3
Modelo Numérico de Análise de antenas Espirais pelo método dos momentos

A antena aqui estudada é uma abertura na forma de espiral em uma cavidade ressonante, de diâmetro *D* e profundidade *L,* colocada em um plano de terra condutor infinito, como mostra a Fig. 3.1. A abertura é excitada por uma fonte de tensão localizada no seu centro. Está fonte de tensão será representada por uma corrente magnética unitária $\vec{M}_{excit}$.

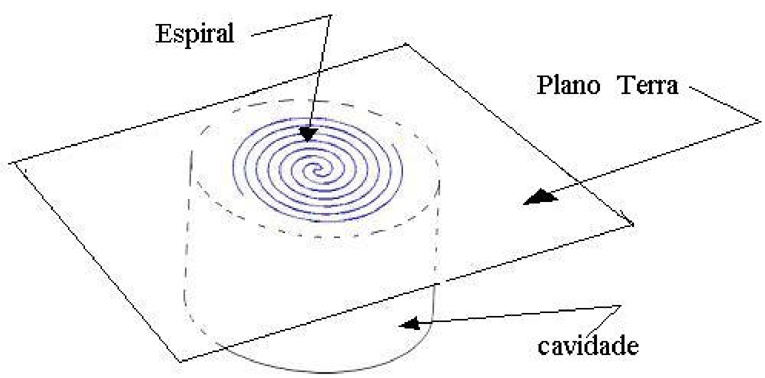

Figura 3.1 - Antena espiral colocada sob uma cavidade cilíndrica

Os campos na abertura da antena, e em conseqüência os campos radiados, serão determinados pelo método dos momentos. Para isso, será aplicado o teorema da equivalência, de forma a dividir o espaço em duas regiões, como mostrado na Fig 3.2.

A região I é formada por um plano condutor perfeito, com uma corrente magnética $\vec{M}$ em sua superfície e a região II é constituída por uma cavidade ressonante cilíndrica excitada por uma corrente magnética $-\vec{M}$.

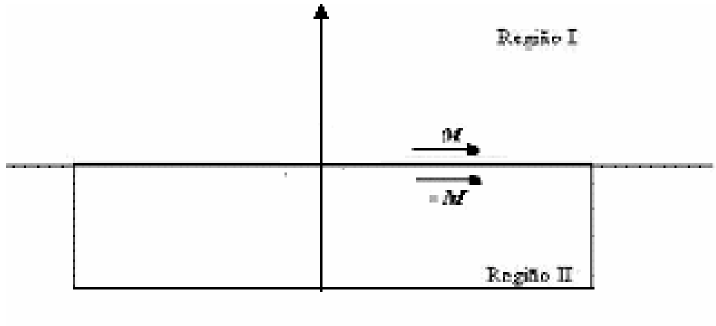

Figura 3.2 - Vista em perspectiva do conjunto antena/cavidade

A corrente magnética $\vec{M}$ é dada por:

$$\vec{M} = \vec{E}_{abertura} \times \vec{a}_z \qquad (3.1)$$

onde $\vec{a}_z$ é o vetor unitário na direção z, e $\vec{E}_{abertura}$ é campo elétrico na abertura da antena, a ser determinado. O eixo dos z é perpendicular ao plano da abertura, e passa pelo seu centro.

As condições de contorno na abertura da antena impõem que:

$$\vec{a}_z \times \left\{\vec{H}_{ext}(\vec{M}) + \vec{H}_{ext}(\vec{M}_{excit})\right\} = \vec{a}_z \times \left\{\vec{H}_{\text{int}}(-\vec{M}) + \vec{H}_{\text{int}}(-\vec{M}_{excit})\right\} \qquad (3.2)$$

onde

$\vec{H}_{ext}(\vec{M})$ é o campo magnético devido à corrente $\vec{M}$, na região I, e

$\vec{H}_{int}(\vec{M})$ é o campo magnético devido à corrente $\vec{M}$, na região II

A partir de (3.2), a corrente magnética $\vec{M}$ será determinada pelo Método dos Momentos.

Expandindo-se $\vec{M}$ em funções de base tem-se

$$\vec{M} = \sum_{j=1}^{I} \alpha_j \vec{M}_j \tag{3.3}$$

onde $\vec{M}_j$ são as funções de base e α_j coeficientes a serem determinados. As funções de base a serem utilizadas no presente trabalho serão descritas no item 3.4

Substituindo-se em (3.3) em (3.2) tem-se;

$$\sum_{j=1}^{I} \alpha_j \left\{\vec{a}_z \times \vec{H}_{ext}(\vec{M}_j)\right\} + \sum_{j=1}^{I} \alpha_j \left\{\vec{a}_z \times \vec{H}_{\text{int}}(\vec{M}_j)\right\} = -\vec{H}_{ext}(\vec{M}_{excit.}) \times \vec{a}_z - \vec{H}_{\text{int}}(\vec{M}_{exct.}) \times \vec{a}_z \tag{3.4}$$

Aplicando-se o método de Galerkin (funções de teste dadas por $\vec{W}_i = \vec{a}_z \times \vec{M}_i$), resulta:

$$\sum_{j=1}^{I} \alpha_j \left\{ \int_{si} \vec{M}_i . H_{ext}(\vec{M}_j) ds_i + \int_{si} \vec{M}_i . \vec{H}_{\text{int}}(\vec{M}_j) ds_i \right\} = \\ - \int_{si} \vec{M}_i . \vec{H}_{ext.} . (\vec{M}_{excit}) ds_i - \int_{si} \vec{M}_i . \vec{H}_{\text{int}} . (\vec{M}_{excit}) ds_i \tag{3.5}$$

i = 1,2.....I

Sendo as integrais efetuadas sobre o domínio das funções de teste $\vec{M}_i$.

O sistema de equações lineares (3.5) pode ser colocado na forma matricial:

$$[A][\alpha] = [A_{excit}] \tag{3.6}$$

onde o vetor coluna $[\alpha]$ contém os coeficientes α_j, Os elementos do vetor coluna $[A_{excit}]$ são dados por:

$$A_{j\,excit.} = -\int_{si} \vec{M}_i . \vec{H}_{ext}(\vec{M}_{excit})ds_i - \int_{si} \vec{M}_i . \vec{H}_{int} .(\vec{M}_{excit})ds_i \tag{3.7}$$

e os elementos da matriz quadrada $[A]$ são dados por

$$A_{ij} = A_{ij\,ext.} + A_{ij\,\mathrm{int}} \tag{3.8}$$

Sendo

$$A_{ij\,ext.} = \int_{si} \vec{M}_i . \vec{H}_{ext}(\vec{M}_j)ds_i \tag{3.9}$$

e

$$A_{ij\,int} = \int_{si} \vec{M} . \vec{H}_{int} .(\vec{M}_j)ds_i \tag{3.10}$$

O desenvolvimento das expressões de $A_{ij\,ext.}$ e $A_{ij\,int}$ de modo a colocá-las em uma forma adequada à computação numérica, são apresentado nos próximos itens.

3.1. O cálculo de $A_{ij\ ext.}$

Para o cômputo de $A_{ij\ ext.}$, dado por (3.9). é necessário, inicialmente, obter-se a expressão de $\vec{H}_{ext}(\vec{M}_j)$, o que pode ser feito aplicando-se a teoria das imagens, potencial vetor e função de Green escalar para o espaço livre. Resulta[12]

$$\vec{H}(\vec{M}_j) = \frac{-j\omega\varepsilon}{2\pi}\int \vec{M}_j G ds'_j \quad + \quad \frac{1}{2j\pi\omega\mu}\nabla\int \nabla'.\vec{M} G ds'_j \qquad (3.11)$$

onde ε e μ são a permissividade e a permeabilidade do espaço livre, respectivamente, e

$$G = \frac{e^{-jkR}}{R} \qquad (3.12)$$

sendo k o número de onda para o espaço livre e R a distância da fonte ao ponto de observação, dada por

$$R = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} \qquad (3.13)$$

onde x, y são as coordenadas do ponto de observação x', y' e são as coordenadas da fonte. As integrações indicadas são efetuadas sobre as coordenadas da fonte.

Substituindo-se (3.11) em (3.9) tem-se :

$$A_{ij\ ext.} = \frac{-j\omega\varepsilon}{2\pi} A^{(1)}_{ij\ ext.} + \frac{1}{2\pi j\omega\mu} A^{(2)}_{ij\ ext.} \qquad (3.14)$$

onde

$$A^{(1)}_{ij\ ext.} = \int_{si} \vec{M}_i . \left\{ \int_{sj} \vec{M}_j G.ds'_j \right\} ds_i \qquad (3.15)$$

$$A^{(2)}_{ij\,ext.} = \int_{si} \vec{M}_i . \left\{ \nabla \int_{sj} \nabla' . \vec{M}_j G . ds'_j \right\} ds_i \tag{3.16}$$

Para a determinação numérica de (3.15) e (3.16), será admitido que $\vec{H}(\vec{M}_j)$ assume valores razoavelmente constantes sobre o domínio de $\vec{M}_i$. Assim, tem-se para (3.15):

$$A^{(1)}_{ij\,ext.} = \int_{si} \vec{M}_i ds_i . \int_{sj} \vec{M}_i G ds'_j \tag{3.17}$$

sendo o ponto de observação, para a integração em s_j, o centro do domínio de $\vec{M}_i$.

Para as integrações em (3.16), será aplicada integração por partes na integral em s_i, objetivando-se, com isso, eliminar as derivadas da integral em s_j, contidas no gradiente daquela integral. Resulta, após alguma manipulação algébrica:

$$\begin{aligned} A^{(2)}_{ij\,ext.} = \Bigg\{ & \int_{y_1}^{y_2} \Big\lceil M_{ix} GM(\vec{M}_j) \Big\rceil_{x=x_l(y)}^{x=x_d(y)} dy_i - \int_{si} \frac{\partial M_{ix}}{\partial x} GM(\vec{M}_j) ds_i \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \Big\lceil M_{iy} GM(\vec{M}_j) \Big\rceil_{y=y_i(x)}^{y=y_s(x)} dx_i - \int_{si} \frac{\partial M_{iy}}{\partial y} GM(\vec{M}_j) ds_i \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $\lceil F \rceil_{x=x_1}^{x=x_2}$ significa valor da função F para $x = x_2$ menos o valor de F para $x = x_1$, y_2, y_1, x_2, x_1 são os valores máximo e mínimo de y e x, respectivamente, no domínio da integração, $x_d(y)$ e $x_e(y)$ são as funções de y que definem os limites direito e esquerdo da região de integração, $y_s(x)$ e $y_i(x)$ são as funções de x que definem os limites superior e inferior da região de integração e

$$GM(\vec{M}_j) = \int_{s_j} \nabla' . \vec{M}_j G ds'_j \tag{3.19}$$

Os integrandos das integrais em s_j, em (3.17) e em (3.18), tornam-se singulares quando o ponto de observação está no domínio da integração, pois como se verifica em (3.12) e (3.13), quando $x \to x'$ e $y \to y'$, $R \to 0$ e $G \to \infty$. O tratamento numérico dessas singularidades está no apêndice B. Os detalhes da dedução de (3.18), particularizada para as funções de base a serem definidas no item 3.4, estão no apêndice C.

3.2. O cálculo de $A_{ij\,\mathrm{int}}$.

$A_{ij\,\mathrm{int}}$ é dado por (3.10). Para sua determinação basta calcular-se $\vec{H}_{int}(\vec{M}_j)$, o que será feito a seguir.

Os campos no interior da cavidade serão calculados pela utilização da Diádica de Green , ou seja,

$$\vec{H}_{int}(\vec{M}_j) = \int \overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}').\vec{M}_j ds'_j \qquad (3.20).$$

onde $\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}')$ é a diádica de Green da cavidade e $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ são os vetores posição do ponto de observação e da fonte, respectivamente.

Duas situações serão consideradas: a cavidade terminada por um condutor perfeito ou por uma estrutura de microondas com matriz de espalhamento conhecida. na Fig. 3.3 (a) e (b).

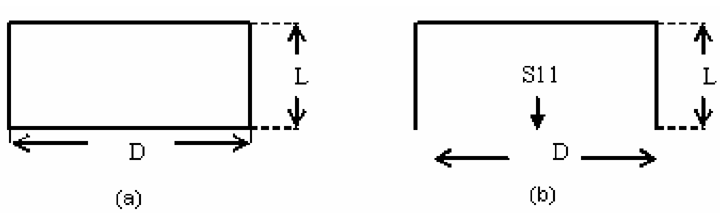

Figura 3.3 – Perfil da Cavidade, (a) terminada por condutor perfeito, (b) terminada por estrutura de microondas

3.2.1. Campo Magnético em cavidade terminada por condutor perfeito

Nesse caso a diádica de Green é dada por:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{G}}(\vec r,\vec r\,') = &\sum_n \left[\frac{\vec h_n^{>}(\vec r)\vec h_n^{<}(\vec r\,')}{2Y_n} u(z-z') + \frac{\vec h_n^{<}(\vec r)\vec h_n^{>}(\vec r\,')}{2Y_n} u(z'-z) \right] \\ &+ \sum_n \frac{e^{-\Gamma_n L}\vec h_n^{>}(\vec r)\vec h_n^{<}(\vec r\,') - e^{-\Gamma_n L}\vec h_n^{>}(\vec r)\vec h_n^{>}(\vec r\,')}{2Y_n(e^{\Gamma_n L}-e^{-\Gamma_n L})} \\ &+ \sum_n \frac{e^{-\Gamma_n L}\vec h_n^{<}(\vec r)\vec h_n^{<}(\vec r\,') - e^{-\Gamma_n L}\vec h_n^{<}(\vec r)\vec h_n^{>}(\vec r\,')}{2Y_n(e^{\Gamma_n L}-e^{-\Gamma_n L})} - \frac{\delta(\vec r-\vec r\,')}{j\omega\mu}\vec a_z\vec a_z\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde o somatório é efetuado sobre os modos do guia que constitui a cavidade, $\vec h_n^{>}$ e $\vec h_n^{<}$ são os campos modais do modo n, para propagação nas direções positiva e negativa do eixo dos z, respectivamente, *u(z)* é o degrau unitário de Heaviside, Γ_n é a constante de propagação do modo n, $\delta(z)$ é o impulso de Dirac e

$Y_n = \int \vec e_n^{>} \times \vec h_n^{<} . ds'$, sendo a integração efetuada sobre a seção transversal do guia, e $\vec e_n^{>}$ é o campo elétrico modal do modo *n*, para propagação na direção positiva do eixo dos z.

A dedução da expressão da diádica de Green está no apêndice A.

Para o caso particular da corrente $\vec M_j$, a expressão da componente transversal do campo magnético, em um ponto com z=0, $\vec H^T(\vec M_j)$, assume a forma:

$$\vec H^T(\vec M_j) = -\sum_n \frac{1}{Y_n} \vec h_n^T(\vec r) \frac{\left(1+e^{-2\Gamma_n L}\right)}{\left(1-e^{-2\Gamma_n L}\right)} \int \vec h_n^T(\vec r\,').\vec M_j ds_j' \tag{3.22}$$

onde $\vec h_n^T(\vec r)$ é a componente transversal do campo magnético, para o modo n, propagando-se na direção positiva do eixo z.

3.2.2. Campo em Cavidade terminada por estrutura de microondas

O perfil da cavidade é o mostrado na Fig. 3.3b. A expressão diádica de Green é deduzida no apêndice A, e é repetida abaixo:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}\,') &= \sum_n \left[\frac{\vec{h}_n^{>}(\vec{r})\vec{h}_n^{<}(\vec{r}\,')}{2Y_n} u(z-z') + \frac{\vec{h}_n^{<}(\vec{r})\vec{h}_n^{>}(\vec{r}\,')}{2Y_n} u(z'-z) \right] \\ &+ \sum_n \frac{\vec{h}_n^{>}(\vec{r})\vec{\alpha}_n(\vec{r}\,')}{2Y_n} + \sum_n \frac{\vec{h}_n^{<}(\vec{r})\vec{\gamma}_n(\vec{r}\,')}{2Y_n} - \frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}{j\omega\mu}\vec{a}_z\vec{a}_z\end{aligned} \quad (3.23)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0210398/CA

onde os vetores $\vec{\alpha}_n(\vec{r}\,')$ e $\vec{\gamma}_n(\vec{r}\,')$ são dados pela n-gésima coluna das martrizes $[\alpha]$ e $[\gamma]$, abaixo (observe-se que cada elemento de $[\alpha]$ e $[\gamma]$ é um vetor):

$$[\gamma] = -[[I]+[ST]]^{-1}[[H^{>}]+[ST][H^{<}]] \quad (3.24)$$

$$[\alpha] = -[\gamma] - [H^{<}] \quad (3.25)$$

sendo $[I]$ a matriz de identidade, $[ST]$ uma matriz quadrada, com elementos dados por :

$$ST_{ij} = \frac{Y_i}{Y_j} e^{-(\Gamma_i+\Gamma_j)L} s11_{ij}$$

e cada elemento dos vetores $[H^{>}]$ e $[H^{<}]$ são os vetores $\vec{h}_n^{>}(\vec{r}\,')$ e $\vec{h}_n^{<}(\vec{r}\,')$, respectivamente.

3.3.
As Funções de Base

A abertura da antena será aproximada por uma seqüência de quadriláteros, conforme mostrado figura 3.4 . As funções de base serão definidas com um domínio correspondente a cada um dos quadriláteros, e escolhidas de forma a satisfazer a continuidade da componente tangencial do campo elétrico da aresta de separação entre dois quadriláteros vizinhos. Associadas a cada quadrilátero haverá duas funções de base: cada uma delas será tangente e com valor unitário sobre uma das arestas de separação entre quadriláteros, e se anulará na outra aresta.

Para se obter as funções que satisfaçam os requisitos acima, será aplicada uma transformação conforme, a partir de um quadrado de lado unitário, como mostrado na fig. 3.5

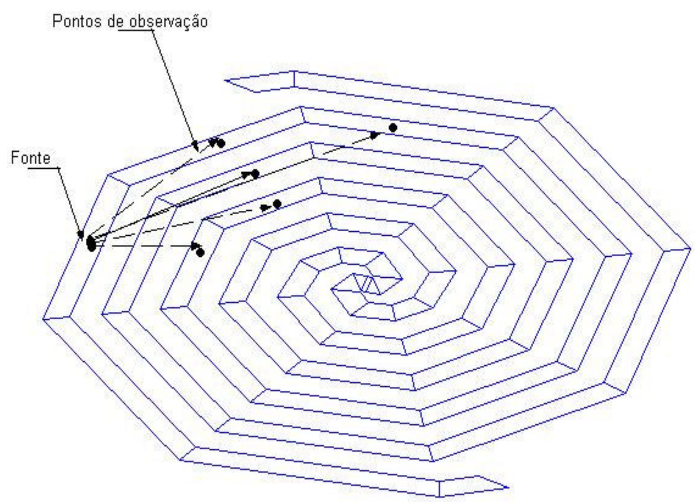

Figura 3.4 – Aproximação da abertura espiral por quadriláteros

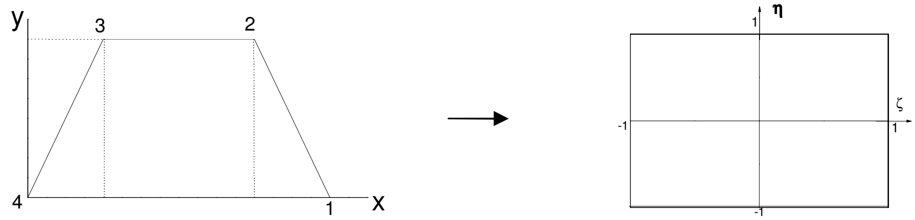

Figura 3.5 – Transformação Conforme do quadrilátero, domínio da função de base, para quadrado de lado unitário. Os vértices do quadrilátero estão numerados por 1,2,3 e 4

As coordenadas x e y do sistema cartesiano associado ao quadrilátero, como mostrado na Fig. 3.5, estão relacionadas com as coordenadas ξ e η do quadrado por:

$$x = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta \tag{3.25a}$$

$$y = a' + b'\xi + c'\eta + d'\xi\eta \tag{3.25b}$$

Os coeficientes a, b, c, d, a', b', c', d' são obtidos aplicando-se (3.25) aos vértices do quadrilátero. Ou seja:

$$\begin{cases} x_1 = a + b - c - d \\ x_2 = a + b + c + d \\ x_3 = a - b + c - d \\ x_4 = a - b - c + d \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\begin{cases} y_1 = a' + b' - c' - d' \\ y_2 = a' + b' + c' + d' \\ y_3 = a' - b' + c' - d' \\ y_4 = a' - b' - c' + d' \end{cases} \tag{3.27}$$

Onde (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) são as coordenadas x e y dos vértices 1 2 3 e 4, respectivamente, do quadrilátero. Esses vértices estão indicados na Fig. 3.5.

Resolvendo-se os sistemas de equações (3.9) e (3.10), e levando-se em conta que $y_1 = y_4 = 0$ e $y_2 = y_3$, obtém-se:

$$a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \tag{3.28a}$$

$$b = \frac{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{4} \tag{3.28b}$$

$$c = \frac{-x_1 + x_2 + x_3 - x_4}{4} \tag{3.28c}$$

$$d = \frac{-x_1 + x_2 - x_3 + x_4}{4} \tag{3.28d}$$

$$a' = c' = \frac{y_2}{2} \tag{3.28e}$$

$$b' = d' = 0 \tag{3.28f}$$

como $b' = d' = 0$, (3.25) assume a forma:

$$x = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta \tag{3.29a}$$

$$y = a' + c'\eta \tag{3.29b}$$

Explicitando-se ξ e η em (3.29), tem-se,

$$\xi = \frac{c'x - cy - c'a + ca'}{c'b + dy - da'} \tag{3.30a}$$

$$\eta = \frac{y - a'}{c'} \tag{3.30b}$$

O vetor unitário na direção η, $\vec{a}_\eta$, é transformado em um vetor tangente às arestas entre os vértices 1 e 2 e entre os vértices 3 e 4, no plano xy, como necessário para garantir a continuidade do campo elétrico nessas arestas. Essa transformação é dada por:

$$\vec{a}_\eta = \frac{\partial \vec{r} / \partial \eta}{\left| \partial \vec{r} / \partial \eta \right|} \tag{3.31}$$

onde $\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y$ é o vetor posição. Substituindo-se, em (3.31) x e y pelas eqs. (3.12a) e (3.12b), tem-se:

$$\vec{a}_\eta = \frac{(c + d\xi)}{\sqrt{(c + d\xi)^2 + c'^2}} \vec{a}_x + \frac{c'}{\sqrt{(c + d\xi)^2 + c'^2}} \vec{a}_y \tag{3.32}$$

A partir desses vetores, constrói-se as duas funções de base, $\vec{M}_j^{(1)}$ e $\vec{M}_j^{(2)}$ associadas a um determinado quadrilátero. Cada uma dessas funções de base se anula sobre a aresta entre os vértices 1 e 2 ou 3 e 4 (A corrente magnética sobre uma aresta é definida por a apenas uma função de base, o que assegura a continuidade da componente transversal do campo elétrico). Como $\vec{M} = \vec{a}_z \times \vec{E}$, tem-se

$$\vec{M}_j^{(1)} = \frac{(1+\xi)c'}{2\sqrt{(c+d)^2 + c'^2}} \vec{a}_x - \frac{(1+\xi)(c+d\xi)}{2\sqrt{(c+d)^2 + c'^2}} \vec{a}_y \tag{3.33a}$$

$$\vec{M}_j^{(2)} = \frac{(1-\xi)c'}{2\sqrt{(c-d)^2 + c'^2}} \vec{a}_x - \frac{(1-\xi)(c+d\xi)}{2\sqrt{(c-d)^2 + c'^2}} \vec{a}_y \tag{3.33b}$$

$\vec{M}_j^{(1)}$ e $\vec{M}_j^{(2)}$ foram construídas a partir de $\vec{a}_z \times \vec{a}_\eta$, impondo-se a condição de valor unitário sobre uma das arestas do quadrilátero e valor nulo na outra (o que é obtido pela introdução do fator $(1 \pm \xi)$