



Felipe Alves Bacelar

**Análise de Propagação de Trincas em
Estruturas Pré-Fraturadas Via Métodos dos
Elementos Finitos Estendidos**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil da PUC- Rio.

Orientador: Prof. Luiz Carlos Wrobel

Rio de Janeiro
Setembro de 2022



Felipe Alves Bacelar

**Análise de Propagação de Trincas em
Estruturas Pré-Fraturadas Via Métodos dos
Elementos Finitos Estendidos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC- Rio. Aprovada pela comissão Examinadora abaixo.

Prof. Luiz Carlos Wrobel

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio

Prof. Ney Augusto Dumont

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio

Prof. José Cláudio de Faria Telles

UFRJ

Rio de Janeiro, 02 de setembro de 2022.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem a autorização da universidade, do autor ou do orientador.

Felipe Alves Bacelar

Graduou-se em Engenharia Civil pela UNIFOR (Universidade de Fortaleza), em Fortaleza em 2019. Entrou no programa de Pós-graduação da PUC-Rio em 2019 e desenvolveu a dissertação na linha de Estruturas - Dano e Fratura de Materiais.

Ficha Catalográfica

Bacelar, Felipe Alves

Análise de propagação de trincas em estruturas pré-fraturadas via métodos dos elementos finitos estendidos / Felipe Alves Bacelar ; orientador: Luiz Carlos Wrobel. – 2022.

64 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)—Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2022.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil e Ambiental - Teses. 2. Método dos elementos finitos estendidos. 3. Mecânica da Fratura. 4. Propagação de trincas. I. Wrobel, Luiz Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. III. Título.

CDD: 624

Aos meus pais, Fernando Eugênio e Francisca Maria.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por não permitir que eu desista nos momentos mais difíceis.

À minha mãe, Francisca Maria, além de todo carinho e cuidado, ela nunca saiu do meu lado e sempre confiou em mim, ao meu pai, Fernando Eugênio que sempre se dedicou a oferecer o melhor para educação de seus filhos.

À minha irmã, Fernanda, por ser melhor amiga que alguém pode ter, e que apesar da distância sempre esteve do meu lado.

À minha namorada, Margarida, que me deu todo o apoio e sempre esteve comigo nos momentos de felicidades e nos momentos onde eu precisei de ajuda, e foi de fundamental importância na conclusão deste trabalho.

Aos meus tios, Danielly e Cláudio, por me acolherem como filho e por serem pessoas fundamentais nessa jornada.

Aos amigos, Ícaro, José Guilherme, Ilames, Vitor Mattos e Vitor Gonçalves, que conheci ao longo do curso de mestrado.

Aos amigos, Guilherme, Ícaro, Júlio e Osmar, que conheci durante a Graduação e foram de extrema importância durante esta jornada.

Ao meu amigo, Gustavo, que sempre me tratou como irmão e esteve do meu lado nos momentos mais difíceis.

Aos amigos Guilherme, Bruno, Eduardo, Hélder, Samuel, Cláudio e Cesar, por estarem presentes em momentos de descontração.

Ao meu orientador, Luiz Wrobel, por todo suporte, pelos ensinamentos e pela oportunidade de desenvolver este trabalho.

A PUC-Rio e todos os seus funcionários, por providenciarem recursos adequados para a minha formação e de muitos outros alunos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Bacelar, Felipe Alves; Wrobel, Luiz Carlos (Orientador); Análise de propagação de trincas em estruturas pré-fraturadas via métodos dos elementos finitos estendidos. Rio de Janeiro, 2022. 64p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Apresenta-se neste trabalho uma revisão bibliográfica sobre o método dos elementos finitos estendidos (XFEM), que é um método amplamente utilizado para estudos de mecânica da fratura. Ele pode ser visto como um método eficiente para esse tipo de problema, tendo em vista que o remalhamento não é necessário durante o processo de propagação da trinca, e o grande diferencial do método dos elementos finitos estendidos é a presença das funções *Heaviside* e assintótica nos elementos do domínio da trinca. Outro método para resolução de problemas de mecânica da fratura é o método dos elementos de contorno dual (MECD), que consiste em definir o domínio da estrutura através de um contorno. Visando o incentivo a futuros trabalhos nesta linha de pesquisa, foi elaborado um capítulo apontando os principais detalhes da modelagem de um problema de mecânica da fratura no *software Abaqus*. Após isto, foram feitas seis análises em XFEM para dois casos distintos, resolvidos anteriormente por Portela et al (1993) pelo MECD. Para o primeiro caso foram feitas duas modelagens de uma chapa quadrada com uma trinca horizontal localizada na lateral esquerda, o outro conjunto de modelagens foi aplicado a uma placa em forma de crucifixo com uma trinca na diagonal. Nas análises foi percebido que há uma variação entre os caminhos da propagação da trinca a depender do carregamento externo aplicado. Com o objetivo de comparar os dois métodos, XFEM e MECD, foi analisado os caminhos de propagação obtidos nas simulações, identificando assim a semelhança entre os resultados.

Palavras-chave

Método dos elementos finitos estendidos, Mecânica da Fratura, Propagação de trincas.

Abstract

Bacelar, Felipe Alves; Wrobel, Luiz Carlos (Advisor); Crack propagation analysis in pre-fractured structures via extended finite element methods. Rio de Janeiro, 2022. 64p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work presents a literature review on the extended finite element method (XFEM), which is a widely used method for fracture mechanics studies. It can be seen as an efficient method for this type of problem, considering that remeshing is not necessary during the crack propagation process, and the great differential of the extended finite element method is the presence of the Heaviside and asymptotic functions in the crack domain elements. Another method for solving fracture mechanics problems is the dual boundary element method (DBEM), which consists of defining the domain of the structure through a boundary. Aiming to encourage future works in this line of research, a chapter was prepared pointing out the main details of the modeling of a fracture mechanics problem in the Abaqus software. After that, six analyzes were performed in XFEM for two different cases, previously solved by Portela et al (1993) by DBEM. For the first case, two models were made of a square plate with a horizontal crack located on the left side, the other set of modeling was applied to a crucifix-shaped plate with a diagonal crack. In the analyzes it was noticed that there is a variation between the crack propagation paths depending on the applied external load. In order to compare the two methods, XFEM and DBEM, the propagation paths obtained in the simulations were analyzed, thus identifying the similarity between the results.

Keywords

Extended finite element method, Fracture Mechanics, Crack Propagation.

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Motivação	14
1.2	Objetivo	15
1.3	Estrutura da dissertação	15
2	Mecânica da Fratura	16
2.1	Concentração de tensões e falha	17
2.2	Balanço de energia de Griffith	19
2.3	Taxa de liberação de energia G	22
2.4	Instabilidade da curva R	22
2.5	Análise de tensões em trincas	23
2.5.1	Fator de intensidade de tensões K	24
2.5.2	Relação K e G	26
2.6	Mecânica da fratura elastoplástica	27
2.6.1	Deslocamento de abertura da ponta da trinca (CTOD)	27
3	Métodos Computacionais Aplicados a Mecânica Da Fratura	31
3.1	Métodos dos Elementos de Contorno	33
3.1.1	Método dos elementos de contorno dual (MECD)	35
3.2	Métodos baseados em Elementos Finitos	35
3.2.1	Método dos elementos quarter-points	38
3.2.2	Método dos elementos enriquecidos ou estendidos (XFEM)	40
4	Métodos e Procedimentos de Modelagem	44
5	Análise Comparativa de Propagação de Trincas	53
5.1	Estudo de placa com propagação em modos I e II puro	53
5.2	Estudo de placa em crucifixo	57
6	Considerações Finais	60
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	61
7	Referências Bibliográficas	62

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Peça colapsada no caso do avião <i>COMET</i> (WANHILL, 2002)	12
Figura 1.2: Colapso da <i>SILVER BRIDGE</i> (BITTENCOURT, 2005)	13
Figura 2.1: Abordagem tradicional do projeto estrutural	16
Figura 2.2: Abordagem da mecânica da fratura	16
Figura 2.3: Classificação da mecânica da Fratura de acordo com a ruptura do material	17
Figura 2.4: Placa com abertura elíptica	18
Figura 2.5: Placa com abertura elíptica de espessura B	20
Figura 2.6: Curva de Resistencia do material	23
Figura 2.7: Coordenadas polares na ponta da trinca	24
Figura 2.8: Modos de propagação de trincas	25
Figura 2.9: Região estimada CTOD	28
Figura 2.10: Exemplo 01 abertura na ponta da trinca	28
Figura 2.11: Exemplo 02 abertura na ponta da trinca	29
Figura 2.12: Contorno arbitrário na ponta da trinca	29
Figura 3.1: Malhas discretizadas	32
Figura 3.2: Matrizes MEF e MEC	32
Figura 3.3: Esquematização dos elementos quarter-points	39
Figura 3.4: Esquematização das diferentes configurações de roseta	40
Figura 3.5: Esquematização das coordenadas polares para o enriquecimento dos nós com as funções assintóticas	41
Figura 3.6: Esquema para o enriquecimento dos nós com a função <i>Heaviside</i> $H(x)$	42
Figura 4.1: <i>Layout</i> inicial do software ABAQUS	44
Figura 4.2: Modo adotado de definição da geometria	45
Figura 4.3: Definição da geometria	45
Figura 4.4: Definição e apropriação das propriedades dos materiais	46
Figura 4.5: Agrupamento das partes criadas	47
Figura 4.6: Detalhes da aplicação da carga estática	47
Figura 4.7: Requisição de resultados adicionais	48
Figura 4.8: Caminho para definição da trinca	49
Figura 4.9: Escolha do método XFEM	49
Figura 4.10: Habilitando o posicionamento da trinca	50

Figura 4.11: Definindo as cargas externas e condições de contorno	50
Figura 4.12: Definindo o elemento finito	51
Figura 4.13: Geração da malha de elementos finitos	52
Figura 5.1: Geometria do modelo 01	53
Figura 5.2: Carregamento 01 do modelo 01	54
Figura 5.3: Carregamento 02 do modelo 01	54
Figura 5.4: Malha de elementos finitos estendidos	55
Figura 5.5: Propagação de trincas para carregamento 01	56
Figura 5.6: Propagação de trincas para carregamento 02	56
Figura 5.7: Geometria modelo 2.....	57
Figura 5.8: Malha de elementos finitos estendidos	58
Figura 5.9: Resultados adaptados de Portela et al (1993)	58
Figura 5.10: Comparação de resultados XFEM e BEM.....	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Campo de deformação Modo 1 de propagação.....26

Tabela 2.2: Campo de deslocamento na ponta da trinca.....26

Tabela 5.1: Propriedades adotadas para o modelo 01**Erro! Indicador não definido.**

Tabela 5.2: Propriedades adotadas para o modelo 02**Erro! Indicador não definido.**

1 Introdução

As trincas estão presentes em obras de engenharia desde que o homem iniciou a utilização de estruturas, porém atualmente os acidentes provocados por falhas estruturais podem ser de grandes proporções causando grande perda social, financeira e ambiental, já que, devido ao avanço tecnológico, as estruturas estão cada vez maiores: edifícios arranha-céus, aviões com capacidades extraordinárias, barragens esbeltas, grandes túneis em rocha, etc.

No ano de 1954, ocorreu um grande acidente envolvendo um avião *Comet G-ALYP*. A estrutura entrou em colapso depois que uma pequena peça da fuselagem veio a ruína. Este caso evidencia o efeito da fadiga que não foi considerado pela fabricante das peças. A Figura 1 apresenta detalhes da peça que entrou em colapso (WANHILL, 2002)

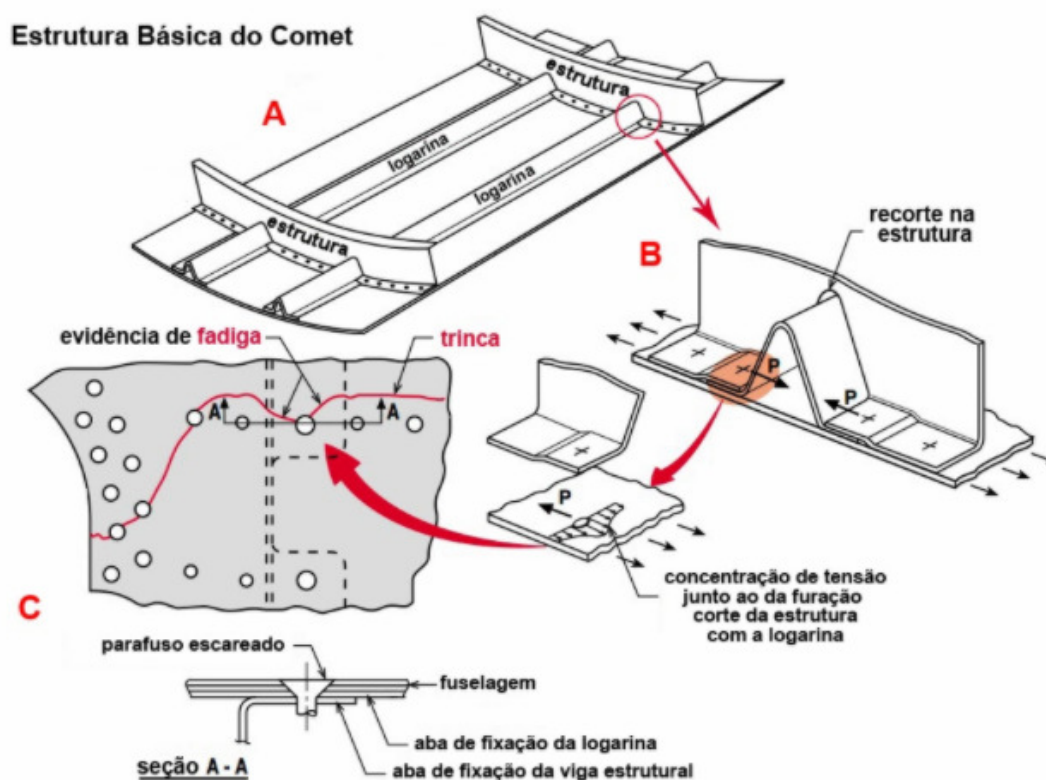


Figura 1.1: Peça colapsada no caso do avião *COMET* (WANHILL, 2002)

Outro acidente de grande impacto relacionado ao surgimento de trincas foi o desastre da ponte *Silver Bridge*, localizada nos Estados Unidos. Um dos elos de corrente da ponte se rompeu por clivagem devido ao clima frio e sobrecarga, levando à ruptura dúctil de um dos pinos. A estrutura então entrou em colapso, com um total de 46 mortes. A trinca surgiu e cresceu com os efeitos de fadiga e corrosão (CONGRO, 2017 e BITTENCOURT, 2005). A Figura 2 mostra a Ponte *Silver Bridge*.



Figura 1.2: Colapso da *SILVER BRIDGE* (BITTENCOURT, 2005)

Felizmente, a evolução na mecânica da fratura trouxe mais segurança aos projetos, compensando assim o potencial catastrófico das falhas estruturais. Além da melhoria em prever possíveis falhas, a comunidade científica também entendeu melhor como ocorrem as ruínas dos materiais (ANDERSON, 2005). Muito ainda se desenvolve neste campo, embora nem sempre seja aplicado na prática da engenharia.

Para Medina (2014), a Mecânica da Fratura estuda o comportamento de estruturas com falhas, que são inevitáveis nas estruturas. Mesmo que o controle de qualidade no processo de fabricação seja o mais eficiente possível, defeitos surgem de diversas formas, adicionalmente àqueles inerentes ao próprio material. Nessa situação, os conceitos de resistência dos materiais baseados em propriedades como resistência ao escoamento ou resistência à ruptura não podem ser aplicados diretamente, já que não levam em conta a tenacidade à fratura do material, que é definida pela

mecânica da fratura como a propriedade que mede a resistência à propagação de uma trinca.

A evolução da mecânica computacional influenciou diretamente na quantidade de pesquisa gerada na linha da mecânica da fratura, tendo em vista que problemas dessa área tem um cálculo bastante oneroso por trás, inviabilizando o cálculo manual nos dias de hoje. Este problema pode ser analisado de forma analítica, como também de forma numérica.

Existem várias formas de aplicar a mecânica da fratura para analisar a propagação de uma trinca, essas formulações se baseiam nos métodos dos elementos finitos (MEF) ou nos métodos dos elementos de contorno (MEC). No caso dos elementos de contorno ele se adequa perfeitamente a esse tipo de análise, já para o método dos elementos finitos existe uma necessidade de adequação da formulação para que seja possível analisar a estrutura como um meio não contínuo. Dos métodos baseados em elementos finitos destacam-se o elemento *quarter point* e o elemento enriquecido ou estendido (XFEM), em modelagem de fraturas estáticas o elemento *quarter point* acaba tendo uma melhor acurácia (BARBOSA, 2020), mas em situações que é analisado a propagação de trincas o XFEM apresenta suas vantagens, onde a principal é a não necessidade de refazer a malha de elementos a cada propagação da fenda (SUKUMAR *et al*/2003).

1.1 Motivação

Diante de todas informações destacadas acima, percebe-se a relevância da mecânica da fratura, de certa forma é uma área relativamente nova, tendo em vista que surgiu no século passado. Com o possível aumento do potencial catastrófico que acidentes poderão causar, a comunidade científica deve estar preparada para analisar de forma cada vez mais criteriosa a mecânica da fratura e só assim serão reduzidos os riscos de acidentes. Visando isso, este trabalho colaborará com a comunidade que estuda mecânica da fratura apresentando resultado sobre comportamento de trincas em estruturas de materiais frágeis.

1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo analisar estruturas de materiais frágeis pré- fraturadas submetidas a cargas estáticas, entendendo melhor o comportamento da trinca e verificando o caminho de propagação da falha.

Também é objetivo do trabalho, apresentar todo o processo de modelagem de problemas de mecânica da fratura em duas dimensões no *software* Abaqus.

Serão modeladas estruturas encontradas na literatura para validar a modelagem e desenvolver outras análises, tal como a comparação de métodos na verificação da propagação de trincas. As modelagens serão feitas no *software* Abaqus duas dimensões em análise de estado plano de tensões.

O objetivo final é comparar o resultado das modelagens geradas através das modelagens com os resultados de Portela et al (1993).

1.3 Estrutura da dissertação

Este trabalho é composto por seis capítulos.

No segundo capítulo é apresentado a revisão bibliográfica referente aos conceitos de mecânica da fratura e deduções feitas pelo autor, como o balanço de energia de Griffith, taxa de liberação de energia (G), instabilidade da curva R , análise de tensões em trincas e o processo de propagação das trincas.

No terceiro capítulo, será apresentado uma revisão das principais formulações aplicadas a mecânica da fratura com foco no método dos elementos finitos estendidos.

O capítulo quatro apresentará todo o procedimento de modelagem de propagação de trincas no Abaqus, para os dois métodos, este capítulo será útil para quem deseja replicar os resultados ou criar expertise na modelagem de mecânica da fratura usando tal *software*.

O capítulo cinco apresenta os resultados obtidos nas modelagens e o capítulo seis descreve as conclusões a partir dos resultados obtidos e da revisão bibliográfica, assim como sugestões para pesquisas futuras na área.

2 Mecânica da Fratura

A abordagem da mecânica da fratura pode ser comparada com a abordagem tradicional do projeto estrutural e seleção de materiais. Como mostrado na Figura 2.1, para a abordagem tradicional de projeto estrutural, a tensão de projeto prevista é comparada às propriedades de fluxo dos materiais candidatos, ou seja, um material é considerado adequado se sua resistência for maior do que a solicitação de projeto (ANDERSON, 2005).



Figura 2.1: Abordagem tradicional do projeto estrutural

Fonte: Adaptado de ANDERSON, 2005

Já a abordagem da mecânica da fratura tem três variáveis: força aplicada, o tamanho da falha e a tenacidade à fratura, conforme mostrado na Figura 2.2 (ANDERSON, 2005).

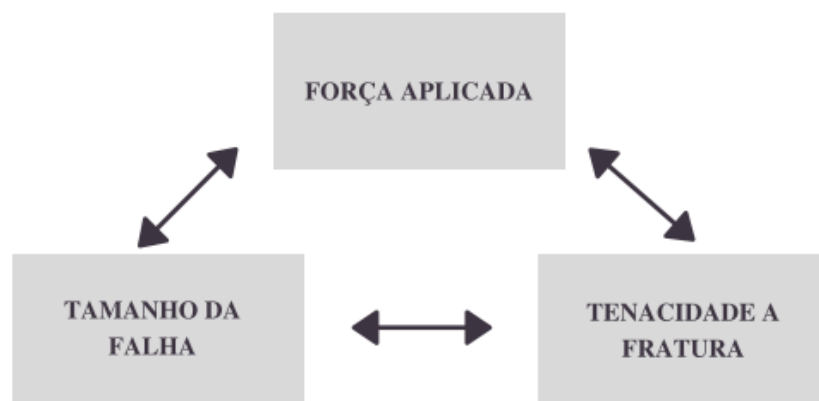


Figura 2.2: Abordagem da mecânica da fratura

Fonte: Adaptado de ANDERSON, 2005

Inicialmente, a maioria dos trabalhos relacionados com a mecânica da fratura foi aplicado apenas a materiais com comportamento linear elástico em condições estáticas. Com os avanços na pesquisa de fraturas, foram incorporados outros materiais com comportamentos diferentes.

A mecânica da fratura pode ser classificada de acordo com o comportamento do material na capacidade última. Na Figura 2.3 é explícito o desenvolvimento das pesquisas no campo da mecânica da fratura. Uma linha tracejada é desenhada entre o elástico linear e a mecânica da fratura dinâmica pois algumas pesquisas consideram o comportamento linear dinâmico.

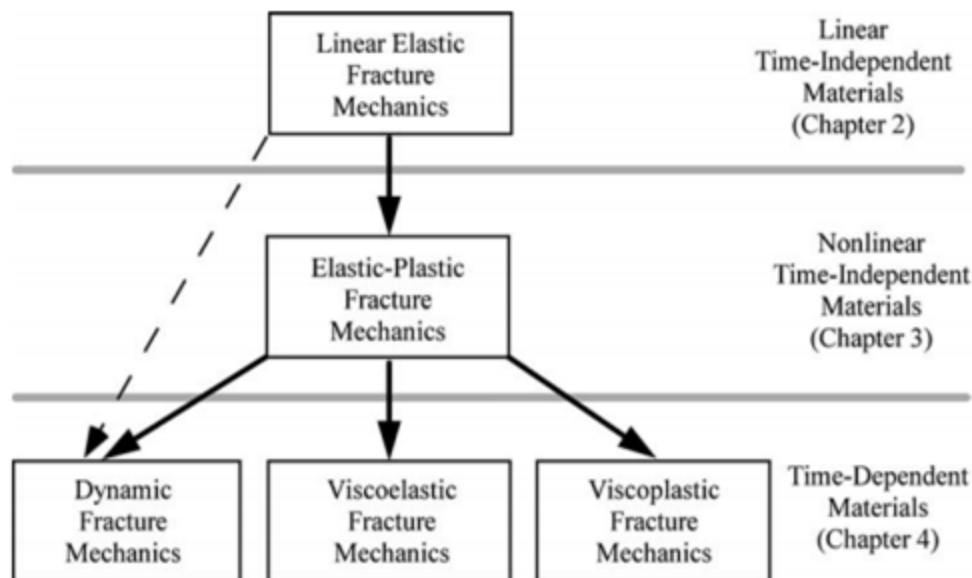


Figura 2.3: Classificação da mecânica da Fratura de acordo com a ruptura do material

Fonte: Adaptado de ANDERSON, 2005

Os conceitos de mecânica da fratura que foram derivados antes de 1960 são aplicáveis apenas a materiais que obedecem à lei de Hooke. As correções para a plasticidade em pequena escala foram propostas já em 1948, no entanto, essas análises são restritas a estruturas cujo comportamento global é elástico linear. Já em 1960, as teorias de mecânica da fratura foram desenvolvidas para levar em conta vários tipos de comportamento de material não linear (plasticidade e viscoplasticidade), bem como efeitos dinâmicos. Os resultados mais recentes, no entanto, são extensões da mecânica da fratura linear elástica (MFLE).

2.1 Concentração de tensões e falha

A primeira evidência quantitativa para o efeito de concentração de tensões de falhas foi apresentada na análise de placas planas com aberturas elípticas (INGLIS, 1913), como pode ser visto na Figura 2.4.

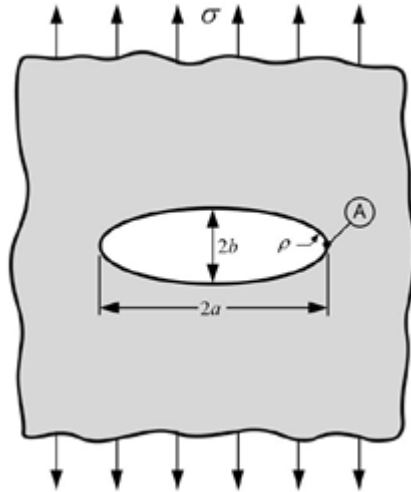


Figura 2.4: Placa com abertura elíptica

Para o experimento, Inglis (1913), estudou uma abertura elíptica de maior lado $2a$ e menor lado $2b$, com curvatura ρ e submetido a uma tensão σ . Desta forma ele concluiu que a tensão na ponta da fratura (Ponto A) pode ser obtida pela equação 2.1.

$$\sigma_A = \sigma \left(1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (2.1)$$

Sabendo que $\rho = \frac{b^2}{a}$, a equação 2.1 pode ser expressa em termos da curvatura (equação 2.2). Quando o lado a é muito maior que o lado b , resulta na equação 2.3.

$$\sigma_A = \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2.2)$$

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2.3)$$

No mesmo trabalho, sugere-se que a razão entre a tensão na ponta da trinca e a tensão aplicada no corpo $\left(\frac{\sigma_A}{\sigma} \right)$ é o chamado fator de concentração de tensão (K_t). Um problema foi encontrado quando a curvatura (ρ) é igual à zero, caracterizando uma fratura extremamente fina. Para contornar esse problema, este foi analisado em uma visão

microescala, fazendo $\rho = X_0$ (onde X_0 é a distância entre os limites superior e inferior da trinca), e a tensão da zona coesiva (σ_c) pode ser expressa (equação 2.4) em termos do módulo de elasticidade do material (E) e da energia gerada pela propagação da trinca por unidade de área (γ_s).

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{X_0}} \quad (2.4)$$

Comparando as equações 2.3 e 2.4, temos a expressão (equação 2.5) que resulta na tensão de falha (σ_f).

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{4a}} \quad (2.5)$$

2.2 Balanço de energia de Griffith

Em 1920, Griffith aplicou a ideia da primeira lei da termodinâmica - quando um sistema vai de um estado de não equilíbrio para equilíbrio, há uma redução líquida de energia - para a formação de uma fenda. Ele supôs que a fenda é formada pela súbita aniquilação das trações que atuam em sua superfície. No momento seguinte a essa ocorrência, as deformações e a energia potencial considerada têm seus valores originais, mas, em geral, o novo estado não é de equilíbrio. Se não for um estado de equilíbrio, pelo teorema de energia potencial mínima, a energia potencial é reduzida pela obtenção do equilíbrio; por outro lado, se for um estado de equilíbrio, a energia não muda.

Uma rachadura pode se formar, ou uma rachadura existente pode aumentar, somente se tal processo fazer com que a energia total diminua ou permaneça constante. Logo, as condições críticas para a fratura podem ser definidas como o ponto onde o crescimento da trinca ocorre em condições de equilíbrio, sem alteração líquida na energia total.

Considera-se uma placa submetida a uma tensão constante σ que contém uma fenda de $2a$ de comprimento (Figura 2.5), e supõe-se que as condições de tensão plana prevalecem. Para que a rachadura seja aumentada, a energia potencial disponível na placa deve ser suficiente para superar a energia superficial do material. O balanço de energia de Griffith para um incremento na área de fissura dA , em condições de equilíbrio, pode ser expresso da forma descrita nas equações 2.6 ou 2.7.

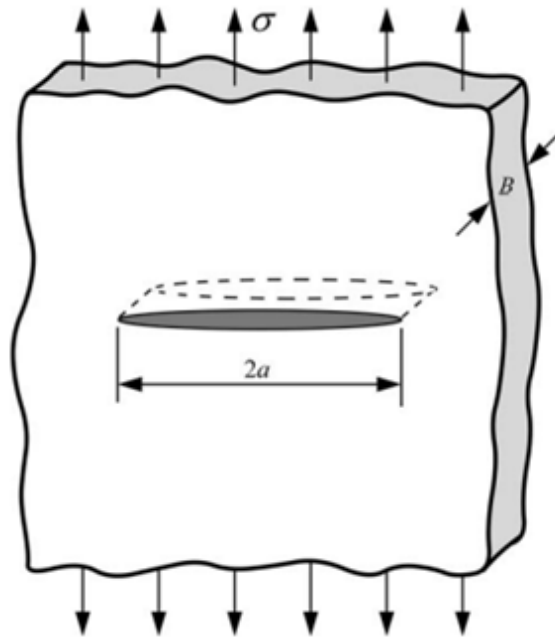


Figura 2.5: Placa com abertura elíptica de espessura B

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (2.6)$$

ou

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad (2.7)$$

onde:

E = energia total

Π = energia potencial fornecida pela energia de deformação interna e forças externas

W_s = trabalho necessário para criar novas superfícies

Para a placa trincada ilustrada na Figura 2.5, Griffith usou a análise de tensão de Inglis (equação 2.8)

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (2.8)$$

onde:

Π_0 é a energia potencial de uma placa não rachada;

B é a espessura da placa.

A formação de uma fissura requer a criação de duas superfícies, logo W_s é dado por (equação 2.9):

$$W_s = 4aB\gamma_s \quad (2.9)$$

onde γ_s é a energia superficial do material. Portanto, desenvolvendo o segundo termo da Equação 2.1, utilizando a equação 2.3, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dA} &= \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} dA \\ dA &= Bda \\ \frac{d\Pi}{dA} &= -\frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{EB} dA \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d\Pi}{dA} = -\frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (2.10)$$

Desenvolvendo também o terceiro termo da Equação 2.6, utilizando a Equação 2.9, tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{d\Pi}{dA} &= \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \\ \frac{dW_s}{dA} &= \frac{4aB\gamma_s}{B} da \\ \frac{dW_s}{dA} &= 4\gamma_s \end{aligned} \quad (2.11)$$

De acordo com a Equação 2.7, igualando $-d\Pi/dA$ com $(dW_s)/dA$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dW_s}{dA} &= 4\gamma_s \\ \frac{\pi\sigma^2 2a}{E} &= 4\gamma_s \\ \frac{\pi\sigma^2 a}{E} &= 2\gamma_s \end{aligned} \quad (2.12)$$

Em situação de equilíbrio

$$\frac{dE}{dA} = 0 \quad (2.13)$$

Logo,

$$\frac{dE}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} = 2\gamma_s \quad (2.14)$$

2.3 Taxa de liberação de energia G

Irwin (1956) desenvolveu uma abordagem semelhante ao modelo proposto por Griffith (1920), porém mais conveniente para resolver problemas de engenharia. Irwin (1956) definiu uma taxa de liberação de energia (G), para mensurar o quanto de energia seria necessária para um incremento na extensão da fratura (equação 2.15).

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (2.15)$$

Neste contexto, o termo taxa é usado para representar a energia potencial por unidade de área, que é a derivada da energia potencial, também chamada de força de extensão de fratura ou força de fratura

dirigida. Assim, como $-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}$, temos a equação 2.16.

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2.16)$$

O crescimento da fratura irá ocorrer quando G atingir seu valor crítico (G_c), expresso pela equação 2.17.

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} = 2w_f \quad (2.17)$$

onde w_f é a energia da fratura que inclui os efeitos de plasticidade, viscoelasticidade ou viscoplasticidade.

2.4 Instabilidade da curva R

A curva R ou curva de resistência do material pode ser usada para prever o comportamento instável ou estável do corpo ao plotá-la em função da força de fratura dirigida como mostrado Figura 2.6.

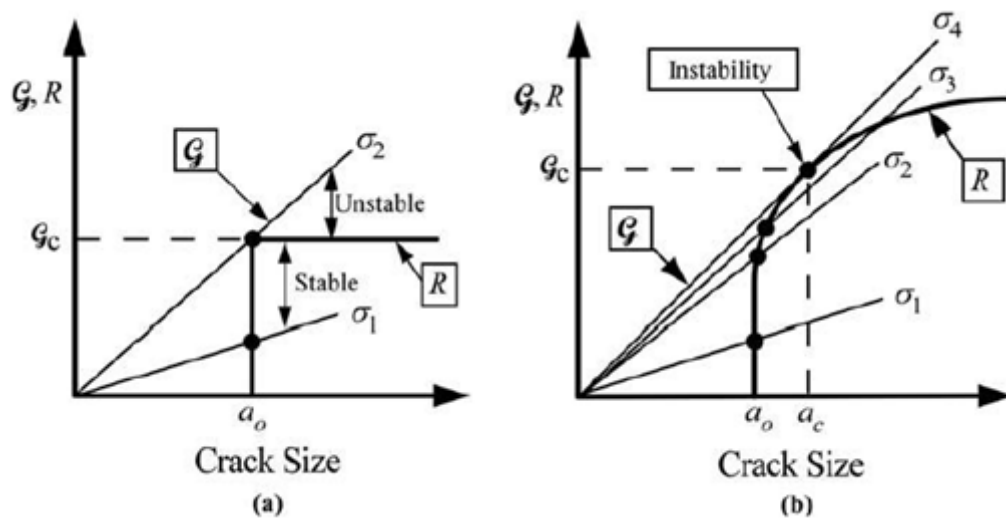


Figura 2.6: Curva de Resistencia do material

Em (a) temos a resistência do material constante em relação ao crescimento da fratura, nesse caso a tensão 1 (σ_1) apresenta uma trinca com comportamento estável. Quando o material é submetido a uma tensão 2 (σ_2), superior à sua resistência, ocorre a propagação da fratura, mas o material permanece com a mesma resistência.

Já em (b) a curva de resistência é variável com a tensão. Em σ_1 , a trinca permanece inalterada, em σ_2 tem um crescimento mínimo da resistência, em σ_3 permanece estável, mas com um certo crescimento da fratura, e em σ_4 a força dirigida é tangente a curva R , a partir desse ponto ocorre a instabilidade e o crescimento da fratura é acentuado.

Nessas condições a estabilidade da fratura ocorre para:

$$\frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da} \quad (2.18)$$

e a instabilidade:

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da} \quad (2.19)$$

2.5 Análise de tensões em trincas

Westgaard (1939), desenvolveu formulações que possibilitassem a previsão da propagação de trincas. Ele adotou um material de

comportamento isotrópico linear elástico sujeito a forças externas. Em coordenadas polares a equação que traz o comportamento deste material é da forma:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sqrt{r^m} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2.20)$$

onde:

- σ_{ij} = tensor de tensões
- r e θ são as coordenadas polares
- k = constante
- f_{ij} = função adimensional do teta no termo principal
- A_m = amplitude
- $g_{ij}(m)$ = função adimensional do teta para o m termo

A escolha das coordenadas polares pode ser exemplificada como na Figura 2.7.

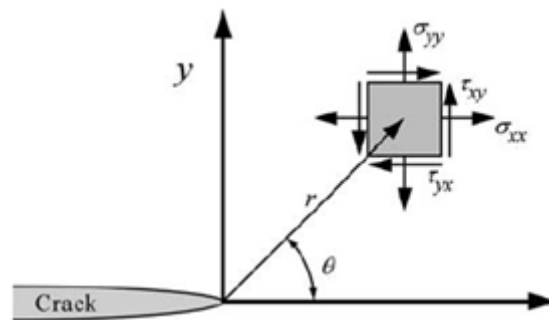


Figura 2.7: Coordenadas polares na ponta da trinca

2.5.1 Fator de intensidade de tensões K

A depender do carregamento é possível obter três diferentes modos de propagação de trinca (Figura 2.8). No primeiro modo, a carga é aplicada normal a trinca, tendendo a abrir a fratura. No segundo modo a carga aplicada tende a cisalhar a fratura no plano. E no terceiro modo a carga cisalha a fratura em planos diferentes.

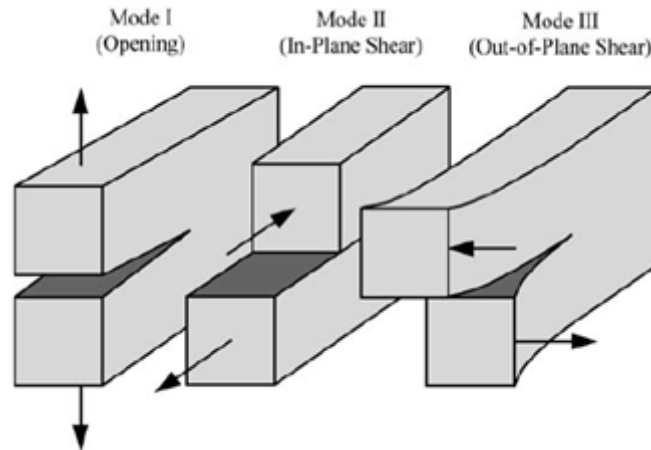


Figura 2.8: Modos de propagação de trincas

Cada modo de carregamento produz uma singularidade de $1/\sqrt{r}$ na ponta da trinca, mas a proporcionalidade das constantes (k e f_{ij}) dependem do modo. A grandeza que quantifica a intensidade de abertura é chamada de Fator de Intensidade de Tensão (FIT) e é representado por:

$$K = k\sqrt{2\pi} \quad (2.21)$$

O valor de K muda de acordo com o modo, assim pode ser K_I, K_{II}, K_{III} para os modos 1, 2 e 3 respectivamente. Para alguns problemas ocorre uma mistura dos modos, desta forma, a tensão total corresponde a soma das tensões obtidas em cada um dos modos. Como pode ser visto pela equação 2.22.

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (2.22)$$

As expressões para o campo de tensão no modo 1 de propagação é apresentado na Tabela 2.1 e na Tabela 2.2 está apresentado o campo de deslocamento na ponta da trinca.

Tabela 2.1: Campo de deformação Modo 1 de propagação.

σ_{xx}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_{yy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
T_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
σ_{zz}	0 -Estado plano de tensão $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ -Estado plano de deformação
T_{xz}	0
T_{yz}	0

Tabela 2.2: Campo de deslocamento na ponta da trinca.

u_x	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
u_y	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

2.5.2 Relação K e G

Como falado anteriormente, tanto o fator de intensidade de tensões como a taxa de liberação de energia, são parâmetros que descrevem o comportamento de trincas. Enquanto o primeiro quantifica e caracteriza as tensões, deformações e deslocamentos próximos a ponta da fratura; o segundo quantifica a energia potencial que acompanha cada incremento na extensão da fratura. Tomando como base o modo 1 de carregamento, a equação 2.23 relaciona esses dois parâmetros.

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.23)$$

onde:

$$E' = E \text{ para o estado plano de tensão.}$$

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \text{ para o estado plano de deformação.}$$

A equação 2.23 é válida para os modos I e II, para o terceiro modo, por se tratar de uma propagação fora do plano da trinca é utilizada a seguinte correlação:

$$G = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.24)$$

e para problemas onde ocorre em mais de um modo diferente, G é igual à soma dos modos, representado pela equação 2.25

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.25)$$

com μ = ao módulo de cisalhamento.

2.6 Mecânica da fratura elastoplástica

A mecânica da fratura elastoplástica é a área da mecânica da fratura que estuda o comportamento de materiais elastoplásticos. Nesse contexto, existem dois tipos de parâmetros que possibilitam a discretização da ponta de uma trinca nessas condições. O primeiro parâmetro é o Deslocamento de Abertura da Ponta da Trinca (CTOD), baseado em conceito físico, enquanto que o segundo parâmetro é a Integral de Contorno J, a qual é baseada no conceito de balanço energético.

2.6.1 Deslocamento de abertura da ponta da trinca (CTOD)

Desenvolvido por Wells (1961), este método diz que a trinca se propaga quando esta atinge um limite de abertura, o que ocorre pelo fato de que o material possui deformação plástica na ponta da trinca. Inicialmente foi realizada uma análise aproximada que relacionou o CTOD com FIT no limite de uma pequena abertura em uma zona plástica. Irwin (1961) relata que por conta da plasticidade, a trinca possui um comprimento ligeiramente maior do que o esperado (Figura 2.9).

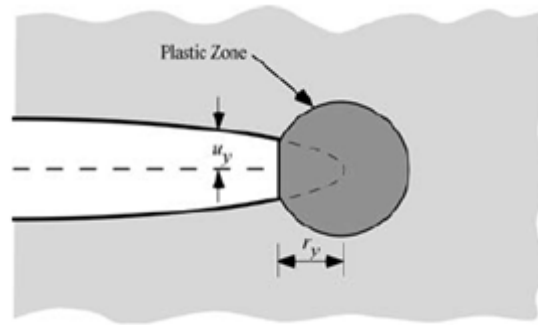


Figura 2.9: Região estimada CTOD

O deslocamento u_y pode ser obtido pela equação 2.26.

$$u_y = \frac{4}{E'} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} \quad (2.26)$$

e o comprimento na zona plástica, r_y , pela equação 2.27.

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (2.27)$$

Substituindo a equação 2.27 em 2.26, temos:

$$\delta = 2u_y = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_{ys} E} \quad (2.28)$$

Fazendo uma correlação em função da taxa de liberação de energia, temos:

$$\delta = 2u_y = \frac{4}{\pi} \frac{G}{\sigma_{ys}} \quad (2.29)$$

A distância δ encontrada pela equação 2.29 é justamente a abertura na ponta da trinca, como pode ser observado na Figura 2.10.

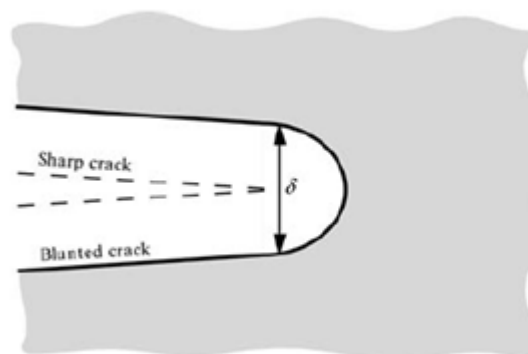


Figura 2.10: Exemplo 01 abertura na ponta da trinca

Outra forma de obter a abertura na ponta da trinca é somar os deslocamentos das parcelas elástica e plástica, exemplificada pela Figura 2.11 e pela equação 2.30.

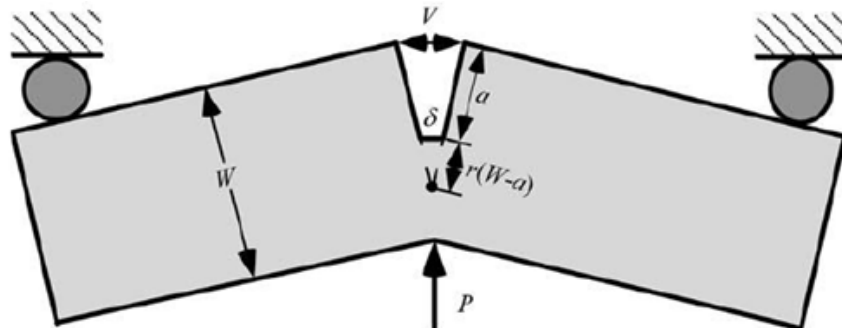


Figura 2.11: Exemplo 02 abertura na ponta da trinca

$$\delta = \delta_{el} + \delta_{pl} = \frac{K_I^2}{m\sigma_{ys}E'} + \frac{r_{pl}(W-a)V_{pl}}{r_{pl}(W-a)+a} \quad (2.30)$$

onde:

- $V \approx V_{pl}$ = ao deslocamento máximo.
- $r \approx r_{pl}$ = ao comprimento na zona plástica.
- a = comprimento inicial da trinca.
- W = largura do objeto analisado.

2.6.2 Integral de contorno J

Esta técnica foi proposta por Rice (1968) ao evidenciar que a taxa de liberação de energia pode ser representada por uma integral de linha que não depende do caminho de integração. Considerando um caminho arbitrário (Γ) ao redor da ponta da trinca (Figura 2.12), para um caso bidimensional, a integral J é governada pela equação 2.31.

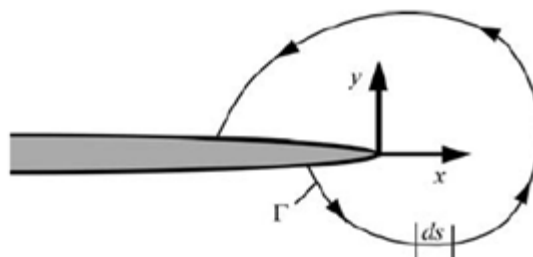


Figura 2.12: Contorno arbitrário na ponta da trinca

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dS \right) \quad (2.31)$$

onde:

W = é a densidade da energia de deformação

T_i = componentes do vetor de tração

u_i = componentes do vetor deslocamento

ds = diferencial do incremento ao longo do contorno Γ

A energia de deformação é definida por:

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2.32)$$

onde σ_{ij} e ϵ_{ij} são os tensores de tensão e deformação, respectivamente. Já os componentes do vetor de tração são definidos por:

$$T_{ij} = \sigma_{ij} n_j \quad (2.33)$$

sendo n_j os componentes do vetor normal ao caminho arbitrário Γ .

Independentemente, Hutchinson (1968) e Rice e Rosegren (1968) mostraram que para casos de materiais com comportamento linear-elástico, a integral J equivale à taxa de liberação de energia e, desta forma, pode ser relacionada com o fator de intensidade de tensões, de maneira que pode ser expresso por:

$$J = G = \frac{dW_s}{dA} = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.34)$$

Para um carregamento generalizado que possui os três modos de propagação, temos:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.35)$$

3 Métodos Computacionais Aplicados a Mecânica Da Fratura

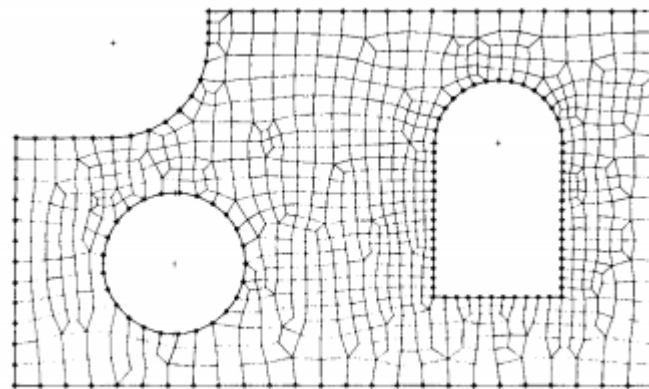
Com o desenvolvimento da tecnologia computacional, os métodos numéricos aplicados à engenharia começaram a ser aplicados também a mecânica da fratura. Os resultados obtidos analiticamente para problemas de mecânica da fratura estavam limitados a situações específicas (idealizadas), problemas com um domínio infinito, um material isotrópico e homogêneo e condições de contorno bem definidas. Ao sair deste cenário ideal, ou seja, estruturas reais de engenharia, condições de contorno que simulem a aplicação e estruturas compósitas, houve a necessidade da aplicação de métodos numéricos.

Os métodos numéricos contribuíram significativamente em todas as áreas da engenharia. Os principais dentre os tais métodos são: o Método dos Elementos Finitos (MEF), Métodos das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Estes métodos se difundiram na comunidade científica, sendo desenvolvido cada vez mais pesquisas na implementação e aplicação do MEF, MDF e do MEC.

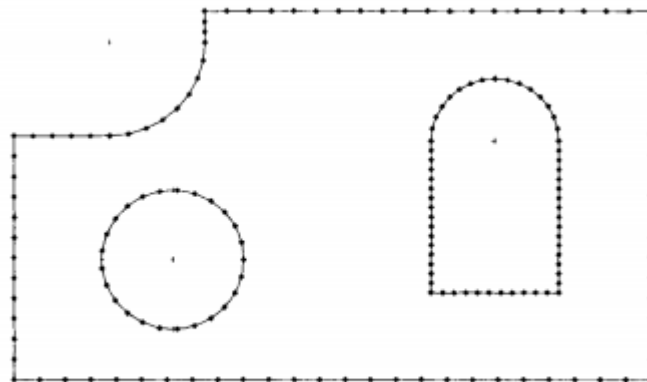
O MEC apresenta algumas vantagens em relação aos outros, como por exemplo a forma mais simples de criação de malha (o objeto de discretização é apenas o contorno da estrutura) e a facilidade de remalhamento da estrutura em caso de propagação de trinca, além de ser um método mais preciso devido ao uso de soluções fundamentais do problema, porém, existem poucos *softwares* comerciais que utilizam essa metodologia. O MEF é o método numérico mais utilizado e um dos principais no estudo da Mecânica da Fratura, a grande parte dos pacotes comerciais trabalham com o MEF em sua formulação, isso deve-se ao fato da formulação ser de fácil implementação e resolver vários tipos de problemas, não só o da Mecânica da Fratura (BARBOSA, 2020).

A Figura 3.1 mostra duas malhas da mesma estrutura, em “a” é a malha de elementos finitos e em “b” é a malha de elementos de contorno, já a Figura 3.2 mostra a diferença entre as matrizes, o MEF gera matrizes

grandes porem esparsas, enquanto no MEC as matrizes são menores, porém, cheias.

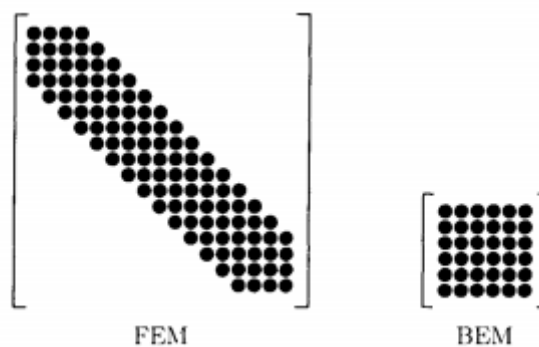


(a) FEM



(b) BEM

Figura 3.1: Malhas discretizadas



KATSIKADELI, 2002

Figura 3.2: Matrizes MEF e MEC

Neste capítulo será apresentado apenas um resumo das formulações do MEC e do MDF, tendo em vista que eles não serão objeto de estudo

neste trabalho, como também será feito uma revisão bibliográfica apresentando as formulações para os métodos derivados do MEF.

3.1 Métodos dos Elementos de Contorno

O Método dos Elementos de Contorno (BEM) é recomendado em situações que requerem maior precisão dos resultados, como: problemas de domínio infinito e problemas com altos gradientes (LEME, 2007). Como citado, uma grande vantagem do BEM é a não necessidade de discretização interna da estrutura (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1992), dessa forma as malhas tornam-se mais simples, tornando também mais fácil o remalhamento. Com esse método, em situações sem termos de domínio, pode-se reduzir a dimensionalidade do problema, um problema volumétrico pode ser reduzido a problemas de integrais de área, da mesma forma que num problema bidimensional as integrais de área são reduzidas a integrais de linha. No final do processo de cálculo, este método reduz consideravelmente o custo computacional para a análise da estrutura (CRUSE, 1988; BEZERRA, 1993).

O BEM calcula o campo de deslocamento (u^i) em toda a região interna e externa com as integrais no contorno Γ através da Equação 3.1.

$$c_j u_{ij} + \int_{\Gamma} T_{ij} u_{ij} d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij} t_j d\Gamma \quad (3.1)$$

Em materiais que tem o comportamento linear elástico e isotrópico, o BEM utiliza em sua formulação as soluções fundamentais de Kelvin (BREBBIA; DOMINGUES, 1989). Essas formulações para análise em duas dimensões são:

$$U_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (3.2)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{lk} + 2r_{,l} r_{,k} \right] + (1-2\nu) (n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] \quad (3.3)$$

onde:

$$r_{,l} = \frac{\partial r}{\partial x_l} = \frac{x_j - x_i}{r}, \quad r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{y_j - y_i}{r}, \quad r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

O BEM é aplicado principalmente de duas maneiras, utilizando elementos lineares com dois nós ou elementos quadráticos com três nós. Os deslocamentos e forças podem ser descritos em termo de funções de forma Φ e valores nodais u^j e p^j , como mostra o sistema matricial (3.4 e 3.5):

$$u = u^j = \begin{Bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_3 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi u^j \quad (3.4)$$

$$p = p^j = \begin{Bmatrix} p_1^j \\ p_2^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_3 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi p^j \quad (3.5)$$

A montagem do sistema global é feita através do somatório da contribuição dos elementos como mostra a Equação 3.6

$$c_j u_{ij} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma} T_{ij} \Phi d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma} U_{ij} \Phi d\Gamma \right\} p^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega} U_{ij} b^j d\Omega \right\} \quad (3.6)$$

onde NE é o número de elementos no contorno Γ . Com a integral da equação surge uma constante c^i no sentido de valor principal de Cauchy, que é proporcional ao ângulo entre duas superfícies que chegam a um nó, e equivale a $1/2$ para contornos suaves num ponto (BREBBIA; DOMINGUES, 1989). Dessa forma temos:

$$\overline{H}^{ij} = \sum_i \int_{\Gamma} T_{ij} \Phi_q d\Gamma \quad \text{e} \quad G^{ij} = \sum_i \int_{\Gamma} U_{ij} \Phi_q d\Gamma \quad (3.7)$$

Para $i=j$ temos $H^{ij} = \overline{H}^{ij} + c^i$, já para $j \neq i$ tem-se $H^{ij} = \overline{H}^{ij}$.

Dessa forma, o sistema matricial que relaciona de forma global os deslocamentos e tensões no contorno é dado por:

$$H \cdot u = G \cdot p \quad (3.8)$$

Os vetores de deslocamentos e tensões no contorno são representados por u e p . As matrizes H e G são montadas fazendo com que o ponto de colocação seja tomado em cada nó que compõem o contorno da peça, e é calculada a influência que forças e deslocamentos sobre este ponto causam sobre cada nó (LEME, 2007).

3.1.1 Método dos elementos de contorno dual (MECD)

O método dos elementos de contorno dual surgiu junto com a necessidade de modelar problemas de múltiplas trincas em um domínio finito (PORTELA et al 1993). O grande problema dessa situação era na discretização das superfícies que formam a trinca, tendo em vista que os nós teriam a mesma posição geométrica ou ficariam muito próximos, causando o efeito que é conhecido como quase-singularidade na aplicação da equação fundamental do BEM. No MECD aplica-se uma equação diferente para os nós de uma das superfícies da trinca, tal equação deve ser linearmente independente para que o sistema de equações do problema encontre respostas para os graus de liberdade em análise.

3.2 Métodos baseados em Elementos Finitos

Na ótica que envolve mecânica dos sólidos é aconselhável determinar os campos de tensão e deformação em um corpo que está sujeito a carregamentos externos ou deslocamentos. Para isso, é de suma

importância o cálculo do Fator de Intensidade de Tensão (K), que em casos simples, pode ser encontrado analiticamente. Ao decorrer dos anos várias configurações de carregamento e geometria foram desenvolvidas, para estas, o valor de K foi encontrado e suas soluções foram publicadas e tabeladas (SHI, 1973; MURAMAKI, 1987; MIRANDA, 2003).

Para configurações mais complexas, tanto para geometria quanto para carregamento, o uso de métodos numéricos é indispensável, pois apresentam resultados mais precisos e confiáveis. Como falado anteriormente, é possível encontrar na literatura, uma variedade de métodos desenvolvidos para a avaliação de problemas de mecânica da fratura. Porém, um dos mais usuais é o método com base em elementos finitos (MEF), de acordo com Silva (2015) isso ocorre pelo fato de que o MEF foi facilmente implementado em muitos softwares disponíveis no mercado.

A formulação por trás desse método consiste em admitir um problema elástico, com determinada geometria e carregamento variado com base no princípio dos trabalhos virtuais (PTV). Assim, a Equação 3.9 representa a formulação desenvolvida.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (3.9)$$

sendo as forças de volume (b_i) e as forças de superfície (t_i), os componentes das tensões reais (σ_{ij}), os componentes das deformações virtuais ($\delta \varepsilon_{ij}$), os componentes dos deslocamentos reais (u_i), componentes dos deslocamentos virtuais (δu_i), o domínio do problema (Ω), contorno do problema (Γ).

A geometria original é subdividida em elementos menores, onde cada elemento possui funções de interpolação ($M^n(\xi, \eta)$) de ordem m que aproximam os componentes dos deslocamentos reais (u^n) e virtuais (δu^n) de cada elemento. A Equação 3.10 representa os deslocamentos reais e a Equação 3.11 os deslocamentos virtuais.

$$u = \sum_{n=1}^m M^n(\xi, \eta) u^n = [M^e] [u^e] \quad (3.10)$$

$$\delta u = \sum_{n=1}^m M^n(\xi, \eta) \delta u^n = [M^e] [\delta u^e] \quad (3.11)$$

Já as deformações são relacionadas com seus respectivos deslocamentos por meio da matriz jacobiana (B^n). Como pode ser visto nas equações 3.12 e 3.13 abaixo.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^m B^n u^n = [B^e] [u^e] \quad (3.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta \epsilon_{xx} \\ \delta \epsilon_{yy} \\ \delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^m B^n \delta u^n = [B^e] [\delta u^e] \quad (3.13)$$

onde a matriz B^n é expressa pela Equação 3.14.

$$B^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial M^n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M^n}{\partial y} \\ \frac{\partial M^n}{\partial y} & \frac{\partial M^n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

A matriz $[D]$ constitutiva é expressa a depender do tipo de problema, essa matriz é mostrada abaixo para estado plano de tensões (Equação 3.15) e para estado plano de deformações (Equação 3.16).

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material e ν seu coeficiente de Poisson.

Pode-se então obter a relação tensão-deformação em cada elemento pela Lei de Hooke generalizada, resultando assim na Equação 3.17.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \sum_{n=1}^m B^n u^n = [D^e] [B^e] [u^e] \quad (3.17)$$

Cook et. al (2001) relatam que o sistema global formado a partir de todos os elementos resulta na relação base do MEF, expressa pela Equação 3.18.

$$[K][u] = [F] \quad (3.18)$$

com $[K]$ sendo a matriz de rigidez, $[u]$ sendo o vetor deslocamento e $[F]$ o vetor força.

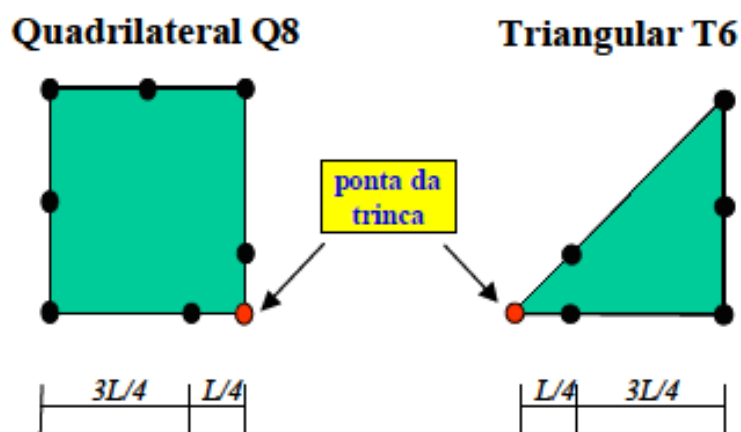
Em análises de mecânica da fratura que visam o comportamento de trincas estacionárias, geralmente é utilizado elementos especiais, chamados elementos quarter-points. Já para o estudo da propagação de trincas, as fissuras por apresentarem um comportamento dinâmico precisam meios que permitam as análises sem o remalhamento do modelo, assim foi desenvolvido o método dos elementos enriquecidos ou XFEM.

3.2.1 Método dos elementos quarter-points

Na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) obter os FITs é um dos principais objetivos. Já que foi constatado que ao representar a ponta

da trinca, as tensões presentes criavam uma singularidade de $1/\sqrt{r}$. Os elementos convencionais não representavam o real comportamento da singularidade, produzindo assim resultados insatisfatórios. Então, passou-se a criar elementos especiais para modelar esta singularidade (BARBOSA, 2020).

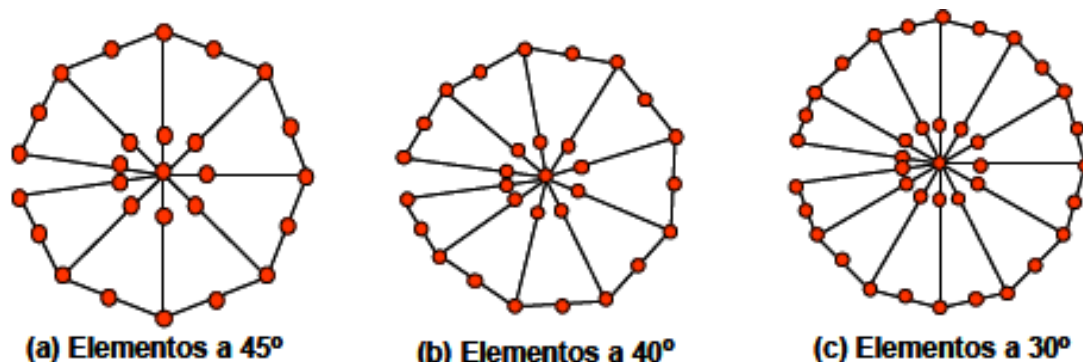
Os elementos que possuíam os melhores resultados foram criados independentemente por Henshell & Shaw (1975) e Barsoum (1976), são elementos singulares e isoparamétricos que apresentam os nós centrais, de algumas faces, deslocados a uma distância de $1/4$ da ponta da trinca (Figura 3.2). Devido a estas características, esses elementos passaram a ser chamados de elementos quarter-points.



Fonte: Miranda, 2005.

Figura 3.3: Esquematização dos elementos quarter-points.

Miranda (2005) ainda explica que estes elementos são distribuídos na ponta da trinca formando a chamada roseta. Estas podem ser dispostas em três diferentes configurações, com elementos dispostos a 45° , 40° e 30° como exemplificado na Figura 3.4.



Fonte: Miranda, 2005.

Figura 3.4: Esquematização das diferentes configurações de rosetas.

Por este motivo, Barsoum (1976) explica que o elemento triangular apresenta resultados melhores do que o quadrilateral, pois com estes elementos posicionados ao redor da fratura pode-se encontrar a singularidade tanto no interior quanto no contorno do elemento.

3.2.2 Método dos elementos enriquecidos ou estendidos (XFEM)

Desenvolvido por Belytschko & Black (1999) com base na teoria de Partição da Unidade proposta por Melenk & Babuska (1996), o método tem como objetivo modelar a singularidade e as descontinuidades geradas, de maneira que estas não dependam do remalhamento do modelo. O cerne da metodologia está na inserção de funções enriquecidas para melhor a aproximação do campo dos deslocamentos descontínuos.

De acordo com Silva (2015), a função do campo de deslocamentos do MEF (Equação 3.19) é acrescida de duas funções que serão responsáveis por descrever o comportamento da fratura. A primeira irá representar os campos assintóticos próximos à região da ponta da fratura, enquanto a segunda é uma função *Heaviside*, definida ao longo da trinca, que representa os saltos no campo de deslocamentos em posições distantes da ponta, gerando assim a equação característica do XFEM, representada pela Equação 3.20.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n u_i N_i(x) \quad (3.19)$$

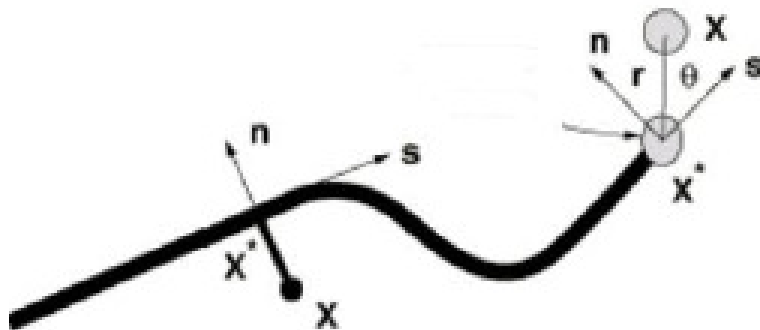
com N_i sendo a função de forma associada ao nó, u_i sendo o grau de liberdade no nó e n a quantidade de nós do modelo.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n u_i N_i(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^m c_i N_i(x) H(x)}_{\text{Parcela correspondente a Função Heaviside}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k N_i(x) \left(\sum_{l=1}^4 c_l^a F_a(x) \right)}_{\text{Parcela correspondente a Função Assintótica na ponta}} \quad (3.20)$$

onde m é a quantidade de nós nos elementos cortados, k é a quantidade de elementos na ponta da fratura, c_i é o grau de liberdade adicionado aos nós m , c_i^a é o grau de liberdade adicionado aos nós k e $F_a(x)$ é o conjunto de funções assintóticas representado pela Equação 3.21.

$$\left[F_a(r, \theta) \right]_{a=1}^4 = \left[\sqrt{r} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin(\theta), \sqrt{r} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin(\theta) \right] \quad (3.21)$$

onde (r, θ) são as coordenadas polares na ponta da fratura exemplificados na Figura 3.4.



Fonte: ABAQUS, 2017.

Figura 3.5: Esquematização das coordenadas polares para o enriquecimento dos nós com as funções assintóticas

O termo que descreve o comportamento da formulação é o primeiro termo do conjunto da Equação 3.21, ou seja, $\sqrt{r} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, esse termo é de suma importância pois descreve as descontinuidades sobre a superfície da fratura. Este termo é definido conforme a Equação 3.22.

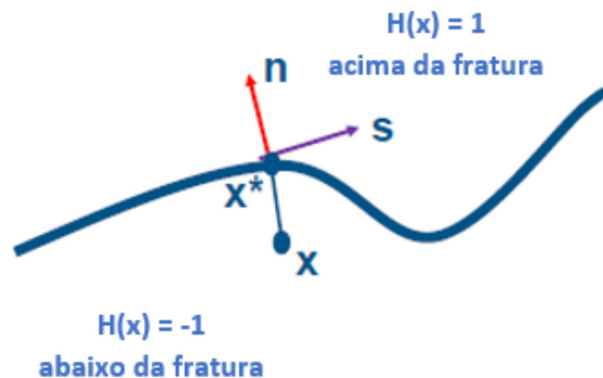
$$\sqrt{r} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{r}, & \text{se } \theta = \pi \\ -\sqrt{r}, & \text{se } \theta = -\pi \end{cases} \quad (3.22)$$

para demonstrar a superfície inferior $\theta = -\pi$, para a direção da fratura $\theta = 0 \text{ rad}$ e para a superfície superior $\theta = \pi$. Os demais termos são responsáveis por melhorar a aproximação em critérios de convergência (MARTÍNEZ, 2015).

Já a função Heaviside é definida como mostra López Bendezú (2015) na Equação 3.23.

$$H(x) = \begin{cases} +1, & \text{se } (x - x^*) \cdot n \geq 0 \\ -1, & \text{se } (x - x^*) \cdot n < 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

onde x é qualquer ponto ou ponto de integração, x^* é a projeção de x sobre a superfície da fratura e n é o vetor unitário normal à fratura em x^* . A Figura 3.6 exemplifica uma malha com enriquecimento de nós pela função *Heaviside*.



Fonte: ABAQUS, 2017.

Figura 3.6: Esquema para o enriquecimento dos nós com a função *Heaviside* $H(x)$

O Método dos Elementos Finitos Estendidos (XFEM) apresenta uma grande vantagem em relação aos demais, isso ocorre por conta das fissuras serem inseridas no modelo de forma independente da malha, possibilitando a fratura percorrer o interior do elemento sem a necessidade de remalhamento. Silva (2015), ainda acrescenta que com esse método é possível obter bons resultados nos cálculos dos FITs quando se fala em propagação de trincas. Em seu trabalho, Barbosa (2020) mostrou que para trincas estacionárias os elementos quarter-points apresentam melhores resultados em relação aos obtidos por XFEM.

4 Métodos e Procedimentos de Modelagem

Como indicado anteriormente, esse capítulo apresentará todo o procedimento da modelagem e os parâmetros adotados. O software utilizado para obtenção dos resultados foi o ABAQUS. A Figura 4.1 Indica a tela inicial do programa.

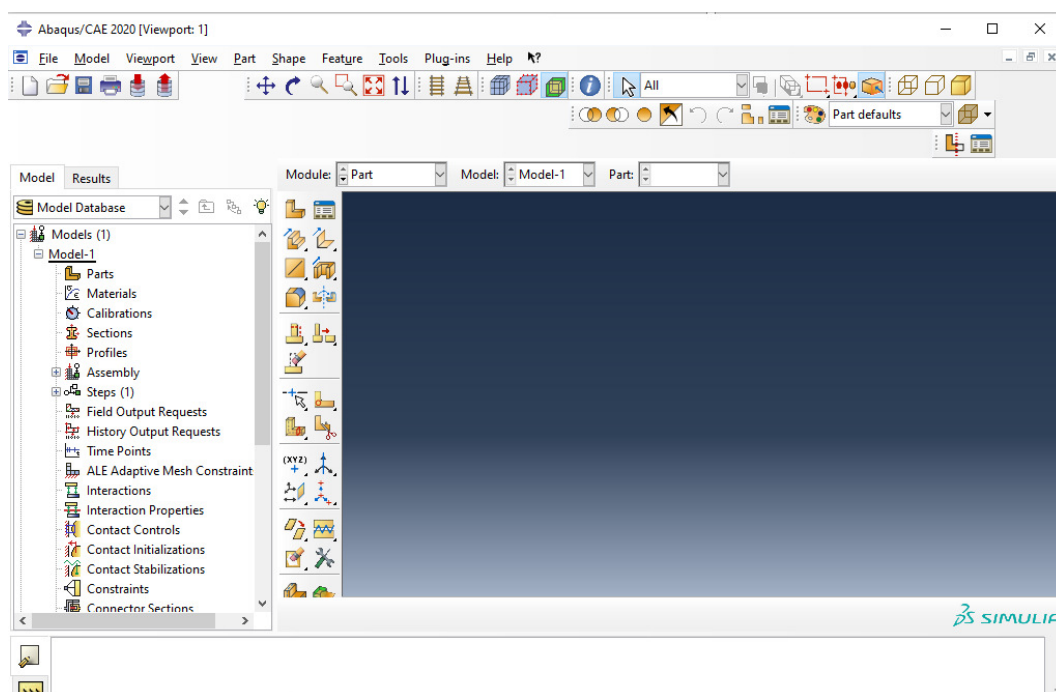


Figura 4.1: *Layout* inicial do software ABAQUS

O primeiro passo é definir a geometria do problema, para isso é necessário indicar como quer fazer isso, a Figura 4.2 mostra a tela de definição de como você vai indicar a geometria.

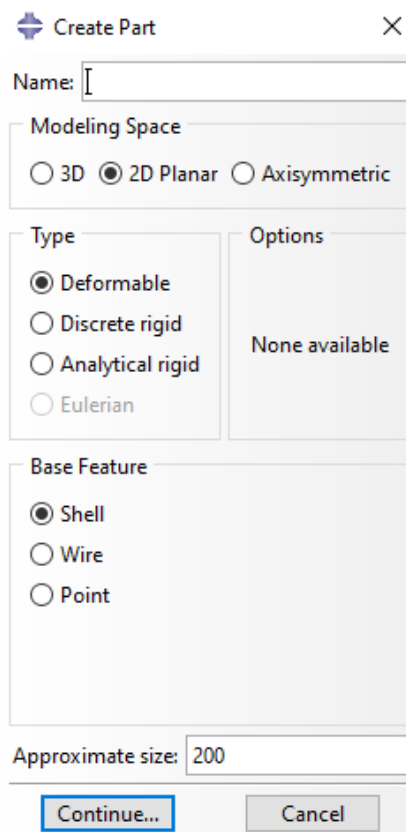


Figura 4.2: Modo adotado de definição da geometria

Após a indicação de como será feita a definição da geometria, o software levará o usuário para uma tela onde ele irá definir a geometria do problema.

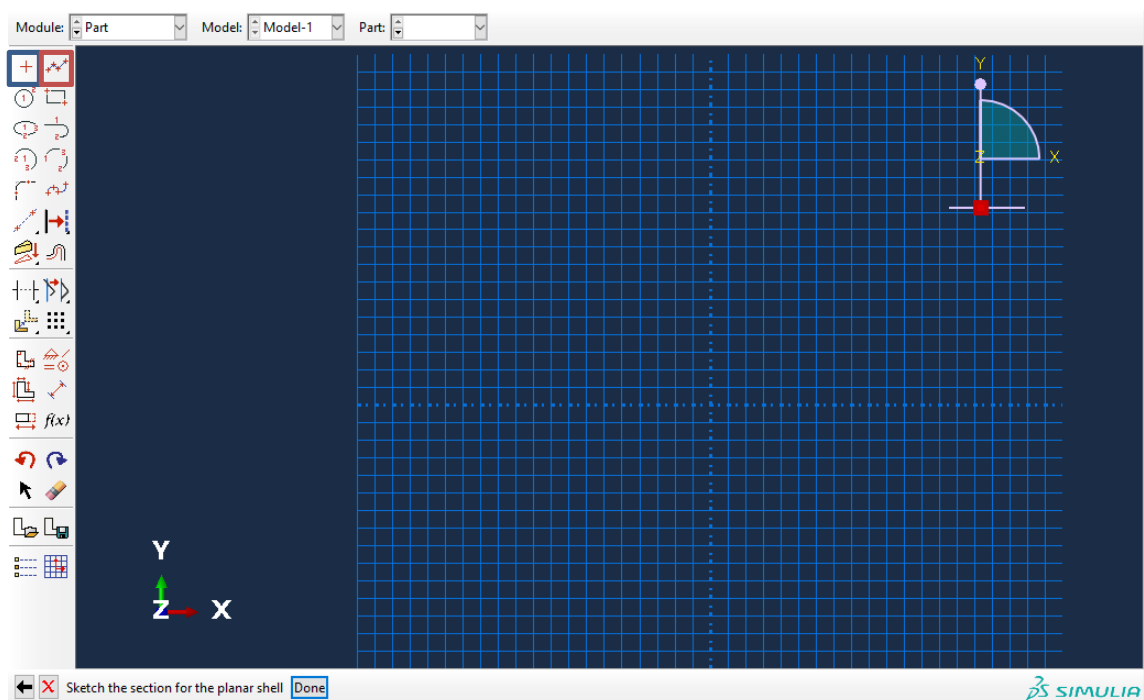


Figura 4.3: Definição da geometria

A Figura 4.3 indica a tela de definição da geometria, nela, foram destacados dois ícones, no primeiro você definirá os nós das extremidades da estrutura e num outro você poderá juntar os nós através de uma polilinha. Além da parte do sólido, também foi modelado uma parte da trinca, por se tratar de uma geometria em 2D a trinca foi desenhada como uma linha.

O próximo passo para a modelagem é a atribuição de propriedades físicas dos materiais à geometria criada. No caso do estudo apresentado que contempla a propagação de trincas, os principais parâmetros que devem ser inseridos são:

- E – Modulo de Elasticidade
- ν – Coeficiente de Poisson
- $\sigma_{\text{máx}}$ – Tensão máxima admissível

Foi utilizando o critério onde a direção da propagação da trinca será de acordo com a tensão principal máxima.

Na Figura 4.4, o retângulo azul é onde deverão ser inseridas as propriedades do material, e o retângulo vermelho é onde serão atribuídas as propriedades definidas pela geometria.

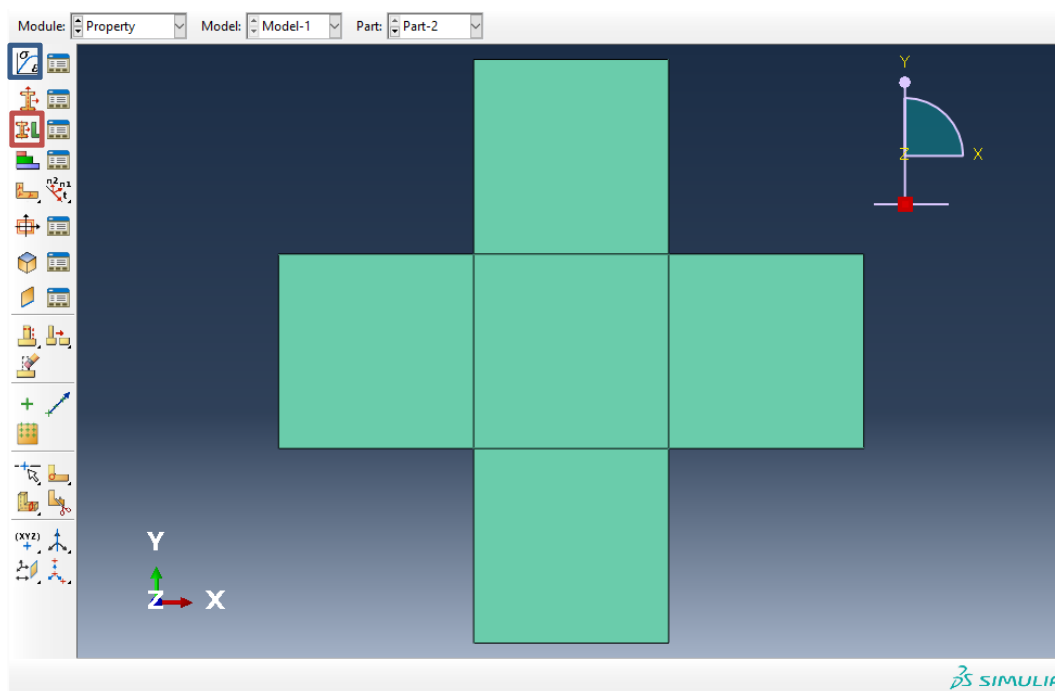


Figura 4.4: Definição e apropriação das propriedades dos materiais

Em sequência, deveremos agrupar as duas partes criadas, a estrutura e a trinca, alterando o módulo “assembly” e selecionando ambas as partes, como apresentado na Figura 4.5.

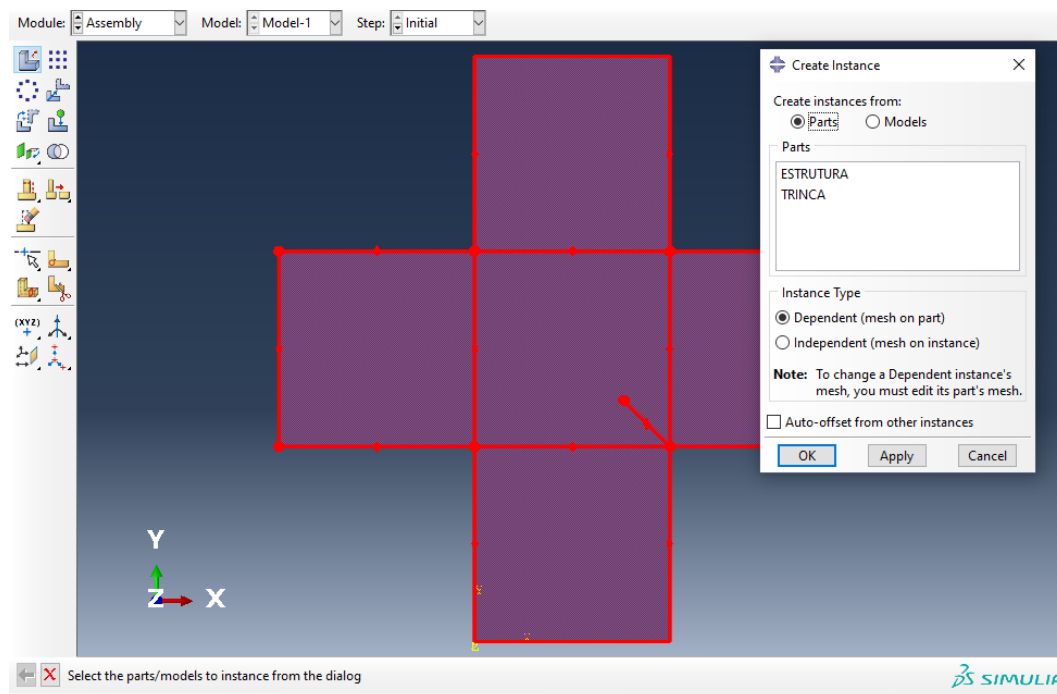


Figura 4.5: Agrupamento das partes criadas

Por procedimento do ABAQUS, no módulo “step” deve-se também criar a forma como será aplicada a carga, no caso em estudo, a carga é estática, neste passo, pode-se indicar se o *software* levará em consideração a não linearidade geométrica. Na Figura 4.6 pode-se analisar os critérios adotados quanto ao estudo e incrementação da carga.

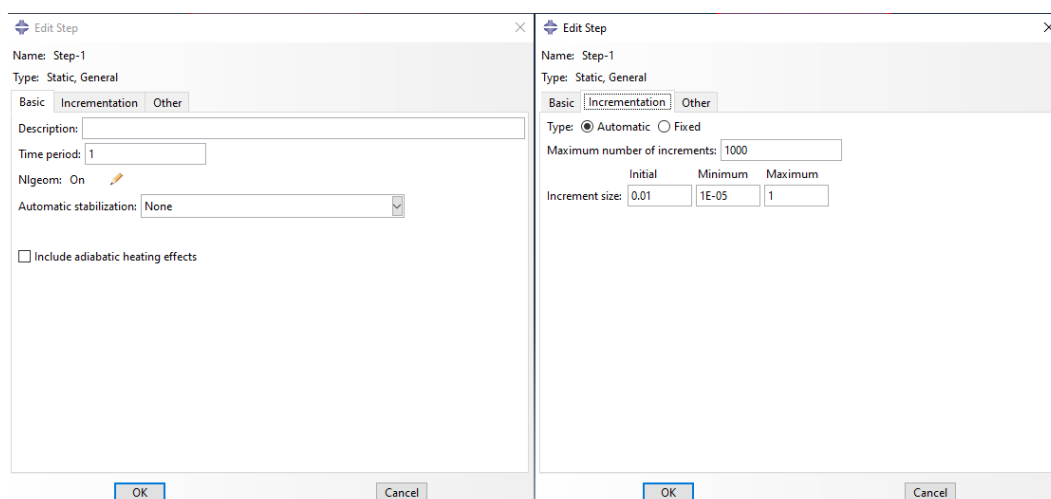


Figura 4.6: Detalhes da aplicação da carga estática

Neste módulo, também é interessante solicitar ao *software* que seja entregue mais dos que os resultados padrões, por se tratar de uma análise de mecânica da fratura. A Figura 4.7 mostra onde solicitar esses resultados a mais.

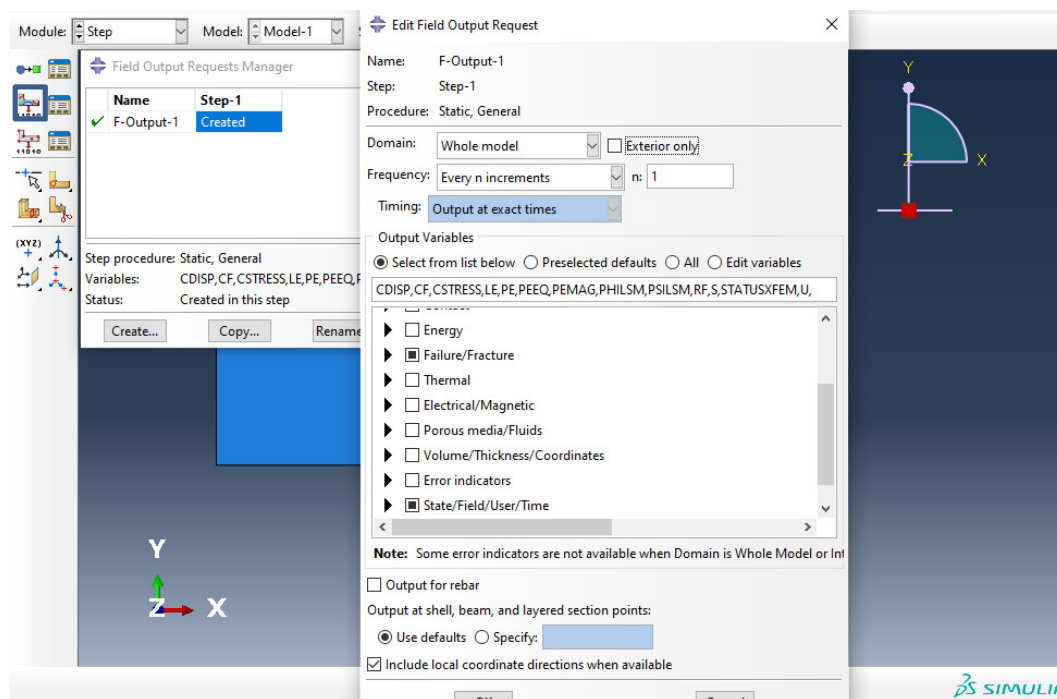


Figura 4.7: Requisição de resultados adicionais

Além dos resultados padrões, para este tipo de análise seria interessante analisar o modo que o elemento está trabalhando (elemento comum ou estendido), que o *software* da nomenclatura define como “STATUSXFEM”.

A próxima etapa da modelagem consiste em definir o comportamento da estrutura em relação a trinca, na aba “*interaction*”, deve-se seguir o caminho “Special” – “Crack” – “Create...” como mostrado na Figura 4.8.

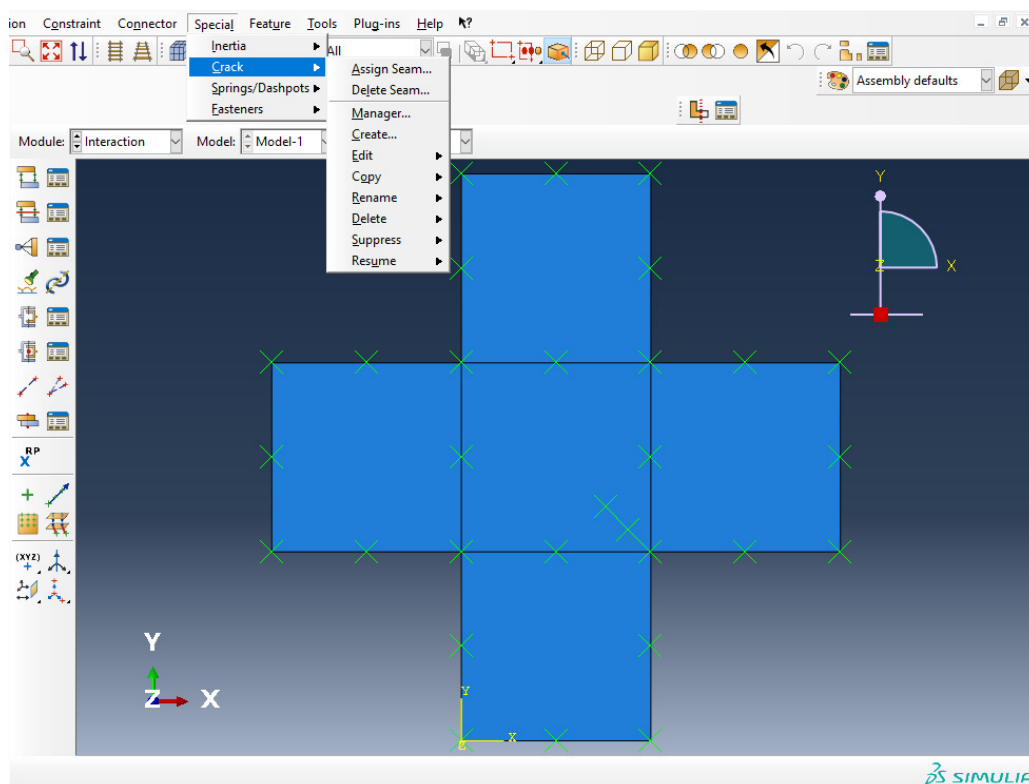


Figura 4.8: Caminho para definição da trinca

Esse estudo tem como objetivo a aplicação do método dos elementos estendidos, por isso escolheremos a análise em XFEM, como mostra a Figura 4.9.

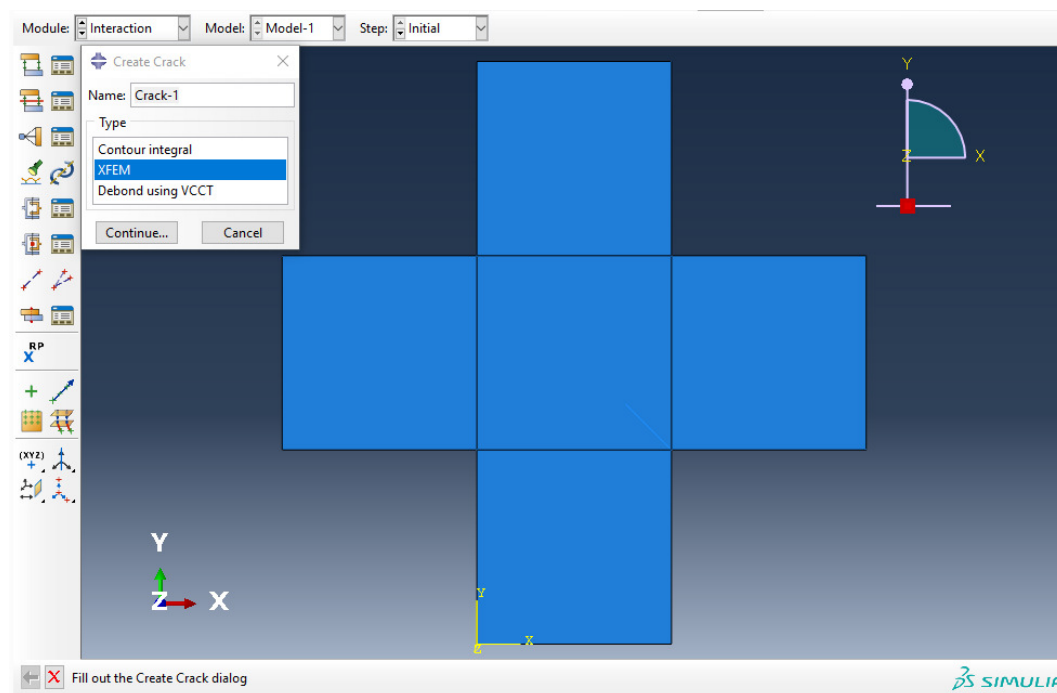


Figura 4.9: Escolha do método XFEM

Após a escolha do método utilizado para estudar a trinca, deve-se selecionar o domínio da trinca, logo em seguida, clicar para indicar a localização da trinca, como indicado na Figura 4.10.

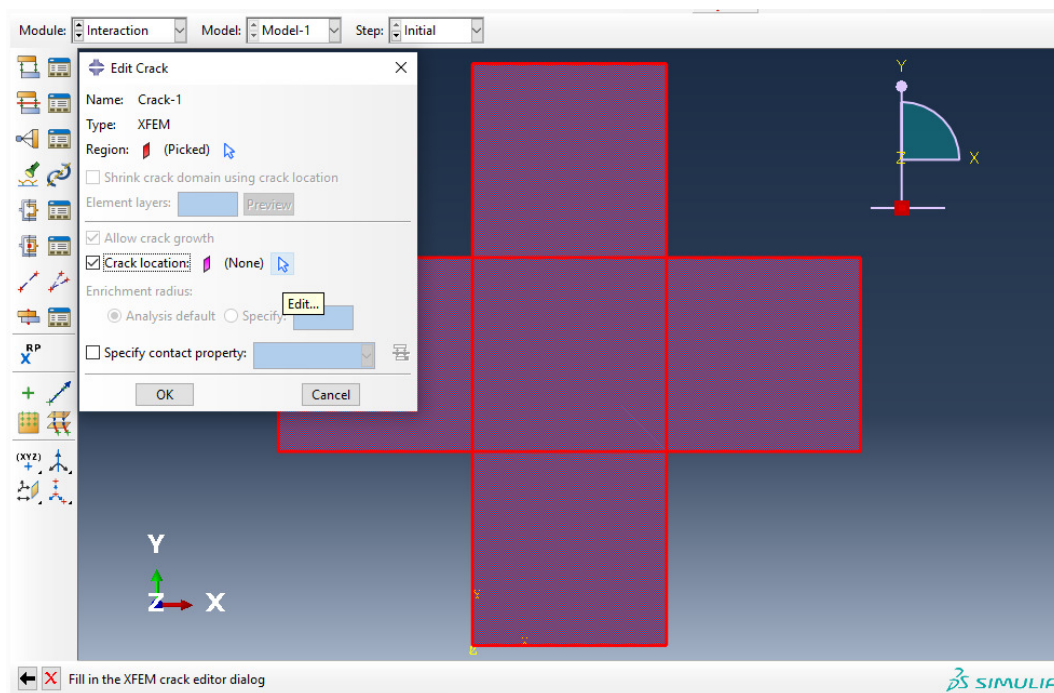


Figura 4.10: Habilitando o posicionamento da trinca

Ao realizar o procedimento da definição da trinca e como o *software* irá estudá-la, no modulo “*load*” deverão ser indicadas as condições de contorno e as cargas externas aplicadas. Na Figura 4.11, o quadrado azul indica o ícone para a inserção das cargas externas e o quadrado vermelho para definição das condições de contorno.

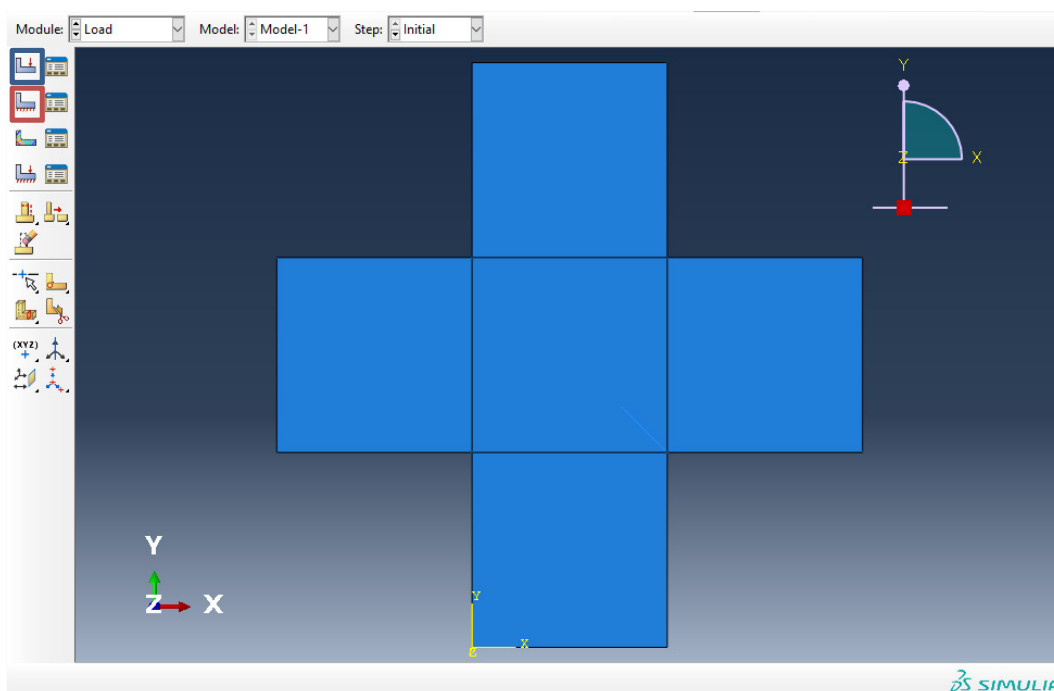


Figura 4.11: Definindo as cargas externas e condições de contorno

Após a aplicação das cargas e definição das condições do contorno, deverá ser elaborada a malha de elementos finitos, a mesma deverá ocorrer no módulo “*Mesh*”, os dois primeiros ícones são para particionar a estrutura definindo o tamanho do elemento e refinando a malha em alguns pontos específicos caso seja de interesse do pesquisador.

Já o ícone apresentado na Figura 4.12 é onde você vai especificar como seu elemento finito vai ser calculado e integrado. Nessa situação específica, foi adotado um elemento linear de quatro nós que será integrado com uma menor quantidade de pontos de Gauss e se comportará como uma estrutura de estado plano de tensão.

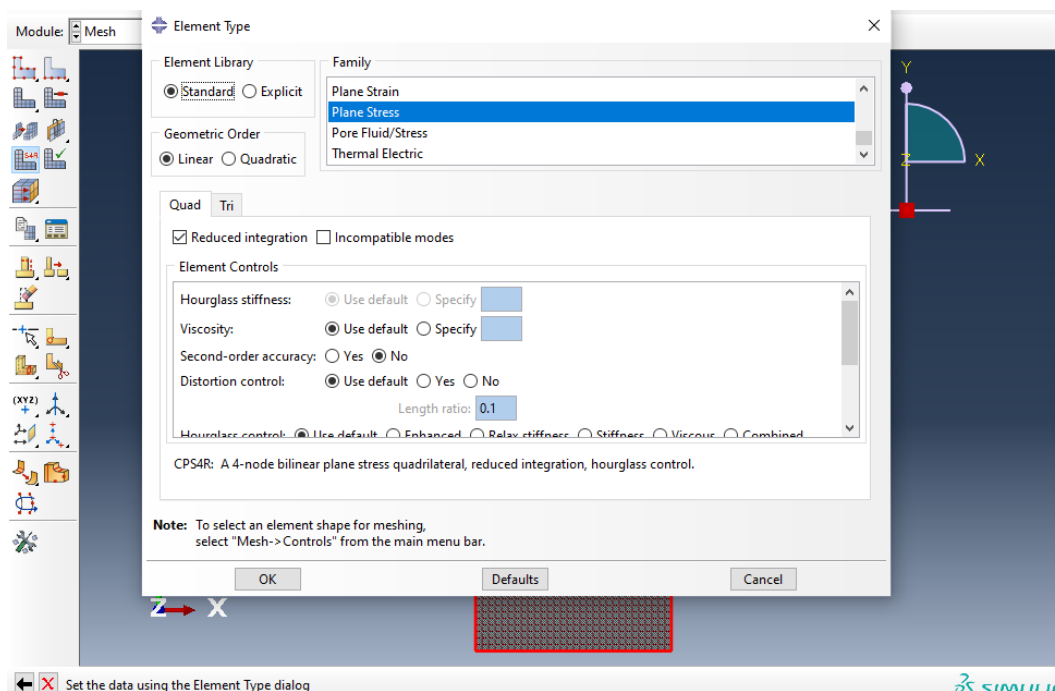


Figura 4.12: Definindo o elemento finito

Depois de definidas todas as propriedades da malha de elementos finitos, deverá ser selecionado o ícone que conforme a Figura 4.13 está destacado por um quadrado azul, gerando a malha de elementos finitos.

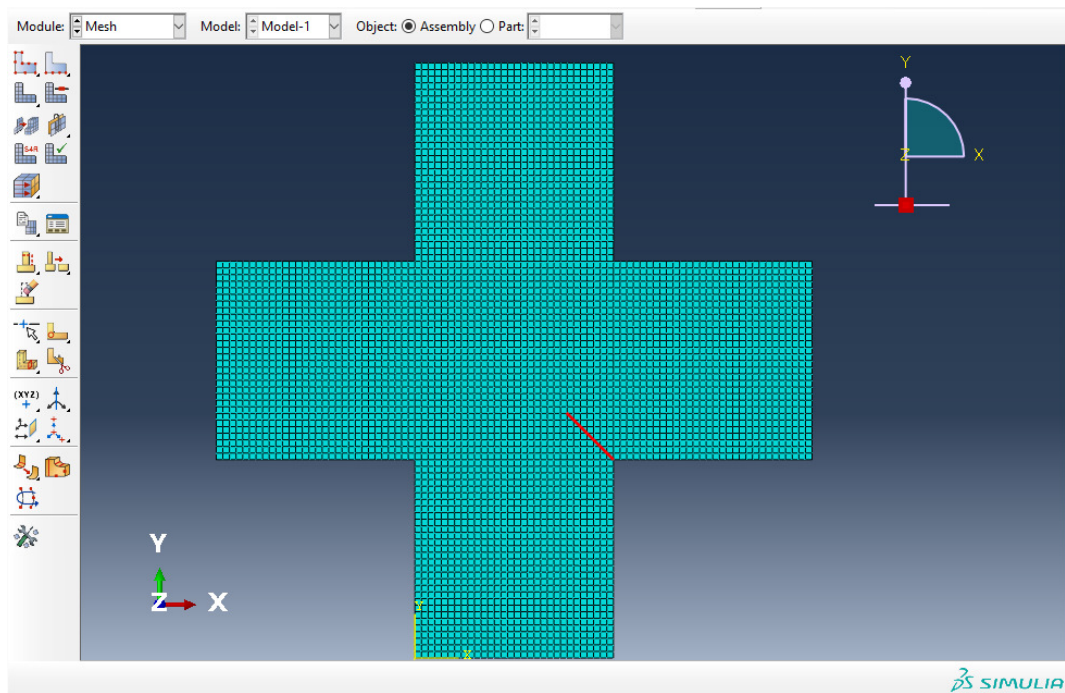


Figura 4.13: Geração da malha de elementos finitos

Após a geração da malha, o processo de modelagem está concluído, para finalizar, deve-se ir ao módulo “*Job*” e processar a estrutura.

Por fim, para visualizar os resultados, basta ir ao módulo “*Visualization*”, nele você poderá acompanhar todas as tensões e deformações em cada incremento de carga e analisar a propagação da trinca.

5 Análise Comparativa de Propagação de Trincas

Neste capítulo, será apresentado as análises comparativas de problemas solucionados pelo método dos elementos finitos estendidos e pelo método dos elementos de contorno dual.

O subcapítulo 5.1 apresenta o problema de uma placa com uma trinca lateral, onde busca simular caminhos de propagação diferentes a depender da origem do carregamento. Já o subcapítulo 5.2 apresenta a análise de uma estrutura com o formato de crucifixo submetido a diferentes cargas, ambas estruturas foram diversas vezes estudadas pela literatura (RABELO, 2022; PORTELA, 1993).

5.1 Estudo de placa com propagação em modos I e II puro

Os modelos analisados foram propostos por Portela et al (1993) e consistem em apresentar a diferença do caminho de propagação da trinca a depender a carga a qual estar submetida, a figura 5.1 apresenta a geometria do problema.

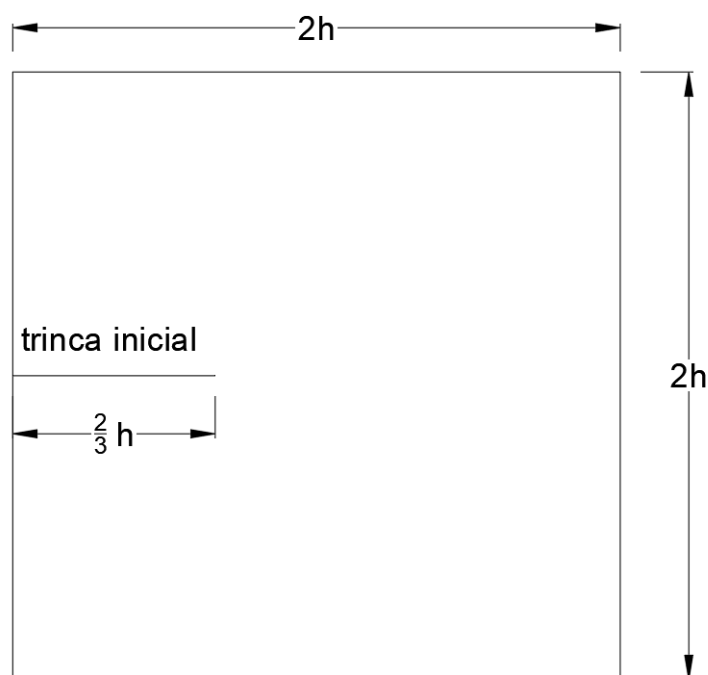


Figura 5.1: Geometria do modelo 01

As figuras 5.2 e 5.3 mostram os diferentes carregamentos aplicados ao modelo 01.

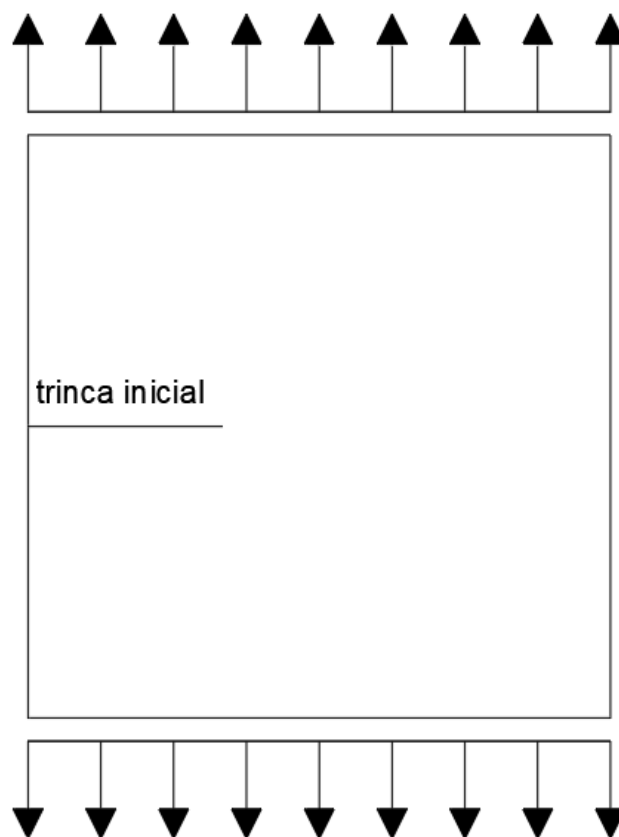


Figura 5.2: Carregamento 01 do modelo 01



Figura 5.3: Carregamento 02 do modelo 01

A tabela 5.1 apresenta os parâmetros adotados para a modelagem do modelo 01.

Propriedades	Grandeza	Valor
Modulo de elasticidade	material	8×10^8
Tensão máxima admissível	material	28000
Coeficiente de Poisson	material	0,3
Abertura	material	0,00004
h	geométrica	5

Tabela 5.1: Propriedades adotadas para o modelo 01

A malha adotada foi repartida em 0,15 formada por elementos do tipo CP4SR em estado plano de tensão. A Figura 5.4 apresenta a malha utilizada para os modelos.

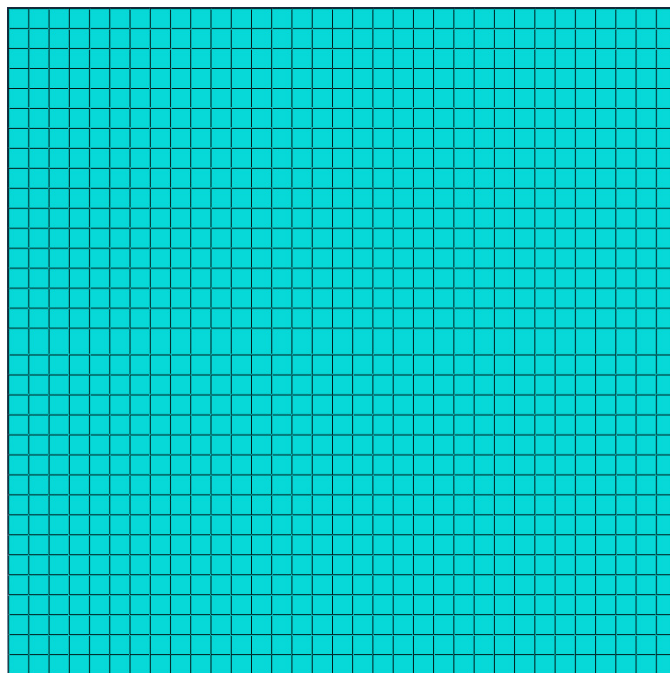


Figura 5.4: Malha de elementos finitos estendidos

A Figura 5.5 apresenta a comparação dos resultados obtidos por Portela et al (1993) e pela modelagem em XFEM quando aplicado o carregamento 01 e na Figura 5.6 quando aplicado o carregamento 02.

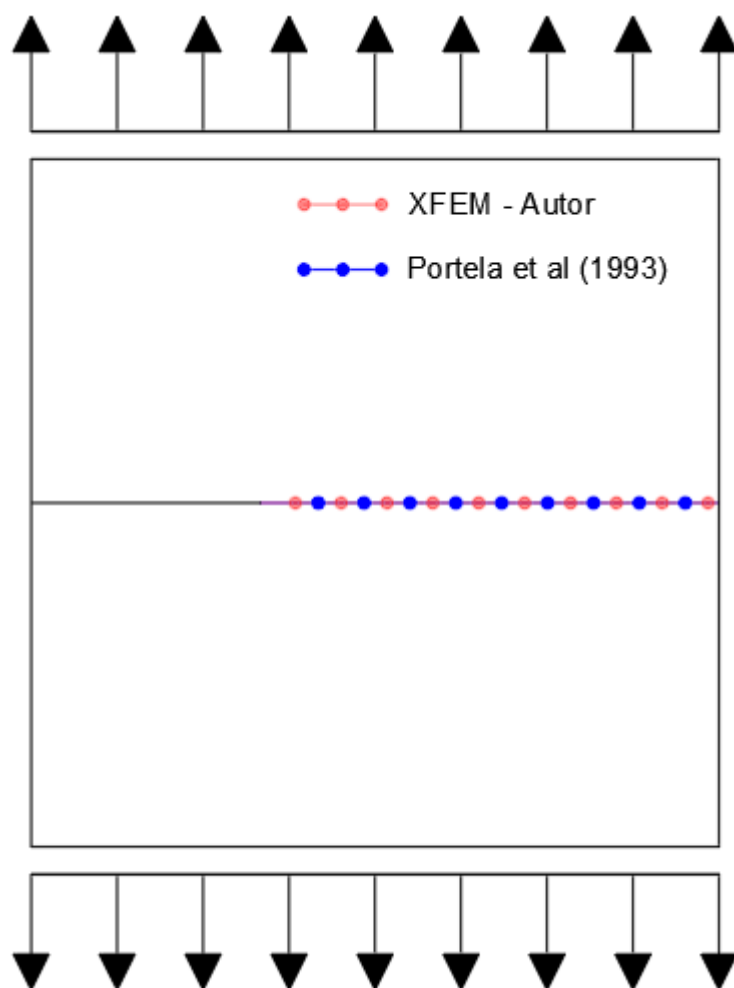


Figura 5.5: Propagação de trincas para carregamento 01

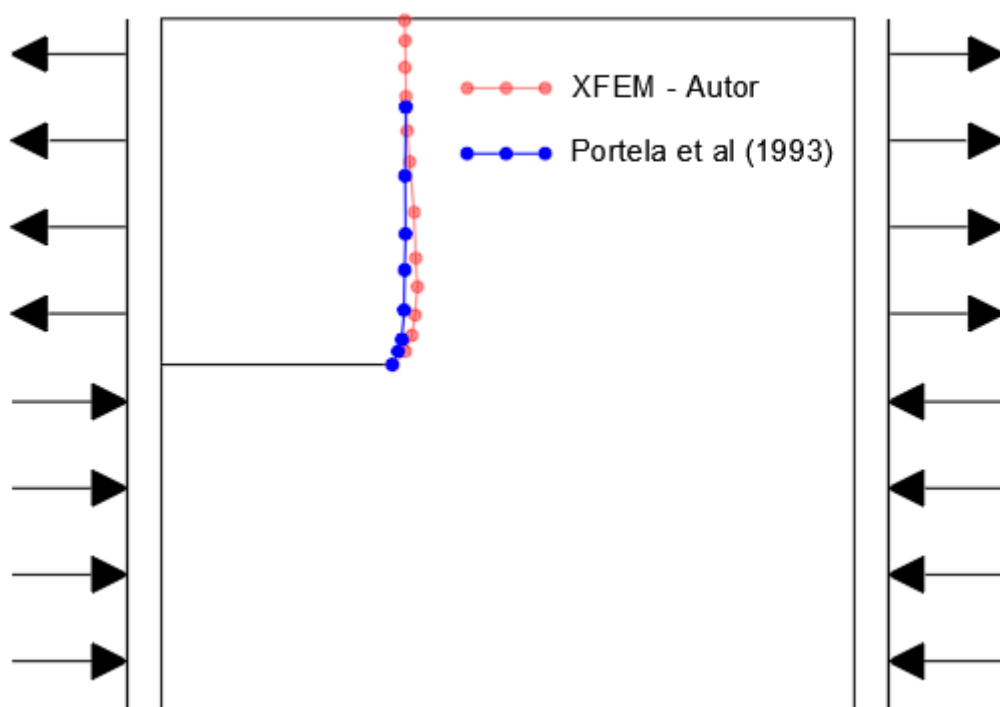


Figura 5.6: Propagação de trincas para carregamento 02

5.2 Estudo de placa em crucifixo

Um dos problemas estudados na literatura é o caso do crucifixo (Figura 5.7).

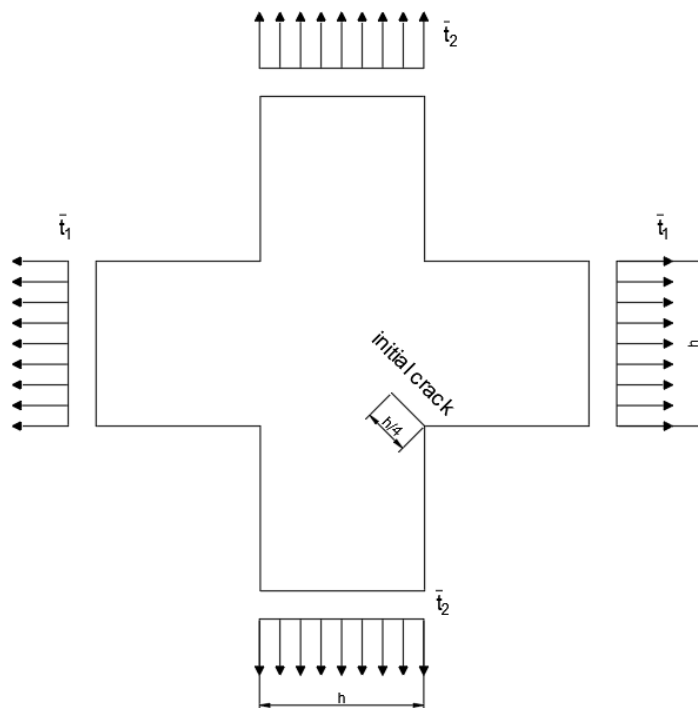


Figura 5.7: Geometria modelo 2

Para essa mesma estrutura foram feitas quatro análises, modificando apenas as cargas aplicadas t_1 e t_2 , onde: $t_1 = t_2$, $2t_1 = t_2$, $t_1 = 0$ e $t_2 = 0$. Essa análise foi feita considerando uma ruptura frágil do material, em seu trabalho Portela et al não especificam qual é o módulo de elasticidade e nem a tensão máxima resistida. A Tabela 5.2 apresenta as propriedades adotadas para os modelos.

Tabela 5.2: Propriedades adotadas para o modelo 02

Propriedades	Grandeza	Valor
Módulo de elasticidade	material	$30.672,46 \times 10^6$
Tensão máxima admissível	material	$2.896,46 \times 10^3$
Coeficiente de Poisson	material	0,2
Abertura	material	0,1
h	geométrica	0,3

A malha adotada foi repartida em 0,01 formada por elementos do tipo CP4SR em estado plano de tensão. A Figura 5.8 apresenta a malha utilizada para os modelos.

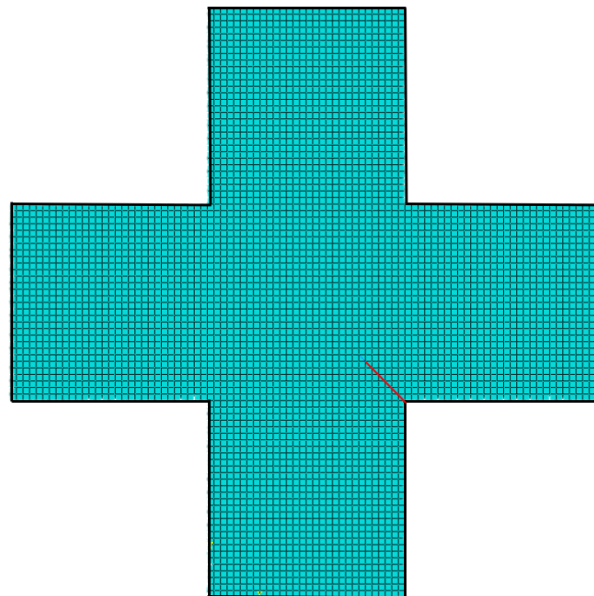


Figura 5.8: Malha de elementos finitos estendidos

A Figura 5.9 apresenta os resultados obtidos por Portela et al (1993).

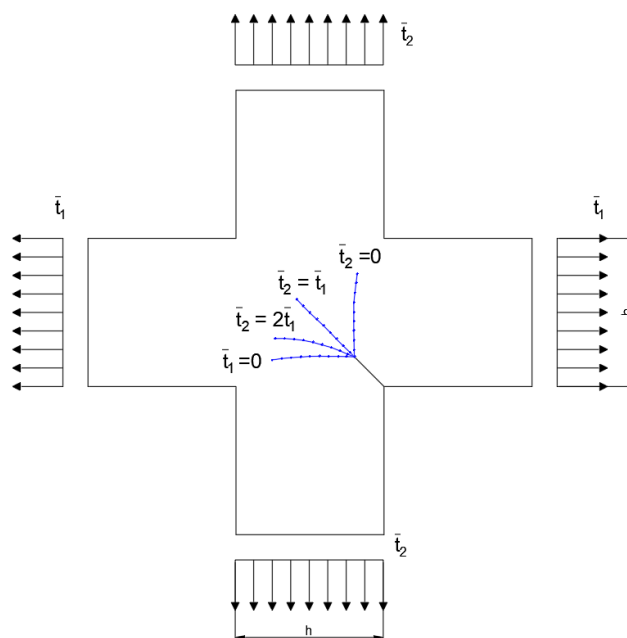


Figura 5.9: Resultados adaptados de Portela et al (1993)

Os resultados obtidos através da modelagem ficaram bem próximos aos obtidos por Portela et al, a pequena diferença pode ser justificada pelo fato de que os métodos de cálculos são diferentes, enquanto a solução numérica foi resolvida com base no método dos elementos finitos, Portela

utilizou o método dos elementos de contorno. Dessa forma, na Figura 5.10, observa-se um gráfico comparativo entre ambas as soluções.

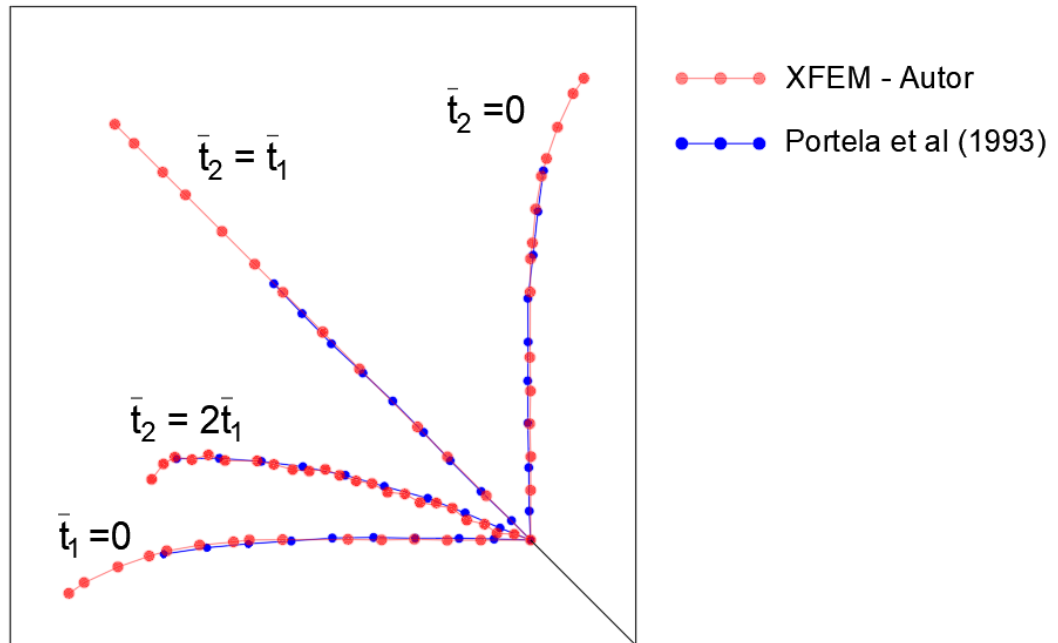


Figura 5.10: Comparação de resultados XFEM e MECD

6 Considerações Finais

Este trabalho teve como a finalidade a aplicação de modelagens em métodos dos elementos finitos estendidos para obter o caminho de propagação das trincas e comparar os resultados obtidos através de modelagem em XFEM com os obtidos por Portela et al (1993).

Para isto, foi feito inicialmente uma revisão bibliográfica abordando as formulações e conceitos da mecânica da fratura, sendo destacada a mecânica da fratura linear elástica. Também foi necessário analisar os principais métodos de resolução deste problema, com o foco nos métodos dos elementos finitos estendidos e métodos dos elementos de contorno.

Um ponto chave deste trabalho, foi a elaboração de um capítulo apontando os principais detalhes da modelagem de um problema de mecânica da fratura no *software* comercial Abaqus, visando o incentivo a futuros trabalhos nesta linha de pesquisa. Após isso, foram estudadas duas estruturas amplamente abordadas na bibliografia.

Ao todo foram feitas seis modelagens, sendo duas para o modelo 01 e quatro para o modelo 02. Enquanto o modelo 01 apresenta a situação de uma placa com uma trinca na borda lateral, onde possui dois tipos de carregamentos externos, a depender deste carregamento o modo de propagação irá variar entre o modo I ou II puro.

O modelo 02 apresenta uma estrutura com o formato de crucifixo submetido a quatro diferentes conjuntos de cargas, neste modelo, é notório que com as diferentes aplicações de cargas surge diferentes caminhos de propagação para a mesma trinca, evidenciado na Figura 5.10.

Os resultados obtidos tanto para o modelo 01 quanto para o modelo 02 foram próximos dos obtidos por Portela et al (1993), a pequena divergência se dá principalmente pelos distintos métodos de solução. Enquanto o MECD discretiza a estrutura apenas no contorno e durante o processo de propagação, é adicionado um novo vértice na ponta da trinca, no XFEM não há necessidade de remalhamento, mas, é acrescido as funções *Heaviside* nos elementos que abrangem o novo domínio da trinca e a função assintótica no elemento da ponta da trinca.

Apesar das diferenças, pode-se perceber que os dois métodos têm resultados condizentes com o esperado quando estudado estruturas de placas finas, onde pode-se validar os modelos propostos.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Os principais temas que podem ser explorados a partir deste trabalho e que ficam de sugestões para outros estudos são:

1. Fazer estudo em três dimensões para os casos analisados;
2. Estudar o comportamento de trincas em materiais com elevada ductibilidade utilizando o XFEM e a mecânica da fratura elastoplástica;
3. Aplicação do XFEM em estruturas inéditas e aplicações práticas.

7 Referências Bibliográficas

ABAQUS. **Abaqus/CAE User's Manual: Contour integral**, 2017. Disponível em: <<https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEANLRefMap/simaanl-c-contintegral.htm#simaanl-c-contintegral-jintegral>> Acessado em: junho de 2020.

ANDERSON, T. L.. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. 3. ed. CRC Press, 2005.

BARBOSA, Nayara D. S.; Wrobel, Luiz Carlos (Orientador); **Avaliação do Fator de Intensidade de Tensões em Corpos Fraturados**. Rio de Janeiro, 2020. 174p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

BARSOUM, R. S., On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 10, 25-37, 1976.

BELYTSCHKO, T., BLACK, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 45:601–620.

BEZERRA, L.M. (1993), **Inverse Elastoplastic Solution with Boundary Elements**. PhD. Thesis. Carnegie Mellon University. Pittsburg, PA, USA.
BITTENCOURT, E, 2005. **Mecânica da Fratura e do Dano**. Apostila disponível em <https://www.docsity.com/pt/mecanica-da-fratura-e-do-dano/4729551/>. Acesso em 10.06.2022.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. (1989), **Boundary Elements - An Introductory Course**. Computational Mechanics Publication, McGraw-Hill Book Company, Southampton, UK.

CONGRO, Marcello; ROEHL, Deane (Orientador). **Análise Probabilística da Capacidade de Carga de Vigas de Concreto Reforçadas com Fibras de Aço**. Rio de Janeiro, 2017. Trabalho de Conclusão de Curso. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., 2001, “**Concepts and Applications of Finite Element Analysis**”, John Willey & Sons, 4th Edition.
CRUSE, T. A. (1988), **Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics**. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, UK.

HENSHELL, R. D. and SHAW, K. G. (1975) Crack Tip Finite Elements are Unnecessary, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 9, 495-507.

HUTCHINSON, J.W., **Singular Behavior at the End of a Tensile Crack Tip in a Hardening Material**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, 1968, pp. 13–31.

GRIFFITH, A. A.. **The phenomena of rupture and flow in solids**. Philosophical Transactions. Series A, v. 221, p. 163, 1920.

INGLIS, C. E.. **Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners**. Transactions of the Institute of Naval Architects, v. 55, p. 219-241, 1913.

IRWIN, G. R.. **Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys**. Sagamore Research Conference Proceedings, v. 2, p. 289-305, 1956.

LEME, S. P. L. (2007). **Determinação e Propagação de Trincas em Estruturas Aeronáuticas com Reforçadores Utilizando o Método dos Elementos de Contorno Dual e Sensores Piezelétricos**. Tese de Doutorado em estruturas e Construção Civil, Publicação PECC E.TD-002A/07, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 177p.

LÓPEZ BENDEZÚ, Marko Antonio; Romanel, Celso (Orientador); Roehl, Deane de Mesquita (Co-orientadora). **Simulação Numérica do Fraturamento de Rocha por Explosão considerando o Modelo de Zona Coesiva. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro, 2015. 199p.

MARTÍNEZ, E. R. **Modelagem Numérica de Fraturamento Hidráulico via Método dos Elementos Finitos Estendido**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, 2015.

MEDINA, H. A. J. **Avaliação de Previsões de Fratura Elasto-Plástica**. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2014.

MELENK, J.M.; BABUSKA, I. (1996) **The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications**. Seminar fur Angewandte Mathematik, Eidgenossische Technische Hochschule, Research Report No. 96-01, January, CH-8092 Zurich, Switzerland.

MIRANDA, Antonio Carlos de Oliveira. **Propagação de Trincas por Fadiga em Geometrias 2D Complexas sob Cargas Cíclicas Variáveis**. Rio de Janeiro, 2003. 106p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

MURAKAMI, Y. **Stress Intensity Factor Handbook**, Pergamon Press, Oxford. UK, 1987.

PARTRIDGE P.W. , BREBBIA C.A. e WROBEL L.C. (1992) , **The Dual Reciprocity Boundary Element Method** . Computational Mechanics Publications , Elsevier Applied Science , Southampton , UK .

PORTELA, A. et al,1993. **Dual boundary element incremental analysis of crack propagation**. Computers & Structures Vol. 4b. Volume 2, pp. 237-247.

RABELO, Guilherme Oliveira; Dumont, Ney Augusto (Orientador); Wrobel, Luiz Carlos (Coorientador). **Esquema geral de propagação bidimensional de trincas usando o método consistente dos elementos de contorno**. Rio de Janeiro, 2022. 59p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

RICE, J. R. **A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks**. Journal of Applied Mechanics, v. 35, p. 379-386, 1968.

RICE, J.R.; ROSENGREN, G.F., **Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, 1968, pp. 1–12.

SHI, G. C. (1973). Handbook of Stress Intensity Factors, **Lehigh University**, Bethlehem, USA.

SILVA, P. A. **Uma Implementação do Método Estendido dos Elementos Finitos para Análise de Propagação de Fraturas Bidimensionais**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2015.

SUKUMAR, N. et al. Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. **Engineering Fracture Mechanics** (2003) pag 29–48.

WANHILL, R.J.H, 2002. **Milestone Case Histories in Aircraft Structural Integrity**. National Aerospace Laboratory, NLR-TP-2002-521. 2002.

WELLS, A. A.. **Unstable crack propagation in metals: Cleavage and fast fracture**. Proceedings of the crack propagation symposium, v. 1, n. 84, 1961.

WESTERGAARD, H. M.. Bearing pressures and cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v.6, p. 49-53, 1939.