3
Reformulação de *IPs*

O desenvolvimento de métodos de resolução de problemas lineares que explorem a estrutura particular de determinado problema foi sugerido inicialmente por Ford e Fulkerson [46]. Este trabalho é considerado por muitos o marco inicial da abordagem de geração de colunas e reconhecidamente inspirou Dantzig e Wolfe [36] a proporem um esquema de decomposição de problemas lineares que generaliza essa abordagem (veja seção 3.1).

Essa decomposição basicamente consiste na escrita de grupos de variáveis como uma combinação convexa de pontos extremos. O grande mérito desse esquema é retirar parte das restrições do problema linear, em geral restrições com estruturas bem definidas, e tratá-las a parte em um problema auxiliar. Dessa forma pode haver uma grande redução no número de restrições do problema resultante, que passa, porém, a conter um número potencialmente exponencial de variáveis.

O método de decomposição de *Dantzig-Wolfe* foi uma importante ferramenta para a resolução de modelos de programação linear de grande porte, que não podiam ser resolvidos por *softwares* que implementavam o método *Simplex* padrão por excederem algum limite e/ou capacidade dos mesmos. Com o avanço na implementação desses *softwares* e o enorme progresso no desenvolvimento de novos *hardwares* (tanto em termos de velocidade de CPU, quanto na disponibilidade de memória), este método tornou-se menos popular.

O trabalho pioneiro na formulação de um problema de programação inteira com um grande número de variáveis e sua resolução com técnicas de geração implícita de colunas foi apresentado por Gilmore e Gomory [53, 54].

A associação da técnica de geração de colunas com o algoritmo *branch-and-bound* (veja seção 4.3), proposta por Desrosiers, Soumis e Desrochers [39], reforça a importância da decomposição de *Dantzig-Wolfe* e desde então a abordagem por geração de colunas torna-se uma das principais técnicas para resolução de problemas de programação inteira.

Uma nova reformulação de problemas de programação linear e inteira (veja seção 3.3), que gera o chamado problema mestre explícito, foi proposta por Poggi de Aragão e Uchoa [94]. Esta reformulação é uma alternativa àquela que gera o tradicional problema mestre de *Dantzig-Wolfe*, geralmente utilizados em abordagens por geração de colunas (veja seção 3.2).

No restante deste capítulo são descritas as técnicas básicas de decomposição de problemas de programação linear e inteira e de geração de colunas. Além disso, é também descrita essa nova reformulação proposta por Poggi de Aragão e Uchoa.

3.1 Decomposição de *Dantzig-Wolfe* para *LP*s

O método de decomposição de *Dantzig-Wolfe* [36], para problemas de programação linear, procura aproveitar a estrutura especial da matriz de restrições de um problema, criando um problema equivalente com grande redução no número de restrições, entretanto, com grande número de variáveis.

Considere o problema de programação linear com n variáveis a seguir:

$$LP = \begin{cases} Z_{LP} = \min c.x \\ \text{sujeito a} \\ \quad A.x \;=\; b \qquad (1) \\ \quad D.x \;\leq\; d \qquad (2) \\ \quad\;\; x \;\geq\; 0\,. \end{cases}$$

O princípio do método de decomposição de *Dantzig-Wolfe* é a propriedade que permite representar as soluções de um certo domínio convexo limitado como combinação linear convexa de seus pontos extremos. Assim, após identificado esse domínio, as restrições que o definem são substituídas por um outro conjunto de restrições que definem a combinação linear de seus pontos extremos.

Suponha que $\mathcal{Q} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ é um conjunto finito com os p pontos extremos do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid Dx \leq d\}$. Considere Q uma matriz de dimensão $n \times p$, em que cada coluna corresponde a um elemento do conjunto $\mathcal{Q}$. Assim, cada elemento do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid Dx \leq d\}$ pode ser representado por pelo menos um vetor λ através da seguinte relação:

$$\mathcal{X} = \begin{cases} x = Q.\lambda \\ \text{sujeito a} \\ \quad \mathtt{1}.\lambda \;=\; 1 \\ \quad\;\; \lambda \;\in\; \mathbb{R}^p_+ \,. \end{cases}$$

A decomposição de *Dantzig-Wolfe* consiste na troca das variáveis x, no problema LP, por sua expressão equivalente dada por $\mathcal{X}$. A formulação resultante é habitualmente designada por Problema Mestre ou *Dantzig-Wolfe Master* (DWM) e, naturalmente, os valores Z_{LP} e Z_{DWM} são iguais:

$$DWM = \begin{cases} Z_{DWM} = \min\,(c.Q).\lambda \\ \text{sujeito a} \\ \quad (A.Q).\lambda \;=\; b \\ \quad\quad\;\; \mathtt{1}.\lambda \;=\; 1 \\ \quad\quad\quad\; \lambda \;\geq\; 0\,. \end{cases}$$

O caso em que o domínio é ilimitado não será considerado nesta tese. Contudo, o teorema da representação de Minkowski e Weyl (veja [98] ou [85]) garante que a sua envoltória convexa é um poliedro representado por uma combinacão convexa de um conjunto finito de pontos extremos e uma combinação linear de um conjunto finito de raios extremos. Uma detalhada descrição deste caso é fornecida, por exemplo, por Vanderbeck em [106, 108].

Caso bloco-diagonal

Se a matriz D tem uma estrutura bloco-diagonal, que permite reescrever as restrições $Ax = b$ e $Dx \leq d$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_k & x & = & b & \\ \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} & \leq & \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix} & , \end{array}$$

então a formulação DWM pode ser detalhada para considerar essa estrutura especial da matriz D. Para tal, deve ser feita a definição de conjuntos $\mathcal{Q}_i$ apropriados para cada subconjunto de restrições $D_i x_i \leq d_i$ e respectivas relações $\mathcal{X}_i$, para $i = 1, \ldots k$, e a posterior substituição de cada variável x_i

pela sua forma equivalente $x_i = Q_i.\lambda_i$:

$$DWM' = \begin{cases} Z_{DWM'} = \min \sum_{i=1}^{k} (c_i.Q_i).\lambda_i \\ \text{sujeito a} \\ \begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{k} (A_i.Q_i).\lambda_i & = & b & \\ \mathtt{1}.\lambda_i & = & 1 & i = 1, \ldots, k \\ \lambda_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, k \end{array} \end{cases}$$

3.1.1
Geração de colunas

A geração de colunas é uma técnica para a resolução de problemas de programação linear com um grande número de variáveis, mais do que seria possível armazenar na memória de um computador. Esta técnica se faz necessária para resolver os problemas que resultam da decomposição de *Dantzig-Wolfe* (veja seção 3.1).

Considere o problema DWM definido na seção 3.1. A resolução direta desse problema em geral é impraticável, devido ao elevado número de variáveis λ nessa formulação. Entretanto, a grande maioria dessas variáveis assume valor zero em uma solução ótima e, portanto, não precisariam fazer parte da formulação do problema (supondo que se saiba de antemão identificar essas variáveis). De fato, a teoria de programação linear garante que, caso não haja variáveis com limite superior, como em DWM, o número de variáveis não nulas em qualquer solução básica está limitado ao número de restrições. A técnica de geração de colunas usa este fato, reduzindo a solução do DWM à resolução de uma seqüência de programas lineares que contém apenas um pequeno subconjunto das variáveis do problema original.

Para qualquer matriz Q' que contenha um subconjunto das colunas da matriz Q, o seguinte problema linear é chamado de problema mestre restrito:

$$DWMR = \begin{cases} Z_{DWMR} = \min (c.Q').\lambda \\ \text{sujeito a} \\ \begin{array}{rcll} (A.Q').\lambda & = & b & (1) \\ \mathtt{1}.\lambda & = & 1 & (2) \\ \lambda & \geq & 0\,. & \end{array} \end{cases}$$

Considere o $DWMR$ com um subconjunto Q' das colunas de Q suficiente para que $DWMR$ tenha solução viável (se necessário pode-se utilizar colunas artificiais não presentes em Q, com custo elevado, para obter essa viabilidade). Dada a solução ótima para tal problema, sejam μ e ν os vetores de multiplicadores duais ótimos associados às restrições (1) e (2), respectivamente. Variáveis com custo reduzido negativo com respeito a μ e ν são candidatas a serem adicionadas ao $DWMR$. A operação de encontrar tais variáveis é usualmente chamada de *pricing* e dá-se pela resolução do seguinte subproblema:

$$PS = \begin{cases} v(\mu,\nu) = \min\,(c - \mu.A).x - \nu \\ \text{sujeito a} \\ \quad D.x \;\leq\; d \\ \quad\quad x \;\in\; \mathbb{R}^n_+ \,. \end{cases}$$

O algoritmo para encontrar a solução ótima do problema mestre DWM alterna entre a resolução da versão restrita $DWMR$ e do subproblema gerador de colunas PS. Na resolução deste último, se $v(\mu,\nu) < 0$, então a solução ótima x^* define uma nova coluna ($q'_j = (A.x^*, 1)$ e $c_j = c.x^*$) que é adicionada a matriz Q' de $DWMR$. Esse processo é repetido até que $v(\mu,\nu) \geq 0$ (na realidade $v(\mu,\nu)$ sempre terminará com o valor zero, uma vez que as colunas da base ótima têm custo reduzido zero e são soluções válidas de PS). Neste ponto a solução corrente de $DWMR$ também é solução ótima de DWM (o valor das variáveis de DWM não presentes em $DWMR$ é 0).

Considere o caso em que a matriz D tem uma estrutura bloco-diagonal e a decomposição foi realizada de modo a aproveitar essa estrutura (problema DWM' definido na seção 3.1). Seja Q'_i uma matriz que contenha um subconjunto das colunas da matriz Q_i, para $i = 1, \ldots, k$ e $DWMR'$ o problema mestre restrito definido com tais matrizes:

$$DWMR' = \begin{cases} Z_{DWMR'} = \min\ \sum_{i=1}^{k} (c_i.Q'_i).\lambda_i \\ \text{sujeito a} \\ \quad \sum_{i=1}^{k} (A_i.Q'_i).\lambda_i \;=\; b & & (1) \\ \quad\quad\quad\quad\quad \mathtt{1}.\lambda_i \;=\; 1 & i = 1, \ldots, k & (2) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \lambda_i \;\geq\; 0 & i = 1, \ldots, k \end{cases}$$

A operação de *pricing* deve agora verificar, em separado, a existência de variáveis de custo reduzido negativo em cada bloco de colunas. Assim, se μ_i e ν_i são os vetores de multiplicadores duais associados às restrições (1) e (2) de $DWMR'$, respectivamente, essa operação deve resolver individualmente os k subproblemas definidos a seguir:

$$PS' = \begin{cases} v(\mu_i, \nu_i) = \min\, (c_i - \mu_i.A).x_i - \nu_i \\ \text{sujeito a} \\ \quad D_i.x_i \;\leq\; d_i \\ \quad\quad x_i \;\in\; \mathbb{R}^n_+ \,. \end{cases}$$

3.2
Reformulação tradicional de *IP*s

O método de decomposição de *Dantzig-Wolfe* para problemas de programação linear e o esquema de geração implícita de colunas, mostrados nas seções 3.1 e 3.1.1, têm seus equivalentes para problemas de programação linear inteira. Assim como na decomposição de *Dantzig-Wolfe*, o princípio básico também é a representação de um conjunto convexo por uma combinação de seus pontos extremos.

Considere o seguinte problema de programação linear inteira com n variáveis:

$$IP = \begin{cases} Z_{IP} = \min c.x \\ \text{sujeito a} \\ \quad A.x \;=\; b \\ \quad D.x \;\leq\; d \\ \quad\quad x \;\in\; \mathbb{Z}^n_+ \,. \end{cases}$$

Suponha que o conjunto $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ \mid Dx \leq d\}$ é um conjunto finito com p elementos, ou seja, $\mathcal{Q} = \{x_1, x_2, ...x_p\}$. Observe que se $x \in \{0,1\}$, então $\mathcal{Q}$ coincide com os pontos extremos de sua envoltória convexa $conv(\mathcal{Q})$. Novamente, se $\mathcal{Q}$ não é limitado, é possível a sua representação em termos de seus pontos e raios extremos. Veja [106, 108] para uma detalhada descrição deste caso

Considere Q uma matriz de dimensão $n \times p$, em que cada coluna corresponde a um elemento do conjunto $\mathcal{Q}$. Para cada x em $\mathcal{Q}$, existe um único vetor λ satisfazendo a seguinte relação:

$$\mathcal{X} = \begin{cases} x = Q.\lambda \\ \text{sujeito a} \\ \quad \mathtt{1}.\lambda \;=\; 1 \\ \quad\quad \lambda \;\in\; \{0,1\}^p \,. \end{cases}$$

A reformulação tradicional de problemas de programação inteira, proposta por Gilmore e Gomory [53, 54], consiste na troca das variáveis

x, no problema IP, por sua expressão equivalente dada por $\mathcal{X}$. O resultado é o novo problema inteiro IP' mostrado a seguir.

$$IP' = \begin{cases} Z_{IP} = \min\,(c.Q).\lambda \\ \text{sujeito a} \\ \quad (A.Q).\lambda \;=\; b \\ \qquad\quad \mathtt{1}.\lambda \;=\; 1 \\ \qquad\quad\;\; \lambda \;\in\; \{0,1\}^p \,. \end{cases}$$

O problema DWM (*Dantzig-Wolfe Master*), similar ao definido na seção 3.1, é obtido relaxando-se as restrições de integralidade em IP'. Resolver o problema DWM equivale a resolver o problema definido a seguir:

$$\begin{cases} Z_{DWM} = \min c.x \\ \text{sujeito a} \\ \quad A.x \;=\; b \\ \qquad x \;\in\; Conv(D.x \le d;\; x \;\in\; \mathbb{Z}^n_+) \,. \end{cases}$$

Seja Z_{LP} é o valor obtido resolvendo-se a relaxação linear do problema IP. Sempre é verdade que $Z_{LP} \le Z_{DWM} \le Z_{IP}$ [52]. Entretanto, em muitas situações Z_{DWM} é bastante maior que Z_{LP}, fornecendo uma estimativa inferior muito mais forte para o valor de Z_{IP}. Essa é a principal motivação para o uso da decomposição de *IP*s.

A resolução do problema *DWM*, usando-se um esquema de geração de colunas, é discutida na seção 3.1.1. A diferença básica é que agora a solução ótima x^*, do subproblema de geração de colunas, deve satisfazer restrições de integralidade ($x^* \in \mathbb{Z}^n_+$), ou seja, o subproblema *PS* é agora definido como:

$$PS = \begin{cases} v(\mu,\nu) = \min\,(c - \mu.A).x - \nu \\ \text{sujeito a} \\ \quad D.x \;\le\; d \\ \qquad x \;\in\; \mathbb{Z}^n_+ \,. \end{cases}$$

O problema de geração de colunas precisa ser resolvido até a otimalidade, uma vez que a solução ótima do problema *DWMR* (veja seção 3.1.1) somente é uma estimativa válida para o valor da solução ótima do problema *IP'* se também for solução ótima de sua relaxação linear, ou seja, se também for solução ótima do problema *DWM*.

Essa abordagem somente é viável quando a estrutura do conjunto de restrições $D.x \le d$ permite que o subproblema PS, que é um problema inteiro, seja resolvido em um tempo computacional razoável. Se o próprio subproblema PS é um problema da classe $\mathcal{NP}$-difícil e o mesmo não possui um algoritmo de complexidade ao menos pseudo-polinomial para sua resolução (o que não será o caso nas aplicações descritas na segunda parte desta tese), a abordagem não costuma ser viável.

Além disso, é essencial que no caso de adição de novos cortes ao problema DWM, o subproblema PS continue sempre com a mesma estrutura. Seja $\overline{\lambda}$ uma solução fracionária de DWM. Alguns pesquisadores, começando com Nemhauser e Park (1991) [86], tentaram melhorar o limite inferior dado por Z_{DWM} adicionando ao problema linear cortes $\pi^i.\lambda \leq b_i$ violados, ou seja, tais que $\pi^i.\overline{\lambda} > b_i$. Essa abordagem em geral não obtém bons resultados. Os cortes assim adicionados introduzem outros coeficientes e variáveis duais que devem ser levados em conta no novo problema de geração de colunas PS. Esses outros elementos destroem a estrutura de PS, tornando-o impossível de ser resolvido por algoritmos eficientes.

No final dos anos 90, alguns pesquisadores perceberam que cortes definidos sobre a variáveis originais x podiam ser adicionados a DWM sem alterar a estrutura do subproblema [110, 67, 69, 111, 44, 17]. Novamente, considere uma solução fracionária $\overline{\lambda}$ de DWM, que na formulação original IP corresponde à solução $\overline{x} = Q.\overline{\lambda}$. Um corte $a^i.x \leq b_i$ violado por $\overline{x}$ ($a^i.\overline{x} > b_i$) pode ser adicionado a DWM para cortar a solução $\overline{\lambda}$, como se $a^i.x \leq b_i$ pertencesse ao conjunto original de restrições $A.x = b$ em IP:

$$DWM'' = \begin{cases} Z_{DWM''} = \min\,(c.Q).\lambda \\ \text{sujeito a} \\ \quad (A.Q).\lambda \;=\; b \\ \quad (a^i.Q).\lambda \;\leq\; b_i \\ \qquad\quad \mathsf{1}.\lambda \;=\; 1 \\ \qquad\qquad \lambda \;\geq\; 0\,. \end{cases}$$

A adição da linha a^i à matriz A e da variável dual μ_i a μ não altera a geração de colunas. Contudo, esses dois elementos devem agora ser considerados no cálculo de $(c - \mu.A)$ na resolução do problema PS.

3.3
Reformulação alternativa

Considere novamente o problema original IP, definido na seção 3.2. Desacoplando-se os sistemas $A.x = b$ e $D.x \leq d$, utilizando-se variáveis definidas como $x' = x$ no segundo sistema e substituindo-se x' por sua expressão equivalente $\mathcal{X}$, definida na seção 3.2, obtém-se a seguinte reformulação alternativa IP'':

$$IP'' = \left\{ \begin{array}{lcrcl} \multicolumn{5}{l}{Z_{IP} = \min c.x} \\ \multicolumn{5}{l}{\text{sujeito a}} \\ x' & - & x & = & 0 \\ & & A.x & = & b \\ D.x' & & & \leq & d \\ x' & & & \in & \mathbb{Z}^n_+ \\ & & x & \in & \mathbb{Z}^n_+ \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{lcrcl} \multicolumn{5}{l}{Z_{IP} = \min c.x} \\ \multicolumn{5}{l}{\text{sujeito a}} \\ Q.\lambda & - & x & = & 0 \\ & & A.x & = & b \\ \mathbf{1}.\lambda & & & = & 1 \\ \lambda & & & \in & \{0,1\}^p \\ & & x & \in & \mathbb{Z}^n_+ . \end{array} \right.$$

Na realidade apenas as variáveis x necessitam ser inteiras. Se uma solução (λ^*, x^*) de IP'' apresenta x^* inteiro e λ^* fracionário, x^* é uma solução de IP, ou seja, $A.x^* = b$ e $D.x^* \leq d$. Esta última afirmação é verdadeira porque $D.q_j \leq d$ para qualquer coluna q_j de Q, conforme exigido pela definição de Q. Logo, uma combinação convexa $Q.\lambda^* = x^*$ dessas colunas satisfaz $D.x^* \leq d$. É importante ressaltar que o problema IP' apresenta p variáveis inteiras enquanto o IP'' apresenta apenas n.

O problema linear mestre explícito é obtido relaxando-se também as restrições de integralidade em x:

$$ME = \left\{ \begin{array}{lcrcll} \multicolumn{6}{l}{Z_{ME} = \min c.x} \\ \multicolumn{6}{l}{\text{sujeito a}} \\ Q.\lambda & - & x & = & 0 & \quad (1) \\ & & A.x & = & b & \quad (2) \\ \mathbf{1}.\lambda & & & = & 1 & \quad (3) \\ \lambda & & & \geq & 0 & \\ & & x & \in & \mathbb{R}^n_+ . & \end{array} \right.$$

Colunas válidas para esse problema ME são geradas resolvendo-se o subproblema PS, definido a seguir, onde π e ν são os multiplicadores duais associados às restrições (1) e (3), respectivamente, de ME:

$$PS = \left\{ \begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{v(\pi, \nu) = \min \; -\pi.x - \nu} \\ \multicolumn{3}{l}{\text{sujeito a}} \\ D.x & \leq & d \\ x & \in & \mathbb{Z}^n_+ . \end{array} \right.$$

Os multiplicadores duais μ, associados às restrições $A.x = b$ de ME, não aparecem no subproblema PS de geração de colunas. Assim, novas variáveis duais μ_i, decorrentes da adição de cortes separados sobre as variáveis x ($a^i.x \leq b_i$), claramente não alteram a estrutura do subproblema de geração de colunas:

$$ME' = \begin{cases} Z_{ME'} = \min c.x \\ \text{sujeito a} \\ \begin{array}{rcrcl} Q.\lambda & - & x & = & 0 \\ & & A.x & = & b \\ & & a^i.x & \leq & b_i \\ \mathsf{1}.\lambda & & & = & 1 \\ \lambda & & & \geq & 0 \\ & & x & \in & \mathbb{R}^n_+ . \end{array} \end{cases}$$

3.3.1 Relações entre o *Dantzig-Wolfe Master* e o *Mestre Explícito*

A relação entre os problemas DWM e ME pode ser melhor compreendida olhando-se para os seus problemas duais $DWMD$ e MED, respectivamente:

$$DWMD = \begin{cases} \begin{array}{lcccccc} \max & \nu & + & \mu.b & & \\ \text{sujeito a} & & & & & \\ & \nu.\mathsf{1} & + & \mu.A & \leq & c \end{array} \end{cases}$$

$$MED = \begin{cases} \begin{array}{lcccccccc} \max & & & \nu & + & \mu.b & & \\ \text{sujeito a} & & & & & & & \\ & \pi.Q & + & \nu.\mathsf{1} & & & \leq & 0 \\ - & \pi & & & + & \mu.A & \leq & c \end{array} \end{cases}$$

Sejam Z_{DWM} e Z_{ME} os valores das soluções ótimas para os problemas DMW e ME, respectivamente, definidos nas seções 3.2 e 3.3. A relação entre estes dois valores é definida pelo teorema enunciado a seguir.

Teorema 3.1 ($Z_{DWM} = Z_{ME}$)

Prova. Sejam λ^* e (μ^*, ν^*) um par primal e dual de soluções ótimas para DWM e $DWMD$ com custo Z_{DWM}. Então $(\lambda^*, x^* = Q.\lambda^*)$ e $(\pi^* = (\mu^*.A - c), \mu^*, \nu^*)$ são um par de soluções para ME e de MED, respectivamente, ambas com o mesmo custo e portanto ótimas. Como esse custo também é igual a Z_{DWM}, fica provado que $Z_{DWM} = Z_{ME}$. □

A prova desse teorema também fornece uma relação mais profunda entre os problemas DWM e ME. Uma solução dual do problema ME fornece um vetor de custos reduzidos para as variáveis x dado por:

$$\bar{c} = c - \mu.A + \pi \, . \tag{3-1}$$

Os componentes não nulos desses custos reduzidos podem ser usados, por exemplo, para a eliminação de variáveis x e a consequente redução do tamanho do problema original. Agora suponha que se tenha resolvido o problema DWM e obtido a solução dual (μ^*, ν^*). A solução dual correspondente $(\pi^* = (\mu^*.A - c), \mu^*, \nu^*)$ para ME leva a um vetor de custos reduzidos $\bar{c} = 0$. Isso implica que nenhuma variável x pode ser eliminada.

Corolário 3.2 *Resolver o problema DWM equivale a resolver o problema ME com o espaço dual restrito por $\bar{c} = c - \mu.A + \pi = 0$.*

3.3.2
Geração múltipla de colunas

Considere novamente o problema de programação linear inteira IP definido na seção 3.2. Suponha que o conjunto de restrições $D.x \leq d$ pode ser particionado em k subconjuntos $D_i.x \leq d_i$, $i = 1, \ldots, k$. Suponha ainda que esses subconjuntos, ao contrário de quando considerados em separado, não apresentam-se bem estruturados quando considerados em conjunto. Assim, o problema pode ser reescrito como:

$$IP = \begin{cases} Z_{IP} = \min c.x \\ \text{sujeito a} \\ \quad \begin{array}{rcl} A.x & = & b \\ D_1.x & \leq & d_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_k.x & \leq & d_k \\ x & \in & \mathbb{Z}^n_+ \, . \end{array} \end{cases}$$

Definindo-se apropriadamente matrizes Q_i correspondentes aos elementos de $\{x \in \mathbb{Z}^n_+ \mid D_i.x \leq d_i\}$, para $i = 1, \ldots, k$, o problema linear mestre explícito ME pode ser visto como um meio conveniente para a geração múltipla de colunas nos subconjuntos Q_i, $i = 1, \ldots, k$, como mostrado a seguir:

$$ME = \left\{ \begin{array}{lllllllll} Z_{ME} = \min c.x \\ \text{sujeito a} \\ Q_1.\lambda_1 & & & & - & x & = & 0 \\ \mathtt{1}.\lambda_1 & & & & & & = & 1 \\ & Q_2.\lambda_2 & & & - & x & = & 0 \\ & \mathtt{1}.\lambda_2 & & & & & = & 1 \\ & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & Q_k.\lambda_k & - & x & = & 0 \\ & & & \mathtt{1}.\lambda_k & & & = & 1 \\ & & & & & A.x & = & b \\ & & & \lambda_i & & & \geq & 0 & i = 1, \ldots, k \\ & & & & & x & \in & \mathbb{R}^n_+ \,. \end{array} \right.$$

Embora um problema equivalente a este problema linear mestre explícito também possa ser obtido utilizando-se a reformulação tradicional de *IP*s descrita na seção 3.2, a decomposição é muito mais complexa.

3.4 Aplicação da Reformulação alternativa de *IP*s

O problema das mochilas (0–1 *Knapsack Problem*) consiste em, dado um conjunto de objetos, cada um associado a um peso e um valor, determinar quais deles devem ser escolhidos de modo que o peso total seja menor que um dado limite e o valor total seja máximo. Embora este problema pertença à classe dos problemas $\mathcal{NP}$-difíceis, geralmente pode ser resolvido de forma eficiente com a utilização da técnica de programação dinâmica nos casos em que os pesos não são fracionários.

Considere uma mochila de capacidade b e um conjunto de n objetos, identificados como $1, 2, \ldots, n$, cada um com peso de $a_j \in \mathbb{Z}^+$ unidades e com valor c_j. Definindo-se que x_j é uma variável binária que indica se o objeto j foi colocado na mochila ($x_j = 1$) ou não ($x_j = 0$), o problema é formulado como:

$$\text{Knap} \left\{ \begin{array}{lll} \text{Max} & z = & c.x \\ \text{sujeito a} \\ \quad A.x & \leq & b \\ \quad\quad x & \in & \{0,1\}^n \end{array} \right.$$

O problema das mochilas multidimensionais *MdKP* (0–1 *Multidimen-*

sional Knapsack Problem) é uma generalização do problema das mochilas definido anteriormente. Considere que dada uma mochila de m dimensões, cada uma de capacidade b_i, a matriz A, de dimensão $m \times n$, representa o peso dos n objetos para cada uma das m dimensões da mochila. O objetivo é encontrar um subconjunto dos n objetos cujo valor total seja máximo e cujo peso total respeite o limite de cada uma das dimensões da mochila. Novamente definindo-se que x_j é uma variável binária para indicar a escolha ou não do objeto j, então o problema é formulado como:

$$\text{MdKP}\begin{cases} \text{Max} \quad z \ = \ c.x \\ \text{sujeito a} \\ \quad A_i.x \ \leq \ b_i \qquad i \ = \ 1, \ldots, m \\ \qquad x \ \in \ \{0,1\}^n \end{cases}$$

O problema *MdKP* pode ser reformulado para se obter um problema linear na versão mestre explícita. Inicialmente, ao se introduzir em *MdKP* variáveis adicionais definidas como $x' = x$, obtém-se a seguinte formulação equivalente:

$$\text{MdKP'}\begin{cases} \text{Max} \quad z \ = \ c.x \\ \text{sujeito a} \\ \quad x'_i \ - \qquad x \ = \ 0 \qquad i \ = \ 1, \ldots, m \\ \qquad\qquad A_i.x \ \leq \ b_i \qquad i \ = \ 1, \ldots, m \\ \quad x'_i \qquad\qquad \in \ \{0,1\}^n \quad i \ = \ 1, \ldots, m \\ \qquad\qquad\quad x \ \in \ \{0,1\}^n \end{cases}$$

Suponha agora que $\mathcal{Q}_i = \{x \in \{0,1\}^n \,|\, A_i x \ \leq \ b_i\}$ é um conjunto finito com p_i elementos, os quais são representados pelas colunas de uma matriz Q_i de dimensão $n \times p_i$, para $i \ = \ 1, \ldots, m$. Assim, para cada conjunto $\mathcal{Q}_i$, $i \ = \ 1, \ldots, m$, existe um único vetor λ_i que satisfaz a relação $\mathcal{X}_i$ definida a seguir:

$$\mathcal{X}_i \ = \ \begin{cases} x = Q_i.\lambda_i \\ \text{sujeito a} \\ \quad \mathtt{1}.\lambda_i \ = \ 1 \\ \qquad \lambda_i \ \in \ \{0,1\}^n \,. \end{cases}$$

Substituindo-se as variáveis adicionais x'_i por suas expressões equivalentes $Q_i.\lambda_i$, dadas por $\mathcal{X}_i$, e relaxando-se as restrições de integralidade, obtém-se o seguinte problema linear mestre explícito:

$$
\text{ME-MdKP}\left\{
\begin{array}{lllllllll}
\text{Max } z = c.x & & & & & & & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & & \\
Q_1.\lambda_1 & & & & - & x & = & 0 & \\
1.\lambda_1 & & & & & & = & 1 & \\
 & Q_2.\lambda_2 & & & - & x & = & 0 & \\
 & 1.\lambda_2 & & & & & = & 1 & \\
 & & \ddots & & & & & \vdots & \\
 & & & Q_m.\lambda_m & - & x & = & 0 & \\
 & & & 1.\lambda_m & & & = & 1 & \\
 & & & \lambda_i & & & \geq & 0 & i = 1,\ldots,m \\
 & & & & & x & \in & \mathbb{R}^n_+ &
\end{array}
\right.
$$

Observe que as matrizes Q_i podem ser definidas de modo a representar os elementos que satisfazem mais de uma restrição ao mesmo tempo. Este conceito será exemplificado com uma instância com $m = 10$ e $n = 6$ (instância 01 da tabela 3.1), cuja formulação *MdKP* é apresentada a seguir:

$$
\text{MdKP}\left\{
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrl}
\multicolumn{15}{l}{\text{Max } z = 100.x_1 + 600x_2 + 1200.x_3 + 2400.x_4 + 500.x_5 + 2000.x_6} \\
\multicolumn{15}{l}{\text{sujeito a}} \\
8.x_1 & + & 12.x_2 & + & 13.x_3 & + & 64.x_4 & + & 22.x_5 & + & 41.x_6 & \leq & 80 & & (1) \\
8.x_1 & + & 12.x_2 & + & 13.x_3 & + & 75.x_4 & + & 22.x_5 & + & 41.x_6 & \leq & 96 & & (2) \\
3.x_1 & + & 6.x_2 & + & 4.x_3 & + & 18.x_4 & + & 6.x_5 & + & 4.x_6 & \leq & 20 & & (3) \\
5.x_1 & + & 10.x_2 & + & 8.x_3 & + & 32.x_4 & + & 6.x_5 & + & 12.x_6 & \leq & 36 & & (4) \\
5.x_1 & + & 13.x_2 & + & 8.x_3 & + & 42.x_4 & + & 6.x_5 & + & 20.x_6 & \leq & 44 & & (5) \\
5.x_1 & + & 13.x_2 & + & 8.x_3 & + & 48.x_4 & + & 6.x_5 & + & 20.x_6 & \leq & 48 & & (6) \\
 & + & & + & & + & & + & 8.x_5 & + & & \leq & 10 & & (7) \\
3.x_1 & + & & + & 4.x_3 & + & & + & 8.x_5 & + & & \leq & 18 & & (8) \\
3.x_1 & + & 2.x_2 & + & 4.x_3 & + & & + & 8.x_5 & + & 4.x_6 & \leq & 22 & & (9) \\
3.x_1 & + & 2.x_2 & + & 4.x_3 & + & 8.x_4 & + & 8.x_5 & + & 4.x_6 & \leq & 24 & & (10) \\
 & & & & & & & & & & x_1,\ldots,x_6 & \in & \{0,1\} & &
\end{array}
\right.
$$

Considere, por exemplo, que $\mathcal{Q}_1 = \{x \in \{0,1\}^n | 8.x_1+12.x_2+13.x_3+64.x_4+22.x_5+41.x_6 \leq 80$ e $8.x_1+12.x_2+13.x_3+75.x_4+22.x_5+41.x_6 \leq 96\}$ é um conjunto finito com p_1 elementos, os quais são representados pelas colunas de uma matriz Q_1 de dimensão $6 \times p_1$. Existe um único vetor λ_1, para cada elemento de $\mathcal{Q}_1$, que satisfaz uma relação $\mathcal{X}_1$ como definida anteriormente. Assim, definindo-se que a matriz Q_i representa os elementos que satisfazem as restrições $(2.i-1)$ e $(2.i)$, para $i = 1,\ldots,5$, de *MdKP*, o problema linear mestre explícito *ME-MdKP* é formulado como:

$$
\text{ME-MdKP}\left\{
\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{\text{Max } z = c.x} \\
\multicolumn{8}{l}{\text{sujeito a}} \\
 & Q_1.\lambda_1 & & - & \sum_{i=1}^{6} x_i & = & 0 & \\
 & \mathtt{1}.\lambda_1 & & & & = & 1 & \\
 & & \ddots & & & & \vdots & \\
 & & Q_5.\lambda_5 & - & \sum_{i=1}^{6} x_i & = & 0 & \\
 & & \mathtt{1}.\lambda_5 & & & = & 1 & \\
 & & \lambda_i & & & \geq & 0 & i = 1,\ldots,5 \\
 & & & & x_i & \in & \mathbb{R}_+^n & i = 1,\ldots,5
\end{array}
\right.
$$

A formulação linear mestre explícita foi resolvida para algumas instâncias da literatura e os resultados são mostrados na tabela 3.1. No bloco de colunas rotuladas como "m/2 mochilas" são mostrados os resultados para o caso em que a matriz Q_i representa os elementos que satisfazem as restrições $(2.i-1)$ e $(2.i)$, para $i = 1,\ldots,5$. Nas colunas rotuladas "m-1 mochilas" são mostrados os resultados para o caso em que Q_i representa os elementos que satisfazem as restrições (i) e $(i+1)$, para $i = 1,\ldots,9$.

A coluna Z_{lp} mostra o valor da solução da relaxação linear da formulação *MdKP* e Z^* mostra o valor da solução ótima para essa formulação. $ES1$ e $ES2$ são as estimativas obtidas para as duas versões do *ME-MdKP* descritas anteriormente e $Col1$ e $Col2$ são o número de colunas geradas. As colunas t_{Z^*}, $t1$ e $t2$ mostram o tempo de *CPU* gasto na obtenção desses resultados. As 7 primeiras instâncias listadas nesta tabela são de uma classe chamada *mknap1* e foram propostas em [92]. As demais instâncias pertencem à classe *mknap2*, a qual contém uma coleção de 48 instâncias de diferentes fontes: SENTO* de [99], WEING* de [114], WEISH* de [100] e PB* e HP* de [47]. Estas instâncias estão disponíveis na *OR-Library* (endereço `http://mscmga.ms.ic.ac.uk/info.html`) [18].

Embora os resultados obtidos mostrem que os tempos de *CPU* são bem maiores com a utilização da formulação *ME-MdKP*, as estimativas obtidas com essa formulação são consistentemente melhores que as obtidas simplesmente resolvendo a relaxação linear do problema *MdKP*.

Tabela 3.1: *MdKP* – Limites superiores para as classes *mknap1* e *mknap2*.

						↪ m/2 mochilas ↩			↪ m-1 mochilas ↩		
instância	m	n	Z_{lp}	Z^*	t_{Z^*}	ES1	Col1	t1	ES2	Col2	t2
01	10	6	4134,07	3800,00	0	3800,05	44	0,094	3800,05	84	0,266
03	10	15	4127,89	4015,00	0,016	4052,54	317	1,297	4052,54	627	3,875
04	10	20	6155,33	6120,00	0	6120,13	465	1,922	6120,04	1049	12,250
05	10	28	12462,10	12400,00	0	12417,93	1033	8,672	12417,91	2712	865,906
06	5	39	10672,35	10618,00	0,016	10638,53	630	7,813	10637,43	1420	31,734
07	5	50	16612,82	16537,00	0,016	16565,08	867	13,938	16555,58	1985	74,203
SENTO1	30	60	7839,28	7772,00	0,047	7811,94	7403	1694,422	7804,47	13694	6858,016
SENTO2	30	60	8773,20	8722,00	0,141	8754,72	10782	4257,703	8750,48	20678	17655,875
WEING1	2	28	142019,00	141278,00	0,000	141278,73	109	0,281	141278,73	109	0,313
WEING2	2	28	131637,48	130883,00	0,000	130883,86	72	0,406	130883,86	72	0,406
WEING3	2	28	99647,08	95677,00	0,016	95678,17	34	0,188	95678,17	34	0,203
WEING4	2	28	122505,25	119337,00	0,000	119337,84	91	0,734	119337,84	91	0,781
WEING5	2	28	100433,15	98796,00	0,000	98797,17	35	0,109	98797,17	35	0,109
WEING6	2	28	131335,00	130623,00	0,016	130623,45	63	0,109	130623,45	63	0,125
WEING7	2	105	1095721,20	1095352,00	0,016	1095446,44	1285	13409,984	1095446,44	1332	29712,859
WEING8	2	105	628773,68	624319,00	0,000	624340,41	378	1136,875	624340,41	378	1160,281
WEISH01	5	30	4632,27	4554,00	0,016	4583,53	348	2,875	4568,65	448	5,438
WEISH02	5	30	4592,70	4536,00	0,000	4539,02	396	5,094	4539,02	655	9,938
WEISH03	5	30	4177,79	4115,00	0,016	4124,74	349	2,531	4115,03	438	7,172
WEISH04	5	30	4611,01	4561,00	0,000	4561,02	297	1,531	4561,01	489	4,203
WEISH05	5	30	4530,78	4514,00	0,000	4514,09	318	0,938	4514,01	300	3,000
WEISH06	5	40	5585,20	5557,00	0,016	5557,7	599	5,000	5557,7	911	9,938
WEISH07	5	40	5601,86	5567,00	0,000	5568,53	517	6,641	5567,02	1000	21,813
WEISH08	5	40	5631,65	5605,00	0,016	5605,03	561	5,266	5605,03	1514	39,422
WEISH09	5	40	5254,86	5246,00	0,000	5246,03	404	1,547	5246,02	568	5,156
WEISH10	5	50	6441,20	6339,00	0,016	6357,06	727	3,891	6339,04	972	14,547
WEISH11	5	50	5688,17	5643,00	0,000	5643,05	636	2,328	5643,04	904	11,641

continua na próxima página

Tabela 3.1: *MdKP* – Limites inferiores (continuação)

						↪ m/2 mochilas ↩			↪ m-1 mochilas ↩		
instância	m	n	Z_{lp}	Z^*	t_{Z^*}	ES1	Col1	t1	ES2	Col2	t2
WEISH12	5	50	6404,02	6339,00	0,000	6340,91	676	2,938	6339,04	1052	21,125
WEISH13	5	50	6241,06	6159,00	0,016	6165,86	648	3,906	6159,04	898	14,813
WEISH14	5	60	7018,32	6954,00	0,000	6954,06	814	3,641	6954,04	1031	14,672
WEISH15	5	60	7518,26	7486,00	0,000	7491,14	1476	26,531	7491,03	1870	50,203
WEISH16	5	60	7314,02	7289,00	0,000	7289,24	1327	13,125	7289,03	1524	25,172
WEISH17	5	60	8656,58	8633,00	0,000	8633,03	1363	18,688	8633,03	2553	78,531
WEISH18	5	70	9603,72	9580,00	0,016	9580,01	1204	57,766	9580,01	2503	170,297
WEISH19	5	70	7756,98	7698,00	0,016	7716,08	1085	8,297	7698,05	1787	92,281
WEISH20	5	70	9477,87	9450,00	0,000	9450,05	1636	51,094	9450,03	2203	97,891
WEISH21	5	70	9110,50	9074,00	0,016	9074,18	1449	19,500	9074,04	1883	45,219
WEISH22	5	80	9004,18	8947,00	0,016	8959,48	1498	15,188	8947,02	1693	75,672
WEISH23	5	80	8392,07	8344,00	0,016	8352,42	1281	16,188	8344,05	2112	167,969
WEISH24	5	80	10232,82	10220,00	0,000	10220,06	1710	118,000	10220,05	4831	1009,406
WEISH25	5	80	9964,73	9939,00	0,016	9939,2	2429	138,891	9939,04	2883	220,672
WEISH26	5	90	9641,57	9584,00	0,016	9591,84	2336	44,313	9584,05	2125	94,031
WEISH27	5	90	9849,67	9819,00	0,000	9819,31	2156	35,250	9819,05	3044	384,422
WEISH28	5	90	9514,18	9492,00	0,000	9492,08	1622	21,313	9492,05	2188	93,609
WEISH29	5	90	9429,03	9410,00	0,000	9410,63	2350	41,953	9410,05	2199	84,750
WEISH30	5	90	11194,69	11191,00	0,000	11191	2715	114,219	11191	3897	286,578
PB1	4	27	3144,35	3090,00	0,016	3100,01	171	1,641	3099,93	367	3,953
PB2	4	34	3261,29	3186,00	0,016	3207,56	282	4,016	3201,45	477	7,016
PB4	2	29	99622,68	95168,00	0,000	95169,62	60	0,578	95169,62	60	0,578
PB5	10	20	2221,28	2139,00	0,047	2201,05	409	13,625	2200,42	687	36,000
PB6	30	40	843,28	776,00	0,047	815,86	2978	140,922	808,45	4616	393.797
PB7	30	37	1086,20	1035,00	0,109	1067,68	3329	173,203	1063,45	6179	741,797
HP1	4	28	3472,35	3418,00	0,000	3428,33	201	2,031	3428,28	367	3,875
HP2	4	35	3261,82	3186,00	0,016	3207,58	293	4,313	3201,48	513	7,672