CAPES pelo auxílio financeiro concedido, incentivo este, fundamental para a realização deste trabalho.

Resumo

Serebrenick, Gustavo; Gonçalves, Paulo B. **Análise da estabilidade de colunas esbeltas parcialmente enterradas em uma fundação elástica não-linear**. Rio de Janeiro, 2004. 115p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho tem por objetivo estudar o comportamento de colunas esbeltas parcialmente enterradas, quando submetidas a um carregamento axial de compressão. A fundação é representada, ora por um modelo linear, o qual considera que a reação exercida pelo solo é proporcional às deflexões da coluna, ora por um modelo não-linear no qual esta relação de proporcionalidade não é mais verificada. Para a modelagem da coluna, é usada a teoria inextensional de barras esbeltas. Inicialmente, mostra-se como são deduzidas as equações diferenciais do problema a partir dos funcionais de energia da coluna. No problema linear, buscam-se obter as cargas críticas e modos críticos da coluna. Neste caso, sua solução analítica é encontrada a partir da resolução do problema de valor de contorno usando-se um programa de álgebra simbólica. Também é obtida uma solução aproximada através do método de Ritz. Um estudo paramétrico detalhado analisa a influência das condições de apoio da coluna e altura e rigidez da fundação na carga e modo críticos. Entretanto, no caso não-linear, as equações diferenciais são mais complexas, não permitindo a obtenção de uma solução analítica. É utilizado, então, o método de Ritz, no qual as soluções analíticas obtidas para o problema linear (autofunções) são usadas como funções de interpolação. Em seguida, chega-se à uma equação não-linear de equilíbrio, da qual se obtém o caminho pós-crítico da coluna. Os resultados do problema não-linear são comparados com os obtidos através do método dos elementos finitos.

Palavras-chave

Colunas, estabilidade, fundação não-linear, flambagem, estacas parcialmente enterradas.

Abstract

Serebrenick, Gustavo; Gonçalves, Paulo B. (Advisor). **Stability analysis of slender columns partially buried in a non-linear elastic foundation**. Rio de Janeiro, 2004. 115p. M.Sc. Dissertation – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this thesis the behavior of slender, partially embedded columns under axial compressive forces is studied. The foundation is either represented by a linear model, which considers that the soil reaction is proportional to the column's deflections or by a non-linear model in which this proportionality relation is not observed. The inextensional slender beam theory is used to model the column. Initially, the governing differential equations are deduced from the energy functional of the column-foundation system. In the linear problem, the critical loads and corresponding critical modes are looked for. In this case, an analytic solution is obtained by the solution of the associated boundary value problem, using a symbolic algebra software. An approximate solution is also found by Ritz's method. A parametric study is conducted to study the influence of the column boundary conditions and foundation's height and stiffness on critical loads and modes. However, in the non-linear case, differential equations are much more complex and an analytical solution is not possible. So, the Ritz's method is used once again, in which the analytic solutions of the linear problem (eigenfunctions) are used as interpolation functions. After that, a non-linear equilibrium equation is obtained together with the column post-buckling path. These results are compared with the ones obtained using the finite element method.

Key-words

Columns, stability, non-linear foundation, buckling, partially embedded piles.

Sumário

1. Introdução.....	19
1.1. Objetivo.....	20
1.2. Organização do texto.....	22
2. Formulação do problema.....	24
2.1. Funcional de energia não-linear da coluna.....	24
2.2. Contribuição da fundação elástica.....	28
2.3. Funcional completo de energia não-linear.....	30
2.4. Funcional de energia linear.....	30
2.5. Funcional completo de energia linear.....	31
2.6. Equações diferenciais da coluna.....	31
2.7. Solução analítica do problema de autovalor.....	33
2.8. Solução aproximada de Rayleigh-Ritz.....	41
3. Resultados da análise linear.....	44
3.1. Nota sobre a apresentação dos resultados.....	44
3.2. Influência da rigidez da fundação.....	45
3.2.1. Influência na carga crítica.....	45
3.2.2. Influência no modo crítico.....	48
3.3. Influência da altura da fundação.....	50
3.3.1. Influência na carga crítica.....	50
3.3.2. Influência no modo crítico.....	54
3.4. Influência das condições de apoio.....	56
3.4.1. Influência na carga crítica.....	57
3.4.2. Influência no modo crítico.....	60
3.5. Análise da coluna com a extremidade inferior livre.....	61
3.5.1. Influência da rigidez da fundação.....	61
3.5.1.1. Influência na carga crítica.....	61
3.5.1.2. Influência no modo crítico.....	64

3.5.2. Influência da altura da fundação.....	65
3.5.2.1. Influência na carga crítica.....	65
3.5.2.2. Influência no modo crítico.....	68
3.6. Comparação dos resultados com o método de Ritz.....	69
3.7. Diagramas de momento fletor e esforço cortante.....	72
4. Formulação do problema não-linear.....	75
4.1. Equações diferenciais para a coluna com um trecho sem fundação e outro sob fundação elástica não-linear.....	75
4.2. Equações diferenciais para a coluna com um trecho sem fundação e outro sob fundação elástica linear.....	78
4.3. Método de Ritz – caminho pós-crítico não-linear.....	79
5. Resultados da análise não-linear.....	82
5.1. Resultados obtidos pelo método de Ritz para a coluna com fundação elástica linear.....	83
5.1.1. Influência da rigidez da fundação.....	83
5.1.2. Influência da altura da fundação.....	86
5.1.3. Influência das condições de contorno.....	87
5.2. Resultados obtidos pelo método de Ritz para a coluna com fundação elástica não-linear.....	89
5.3. Resultados obtidos pelo programa de elementos finitos.....	91
5.3.1. Influência das imperfeições na coluna.....	92
5.4. Comparação dos resultados.....	93
5.4.1. Comparação entre os caminhos pós-críticos.....	94
5.4.2. Comparação entre as cargas críticas.....	96
5.5. Diagramas de momento fletor e esforço cortante.....	97
6. Conclusões.....	100
6.1. Sugestões.....	102
7. Referências Bibliográficas.....	103

8. Apêndices.....	105
8.1. Introdução	105
8.2. Apêndice A.....	105
8.3. Apêndice B.....	111
8.4. Apêndice C.....	113

Lista de Figuras

Figura 1.1	Representação do problema estudado.	21
Figura 2.1	Coluna deformada.	25
Figura 2.2	Elemento infinitesimal deformado.	26
Figura 2.3	Condições de contorno homogêneas para diferentes tipos de apoio.	39
Figura 2.4	Função seno como aproximação para a função que mede os deslocamentos transversais em uma coluna bi-apoiada.	42
Figura 3.1	Problema padrão.	44
Figura 3.2	Variação de λ_{cr} em função de K .	46
Figura 3.3	Variação de λ_{cr} em função de K , no formato semi-log.	47
Figura 3.4	Modos críticos da coluna para $K=10$ e $K=100$.	48
Figura 3.5	Modos críticos da coluna para $K=500$, $K=1.000$, $K=10.000$ e $K=100.000$.	49
Figura 3.6	Variação de λ_{cr} em função de K , para cinco valores distintos de h .	51
Figura 3.7	Variação de λ_{cr} em função de K , para cinco valores distintos de h , no formato semi-log.	52
Figura 3.8	Variação de λ_{cr} em função de h , para três valores de K .	54
Figura 3.9	Primeiro modo crítico da coluna para cinco valores de h , em função de K .	55
Figura 3.10	Definição das condições de apoio.	56
Figura 3.11	Variação de λ_{cr} em função de K , para cinco condições de apoio distintas.	58
Figura 3.12	Variação de λ_{cr} em função de K , para cinco condições de apoio distintas, no formato semi-log.	59
Figura 3.13	Primeiro modo crítico da coluna para cinco condições de apoio distintas.	60

Figura 3.14	Condições de apoio para a coluna com a extremidade inferior livre.	61
Figura 3.15	Variação de λ_{cr} em função de K , para a coluna com quatro condições de apoio distintas.	63
Figura 3.16	Variação de λ_{cr} em função de K , para a coluna com quatro condições de apoio distintas, no formato semi-log.	63
Figura 3.17	Primeiro modo crítico da coluna com a extremidade inferior livre e com quatro condições de apoio distintas na extremidade superior.	64
Figura 3.18	Variação de λ_{cr} em função de h , para as quatro condições de contorno da coluna com a extremidade inferior livre e $K=1.000$.	66
Figura 3.19	Variação de λ_{cr} em função de h , para as quatro condições de contorno da coluna com a extremidade inferior livre e $K=10.000$.	67
Figura 3.20	Variação do primeiro modo crítico da coluna com a extremidade inferior livre para quatro condições de apoio distintas em função da variação na relação $h=H/L$, para $K=1.000$.	68
Figura 3.21	Variação do primeiro modo crítico da coluna com a extremidade inferior livre para quatro condições de apoio distintas em função da variação na relação $h=H/L$, para $K=10.000$.	69
Figura 3.22	Variação do erro cometido ao se utilizar cada função de aproximação.	72
Figura 3.23	Diagramas de momento fletor linear e esforço cortante linear.	74
Figura 5.1	Problema padrão.	83
Figura 5.2	Variação do caminho pós-crítico de uma coluna bi-apoiada, com fundação até a metade de seu comprimento, em função de diversos valores adotados para K .	84

Figura 5.3	Variação das cargas com as deflexões em colunas com as mesmas condições citadas na Figura 5.2.	85
Figura 5.4	Variação do caminho pós-crítico de uma coluna bi-apoiada, com fundação elástica com $K = 10.000$, em função de três relações distintas de H/L .	86
Figura 5.5	Variação das cargas com as deflexões em colunas com as mesmas condições citadas na Figura 5.4.	87
Figura 5.6	Condições de contorno.	87
Figura 5.7	Variação do caminho pós-crítico de uma coluna com fundação até metade do seu comprimento e $K=10.000$, em função de cinco condições de apoio distintas.	88
Figura 5.8	Variação das cargas com as deflexões em colunas com as mesmas condições citadas na Figura 5.7.	88
Figura 5.9	Variação do caminho pós-crítico de uma coluna bi-apoiada, com fundação até metade do seu comprimento e $K = 1.000$, em função de diversos valores adotados para K_{nl} .	90
Figura 5.10	Variação do caminho pós-crítico de uma coluna bi-apoiada, com fundação até metade do seu comprimento e $K = 10.000$, em função de diversos valores adotados para K_{nl} .	91
Figura 5.11	Influência da imperfeição da coluna no caminho pós-crítico.	93
Figura 5.12	Caminhos pós-críticos obtidos através dos dois métodos.	95
Figura 5.13	Caminho pós-crítico.	98
Figura 5.14	Diagramas de momento fletor linear e esforço cortante não-linear.	99
Figura 8.1	Situação analisada nos apêndices.	105

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Modelos de fundação elástica.	29
Tabela 2.2	Condições de continuidade, definidas pelas coordenadas locais.	39
Tabela 3.1	Valores de λ_{cr} associados a valores de K .	45
Tabela 3.2	Valores de λ_{cr} associados a valores de K , para $h=0$.	50
Tabela 3.3	Valores de λ_{cr} associados a valores de K , para $h=0,25$.	50
Tabela 3.4	Valores de λ_{cr} associados a valores de K , para $h=0,5$.	50
Tabela 3.5	Valores de λ_{cr} associados a valores de K , para $h=0,75$.	51
Tabela 3.6	Valores de λ_{cr} associados a valores de K , para $h=1$.	51
Tabela 3.7	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=100$.	53
Tabela 3.8	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=1.000$.	53
Tabela 3.9	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=10.000$.	54
Tabela 3.10	Posição dos deslocamentos transversais máximos para a coluna com cinco relações distintas de $h=H/L$, e $K = 10.000$.	56
Tabela 3.11	Valores de λ_{cr} associados a valores crescentes de K , para a condição de apoio 1.	57
Tabela 3.12	Valores de λ_{cr} associados a valores crescentes de K , para a condição de apoio 2.	57
Tabela 3.13	Valores de λ_{cr} associados a valores crescentes de K , para a condição de apoio 3.	57
Tabela 3.14	Valores de λ_{cr} associados a valores crescentes de K , para a condição de apoio 4.	58

Tabela 3.15	Valores de λ_{cr} associados a valores crescentes de K , para a condição de apoio 5.	58
Tabela 3.16	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de K (condição de apoio 6).	61
Tabela 3.17	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de K (condição de apoio 7).	62
Tabela 3.18	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de K (condição de apoio 8).	62
Tabela 3.19	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de K (condição de apoio 9).	62
Tabela 3.20	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=1.000$ e $K=10.000$ (condição de apoio 6).	65
Tabela 3.21	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=1.000$ e $K=10.000$ (condição de apoio 7).	65
Tabela 3.22	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=1.000$ e $K=10.000$ (condição de apoio 8).	65
Tabela 3.23	Valores de λ_{cr} associados a crescentes valores de h , para $K=1.000$ e $K=10.000$ (condição de apoio 9).	66
Tabela 3.24	Valores de λ_{cr} para três valores distintos de K .	70
Tabela 3.25	Valores de λ_{cr} e do erro percentual cometido ao se utilizar funções de aproximação com diferentes números de termos ($K=10$).	71
Tabela 3.26	Valores de λ_{cr} e do erro percentual cometido ao se utilizar funções de aproximação com diferentes números de termos ($K=1.000$).	71
Tabela 3.27	Valores de λ_{cr} e do erro percentual cometido ao se utilizar funções de aproximação com diferentes números de termos ($K=10.000$).	71
Tabela 5.1	Dados do problema analisado pelo método dos elementos finitos.	92
Tabela 5.2	Comparação entre as cargas críticas.	96
Tabela 5.3	Pontos do caminho pós-crítico.	98

Lista de Símbolos

Romanos

A	área da seção transversal da coluna; matriz dos coeficientes de um sistema de equações
A_j	coeficientes da função de interpolação ϕ_j no método de Rayleigh-Ritz;
E	módulo de elasticidade transversal (ou módulo de Young);
F	força de reação exercida pelo solo;
H	altura da fundação;
H_1	coordenada local do topo do trecho 1 da coluna,
H_2	coordenada local do topo do trecho 2 da coluna,
I	momento de inércia da seção transversal;
K	parâmetro adimensional de rigidez elástico-linear da fundação;
K_{nl}	parâmetro adimensional de rigidez elástico-não-linear da fundação;
L	comprimento total da coluna;
M	momento fletor;
$N_1..N_5$	valores numéricos presentes na equação de equilíbrio não-linear;
P	carga axial atuante na coluna;
P_{aprox}	carga crítica calculada pelo Método de Ritz;
P_{exato}	carga crítica calculada pela solução analítica;
P_1	ponto intermediário da coluna quando esta se encontra em seu estado inderformado;
P_2	ponto intermediário da coluna quando esta se encontra sob a ação da carga P ;
Q	esforço cortante;
R_0^{-1}	raio de curvatura da estrutura indeformada;
R_f^{-1}	raio de curvatura do eixo deformado;
U	energia interna de deformação;
U_f	energia de flexão;
U_{fd}	energia interna de deformação da fundação elástica;
U_m	energia de membrana;

V	vetor das constantes do problema de autovalor;
V_{norm}	vetor normalizado das constantes do problema de autovalor;
V_p	potencial das cargas externas;
W	trabalho realizado pelas forças não-conservativas;
a_{ij}	elemento da matriz A , localizado na linha i e na coluna j ;
amp_{norm}	amplitude normalizada de um autovetor;
ds	comprimento infinitesimal do elemento curvo;
dx	elemento linear na direção do eixo axial;
f_n	função de aproximação do método de Rayleigh-Ritz;
h	razão entre os comprimentos da fundação e da coluna;
i	número imaginário;
k, k_1, k_2	constantes de rigidez elástico-linear da fundação;
k_3	constante de rigidez elástico-não-linear da fundação;
m	parâmetro adimensional para o momento fletor ;
m_{nl}	parâmetro adimensional para o momento fletor não-linear;
n	número de termos usados na função de aproximação;
q	parâmetro adimensional para o esforço cortante ;
q_{nl}	parâmetro adimensional para o esforço cortante não-linear;
u	deslocamento axial;
v_j	elemento do vetor V , localizado na posição j ;
w	deslocamento transversal;
$w_{,x}$	primeira derivada do deslocamento w em relação ao eixo x , ou, $\frac{dw}{dx}$;
$w_{,xx}$	segunda derivada do deslocamento w em relação ao eixo x , ou, $\frac{d^2w}{dx^2}$;
$w_{,xxx}$	terceira derivada do deslocamento w em relação ao eixo x , ou, $\frac{d^3w}{dx^3}$;
$w_{,xxxx}$	quarta derivada do deslocamento w em relação ao eixo x , ou, $\frac{d^4w}{dx^4}$;
$w_1(x)$	função que mede o deslocamento transversal no trecho da coluna sem fundação;
$w_2(x)$	função que mede o deslocamento transversal no trecho da coluna com fundação;
$w_{máx}$	deslocamento transversal máximo;
x	coordenada axial;

Gregos

α_i	raízes da equação característica;
ϕ_j	função em seno constituinte da função de aproximação f_n ;
λ	parâmetro adimensional de carga;
λ_{cr}	parâmetro adimensional de carga crítica;
π	energia potencial total;
π_{approx}	funcional de energia linear, aproximado pelo método de Rayleigh-Ritz;
ρ	carga utilizada para representar as imperfeições da coluna;
ψ	ângulo formado entre o eixo x e o eixo da viga deformada;