

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Gabriel Araujo Carvalho da Silva**

**Modificação e Validação de Critérios de Fadiga  
Multiaxial para Previsão de Vida Finita**

**Projeto de Graduação**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento  
de Engenharia Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Prof. Marcos Venicius Soares Pereira  
Coorientador: Tiago Lima D'Albuquerque e Castro

Rio de Janeiro

Junho de 2022

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre ter me guiado ao longo de toda minha trajetória de vida e por nunca ter me desamparado.

Agradeço aos meus pais e familiares por terem me fornecido todo o suporte necessário e por estarem comigo em todos os momentos, sendo eles bons ou ruins.

Agradeço à minha namorada por todo o amor, carinho e apoio para continuar sempre correndo atrás dos meus sonhos.

Agradeço aos meus amigos e a todos que me ajudaram de alguma forma a chegar até aqui nessa etapa final.

Agradeço ao meu orientador Marcos Venicius e ao meu coorientador Tiago Castro por toda a sabedoria e, também, por terem aceitado me auxiliar nesse último desafio.

Agradeço a todos os professores e a todos os funcionários da PUC-Rio por contribuírem sempre brilhantemente para a excelência da instituição.

Agradeço à Fundação Cesgranrio por ter financiado minha faculdade. São ações como essa que me fazem acreditar em um mundo melhor.

Àqueles que sonham, vos digo: nunca desistam.

## RESUMO

### **Modificação e Validação de Critérios de Fadiga Multiaxial para Previsão de Vida Finita**

Em projetos de engenharia, é muito comum que componentes mecânicos sejam submetidos a carregamentos que impõem, ao mesmo tempo, um estado de tensão não-trivial e variante no tempo. Para garantir a robustez de projeto, faz-se necessário a aplicação de teoria mais robusta, adequada para a avaliação do comportamento em fadiga para solicitações que não sejam uniaxiais. O presente estudo busca avaliar a capacidade de um critério de fadiga multiaxial desenvolvido por Castro, Pereira e Darwish (Método da Elipse), onde a vida em fadiga de componentes submetidos a condições de carregamento síncronas e senoidais são aplicadas a corpos de prova (CPs) feitos a partir do aço DIN 42CrMo4. A avaliação é feita por meio de comparação com critérios de fadiga multiaxial já existentes na literatura, a saber: Findley (F), Mataka (M), McDiarmid (McD), Susmel & Lazzarin (S&L), Carpinteri & Spagnoli (C&S) e Papadopoulos (P). À exceção de C&S, previamente adaptado pelos próprios autores para que pudesse prever o número de ciclos para falha, o presente estudo realizou as modificações necessárias para que todos os critérios em questão possam prever a vida em fadiga. As previsões de todos os critérios, incluindo as previsões obtidas pelo método da elipse (E), foram comparadas com observações experimentais feitas para ensaios multiaxiais em CPs do aço em questão. A comparação revelou que o critério mais preciso é o de C&S, enquanto o segundo mais preciso é o da E. No entanto, convém mencionar que o critério de C&S apresenta uma tendência levemente não conservadora, uma vez que em alguns casos previu vidas superiores ao que foi observado experimentalmente. Adicionalmente, o critério de C&S apresenta um equacionamento mais trabalhoso, e a aplicação do critério depende de mais etapas. Nesse sentido, o critério da elipse se torna atrativo, uma vez que foi o segundo mais preciso, com tendência levemente conservadora e, de todos, é o critério de mais fácil aplicação, podendo prever a vida através de uma simples varredura numérica. Convém mencionar que o critério apresentou razoável concordância com os resultados experimentais.

**Palavras chaves:** Método da Elipse; fadiga multiaxial; previsão de vida em fadiga finita; índice de erro; carregamentos em fase; eixos virabrequins; aços estruturais.

## **ABSTRACT**

### **Modification and Validation of Multiaxial Fatigue Criteria for Finite Life Prediction**

Mechanical components are very commonly subjected to nontrivial, time-variant stress-states during their operations, and therefore must be designed adequately in order to prevent failures due to fatigue. Given the complex nature of non-uniaxial stress-states, it is important to consider a robust and adequate theoretical approach that will ensure the safety of engineering designs. The present study aims to assess the predictive capability of a new multiaxial fatigue criterion proposed by Castro, Pereira and Darwish, henceforth named Elliptical Method (E), wherein the fatigue lives of specimens subjected to synchronous sinusoidal axial and torsional loadings are evaluated. These specimens are manufactured from DIN 42CrMo4 steel. The assessment is carried out by comparing the predictive capability of the elliptical method (E) with the predictions obtained through other criteria available in the literature, namely Findley (F), Matake (M), McDiarmid (McD), Susmel & Lazzarin (S&L), Carpinteri & Spagnoli (C&S) and Papadopoulos (P). With the exception of the C&S criterion, which has been previously adapted by the authors themselves in order to predict fatigue-life, this study appropriately adapts the other criteria to predict the number of cycles to failure of a certain specimen under a given loading condition. Thus, all the predictions (including the ones obtained through the elliptical method) are compared to experimental observations relative to multiaxial tests carried out with the aforementioned specimens. The comparison reveals that the C&S criterion is the one that presents the most accurate prediction capability, while the elliptical method achieves second place. Yet, the C&S criterion shows some problems: it presents a slightly non-conservative behaviour since some of its fatigue-life predictions appear higher than those observed experimentally. Also, this particular criterion requires the most extensive procedure in order to obtain the number of cycles to failure. On the other hand, although not as precise as the C&S criterion, the elliptical method presents the second most accurate predictive capability, with the advantages of being approximately 24% conservative, as well as being the easiest criterion to apply among all the considered models. This criterion (E) also presents reasonably accurate results when compared to experimental observations.

**Key-words:** Elliptical Method; multiaxial fatigue; finite fatigue-life prediction; error index; loadings in phase; crankshaft; structural steels.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2. MOTIVAÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>3. OBJETIVO .....</b>	<b>11</b>
<b>4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>12</b>
4.1. ÁLGEBRA LINEAR .....	12
4.1.1. Vetor.....	12
4.1.2. Tensor .....	13
4.1.3. Direções, Tensões Principais e Estado Plano de Tensão .....	15
4.1.4. Componentes Hidrostática e Desviadora de Tensão .....	17
4.1.5. Tensão Equivalente de von Mises.....	18
4.2. MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA .....	19
4.2.1. Modos de Carregamento no Regime Linear Elástico .....	20
4.2.2. Análise de Griffith .....	21
4.2.3. Fator de Intensidade de Tensão.....	24
4.2.4. Zona de Perturbação.....	25
4.2.5. Tenacidade à Fratura .....	26
4.2.6. Condição Leak Before Break.....	26
4.3. FADIGA .....	27
4.3.1. Caracterização do Fenômeno .....	27
4.3.2. Efeito da Tensão Média.....	37
4.3.3. Previsão de Vida à Fadiga (Uniaxial) .....	40
4.3.4. Dano cumulativo.....	41
4.4. FADIGA MULTIAXIAL.....	42
4.4.1. Introdução aos Critérios de Fadiga Multiaxial de Alto Ciclo.....	43
4.4.2. Conceitos de Planos Críticos .....	44
4.4.3. Determinação de Planos Críticos .....	48
4.5. DESCRIÇÃO DOS CRITÉRIOS DE FADIGA MULTIAXIAL .....	50
4.5.1. Modelo de Findley .....	50
4.5.2. Modelos de Matake, McDiarmid e Susmel & Lazzarin .....	51
4.5.3. Modelo de Carpinteri & Spagnoli.....	53

4.5.4. Modelo de Papadopoulos.....	54
<b>5. MATERIAIS E MÉTODOS .....</b>	<b>54</b>
5.1. COMPOSIÇÃO QUÍMICA E PROPRIEDADES MECÂNICAS .....	56
5.2. MÁQUINAS UTILIZADAS PARA ENSAIOS.....	56
5.3. GEOMETRIA DOS CORPOS DE PROVA.....	58
5.4. HIPÓTESE – MÉTODO DA ELIPSE .....	59
5.5. CONDIÇÕES DE CARREGAMENTO.....	62
5.6. MODIFICAÇÕES DOS CRITÉRIOS PARA PREVISÃO DE <b>N<sub>f</sub></b> .....	65
5.6.1. Modificação para Mataka .....	65
5.6.2. Modificação para Findley.....	66
5.6.3. Modificação para McDiarmid .....	66
5.6.4. Modificação para Susmel & Lazzarin .....	66
5.6.5. Modificação para Papadopoulos .....	66
<b>6. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>66</b>
<b>7. CONCLUSÃO .....</b>	<b>72</b>
<b>8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>73</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE VETOR TRIDIMENSIONAL. ....	12
FIGURA 2 – TENSOR DE TENSÕES DE CAUCHY. (DIETER, 1986).....	13
FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO DE FRATURAS FRÁGIL E DÚCTIL.....	20
FIGURA 4 – MODOS DE CARREGAMENTO. ADAPTADO (H. L. EWALD; R. J. H. WANHILL, 1984).....	21
FIGURA 5 – GRÁFICO DO BALANÇO DE ENERGIA DE GRIFFITH. (CASTRO, 2019) .....	22
FIGURA 6 – TAXAS DE VARIAÇÃO DAS ENERGIAS POTENCIAL E DE SUPERFÍCIE DE GRIFFITH. .....	23
FIGURA 7 – PLACA TRACIONADA COM TRINCA DE CANTO PASSANTE. ADAPTADO (CALLISTER, 2008).....	25
FIGURA 8 - PLACA TRACIONADA COM TRINCA CENTRAL PASSANTE. ADAPTADO (CALLISTER, 2008).....	25
FIGURA 9 – RESTRIÇÕES PARA O LIMITE DA DOMINÂNCIA DE $K_I$ . (CASTRO E MEGGIOLARO, 2009).....	26
FIGURA 10 – LAÇO DE HISTERESE. ADAPTADO (STEPHENS, 2001).....	28
FIGURA 11 – CURVAS S-N SETE LIGAS METÁLICAS. ADAPTADO (CALLISTER, 2008).....	30
FIGURA 12 – CURVA S-N COM ÊNFASE EM $\sigma_{LF}$ PARA LIGA AL 7075-T6. ADAPTADO (CASTRO E MEGGIOLARO, 2009) .....	31
FIGURA 13 – ESQUEMA PARA INICIAÇÃO DE TRINCA POR FADIGA. (CASTRO E MEGGIOLARO, 2009).....	33
FIGURA 14 – CORTE ESQUEMÁTICO DE UMA TRINCA DE FADIGA. ADAPTADO (CASTRO E MEGGIOLARO, 2009) .....	34
FIGURA 15 - INICIAÇÃO DE TRINCA EM INCLUSÃO NA MATRIZ DO MATERIAL DE UM CP DE AÇO AISI 4340. ADAPTADO (DOWLING, 2007).....	34
FIGURA 16 – SUPERFÍCIE DE FRATURA TÍPICA A PARTIR DE TRINCA POR FADIGA. ADAPTADO (MEYERS, 2009) .....	35
FIGURA 17 – MARCAS DE PRAIA E DE RIO A PARTIR DE TRINCA NUCLEADA NA PARTE INTERNA DA PEÇA. (CASTRO E MEGGIOLARO, 2009) .....	35
FIGURA 18 – ESTRIAS DE FADIGA NUMA LIGA DE NI, ONDE A SETA INDICA A DIREÇÃO DE CRESCIMENTO DA TRINCA. ADAPTADO (CASTRO E MEGGIOLARO, 2009).....	36
FIGURA 19 – CURVA $da/dN$ VERSUS $\Delta K$ . ADAPTADO (SCHIJVE, 2008).....	37

FIGURA 20 – CURVA $\sigma a$ VERSUS $N$ PARA DIFERENTES TENSÕES MÉDIAS PARA A LIGA AL 7075-T6. ADAPTADO (CASTRO E MEGGIOLARO, 2009) .....	38
FIGURA 21 – CURVA $\sigma a$ VERSUS $N$ PARA DIFERENTES RAZÕES DE CARREGAMENTO. ADAPTADO (CAMERON, 1996) .....	38
FIGURA 22 – CURVA DE GOODMAN. ....	39
FIGURA 23 – CURVAS DE GOODMAN, GERBER E SODERBERG. ....	40
FIGURA 24 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA PARA ESTIMATIVA DE DANO CUMULATIVO POR PALMGREN-MINER. ADAPTADO (PEREIRA, 2006) .....	42
FIGURA 25 – DESENHO TÉCNICO DE CP DO TIPO AMPULHETA COM DIMENSÕES EM $mm$ . ....	44
FIGURA 26 – CP COM SISTEMA DE COORDENADAS EM UM PONTO DE INTERESSE. ....	44
FIGURA 27 – GRÁFICOS DE CARREGAMENTOS EM FASE (À ESQUERDA) E DESFASADOS (À DIREITA). ....	45
FIGURA 28 – EXEMPLO DE PLANO $\Delta$ DEFINIDO PELO VETOR $n$ QUE É ORIENTADO POR $\psi$ E $\theta$ . ....	46
FIGURA 29 - VETOR $s$ E SUAS COMPONENTES $\sigma n$ E $\tau$ . ....	47
FIGURA 30 – TRAJETÓRIA DESCRITA POR $\tau$ NO PLANO $\Delta$ DEVIDO AOS CARREGAMENTOS CÍCLICOS. ....	47
FIGURA 31 – EXEMPLO DE DADOS DE SAÍDA OBTIDOS POR VARREDURA COM O SOFTWARE MATLAB PARA TRAÇÃO-COMPRESSÃO SIMPLES E $\sigma a = 100 MPa$ . ....	49
FIGURA 32 – EIXO VIRABREQUIM E SEUS SUBCOMPONENTES. (FERREIRA, 2008) .....	55
FIGURA 33 – EIXO VIRABREQUIM ACOPLADO A OUTROS COMPONENTES. ADAPTADO (MAHLE, 2016) .....	55
FIGURA 34 – MÁQUINA INSTRON MODELO 8874. (CASTRO, 2019) .....	57
FIGURA 35 – MÁQUINA MTS MODELO 809. (ARAUJO, 2020) .....	58
FIGURA 36 – GEOMETRIA DO CORPO DE PROVA DO TIPO 1. (CASTRO, 2019) .....	58
FIGURA 37 – GEOMETRIA DO CORPO DE PROVA DO TIPO 2 COM DIMENSÕES EM $mm$ . (ARAUJO, 2020) .....	59
FIGURA 38 – GRÁFICO REFERENTE AOS PARES $(\sigma a, \tau a)$ OBTIDOS PARA $Nf = 37.097$ . (CASTRO, 2019) .....	61
FIGURA 39 – GRÁFICO DA ELIPSE, COM RETAS CRUZANDO PONTOS DE ESTUDO, PARA $Nf=40$ MIL CICLOS. ....	63
FIGURA 40 – GRÁFICO DA ELIPSE, COM RETAS CRUZANDO PONTOS DE ESTUDO, PARA $Nf=200$ MIL CICLOS. ....	64



FIGURA 41 – GRÁFICO DE $N_f$ VERSUS NÚMERO DO ENSAIO EXPERIMENTAL.....	68
FIGURA 42 – PERCENTUAL DE I.E. DENTRO NO INTERVALO [-50%,0%] PARA CADA CRITÉRIO. .....	70

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – COMPOSIÇÃO QUÍMICA DO AÇO DIN 42CrMo4. (CASTRO, 2019) .....	56
TABELA 2 – PROPRIEDADES MECÂNICAS DO AÇO DIN 42CrMo4. (CASTRO, 2019).....	56
TABELA 3 – PARES DE $\sigma_a$ E $\tau_a$ OBTIDOS PARA $N_f$ FIXO DE 37.097 CICLOS. (CASTRO, 2019) .....	60
TABELA 4 – CONDIÇÕES DE CARREGAMENTO UTILIZADAS NOS ENSAIOS DE FADIGA.....	65
TABELA 5 – NÚMEROS DE CICLOS PARA FALHA TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS PARA CADA CONDIÇÃO DE CARREGAMENTO E CP.....	67
TABELA 6 – ÍNDICES DE ERRO ENTRE PREVISÕES DE $N_f$ TEÓRICAS E RESULTADOS EXPERIMENTAIS PARA CADA CONDIÇÃO DE CARREGAMENTO E CP.....	69
TABELA 7 – LISTA DOS ÍNDICES DE ERRO MÉDIOS, PARA CADA CRITÉRIO, EM ORDEM CRESCENTE DE CONSERVADORISMO.....	71

## 1. INTRODUÇÃO

Existem diversos fenômenos que podem vir a provocar a falha de um componente mecânico. Dentre tais fenômenos, a Fadiga é um que merece atenção especial, pois cerca de 90% do total de falhas ocorre devido ao processo de Fadiga. (ASM International, 2008)

Fadiga é um processo de dano gerado a partir da flutuação de cargas (variação de cargas no tempo). Muitas vezes, essa variação de carga no tempo estabelece ciclos de carregamento, caracterizando solicitações mecânicas que se repetem. O fenômeno de Fadiga pode ser dividido em duas etapas: iniciação e propagação de trinca. A rigor, o dano por fadiga ocorre em função da ocorrência de deformações plásticas localizadas que, quando na superfície, dão origem a regiões de intrusão e extrusão (Persistent Slip Bands – PSB). De maneira geral, uma maior amplitude de tensão favorece a nucleação de trincas, ao passo que a presença de uma tensão média trativa tende a separar os flancos da trinca e favorece a propagação da mesma.

Eixos virabrequins são componentes mecânicos de grande importância em motores a combustão pois, conectados aos pistões, são responsáveis por transmitir a energia de combustão, gerada pela queima da mistura ar-combustível dentro dos pistões, para a transmissão do carro, por exemplo, de modo a proporcionar o torque nas rodas.

A análise do fenômeno de Fadiga é pertinente para eixos virabrequins, especialmente por se tratar de componentes fabricados com a finalidade de operar sob carregamentos cíclicos e multiaxiais. Além de serem componentes vitais para o funcionamento dos motores à combustão. Portanto, conclui-se então que falhas abruptas de tais componentes mecânicos são demasiadamente indesejadas, havendo a necessidade de serem realizadas manutenções programadas, visando a substituição dos mesmos.

Uma das principais funções de um engenheiro é otimizar o funcionamento de equipamentos e operações, visando obter melhores desempenhos e maior vida útil dos equipamentos. Nesse sentido, estimar o número de ciclos necessários para que determinado componente mecânico falhe é um dos grandes desafios da engenharia.

## 2. MOTIVAÇÃO

Apesar de ainda não se terem dados brasileiros, estima-se que o custo das falhas estruturais mecânicas seja maior que 4% do PIB, tanto nos EUA quanto em países europeus. (Dowling, 2007)

Atualmente, não existe uma forma simples e direta de se obter uma previsão do número de ciclos para a falha de eixos virabrequins carregados de maneira multiaxial. A previsão apresentada por Carpinteri & Spagnoli (2013) exige que se obtenham diversos outros parâmetros como, por exemplo, orientação do plano de fratura, orientação do plano crítico e o ângulo entre o plano de fratura e o plano crítico. Após a determinação desses parâmetros, é necessária a utilização de trabalho computacional para resolução numérica de equações não lineares. (Carpinteri & Spagnoli, 2013)

## 3. OBJETIVO

O objetivo do presente estudo é analisar um novo modelo de fadiga multiaxial de alto ciclo que seja capaz de prever, de forma simples e direta, o número de ciclos para falha e que não dependa da determinação do plano crítico para ser solucionado. Desse modo, facilitando as análises de Fadiga Multiaxial na previsão do número de ciclos para falha. Tal novo modelo se chama Método da Elipse e foi desenvolvido por Castro, Pereira e Darwish.

Ademais, outro objetivo do presente estudo é o de propor e analisar modificações em alguns modelos de Fadiga Multiaxial. As modificações serão feitas nos seguintes modelos:

- Modelo de Findley (1959);
- Modelo de Matake (1977);
- Modelo de McDiarmid (1987);
- Modelo de Papadopoulos (1997);
- Modelo de Carpinteri & Spagnoli (2001); e
- Modelo de Susmel & Lazzarin (2001).

## 4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 4.1. ÁLGEBRA LINEAR

#### 4.1.1. Vetor

Vetores são elementos físico-matemáticos que possuem módulo, direção e sentido, comumente representados por setas. Tais vetores servem para representar grandezas vetoriais, como por exemplo: forças, campo elétrico, campo magnético, velocidade, aceleração e posição.

O número de dimensões atribuídas a um vetor pode variar de 1 até  $n$ . Um exemplo de vetor tridimensional é  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ; conforme apresenta a Figura 1. Cada uma de suas componentes  $(v_x, v_y, v_z)$  associa um escalar a cada respectiva direção  $(x, y, z)$ .

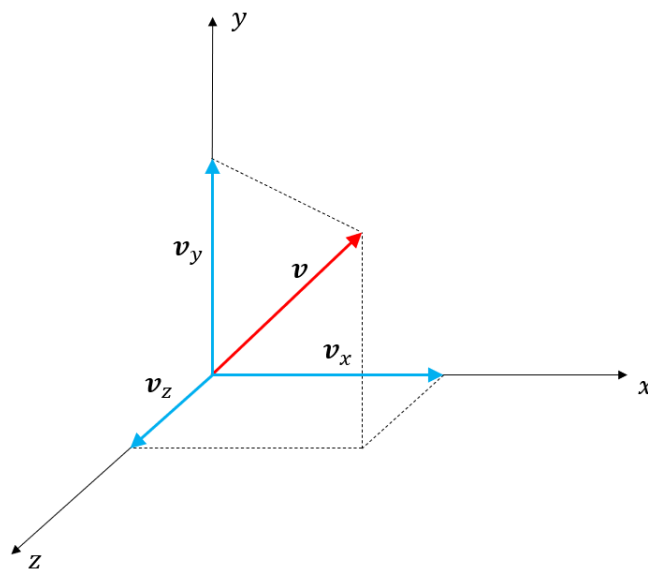


Figura 1 – Representação gráfica de vetor tridimensional.

Na Figura 1, a soma dos três vetores representados em azul,  $\mathbf{v}_x = (v_x, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_y = (0, v_y, 0)$  e  $\mathbf{v}_z = (0, 0, v_z)$  é equivalente ao vetor  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , que está representado em vermelho.

É importante ressaltar que os vetores azuis representam as projeções do vetor vermelho em cada um dos três eixos  $(x, y, z)$ . Portanto, os vetores azuis fazem ângulos de  $90^\circ$  com cada respectiva reta pontilhada.

### 4.1.2. Tensor

Tensores são elementos algébricos, comumente representados por matrizes, que funcionam como transformações lineares; relacionando dois vetores no espaço amostral. Um exemplo de tensor é apresentado na Equação 1.

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 1})$$

Agora, se tomarmos um vetor  $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$  e realizarmos o produto com o tensor  $[A]$ , nota-se que ocorre a transformação linear, pois o vetor de três dimensões  $\mathbf{b}$ , ao ser multiplicado pelo tensor  $[A]$ , gera um vetor  $\mathbf{c}$  de duas dimensões, conforme apresentado na Equação 2.

$$[A] * \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b + 3c \\ d + 2e + 3f \end{bmatrix} = \mathbf{c} \quad (\text{Equação 2})$$

#### 4.1.2.1. Tensor de tensões

Em comportamento mecânico dos materiais é bastante comum a utilização do tensor de tensões de Cauchy, representado na Figura 2, de modo a determinar as tensões atuantes em cada face do elemento infinitesimal de volume; tais tensões podem ser normais ou cisalhantes.

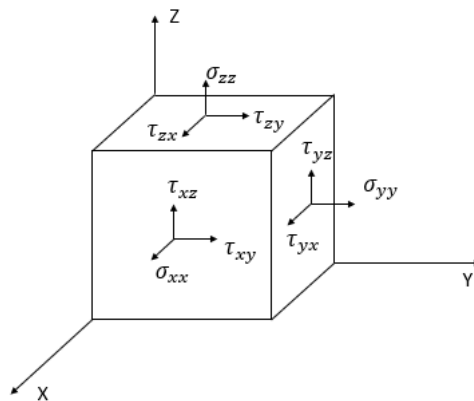


Figura 2 – Tensor de tensões de Cauchy. (Dieter, 1986)

Conforme apresentado na seção 4.1.2, se fornecermos a um tensor de tensões  $\sigma$ , apresentado na Equação 3, uma direção que seja equivalente à direção

de um vetor normal a um plano de interesse, iremos obter como resposta um vetor associado às tensões atuantes no plano de interesse.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 3})$$

Entretanto, o tensor de tensões precisa ser simétrico para que o elemento infinitesimal de volume esteja em equilíbrio. Logo, para que  $\sigma$  seja simétrico:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (\text{Equação 4})$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (\text{Equação 5})$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (\text{Equação 6})$$

Dessa forma, podemos reescrever  $\sigma$  como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 7})$$

Se quisermos analisar os vetores com as tensões normais e cisalhantes respectivos à cada face do tensor de tensões de Cauchy na Figura 2, devemos multiplicar o tensor  $\sigma$  por cada uma das direções da base canônica; conforme apresentado nas equações: 8, 9 e 10.

$$T_x = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 8})$$

$$T_y = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 9})$$

$$T_z = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 10})$$

É interessante observar que os vetores de tensão encontrados como resposta das equações 8, 9 e 10 são justamente os que atuam nas faces do elemento infinitesimal de volume. Sendo que, para cada tensor respectivo a cada face, existem duas tensões cisalhantes e uma normal.

#### 4.1.3. Direções, Tensões Principais e Estado Plano de Tensão

O estado de tensões em um ponto é representado por  $\sigma$  (Equação 3) que é composto por nove componentes de tensão. Porém, admitindo-se equilíbrio e consequentemente uma matriz simétrica,  $\sigma$  é composto por apenas seis componentes distintas (Equação 11). Existem diversas representações para um mesmo estado de tensões. Tais representações podem ser obtidas através de modificações na orientação do sistema de coordenadas.

Porém, vale ressaltar que o estado de tensão representado está associado a um pequeno volume infinitesimal e por isso pode ser representado por um cubo elementar. Além disso, o estado de tensão não depende do sistema de coordenadas escolhido. Naturalmente, para um novo sistema de coordenadas, as componentes do tensor serão diferentes das componentes no referencial inicial, mas o estado de tensão descrito, em si, é invariante.

Quando temos um elemento infinitesimal de volume no estado plano de tensões, apenas um dos planos do cubo está sofrendo a ação de tensões, podendo ser exemplificado pelo tensor  $\sigma'$ , conforme a Equação 11.

Em um estado plano de tensões, o elemento de volume fica livre de solicitações mecânicas em uma das 3 direções. No exemplo da Equação 11, a direção z é livre de tensão normal e de cisalhamentos atuantes no plano z, tanto na direção x quanto na direção y.

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 11})$$

Na Equação 11, os planos que estão sofrendo ação de tensões são os planos x e y. Observe que as tensões que são paralelas ao plano z são equivalentes a zero neste caso.

Considerando aplicações mecânicas reais, há pelo menos uma orientação do sistema de coordenadas que gera um tensor no qual as componentes cisalhantes são nulas fora da diagonal principal; essa é a orientação das direções principais. O sistema de coordenadas é denotado pelas direções  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  e  $\hat{e}_3$ , com as respectivas tensões principais para cada uma das direções sendo  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ .

De modo a determinar as direções principais  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  e  $\hat{e}_3$ , devemos determinar primeiramente as tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , que podem ser encontradas a partir

dos autovalores de um estado de tensões qualquer devido a cargas externas genéricas, conforme Equação 12.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Equação 12})$$

Resolvendo o determinante da equação 12, obtemos:

$$\begin{aligned} & -\sigma^3 + (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \\ & \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2)\sigma + (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \\ & \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{Equação 13})$$

A soma dos termos da diagonal principal de qualquer tensor que represente um determinado estado de tensões é sempre a mesma. E os invariantes do determinado estado de tensão serão expressos por  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , representados respectivamente pelas equações 14, 15 e 16 (Dieter, 1986).

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (\text{Equação 14})$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (\text{Equação 15})$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (\text{Equação 16})$$

Então, através das equações dos invariantes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , podemos reescrever a Equação 13 na forma:

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0 \quad (\text{Equação 17})$$

A Equação 17 é de terceira ordem e, portanto, possui três raízes como solução. Tais raízes serão justamente as tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , tal que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Por sua vez, as direções principais correspondem a direções próprias do sistema. Em outras palavras, correspondem a direções em que a transformação linear aplicada à direção em questão retorna um vetor paralelo à mesma direção de entrada.

O autovalor está associado a um parâmetro de escala, que altera o módulo do vetor de saída. Desse modo, é natural perceber que cada autovetor tem um autovalor associado. Sendo assim, a obtenção das direções principais pode ser



realizada aplicando uma direção genérica  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  ao tensor em questão, e obtendo um vetor de saída  $\lambda \mathbf{v} = \lambda(x, y, z)$ , onde  $\lambda$  representa cada um dos respectivos autovalores. A solução dos sistemas obtidos fornece as direções próprias do sistema, que correspondem às direções principais do mesmo.

#### 4.1.4. Componentes Hidrostática e Desviadora de Tensão

Podemos decompor um tensor qualquer em outros dois tensores. Um desses tensores está relacionado com a variação de volume do objeto qual está sofrendo as tensões, porém sem causar deformação no objeto, ou seja, mantém-se a forma e apenas o volume aumenta. O outro tensor, entretanto, está associado às distorções na forma do objeto.

Logo, as componentes  $\sigma_{ij}$  de um estado de tensões podem ser descritas por:

$$\sigma_{ij} = \sigma' + \sigma_m \delta_{ij} \quad (\text{Equação 18})$$

Sendo  $\sigma_m \delta_{ij}$  a componente hidrostática, ou seja, o tensor responsável pela variação de volume, este é composto pela tensão média  $\sigma_m$  e pelas adequadas  $\delta_{ij}$  do tensor  $\delta$ , representados respectivamente pelas equações 19 e 20. O tensor  $\delta$  se chama delta de Kronecker.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (\text{Equação 19})$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 20})$$

A componente desviadora de tensão,  $\sigma'$ , é a responsável pelas distorções na forma do objeto, descrita pelas equações 21 e 22.

$$\sigma' = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (\text{Equação 21})$$

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 22})$$

O desenvolvimento para determinação de autovalores, apresentado na seção 4.1.3, também pode ser aplicado aqui para a componente desviadora de tensão, de

modo a obtermos os invariantes  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$ . Assim, por Dieter (1986), obtém-se a Equação 23.

$$-(\sigma')^3 + J_1(\sigma')^2 - J_2\sigma' + J_3 = 0 \quad (\text{Equação 23})$$

#### 4.1.5. Tensão Equivalente de von Mises

Um corpo sujeito a um estado de tensões pode se deformar de duas formas: elasticamente ou plasticamente. Define-se que o corpo ou objeto sofre deformação elástica quando o mesmo se deforma devido a um esforço qualquer e, após o término da aplicação do esforço, o corpo retorna ao formato anterior à aplicação do esforço. Já na deformação plástica, o corpo, após o fim da aplicação do esforço, não retorna ao formato original, permanecendo deformado.

Um corpo sujeito a um estado tensão uniaxial comporta-se elasticamente até uma tensão limite. Tal tensão chama-se limite de escoamento ( $\sigma_e$ ). Para condições de carregamentos não triviais, essa fronteira entre o escoamento precisa ser discutida com mais cuidado e, para tal, recorre-se aos critérios de escoamento.

O critério de von Mises reporta um estado de tensão não trivial para um valor escalar, sendo tal valor, de tensão equivalente, que deve ser comparado com o limite de escoamento. Assim, é possível avaliar se o comportamento do material será elástico ou plástico sob o determinado estado de tensões.

O critério de von Mises nos diz que o escoamento do material ocorre quando o segundo invariante de tensão,  $J_2$ , ultrapassa um certo valor crítico  $k^2$ , conforme denotado na Equação 24.

$$J_2 = k^2 \quad (\text{Equação 24})$$

E temos que:

$$J_2 = k^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)] \quad (\text{Equação 25})$$

Para obter o valor de  $k$ , pode-se realizar o ensaio de tensão uniaxial através do tensor  $\sigma''$  que está apresentado na Equação 26.

$$\sigma'' = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 26})$$

Nesse caso específico, a Equação 25 se reduz a:

$$J_2 = k^2 = \frac{1}{6} (2 \sigma_{xx}^2) = \frac{1}{3} \sigma_{xx}^2 \quad (\text{Equação 27})$$

Portanto, nesse caso, o escoamento ocorre quando  $\sigma_{xx}$  ultrapassar o limite de escoamento  $\sigma_e$ . Então, podemos substituir o limite de escoamento na Equação 27 e obter  $k$  analiticamente; conforme Equação 28.

$$k = \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{3}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \quad (\text{Equação 28})$$

A partir do  $k$  encontrado na Equação 28 podemos obter uma equação para a tensão equivalente de von Mises  $\sigma_{Mises}$  para o estado crítico, de iminência do escoamento, que ocorre quando  $\sigma_{Mises} = \sigma_e$ . Para obter a Equação 29 realizamos a substituição do  $k$  na Equação 25.

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Equação 29})$$

É interessante ressaltar que, agora é simples obtermos uma equação genérica para a tensão equivalente de von Mises. Basta substituir  $\sigma_e$  por  $\sigma_{Mises}$  na Equação 29.

Dessa forma, podemos determinar se irá ocorrer escoamento ao compararmos a tensão equivalente de von Mises com o limite de escoamento do material. Se  $\sigma_{Mises} > \sigma_e$  o material escoar, do contrário ou ele estará na iminência de escoamento ( $\sigma_{Mises} = \sigma_e$ ) ou então não irá escoar caso  $\sigma_{Mises} < \sigma_e$ .

## 4.2. MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Fratura é o fenômeno caracterizado pela divisão de um corpo ou componente, gerando novas superfícies. Esse fenômeno eventualmente ocorre devido a esforços mecânicos impostos no componente, que fazem com que ocorra a iniciação de trincas no interior do material e, uma vez iniciada, a trinca cresce até alcançar um valor crítico, gerando a fratura do componente.

Existem dois tipos de fratura, são elas: frágil e dúctil. A fratura frágil é aquela que ocorre com pouca ou quase nenhuma estrição/deformação do material; ocorrendo com a rápida propagação das trincas e de forma abrupta. Já a fratura

dútil é aquela que ocorre após já ter acontecido deformação plástica do material; sendo caracterizada pela lenta propagação das trincas até a fratura. A representação desses dois tipos de fratura está ilustrada na Figura 3.

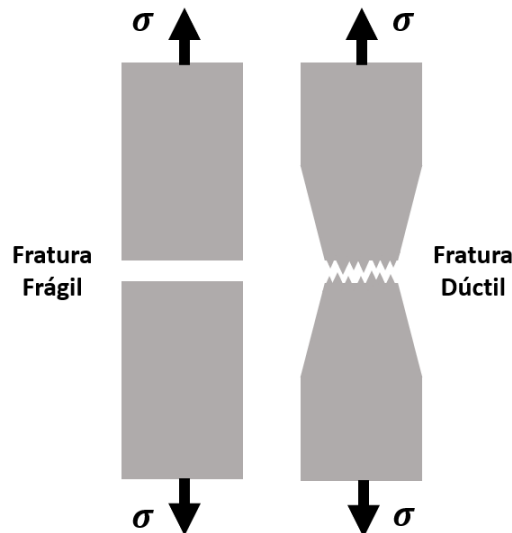


Figura 3 – Representação de fraturas frágil e dútil.

A Mecânica da Fratura Linear Elástica surgiu devido às limitações na aplicação dos conceitos tradicionais para prever o comportamento dos materiais quanto à presença de descontinuidades internas ou superficiais, como as trincas, o que levou à introdução do conceito dos fatores de intensidade de tensão  $K$ ,  $K_c$  e  $K_{Ic}$ . (Fortes, 2003)

#### 4.2.1. Modos de Carregamento no Regime Linear Elástico

Existem três modos de carregamento aos quais as trincas de um determinado componente podem estar submetidas, sendo eles: Modo I, também conhecido como modo de abertura ou trativo; Modo II, também conhecido por modo de deslizamento ou de cisalhamento no plano; e Modo III, também conhecido como modo de rasgamento ou de cisalhamento fora do plano.

No Modo I, uma tensão normal atua perpendicularmente ao plano da trinca. Já no Modo II, uma tensão cisalhante atua no plano da trinca e perpendicularmente à frente da trinca. Entretanto, no Modo III, uma tensão atua no plano da trinca e paralelamente à frente da trinca; conforme representado na Figura 4.

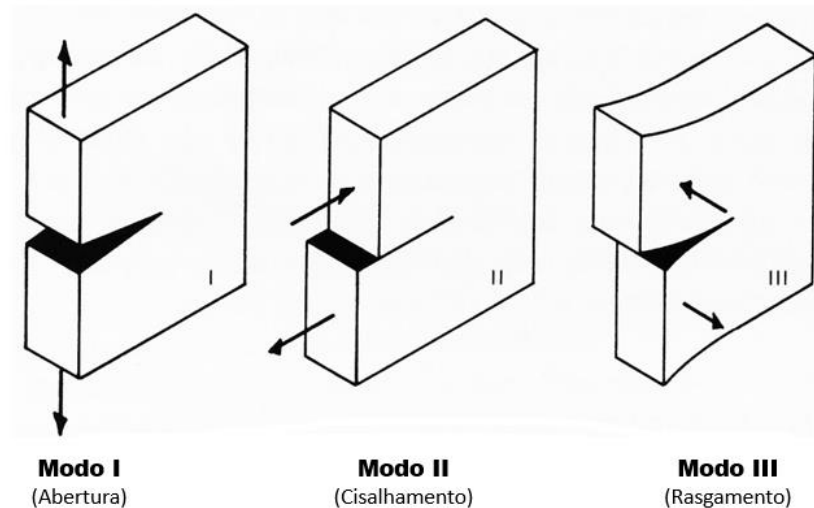


Figura 4 – Modos de carregamento. Adaptado (H. L. Ewald; R. J. H. Wanhill, 1984)

#### 4.2.2. Análise de Griffith

Alan Arnold Griffith, foi o engenheiro britânico que equacionou a primeira teoria para o estudo de trincas ao publicar um artigo em 1920. A Teoria de Griffith era direcionada para materiais idealmente frágeis apenas, vindo a ser modificada posteriormente de modo a contemplar também materiais dúcteis. (Ruchert, 2014)

Ao se aplicar uma tensão sobre uma trinca, entrega-se a esta trinca uma quantidade de energia que pode ser direcionada para a geração de novas superfícies. Quando ocorre esse fenômeno, diz-se que a trinca cresceu ou se propagou. (Castro, 2019)

A Teoria de Griffith busca prever a tensão nominal de fratura, de corpos sólidos que contenham trincas, a partir de um balanço energético oriundo da Primeira Lei da Termodinâmica. Dessa forma, a Teoria propõe uma relação quantitativa entre o tamanho da falha e a energia necessária para a separação das novas superfícies geradas. (Júnior, 2007)

A energia total  $U_{Total}$  para o balanceamento da Teoria de Griffith é apresentada na Equação 30.

$$U_{Total} = U_p + U_s \quad (\text{Equação 30})$$

A energia total é composta pela soma de duas componentes, a energia potencial  $U_p$  e a energia de superfície  $U_s$ . A componente  $U_p$  é a energia liberada para a criação de novas superfícies; representada pela Equação 31. Já a

componente  $U_S$  é a energia necessária para criar uma falha de meio comprimento  $a$ ; representada pela Equação 32.

$$U_P = -\frac{\pi a^2 \sigma_T^2}{2E} \quad (\text{Equação 31})$$

$$U_S = 2a\gamma_S \quad (\text{Equação 32})$$

Para as equações 31 e 32, temos que:  $\sigma_T$  é o esforço trativo aplicado uniformemente no componente,  $E$  é o módulo de Young,  $\gamma_S$  é a energia superficial de clivagem por unidade de área e  $a$  é o meio comprimento da falha, ou seja, o valor da metade do comprimento da falha. E vale ressaltar que o sinal negativo da Equação 31 decorre do fato de ser uma energia liberada.

A Figura 5 representa graficamente o comportamento de cada parcela do Balanço de Energia de Griffith. Além disso, a Figura 5 também explicita que  $U_{Total}$  passa por um ponto de máximo, sendo tal ponto denotado por  $a_c$  que é o comprimento crítico da falha (Exemplo: uma trinca).

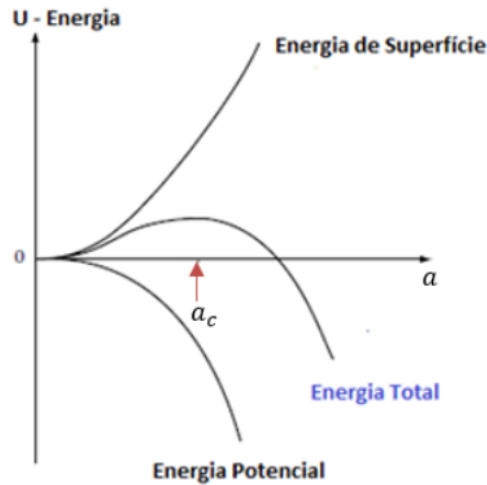


Figura 5 – Gráfico do Balanço de Energia de Griffith. (Castro, 2019)

Segundo o Postulado de Griffith, existe propagação da falha, uma trinca por exemplo, quando  $U_P = U_S$ . Em  $a_c$ , tem se que:

$$\frac{dU}{da} = 0 \quad (\text{Equação 33})$$

Logo,

$$\frac{dU}{da} = 2\gamma_S - \frac{\pi a \sigma_T^2}{E} = 0 \quad (\text{Equação 34})$$

$$2\gamma_S = \frac{\pi a \sigma_T^2}{E} \quad (\text{Equação 35})$$

Pode-se analisar ainda, as taxas de variação das energias potencial e de superfície; conforme representa a Figura 6.

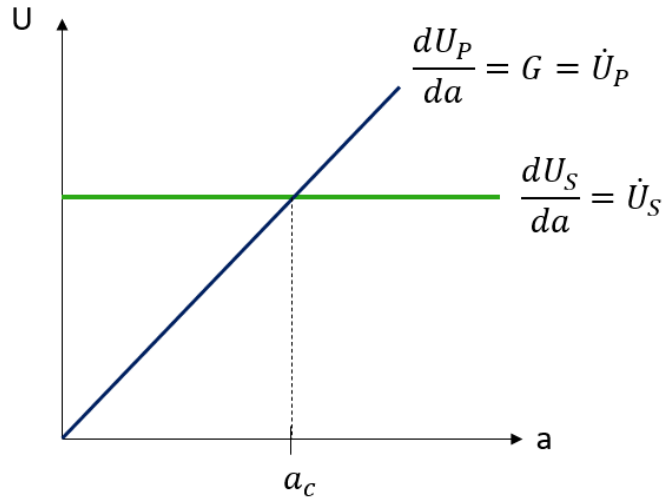


Figura 6 – Taxas de variação das energias potencial e de superfície de Griffith.

Vale ressaltar que  $G$  é a taxa de liberação de energia, que é equivalente à derivada da função de energia potencial em relação ao comprimento da falha.

Analisando o gráfico da Figura 6, e supondo que a falha é uma trinca, temos que, para  $a < a_c$ ,  $\dot{U}_P < \dot{U}_S$ , pois energia precisa ser entregue ao sistema de modo que a trinca cresça de forma estável. Então, para  $a = a_c$ , atingimos a condição de criticalidade e, assim,  $\dot{U}_P = \dot{U}_S$ , que é o ponto em que o material está na iminência de culminar para a propagação instável de trinca. E no caso em que  $a > a_c$ , podemos observar que  $\dot{U}_P > \dot{U}_S$ , que é a condição que representa a propagação instável de trinca e que irá gerar a fratura do componente.

Se quisermos analisar qual o valor de tensão trativa crítica, necessária para fraturar um determinado componente, podemos manipular a Equação 35 e obter a Equação 36, também conhecida como Equação de Griffith.

$$\sigma_{crítico} = \left( \frac{2E\gamma_S}{\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Equação 36})$$

Contudo, é importante ressaltar que a Equação 36 contempla apenas materiais frágeis. Para materiais que apresentam deformação plástica na ponta da

trinca, deve ser inserido um fator  $\gamma_P$  de modo a considerar a deformação plástica que ocorre em materiais dúcteis como metais e polímeros por exemplo.

Dessa forma, Irwin e Orowan, trabalhando separadamente, modificaram em 1948, a equação de Griffith para que essa pudesse considerar materiais que apresentam deformação plástica; conforme Equação 37. (Ruchert, 2014)

$$\sigma_{crítico} = \left( \frac{2E(\gamma_S + \gamma_P)}{\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Equação 37})$$

#### 4.2.3. Fator de Intensidade de Tensão

O conceito de fator de intensidade de tensão,  $K$ , foi proposto por Irwin e Williams, em 1957. Ambos chegaram, por caminhos diferentes, ao mesmo resultado. Tal fator  $K$  busca mensurar a deformação em torno da ponta da trinca em um corpo com comportamento linear elástico. (da Silva, 2015)

Então, para cada modo de carregamento, apresentados na seção 4.2.1, existe um  $K$  respectivo; desse modo temos  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  referentes aos modos de carregamento  $I$ ,  $II$  e  $III$  respectivamente.

O modo de carregamento  $I$  demanda uma atenção especial, já que na grande maioria das vezes as trincas se propagam nesse modo, devido ao fato de que ele não causa dissipação de energia por atrito entre as faces da trinca. (Castro e Meggiolaro, 2009)

Devido à maior importância do fator de intensidade de tensão para o modo  $I$ , esse será o mais abordado no presente estudo. Tal parâmetro  $K_I$  pode ser calculado através de:

$$K_I = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (\text{Equação 38})$$

Na Equação 38,  $\sigma$  é a tensão aplicada no componente,  $a$  é a metade do comprimento da trinca e  $F$  é uma função que depende do tamanho da trinca, das geometrias do corpo de prova e da trinca, além de depender também da forma que é aplicada a carga. (Castro e Meggiolaro, 2009)

No estudo de fadiga e trincas, é comum a utilização de análises considerando placas com trincas; conforme Figura 7 e Figura 8.

Por  $F$  depender da largura da placa e do tamanho da trinca, se diz que  $F(a/W) = f(a/W)$ ; sendo  $W$  a largura da placa que possui a trinca interna. E



conforme  $a/W$  se aproxima de zero, como por exemplo para placas muito grandes e trincas muito pequenas, o valor de  $F$  se aproxima de 1. Logo, para uma placa de largura infinita que possui uma trinca passante, que atravessa o corpo de prova,  $F=1$ .

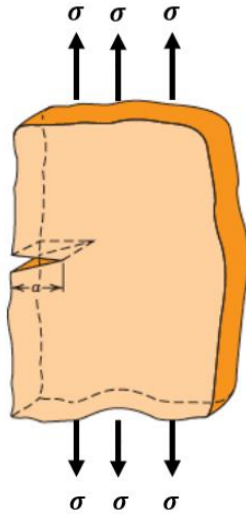


Figura 7 – Placa tracionada com trinca de canto passante. Adaptado (Callister, 2008)

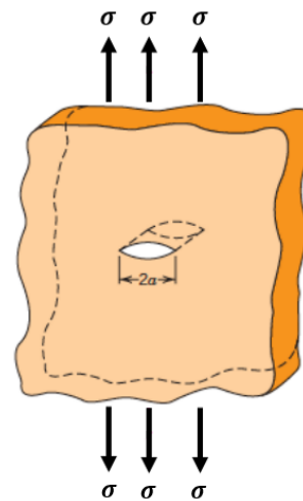


Figura 8 - Placa tracionada com trinca central passante. Adaptado (Callister, 2008)

#### 4.2.4. Zona de Perturbação

Para cargas altas, os materiais na realidade não se comportam de forma linear e nem elástica. Logo, ao redor das pontas, de qualquer trinca não ideal, há sempre uma zona de perturbação  $Z_p$  no campo de tensões previsto pelo modelo elástico. (Castro e Meggiolaro, 2009)

Entretanto, por Castro e Meggiolaro, se a  $Z_p$  é pequena em relação às dimensões da placa trincada, o campo de tensões da peça permanece, de forma geral, com comportamento linear elástico; conforme ilustra a Figura 9. Assim, podemos utilizar  $K_I$  para estimar o tamanho da zona de perturbação associada à ponta da trinca; através da Equação 39.

$$Z_p \cong \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_e^2} \quad (\text{Equação 39})$$

Na Equação 39, as variáveis utilizadas são: o fator de intensidade de tensões  $K_I$  e a resistência ao escoamento do material  $\sigma_e$  de modo a encontrar  $Z_p$ .

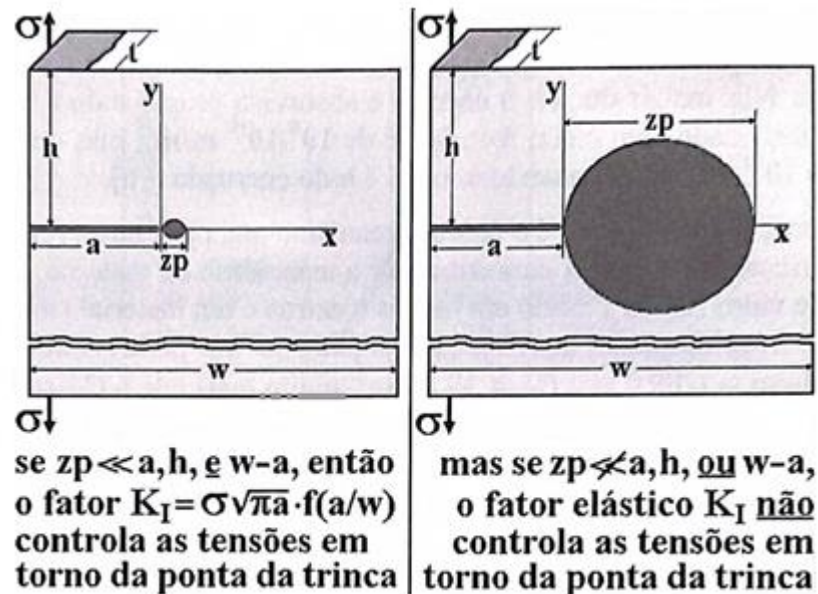


Figura 9 – Restrições para o limite da dominância de  $K_I$ . (Castro e Meggiolaro, 2009)

#### 4.2.5. Tenacidade à Fratura

A tenacidade é a capacidade de um material resistir a uma solicitação mecânica na presença de defeitos.

Assim como foi definido por Griffith uma equação de  $\sigma_{crítico}$  para materiais frágeis, é possível determinar um valor crítico de intensidade de tensão,  $K_C$ , para o qual um determinado material fratura de forma frágil. Atribui-se o nome de tenacidade à fratura para  $K_C$ .

Contudo, para chapas finas,  $K_C$  varia com: a espessura, o tamanho da trinca e a carga aplicada à chapa. Ao contrário de  $K_{IC}$  que é uma propriedade mecânica do material e independe: da geometria da chapa, do tamanho da trinca e do tipo de carga aplicada. (Castro e Meggiolaro, 2009)

Dessa forma, vale ressaltar que quanto menor o valor de  $K_{IC}$ , então mais frágil é o material.

#### 4.2.6. Condição *Leak Before Break*

A condição *Leak Before Break* (LBB) traz a ideia de que é preferível que um componente ou estrutura demonstre estar próximo de falhar, ao invés de falhar de forma abrupta. Logo, é um conceito amplamente utilizado em engenharia.

O conceito de LBB é utilizado em larga escala na indústria nuclear ao trazer noção de que para um tubo, que armazena fluido refrigerante de um reator nuclear, ocorrerá o vazamento do fluido antes que possa vir a ocorrer uma falha catastrófica. (IAEA, 1993)

No estudo de chapas contendo trincas, é possível obter uma equação que nos ajuda a estimar quão próximo, ou não, estamos da condição de falha catastrófica, associada à espessura crítica da chapa ( $t_c$ ). Tal equação depende do comprimento de trinca ( $a$ ), do esforço trativo aplicado à chapa ( $\sigma$ ) e do limite de escoamento ( $\sigma_e$ ); conforme a Equação 40.

$$t_c = 2,5 \left( \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sigma_e} \right)^2 \quad (\text{Equação 40})$$

### 4.3. FADIGA

#### 4.3.1. Caracterização do Fenômeno

A Fadiga é um fenômeno capaz de levar componentes a fraturar através de repetidos ciclos de carregamento e que se divide em duas etapas: nucleação e propagação de trincas.

Os fatores que favorecem a formação de trincas são: número de ciclos de carregamento, tensões médias e variação das cargas impostas à peça.

A etapa de nucleação depende de fatores como: geometria da peça, material nos pontos críticos da peça e da história de tensões e deformações atuantes na peça. Já a etapa de propagação depende da história dos fatores de intensidade de tensões que solicitam a peça em serviço. (Castro e Meggiolaro, 2009)

Os principais parâmetros utilizados no estudo de fadiga são: amplitude de tensão ( $\sigma_a$ ), variação de tensão ( $\Delta\sigma$ ), tensão média ( $\sigma_m$ ), razão entre amplitude de tensão e tensão média ( $A$ ) e razão de carregamento ( $R$ ), conforme apresentado respectivamente pelas equações 41, 42, 43, 44 e 45.

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (\text{Equação 41})$$

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \quad (\text{Equação 42})$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (\text{Equação 43})$$

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \quad (\text{Equação 44})$$

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (\text{Equação 45})$$

O fenômeno de Fadiga pode ser dividido em dois tipos, sendo eles: fadiga de baixo ciclo e fadiga de alto ciclo.

#### 4.3.1.1. Fadiga de Baixo Ciclo

A principal característica desse tipo de fadiga é bastante intuitiva, que é o baixo número de ciclos para que a peça ou componente fracture. O baixo número de ciclos é resultante de uma elevada amplitude de tensão, de modo que a deformação plástica cíclica pode vir a ser maior que a deformação elástica, caso as cargas impostas ao componente sejam maiores que o limite de escoamento ( $\sigma_e$ ) do material, fazendo com que se formem laços de histerese; conforme o exemplo representado na Figura 10.

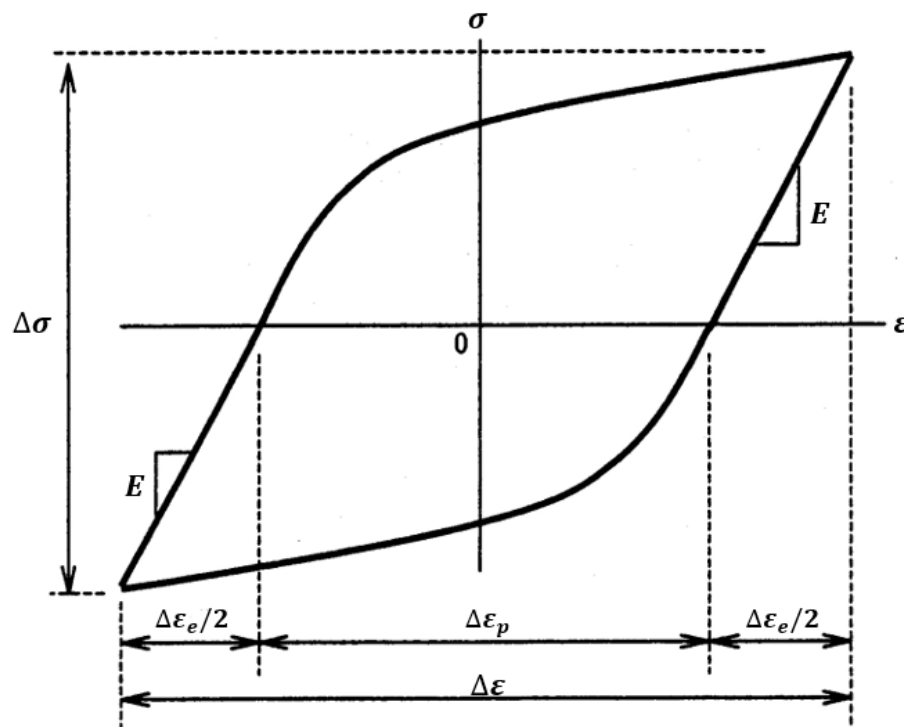


Figura 10 – Laço de histerese. Adaptado (Stephens, 2001)

É interessante ressaltar que, para fadiga de baixo ciclo, a componente plástica de deformação ( $\Delta\epsilon_p$ ) desempenha um papel importante, já que em regiões

com alta concentração de tensões (e.g. entalhes), a deformação plástica pode vir a ocorrer localmente. (Oliveira, 2001)

#### 4.3.1.2. Fadiga de Alto Ciclo

A fadiga de alto ciclo é caracterizada por amplitudes de tensões baixas, menores que o limite de escoamento ( $\sigma_e$ ) do material, fazendo que as deformações plásticas sejam pequenas ou inexistentes, de modo que o componente venha a falhar para um elevado número de ciclos ( $N_f > 10^5$ ).

O método mais difundido para a análise de dados provenientes de ensaios de fadiga de alto ciclo é o método S-N, também conhecido por método de Wöhler.

#### 4.3.1.3. Curvas de Wöhler

O engenheiro alemão August Wöhler, em meados do século XIX, foi responsável por importantes contribuições no estudo de Fadiga, como por exemplo: a introdução do conceito de limite de resistência à fadiga, ter começado o desenvolvimento de estratégias de projeto contra fadiga, a identificação da contribuição das tensões alternadas no processo de fadiga, entre outras.

O método S-N (do inglês *Stress-Number of Cycles to Failure*) ou de Wöhler, consegue orientar quanto à previsão de número de ciclos para falha de um determinado componente. Para tal, o método propõe que esse número de ciclos para falha pode ser comparado com o número de ciclos necessários para que corpos de prova (CP), testados sob amplitudes de tensões similares às de serviço, venham a falhar. (Castro e Meggiolaro, 2009)

Ainda que a modelagem S-N seja simples e ainda bastante utilizada atualmente, só deve ser utilizada para evitar o trincamento à fadiga ou para prever vidas longas associadas a cargas elásticas, já que o método supõe que sejam desprezíveis os efeitos plásticos cíclicos no ponto crítico do componente. (Castro e Meggiolaro, 2009)

As curvas S-N obtidas, que costumam ser apresentadas como a amplitude de tensão versus o número de ciclos para falha em escala logarítmica, são derivadas de anos de ensaios de fadiga que foram realizados para diversos materiais diferentes. (Oliveira, 2001)

Para vários valores de amplitude de tensão ( $\sigma_a$ ), foram ensaiados corpos de prova até a falha, obtendo-se os respectivos números de ciclos para falha ( $N_f$ ); conforme ilustra a Figura 11.

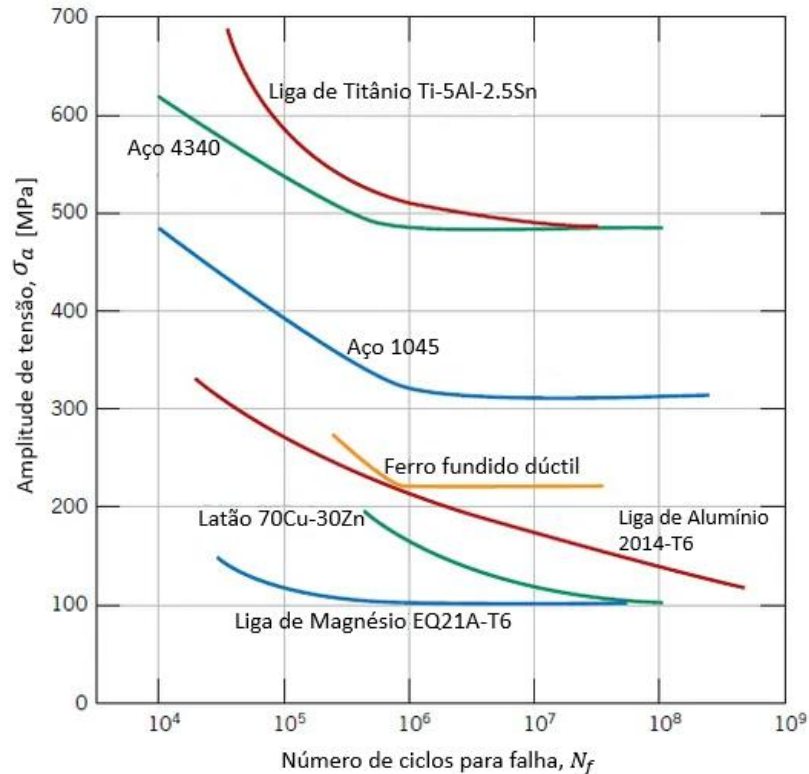


Figura 11 – Curvas S-N sete ligas metálicas. Adaptado (Callister, 2008)

Na Figura 11, também é interessante observar que, conforme a amplitude de tensão diminui, o número de ciclos que os materiais levam para falhar aumenta.

A relação parabólica mais utilizada para descrever curvas S-N é uma contribuição de Basquin; representada pela Equação 46.

$$\sigma_a = AN_f^b \quad (\text{Equação 46})$$

Na Equação 46, temos: o número de ciclos para falha ( $N_f$ ), a amplitude de tensão normal ( $\sigma_a$ ) e os coeficientes  $A$  e  $b$  que derivam de propriedades de material.

#### 4.3.1.4. Limite de Resistência à Fadiga

O limite de resistência à fadiga ( $\sigma_{LF}$ ) é a medida de tensão para qual carregamentos com amplitudes de tensão inferiores à mesma, não resultam em falha mecânica do componente por fadiga; conforme exemplifica a Figura 12.

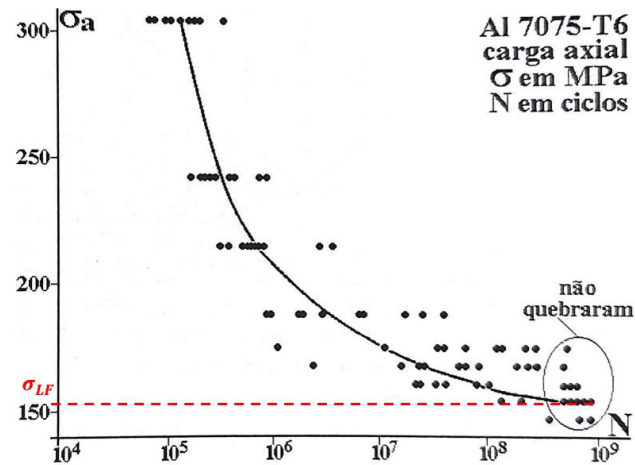


Figura 12 – Curva S-N com ênfase em  $\sigma_{LF}$  para liga Al 7075-T6. Adaptado (Castro e Meggiolaro, 2009)

Para aços, cabe ressaltar que, devido à presença de elementos intersticiais na estrutura cristalina (Ex.: carbono e nitrogênio), tais elementos limitam o movimento de discordâncias, influenciando no limite de resistência à fadiga.

Cabe ressaltar que o limite de resistência à fadiga é função de diversos fatores como, por exemplo: do tipo de carregamento, do acabamento superficial, do gradiente de tensão no ponto crítico, temperatura de operação, entre outros. (Castro e Meggiolaro, 2009)

#### 4.3.1.5. Equação de Basquin

No início do século XX, o engenheiro norte americano Olin Hanson Basquin apresentou uma equação que relacionava o carregamento aplicado com o número de ciclos para falha por fadiga; conforme Equação 47 (equivalente à Equação 46).

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N_f)^b \quad (\text{Equação 47})$$

Na Equação 47, as variáveis dispostas são: a amplitude de tensão ( $\sigma_a$ ), o coeficiente de Basquin ( $\sigma'_f$ ), o número de ciclos para falha ( $N_f$ ) e o expoente de Basquin ( $b$ ). (Mitchell, 1978)

Para se realizar uma análise acerca da deformação plástica, basta dividirmos a Equação 47 pelo módulo de elasticidade ( $E$ ), obtendo-se:

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{\sigma'_f (2N_f)^b}{E} \quad (\text{Equação 48})$$

#### 4.3.1.6. Equação de Coffin-Manson

De modo a realizar uma análise acerca da deformação plástica, para fadiga de baixo ciclo, Coffin e Manson propuseram a equação:

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (\text{Equação 49})$$

Na Equação 49, temos: a amplitude de deformação plástica ( $\Delta \varepsilon_p$ ), o coeficiente de ductilidade em fadiga ( $\varepsilon'_f$ ), o número de ciclos para a falha ( $N_f$ ) e o expoente de ductilidade em fadiga ( $c$ , que varia geralmente entre -0,5 e -0,7). (Mitchell, 1978)

#### 4.3.1.7. Amplitude de Deformação Total ( $\Delta \varepsilon_t$ )

A amplitude de deformação total ( $\Delta \varepsilon_t$ ) pode ser representada como a soma das parcelas de deformações plástica e elástica; conforme Equação 50.

$$\frac{\Delta \varepsilon_t}{2} = \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} \quad (\text{Equação 50})$$

Logo, a partir das equações de Basquin e Coffin-Manson, equações 48 e 49 respectivamente, podemos obter uma nova equação para amplitude de deformação total:

$$\frac{\Delta \varepsilon_t}{2} = \frac{\sigma'_f (2N_f)^b}{E} + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (\text{Equação 51})$$

#### 4.3.1.8. Nucleação de Trincas

Em projetos de engenharia, quase sempre, busca-se trabalhar no regime de deformações macroscopicamente elásticas. Porém, devido à imensa dificuldade de se garantir que não tenham concentradores de tensões nas estruturas projetadas, para ciclos de carregamentos atuantes em um componente qualquer, ocorrem pequenas deformações plásticas locais, que culminam na nucleação de trincas.

Trincas de fadiga costumam se formar em regiões onde ocorre acúmulo de dano (plastificações localizadas), geralmente nas vizinhanças de defeitos que atuam como concentradores de tensão internos. Adicionalmente, é comum a ocorrência de



asperização da superfície, formando bandas de deslizamento na superfície do componente. Então, as bandas de deslizamento, que possuem conjuntos de intrusões e extrusões, atuam como concentradores de tensões, levando à iniciação de várias microtrincas no ponto crítico do componente. E, com a perpetuação do carregamento cíclico, a microtrinca dominante acaba por concentrar todo o dano, vindo a se propagar, que é a segunda etapa do processo de fadiga. (Castro e Meggiolaro, 2009)

Na ausência de um concentrador de tensão interno muito significativo, a tendência é que o processo de deslizamento de planos cristalinos gere uma asperização da superfície livre do componente mecânico, o que gera concentradores de tensão locais nas superfícies livres, tornando essa região uma forte candidata à nucleação de trincas.

Contornos de grãos também são locais onde pode ocorrer iniciação de trincas devido à quebra de ligações atômicas mais fracas e também devido excesso de deformação plástica. (Oliveira, 2001)

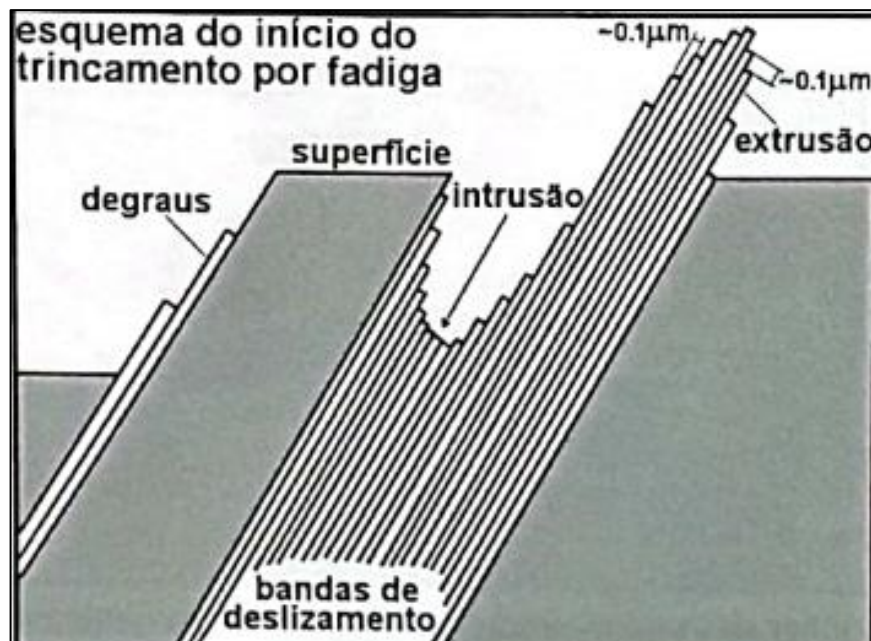


Figura 13 – Esquema para iniciação de trinca por fadiga. (Castro e Meggiolaro, 2009)

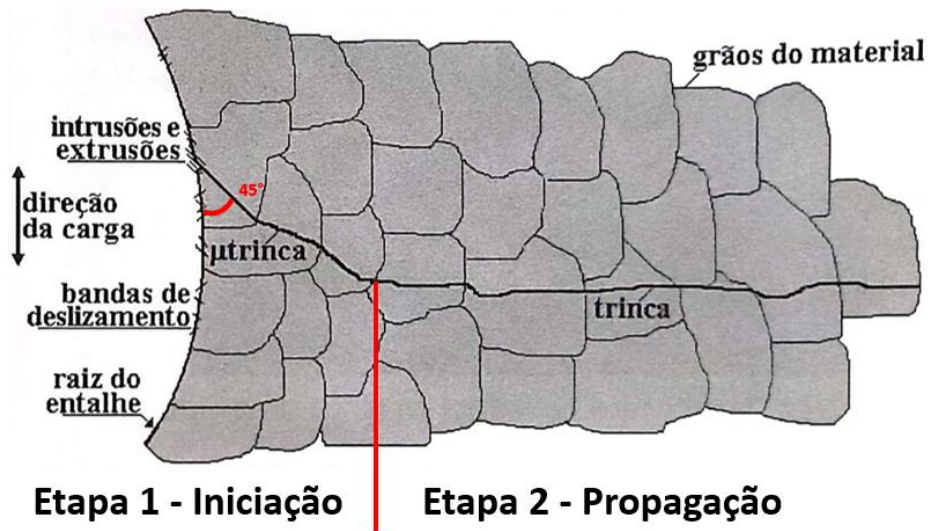


Figura 14 – Corte esquemático de uma trinca de fadiga. Adaptado (Castro e Meggiolaro, 2009)

É interessante ressaltar que na etapa 1 (iniciação), para materiais dúcteis, existe a influência de tensões cisalhantes na movimentação de discordâncias. Logo, já que para carregamentos uniaxiais a maior tensão cisalhante ocorre a  $45^\circ$ , esse efeito está representado na Figura 14. (Anderson, 2005)

Segundo Suresh (1998), apesar da nucleação de trincas por fadiga geralmente ocorrer na superfície dos componentes, essa também pode ocorrer no interior do material. Essa formação no interior do material ocorre em inclusões, vazios e em outros tipos de defeitos na microestrutura.

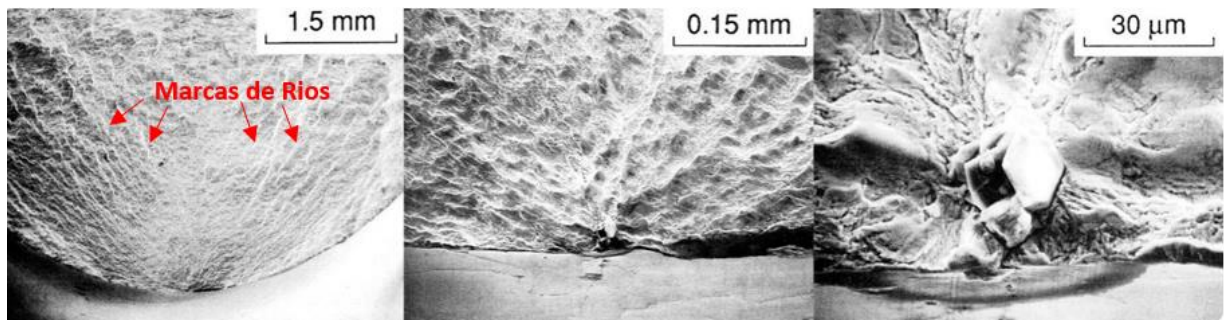


Figura 15 - Iniciação de trinca em inclusão na matriz do material de um CP de aço AISI 4340. Adaptado (Dowling, 2007)

#### 4.3.1.9. Propagação de Trincas

A segunda etapa do processo de fadiga é a propagação de trincas. Essa etapa pode ser dividida em dois estágios, que são: estágio de propagação estável e estágio de propagação instável; conforme citado durante a seção 4.2.2 de análise de

Griffith. A figura exemplifica a superfície de uma peça fraturada segundo as características de cada etapa do processo de fadiga.

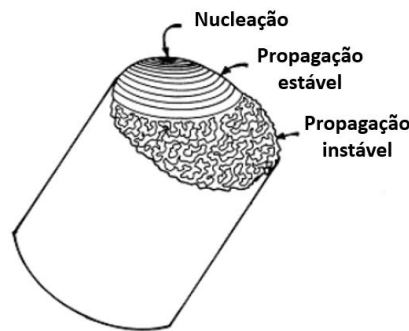


Figura 16 – Superfície de fratura típica a partir de trinca por fadiga. Adaptado (Meyers, 2009)

A propagação de trincas, ao contrário da Mecânica da Fratura, é controlada pela variação do fator de intensidade de tensões ( $\Delta K$ ) e não pelo fator de intensidade de tensões ( $K$ ) simplesmente. E, conforme pode ser observado na Figura 14, a propagação de trinca ocorre perpendicularmente à direção do carregamento.

Superfícies com trincas na etapa de propagação possuem características visuais que ajudam na obtenção de informações acerca das trincas, como por exemplo: estrias, marcas de rio e marcas de praia; conforme indicado nas figuras Figura 15, Figura 17 e Figura 18.



Figura 17 – Marcas de praia e de rio a partir de trinca nucleada na parte interna da peça. (Castro e Meggiolaro, 2009)



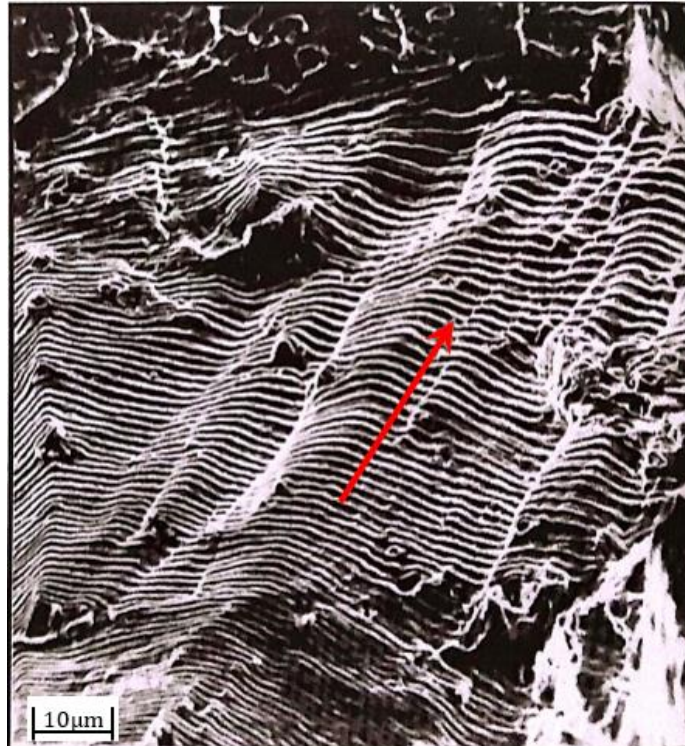


Figura 18 – Estrias de fadiga numa liga de Ni, onde a seta indica a direção de crescimento da trinca. Adaptado (Castro e Meggiolaro, 2009)

É interessante observar que, as marcas de praia e de rio, conforme as escalas indicadas nas imagens, podem ser observadas a olho nu, enquanto as estrias demandam de auxílio de microscópios eletrônicos de varredura (MEV) para serem vistas.

#### 4.3.1.10. Curva $da/dN$ versus $\Delta K$

A curva  $da/dN$  versus  $\Delta K$  relaciona a variação do comprimento de trinca ( $da$ ) dividida pela variação do número de ciclos ( $dN$ ) com a variação do fator de intensidade de tensões ( $\Delta K$ ).

Considerando que a etapa de propagação de trincas é controlada pela variação do fator de intensidades de tensões e que a trinca se propaga devido cada ciclo de carregamento, é interessante analisar a curva  $da/dN$  versus  $\Delta K$ ; conforme apresenta a Figura 19.

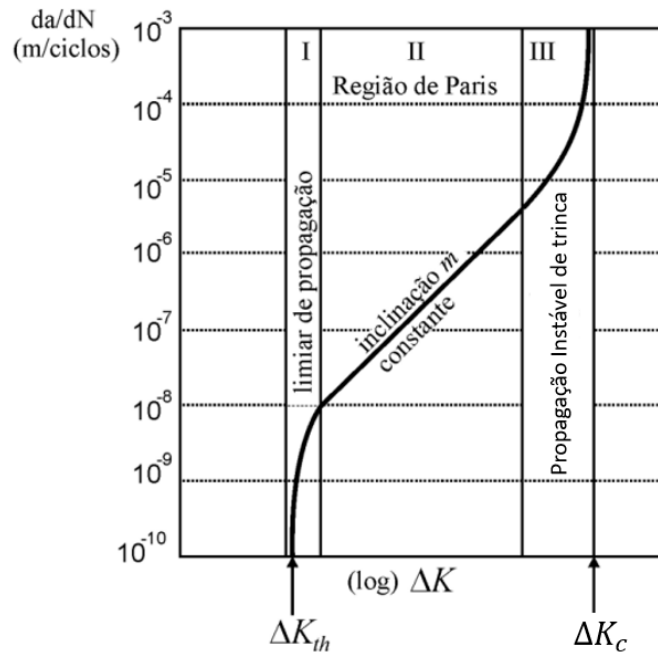


Figura 19 – Curva  $da/dN$  versus  $\Delta K$ . Adaptado (Schijve, 2008)

Paris e Erdogan modelaram a região linear (trecho II da Figura 19) de modo a obter:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (\text{Equação 52})$$

Para a Equação 52, temos que  $C$  e  $m$  são constantes relativas a propriedades do material e determinadas de forma experimental.

Conforme pode ser observado na Figura 19, a curva  $da/dN$  versus  $\Delta K$  se divide em três trechos (I, II e III) delimitados por  $\Delta K_{th}$ , que é variação de  $K$  limiar para que haja propagação da trinca, e por  $\Delta K_c$ , limiar de variação do fator de intensidade de tensão a partir do qual a propagação se torna instável.

#### 4.3.2. Efeito da Tensão Média

A tensão média ( $\sigma_m$ ) é um parâmetro capaz de modificar o limite de resistência à fadiga de componentes mecânicos, que é a tensão limite para qual tensões menores que a mesma não levam o componente a fraturar por fadiga.

Portanto,  $\sigma_m$  é um fator que exerce grande influência na segunda etapa do processo de fadiga (propagação de trincas), pois trincas são tracionadas por mais tempo, durante um ciclo de carregamento, quando na presença de uma tensão média trativa. (Castro, 2019)

Logo, devido ao efeito gerado por uma tensão média trativa ( $\sigma_m > 0$ ), trincas tendem a se propagar mais rápido; diminuindo a vida do componente mecânico. E o inverso também ocorre, pois se considerarmos agora uma tensão média majoritariamente compressiva ( $\sigma_m < 0$ ), a mesma tende a elevar o número de ciclos necessários para o material falhar; conforme pode ser observado na Figura 20.

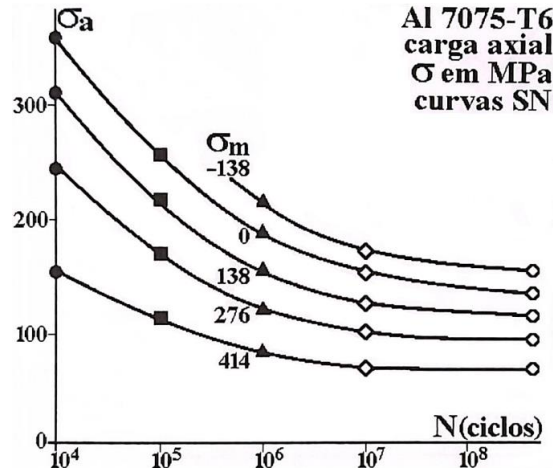


Figura 20 – Curva  $\sigma_a$  versus  $N$  para diferentes tensões médias para a liga Al 7075-T6. Adaptado (Castro e Meggiolaro, 2009)

Um parâmetro que também é usado para analisar se a tensão média é trativa ou compressiva é a razão de carregamento ( $R$ ), denotada pela Equação 45:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

Tal parâmetro  $R$  é inversamente proporcional à  $\sigma_m$ , ou seja, quanto maior o valor de  $R$ , maior a vida à fadiga do material; conforme ilustra a Figura 21.

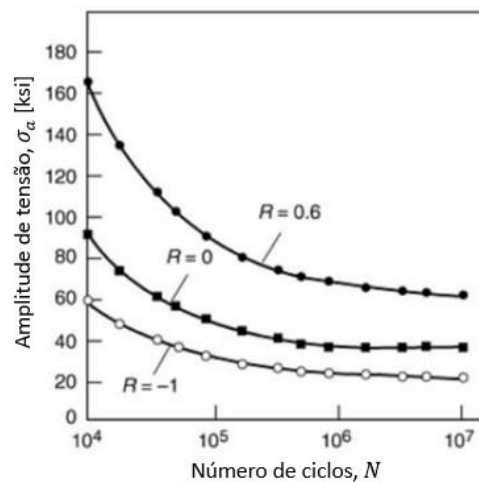


Figura 21 – Curva  $\sigma_a$  versus  $N$  para diferentes razões de carregamento. Adaptado (Cameron, 1996)

Goodman propôs uma equação que permite prever a influência da tensão média no limite de resistência à fadiga, para  $R = -1$ ; conforme Equação 53.

$$\sigma_a = \sigma_{LF-1} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right) \quad (\text{Equação 53})$$

Na Equação 54, temos: a amplitude de tensão ( $\sigma_a$ ), o limite de resistência à fadiga para  $R = -1$  ( $\sigma_{LF-1}$ ), a tensão média ( $\sigma_m$ ) e o limite de resistência mecânica ( $\sigma_u$ ).

A Equação 54 pode ser representada graficamente; conforme ilustra a Figura 22.

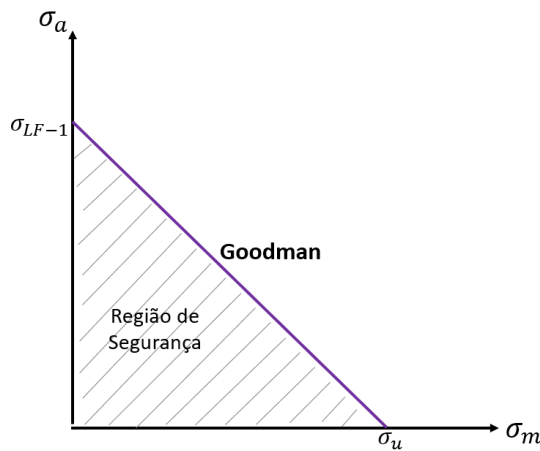


Figura 22 – Curva de Goodman.

A curva de Goodman determina a fronteira para que um componente mecânico possa operar com segurança. Logo, para combinações de amplitude de tensão e tensão média acima da curva de Goodman, o componente eventualmente virá a fraturar por fadiga. Para combinações abaixo da curva de Goodman, ou seja, na região de segurança, o componente em teoria terá vida em fadiga infinita.

De modo a tentar melhorar as aproximações da curva de Goodman, foram propostas modificações à mesma por outros dois autores, sendo eles: Gerber e Soderberg. Entretanto, a curva proposta por Soderberg se ajusta melhor para materiais com alta fragilidade, enquanto a curva de Gerber se ajusta melhor para materiais com alta ductilidade. Tais curvas estão representadas na Figura 23.

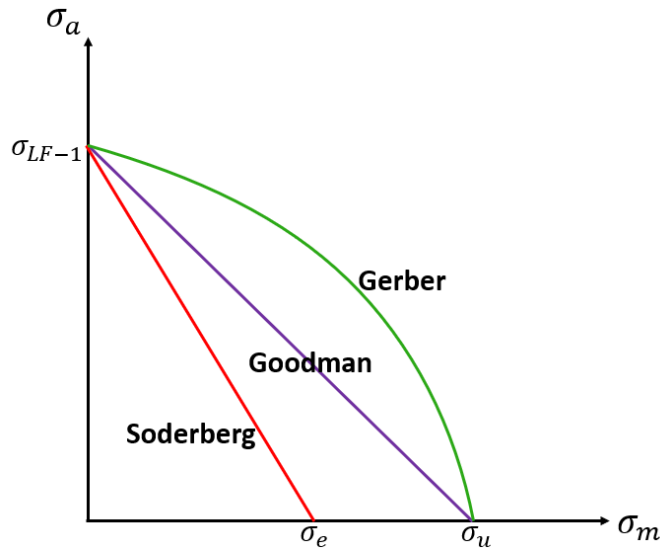


Figura 23 – Curvas de Goodman, Gerber e Soderberg.

As equações referentes às modificações de Gerber e Soderberg são, respectivamente, a Equação 54 e a Equação 55. (Castro e Meggiolaro, 2009)

$$\sigma_a = \sigma_{LF-1} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 \right] \quad (\text{Equação 54})$$

$$\sigma_a = \sigma_{LF-1} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_e} \right) \quad (\text{Equação 55})$$

#### 4.3.3. Previsão de Vida à Fadiga (Uniaxial)

Para carregamentos uniaxiais, é possível utilizar o método da/dN de modo a obter uma previsão de número de ciclos para falha do material. Para tal, é necessário separar as variáveis e integrar a equação de Paris-Erdogan, conforme demonstrado na Equação 56.

$$\int_0^{N_f} dN = \int_{a_i}^{a_c} \frac{1}{C(\Delta K)^m} da \quad (\text{Equação 56})$$

Então, resolvendo a integral e considerando que  $\Delta K = Y\Delta\sigma\sqrt{\pi a}$ , temos que:

$$N_f = \frac{1}{C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m} \int_{a_i}^{a_c} \frac{1}{(Y\sqrt{a})^m} da \quad (\text{Equação 57})$$

Nas equações 56 e 57,  $a_i$  é o comprimento da trinca quando  $\Delta K$  está no limiar de propagação ( $\Delta K_{th}$ ) e  $a_c$  é comprimento da trinca quando  $\Delta K$  atinge o ponto crítico de falha iminente ( $K_c$ ).



Vale ressaltar que  $Y$  é função do tamanho de trinca ( $a$ ), o que não permite, a princípio, que este parâmetro saia da integral. Entretanto, no caso em que  $Y$  é constante,  $Y$  pode sair da integral.

#### 4.3.4. Dano cumulativo

Pode-se dizer que o dano cumulativo ( $D$ ) está diretamente relacionado com a vida remanescente de um componente mecânico, de maneira inversamente proporcional, pois quanto maior o dano, menor a vida que resta ao componente. Tal dano é gerado conforme o material é utilizado ou se encontra em operação. Logo, um material que nunca foi utilizado, ou que não tenha sido submetido a um carregamento, não possui dano acumulado.

Os estudos mais aprofundados e documentados, acerca do dano cumulativo, são creditados a Palmgren, um engenheiro mecânico sueco pioneiro em publicar sobre o acúmulo de dano por fadiga; em 1924. Algumas décadas depois, em 1945, Miner complementou o estudo de Palmgren ao propor o que é conhecido hoje como Lei de Palmgren-Miner; que é um dos conceitos de acúmulo de dano mais utilizados ainda hoje. (Pereira, 2006)

Segundo Palmgren-Miner, pode-se calcular o dano realizado por um bloco de carregamento com amplitude de tensão  $\sigma_{ai}$ , quantidade de ciclos realizados  $n_i$  e número de ciclos para falha  $N_{fi}$  através da equação:

$$D = \frac{n_i}{N_{fi}} \quad (\text{Equação 58})$$

Teoricamente, o dano acumulado total que leva um material a fraturar é igual a 1 ( $0 < D < 1$ ). Logo, se quisermos calcular o dano acumulado em determinado componente devido a  $k$  blocos de carregamento, precisamos realizar a soma de cada parcela de contribuição de dano devido cada bloco de carregamento, utilizando a Equação 59 e conforme exemplifica a Figura 24.

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_{fi}} \quad (\text{Equação 59})$$

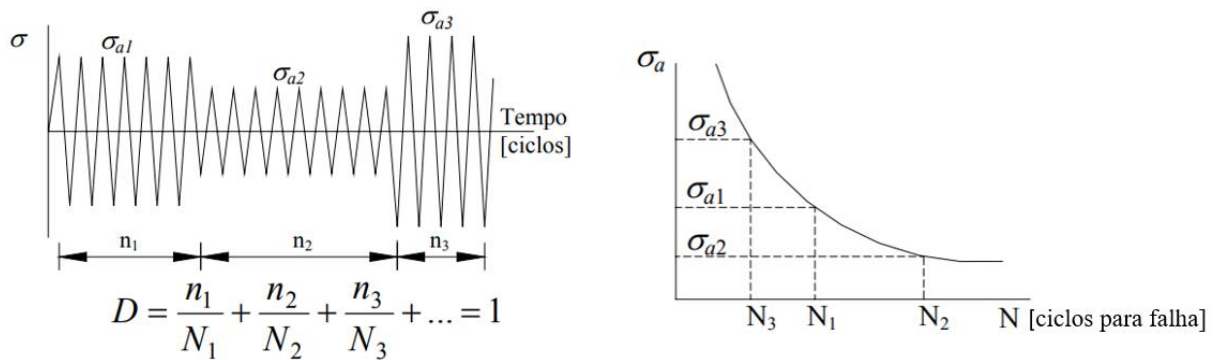


Figura 24 – Representação gráfica para estimativa de dano cumulativo por Palmgren-Miner. Adaptado (Pereira, 2006)

É importante ressaltar que  $N_{fi}$  é equivalente ao número de ciclos necessários para falha ( $N_f$ ) para um dado valor de amplitude de carregamento ( $\sigma_{ai}$ ). Diferentemente de  $n_i$  que é a quantidade de ciclos, efetivamente realizados em um dado bloco de carregamento.

#### 4.4. FADIGA MULTIAXIAL

No âmbito de projetos de componentes mecânicos e estruturas, o uso dos conceitos convencionais de fadiga uniaxial são bastante utilizados e conseguem suprir, em boa parte das vezes, as necessidades quanto à segurança e à viabilidade econômica de tais componentes e estruturas.

Porém, em alguns casos a abordagem por fadiga uniaxial não é suficiente e, nem mesmo, segura de ser utilizada, pois para diversos tipos de componentes mecânicos, como por exemplo eixos virabrequins e outras estruturas, o efeito das tensões multiaxiais não pode ser desprezado, levando à necessidade de maior desenvolvimento nos estudos de fadiga multiaxial.

Embora já existam estudos sobre fadiga multiaxial e até mesmo critérios que busquem prever a falha de componentes mecânicos submetidos à carregamentos multiaxiais, as contribuições nesse campo de estudo ainda não são muito assertivas na prática.

#### 4.4.1. Introdução aos Critérios de Fadiga Multiaxial de Alto Ciclo

Componentes submetidos a baixas amplitudes de tensão tendem a ter vida à fadiga muito maior do que os que são submetidos a amplitudes de tensão elevadas, podendo atingir o regime de altíssimo ciclo, que possui fronteira entre  $10^7$  e  $10^9$  ciclos.

Logo, devido ao elevado número de ciclos, em consonância com a dominância do regime de deformação elástica, o parâmetro de amplitude de deformação plástica pode ser desprezado. Assim, é conveniente que a avaliação do comportamento em fadiga seja realizada considerando a governança das tensões.

Desse modo, os critérios abordados no presente estudo, são todos baseados em tensão, sendo eles:

- Modelo de Findley (1959);
- Modelo de Matake (1977);
- Modelo de McDiarmid (1987);
- Modelo de Papadopoulos (1997);
- Modelo de Carpinteri & Spagnoli (2001); e
- Modelo de Susmel & Lazzarin (2001).

Desses critérios, com exceção de Papadopoulos, todos são baseados em plano crítico, ou seja, as equações dos modelos consideram as tensões impostas ao componente que atuam nos planos materiais mais solicitados quanto à fadiga.

Contudo, Papadopoulos, diferentemente dos demais critérios, considera a deformação plástica acumulada em função dos ciclos de carregamento, de modo que a avaliação do processo de fadiga seja através de uma escala mesoscópica. Assim, o modelo de Papadopoulos desconsidera as tensões que ocorrem em planos críticos e considera as tensões macroscópicas aplicadas ao determinado componente.

Embora haja especificidades em cada modelo, todos são relevantes e adequados para uso prático em projetos mecânicos. Porém, os critérios possuem a limitação de não conseguirem prever um número de ciclos para falha devido uma determinada condição de carregamento.

De modo geral, os critérios analisados no presente estudo têm como objetivo a avaliação do processo de fadiga para vidas, em tese, infinitas. Assim, os modelos

listados são capazes de julgar se um componente suporta ou se falha devido a um determinado carregamento multiaxial.

#### 4.4.2. Conceitos de Planos Críticos

Para o presente estudo foram considerados carregamentos trativos, compressivos e torcionais sendo aplicados segundo a direção do comprimento de corpos de prova (CP) com formato de ampulheta, conforme representado na Figura 25.

Os pontos de interesse do CP são os que experimentam as maiores tensões. Ao considerarmos que as tensões cisalhantes aumentam conforme se aproximam do eixo vertical Z (Figura 26) assim como as tensões normais aumentam com a redução da seção transversal, espera-se que a superfície livre de menor seção transversal contenha os pontos submetidos às maiores tensões; sendo esses os pontos de interesse.

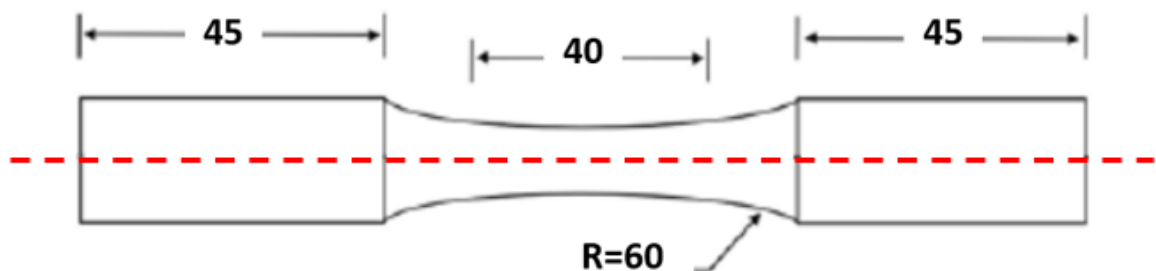


Figura 25 – Desenho técnico de CP do tipo ampulheta com dimensões em *mm*.

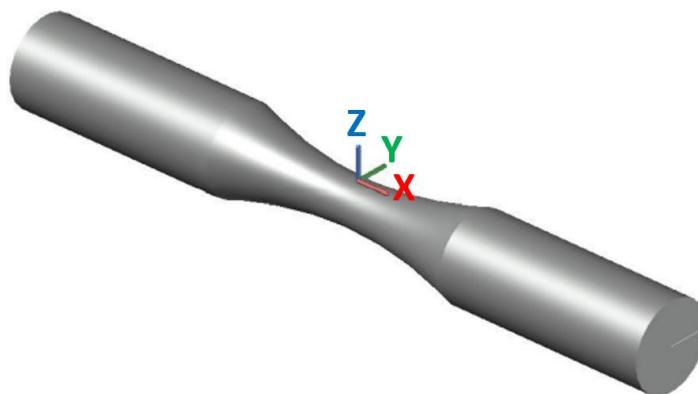


Figura 26 – CP com sistema de coordenadas em um ponto de interesse.

É interessante ressaltar que o sistema de coordenadas, representado na Figura 26, além de estar localizado em um dos pontos de interesse, possui o eixo Z coincidente com a direção radial e que o eixo X é paralelo à linha de centro do CP (linha tracejada de cor vermelha na Figura 25).

Para as condições dispostas, temos que o estado de tensão relativo a carregamentos combinados dos tipos tração-compressão e torção-torção é descrito pela Equação 60. (Papadopoulos, 1997)

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & 0 \\ \tau_{xy}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 60})$$

Onde temos que:

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin(\omega t) \quad (\text{Equação 61})$$

$$\tau_{xy}(t) = \tau_m + \tau_a \sin(\omega t - \beta) \quad (\text{Equação 62})$$

Na equação 61 temos componentes normais, sendo elas: a amplitude de tensão normal ( $\sigma_a$ ) e a tensão normal média ( $\sigma_m$ ). Analogamente, temos componentes cisalhantes na Equação 62, que são: a amplitude de tensão cisalhante ( $\tau_a$ ) e a tensão cisalhante média ( $\tau_m$ ).

Ainda em relação às equações 61 e 62, temos o tempo ( $t$ ), a frequência angular ( $\omega$ ) e o ângulo de defasagem ( $\beta$ ) entre os carregamentos.

Para carregamento em fase, temos que a defasagem é nula ( $\beta = 0$ ). Porém, para carregamentos defasados, temos que  $\beta$  é diferente de zero; conforme representa a Figura 27.

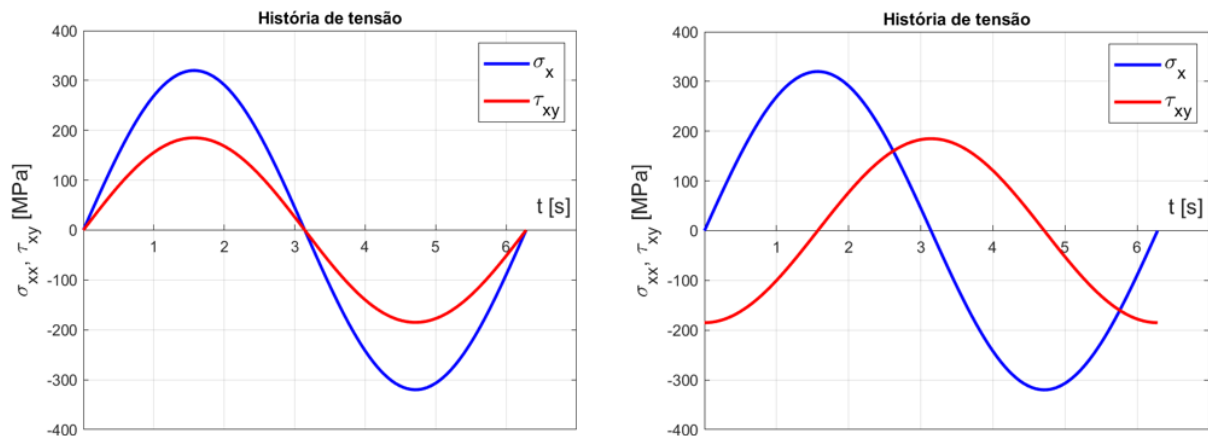


Figura 27 – Gráficos de carregamentos em fase (à esquerda) e defasados (à direita).

Qualquer um dos infinitos planos, que passam pela origem do sistema de coordenadas descrito anteriormente, pode ser definido por um vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ . Tal vetor  $\mathbf{n}$  é definido pela Equação 63 e está representado na Figura 28. (Papadopoulos, 1997)

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \sin(\theta) \sin(\psi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{Equação 63})$$

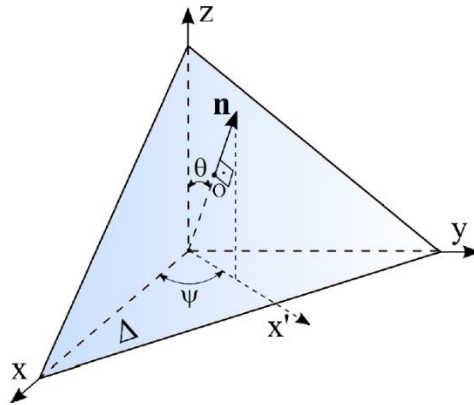


Figura 28 – Exemplo de plano  $\Delta$  definido pelo vetor  $\mathbf{n}$  que é orientado por  $\psi$  e  $\theta$ .

Para cada um dos infinitos planos possíveis, é possível se obter o vetor de tensão ( $\mathbf{s}$ ) respectivo; através da Equação 64.

$$\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) \mathbf{n} \quad (\text{Equação 64})$$

O vetor de tensão  $\mathbf{s}$ , que é variante no tempo, pode ser decomposto em duas componentes, sendo elas: uma componente perpendicular ao plano  $\Delta$ , que é  $\boldsymbol{\sigma}_n(t)$  e uma componente pertencente ao plano  $\Delta$ , que é  $\boldsymbol{\tau}(t)$ . As componentes estão representadas pela Figura 29 e são descritas pelas equações:

$$\boldsymbol{\sigma}_n(t) = \mathbf{s}(t) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{Equação 65})$$

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{s}(t) - \boldsymbol{\sigma}_n(t) \quad (\text{Equação 66})$$

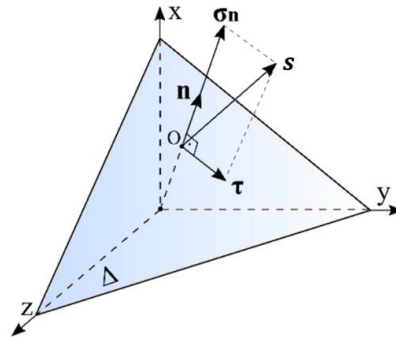


Figura 29 - Vetor  $s$  e suas componentes  $\sigma_n$  e  $\tau$ .

Devido à variação do vetor de tensão ( $s$ ) no tempo,  $\sigma_n$  e  $\tau$  também devem variar. Assim, ao longo de cada ciclo de carregamento, a componente normal ( $\sigma_n$ ) varia em módulo e a componente cisalhante ( $\tau$ ) varia em módulo e direção.

A variação da componente cisalhante ( $\tau$ ) descreve uma trajetória no plano  $\Delta$ ; conforme ilustra a Figura 30. Tal trajetória é utilizada para se obter a amplitude de tensão cisalhante ( $C_a$ ) a qual o plano  $\Delta$  está submetido. (Papadopoulos, 1997)

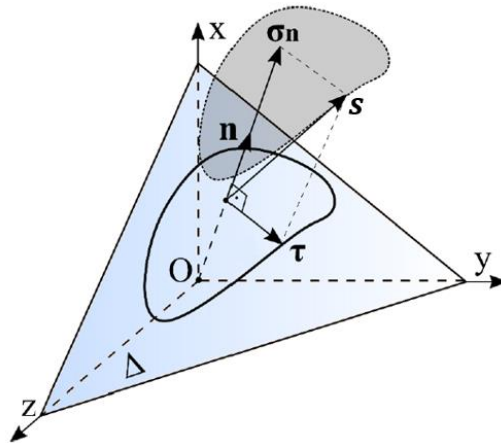


Figura 30 – Trajetória descrita por  $\tau$  no plano  $\Delta$  devido aos carregamentos cíclicos.

Desse modo, para o estado de tensão apresentado na Equação 60, associado à condição de carregamento combinado (tração-compressão combinado com torção-torção), tem-se que a amplitude de tensão cisalhante ( $C_a$ ) pode ser obtida através da Equação 67. (Papadopoulos, 1997)

$$C_a = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}} + \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2} - (fq - gp)^2} \quad (\text{Equação 67})$$

A Equação 67 utiliza as funções auxiliares  $f$ ,  $g$ ,  $p$  e  $q$ , que são descritas por:

$$f = \sin \theta \left( -\frac{\sigma_a}{2} \sin 2\psi + \tau_a \cos 2\psi \cos \beta \right) \quad (\text{Equação 68})$$

$$g = -\tau_a \sin \theta \cos 2\psi \sin \beta \quad (\text{Equação 69})$$

$$p = -\frac{1}{2} \sin 2\theta (\sigma_a \cos^2 \psi + \tau_a \sin 2\psi \cos \beta) \quad (\text{Equação 70})$$

$$q = \frac{1}{2} \tau_a \sin 2\theta \sin 2\psi \sin \beta \quad (\text{Equação 71})$$

Acerca de um ciclo de carregamento, é importante que também possamos obter o valor máximo de tensão normal  $N_{max}$  que o plano  $\Delta$  está submetido. Para tal, devemos realizar a soma da amplitude de tensão normal  $N_a$  com a tensão normal média  $N_m$ . (Papadopoulos, 1997)

Assim, temos que:

$$N_a = \sin^2 \theta |\cos \psi| \sqrt{\sigma_a^2 \cos^2 \psi + 4 \tau_a^2 \sin^2 \psi \cos^2 \beta + 2 \sigma_a \tau_a \sin 2\psi \cos \beta} \quad (\text{Equação 72})$$

$$N_m = \sin^2 \theta (\sigma_m \cos^2 \psi + \tau_m \sin 2\psi) \quad (\text{Equação 73})$$

$$N_{max} = N_a + N_m \quad (\text{Equação 74})$$

#### 4.4.3. Determinação de Planos Críticos

Para os métodos baseados em plano crítico, apesar de alguns apresentarem determinada especificidade, é possível se descrever a ideia geral por trás da obtenção de tais planos críticos.

Os critérios listados, que são baseados em planos críticos, possuem equações com dependência da amplitude de tensão cisalhante ( $C_a$ ) e do valor máximo de tensão normal ( $N_{max}$ ). Tais parâmetros são os responsáveis pela determinação dos planos críticos, pois as outras variáveis possuem dependência



apenas de propriedades de material do CP. Contudo, para que possamos determinar quais são os valores de  $C_a$  e  $N_{max}$  relativos aos planos críticos, é necessário que façamos  $\psi$  variar de modo a obter os candidatos a plano crítico.

Logo, fixando-se  $\theta$  para valores iguais a  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ , devido ao fato de que as funções auxiliares  $f$ ,  $g$ ,  $p$  e  $q$  são dependentes da função seno, para  $\theta$  e  $2\theta$ , que assume valores máximos em módulo para  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ , é realizada uma varredura com passos curtos de  $\Delta\psi = 1^\circ$ , de  $0^\circ$  até  $179^\circ$ , para cada um dos três ângulos  $\theta$ , de modo a contemplar todo o círculo trigonométrico ( $360^\circ$ ), já que as funções auxiliares também dependem da função seno para  $\psi$  e  $2\psi$ .

A Figura 31 apresenta dados de varredura obtidos através do software MATLAB.

theta	psi	Ca	Nmax
45.0000	0	50.0000	50.0000
45.0000	1.0000	50.0000	49.9848
45.0000	2.0000	50.0000	49.9391
45.0000	3.0000	49.9998	49.8630
45.0000	4.0000	49.9994	49.7567
...			
45.0000	178.0000	50.0000	49.9391
45.0000	179.0000	50.0000	49.9848
90.0000	0	0	100.0000
90.0000	1.0000	1.7450	99.9695
90.0000	2.0000	3.4878	99.8782
90.0000	3.0000	5.2264	99.7261
90.0000	4.0000	6.9587	99.5134
90.0000	5.0000	8.6824	99.2404
90.0000	6.0000	10.3956	98.9074
90.0000	7.0000	12.0961	98.5148
90.0000	8.0000	13.7819	98.0631
90.0000	9.0000	15.4508	97.5528
...			
135.0000	173.0000	49.9945	49.2574
135.0000	174.0000	49.9970	49.4537
135.0000	175.0000	49.9986	49.6202
135.0000	176.0000	49.9994	49.7567
135.0000	177.0000	49.9998	49.8630
135.0000	178.0000	50.0000	49.9391
135.0000	179.0000	50.0000	49.9848

Figura 31 – Exemplo de dados de saída obtidos por varredura com o software MATLAB para tração-compressão simples e  $\sigma_a = 100 \text{ MPa}$ .

#### 4.5. DESCRIÇÃO DOS CRITÉRIOS DE FADIGA MULTIAXIAL

É interessante ressaltar que cada um dos critérios possui especificidades, seja no equacionamento final do modelo, nas premissas utilizadas ou, para os que são baseados em plano crítico, na forma de encontrar o plano crítico.

Porém, um conceito que se estende a todos os modelos é o fato de que, a partir da obtenção das equações finais dos modelos, assim como em qualquer equação, haverá dois lados, o lado esquerdo e o lado direito da equação.

Dessa forma, supondo que, após os cálculos, o lado esquerdo da equação, que é relativo às cargas aplicadas ao componente mecânico, seja maior que o lado direito, que é relativo aos limites de resistência à fadiga, então os modelos denotam que o componente irá falhar por fadiga. Contudo, se o lado direito for maior, os modelos indicam que o material não falha devido às condições de carregamento impostas.

##### 4.5.1. Modelo de Findley

Por Findley, o plano crítico irá ocorrer sempre em  $\theta = 90^\circ$  e é definido através da combinação de dois parâmetros, sendo eles: a amplitude de tensão cisalhante ( $C_a$ ) e a máxima tensão normal ( $N_{max}$ ), de modo que o lado esquerdo da Inequação 1 seja máximo. (Findley, 1959)

$$C_a + kN_{max} \leq f_{Findley} \quad (\text{Inequação 1})$$

Onde temos que:

$$k = \frac{2 - \left(\frac{f-1}{t-1}\right)}{2\sqrt{\frac{f-1}{t-1} - 1}} \quad (\text{Equação 75})$$

$$f_{Findley} = \sqrt{\frac{f_{-1}^2}{4\left(\frac{f-1}{t-1} - 1\right)}} \quad (\text{Equação 76})$$

É importante ressaltar que  $k$  e  $f_{Findley}$  são parâmetros que dependem apenas dos limites de resistência à fadiga em flexão ( $f_{-1}$ ) e em torção ( $t_{-1}$ ) para razão de carregamento igual a -1, que são propriedades de materiais.

Cabe ressaltar que, no presente estudo,  $\sigma_{LF-1} = f_{-1}$ , ou seja, representam o limite de resistência à fadiga em flexão para razão de carregamento igual a -1.

Portanto, segundo Findley, a etapa de nucleação de trinca ocorrerá no plano crítico do ponto em que o componente mecânico sofre maior solicitação. E, dessa forma, o processo de fadiga descrito pela Inequação 1 apontará para a falha do material caso o lado esquerdo da desigualdade for maior que o lado direito.

#### **4.5.2. Modelos de Matake, McDiarmid e Susmel & Lazzarin**

Os três critérios em questão consideram a mesma definição para plano crítico. A rigor, serão candidatos a planos críticos aqueles que experimentarem a maior amplitude de tensão cisalhante ( $C_a$ ). Esta consideração segue a ideia de que danos por fadiga ocorrem por meio de deformações plásticas localizadas, que por sua vez se dão por meio de deslizamento entre planos cristalinos. Desse modo, o plano que experimentar as maiores amplitudes de tensão cisalhante serão aqueles mais sujeitos a experimentarem uma iniciação de trinca por fadiga.

Naturalmente, a presença de tensão média atuando nesses planos também causa uma influência secundária. A rigor, a presença de tensões normais trativas contribui para separar os flancos da trinca, abreviando a vida em fadiga do componente em questão. Desse modo, serão críticos aqueles planos que experimentarem o máximo valor de tensão normal ( $N_{max}$ ) ao longo de todo o ciclo de carregamento, dentre aqueles planos que experimentam a máxima amplitude de tensão cisalhante ( $C_a$ ).

##### **4.5.2.1. Modelo de Matake**

O modelo de Matake atenta-se para o fato de que as trincas são mais prováveis de serem nucleadas nos planos de cisalhamento, por serem locais de maior probabilidade de haver movimento de discordâncias. (Matake, 1977)

Analogamente a Findley, o modelo de Matake denotará falha do componente mecânico quando o lado esquerdo da Inequação 2 for maior que o direito.

$$C_a + \mu N_{max} \leq t_{-1} \quad (\text{Inequação 2})$$

Tal que:

$$\mu = 2 \left( \frac{t_{-1}}{f_{-1}} \right) - 1 \quad (\text{Equação 77})$$

É interessante ressaltar que  $\mu$  depende apenas de propriedades do material, sendo tais propriedades os limites de resistência à fadiga para flexão e para torção;  $f_{-1}$  e  $t_{-1}$  respectivamente.

#### 4.5.2.2. Modelo de McDiarmid

Esse modelo, descrito pela Inequação 3, é bastante similar ao modelo de Matake. Porém, o fator que multiplica o parâmetro  $N_{max}$  é o que difere os dois modelos.

$$C_a + \mu_{MD} N_{max} \leq t_{-1} \quad (\text{Inequação 3})$$

Tal que:

$$\mu_{MD} = \frac{t_{-1}}{2\sigma_u} \quad (\text{Equação 78})$$

#### 4.5.2.3. Modelo de Susmel & Lazzarin

Esse modelo é análogo aos últimos dois modelos apresentados, sendo descrito pela Inequação 4.

$$C_a + \mu_{SL} \frac{N_{max}}{C_a} \leq t_{-1} \quad (\text{Inequação 4})$$

Tal que:

$$\mu_{SL} = t_{-1} - \frac{f_{-1}}{2} \quad (\text{Equação 79})$$

É interessante observar que esse modelo, apesar da similaridade com os modelos apresentados anteriormente, na configuração apresentada, possui um fator multiplicando  $N_{max}$  que não depende apenas de propriedades do material, visto que  $N_{max}$  está sendo dividido por  $C_a$ .

#### 4.5.3. Modelo de Carpinteri & Spagnoli

Analogamente a Findley, nesse modelo os planos críticos ocorrem para  $\theta = 90^\circ$  sempre. Porém esse modelo possui uma variação, em relação aos modelos apresentados anteriormente, quanto à determinação do plano crítico, pois tal determinação ocorre em duas etapas.

Na primeira etapa deve-se encontrar a orientação do plano de fratura ( $\psi_f$ ), através da varredura apresentada na seção 4.4.3.. Esse plano é aquele que experimenta a máxima tensão normal ( $N_{max}$ ) e corresponde àquele em que a trinca se propaga macroscopicamente.

Então, na segunda etapa, deve-se somar um ângulo  $\delta$  à orientação do plano de fratura ( $\psi_f$ ), de modo a obter a orientação do plano crítico ( $\psi_c$ ), conforme indica a Equação 80.

$$\psi_f + \delta = \psi_c \quad (\text{Equação 80})$$

Onde:

$$\delta = 45^\circ \times \left\{ \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{t_{-1}}{f_{-1}} \right)^2 \right] \right\} \quad (\text{Equação 81})$$

Esse critério é descrito pela Inequação 5 abaixo.

$$\sqrt{N_{max}^2 + \left( \frac{f_{-1}}{t_{-1}} \right)^2 C_a^2} \leq f_{-1} \quad (\text{Inequação 5})$$

#### 4.5.4. Modelo de Papadopoulos

Dos modelos apresentados no presente estudo, o de Papadopoulos é o único modelo que independe de plano crítico.

Esse modelo considera a ocorrência de deslizamentos plásticos em contornos de grãos metálicos, ainda que, de forma majoritária, os carregamentos externos tendam a fazer com que o componente desempenhe comportamento elástico. (Papadopoulos, 1997)

O modelo de Papadopoulos depende das amplitudes de tensão macroscópicas normal e cisalhante ( $\sigma_a$  e  $\tau_a$  respectivamente), além de depender dos limites de resistência à fadiga por flexão e por torção ( $f_{-1}$  e  $t_{-1}$  respectivamente) e também depende da tensão hidrostática máxima ( $\sigma_{H,max}$ ); conforme representam a Inequação 6 e as equações 82 e 83.

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_a^2}{3} + \tau_a^2\right)} + \alpha \sigma_{H,max} \leq t_{-1} \quad (\text{Inequação 6})$$

$$\alpha = \frac{t_{-1} - (f_{-1}/\sqrt{3})}{f_{-1}/3} \quad (\text{Equação 82})$$

$$\sigma_{H,max} = \frac{\sigma_a + \sigma_m}{3} \quad (\text{Equação 83})$$

É interessante observar que, para o estado de tensão estudado (tração-compressão combinado com torção-torção, totalmente reversíveis) a tensão hidrostática máxima depende da amplitude de tensão normal macroscópica  $\sigma_a$  e da tensão média  $\sigma_m$ . Além do mais, o parâmetro  $\alpha$  depende apenas dos limites de resistência à fadiga ( $f_{-1}$  e  $t_{-1}$ ) que são propriedades do material.

## 5. MATERIAIS E MÉTODOS

O presente estudo, conforme já mencionado, busca contribuir para a previsão de vida à fadiga de eixos virabrequins (Figura 32), que são componentes mecânicos de grande importância na engenharia.

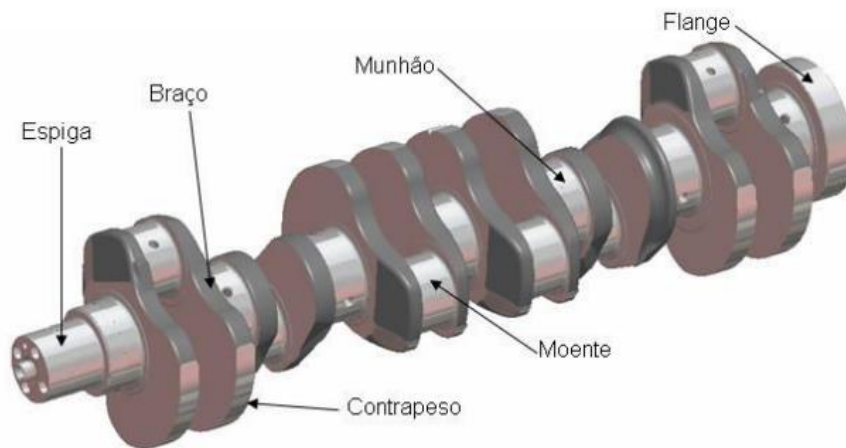


Figura 32 – Eixo virabrequim e seus subcomponentes. (Ferreira, 2008)

O eixo virabrequim, devido à sua função e modo de operação, é um componente mecânico constantemente solicitado por tensões multiaxiais. Tal componente, que é interligado aos pistões por bielas, é capaz de converter a energia propulsora, gerada pela queima de combustível dentro dos pistões, em torque no próprio eixo; conforme representa a Figura 33.

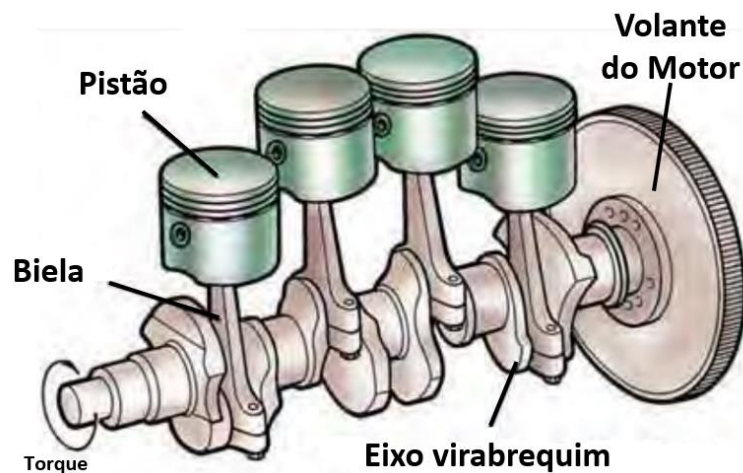


Figura 33 – Eixo virabrequim acoplado a outros componentes. Adaptado (Mahle, 2016)

É importante observar que as posições dos pistões na Figura 33 não estão alinhados. O desalinhamento é proposital, de modo que a sequência de combustões nos pistões proporcione torque em tempo integral no eixo virabrequim.

## 5.1. COMPOSIÇÃO QUÍMICA E PROPRIEDADES MECÂNICAS

Os corpos de prova abordados no presente estudo são feitos de aço DIN 42CrMo4, que é um dos tipos de aço utilizados para fabricação de eixos virabrequins. A composição química do aço DIN 42CrMo4 está apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 – Composição química do aço DIN 42CrMo4. (Castro, 2019)

COMPOSIÇÃO QUÍMICA – AÇO DIN 42CrMo4							
Fe(%)	C(%)	Mn(%)	Si(%)	Cu(%)	Cr(%)	V(%)	Mo(%)
96,9	0,38	0,85	0,27	0,18	0,97	0,01	0,2

Tabela 2 – Propriedades Mecânicas do aço DIN 42CrMo4. (Castro, 2019)

PROPRIEDADES MECÂNICAS – AÇO DIN 42CrMo4				
$\sigma_e$	$\sigma_u$	$E$	$f_{-1}$	$t_{-1}$
715 MPa	906 MPa	210 GPa	365 MPa	227 MPa

## 5.2. MÁQUINAS UTILIZADAS PARA ENSAIOS

Os dados de ensaios abordados no presente estudo foram obtidos através de duas máquinas distintas.

Uma das máquinas foi uma Instron com atuadores servo-hidráulicos e modelo 8874 (Figura 34), que pode realizar ensaios de fadiga tanto em tração-compressão quanto em torção-torção, com ou sem tensão média. Além disso, dependendo do carregamento, tal máquina consegue realizar ensaios com frequências na faixa de 1 a 3 Hz. Essa máquina é capaz de exercer 25 kN de força axial e 100 N.m de torque. Está localizada no Laboratório de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.





Figura 34 – Máquina Instron modelo 8874. (Castro, 2019)

Também se utilizou uma máquina MTS modelo 809 (Figura 35), capaz de realizar testes em tração-compressão e também em torção-torção. Essa máquina possui dois atuadores independentes, um para torção e outro para tração, que atuam ambos na garra inferior da máquina. Os ensaios ocorreram a uma frequência de 5Hz. Essa máquina possui capacidade de aplicar 100 *kN* de força axial e 1100 *N.m* de torque. Tal máquina está localizada no Laboratório SG9, do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Tecnologia, do Campus Darcy Ribeiro – Universidade de Brasília.



Figura 35 – Máquina MTS modelo 809. (Araújo, 2020)

### 5.3.GEOMETRIA DOS CORPOS DE PROVA

Os corpos de prova abordados no presente estudo possuem duas geometrias diferentes. Um dos corpos de prova é denotado por “tipo 1” e o outro por “tipo 2”, sendo representados respectivamente pelas figuras Figura 36 e Figura 37.

Cabe ressaltar que os corpos de prova do tipo 1 foram ensaiados na máquina Instron, que se encontra PUC-Rio. Já os corpos de prova do tipo 2 foram ensaiados na máquina MTS, que se encontra na Universidade de Brasília.

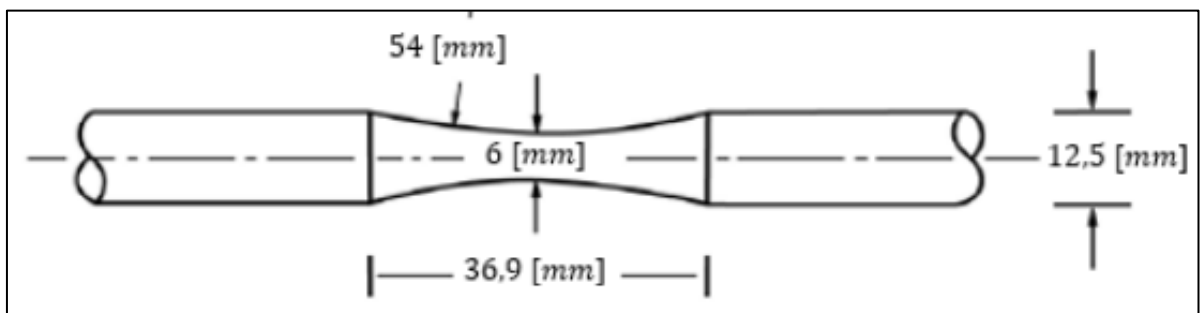


Figura 36 – Geometria do corpo de prova do tipo 1. (Castro, 2019)

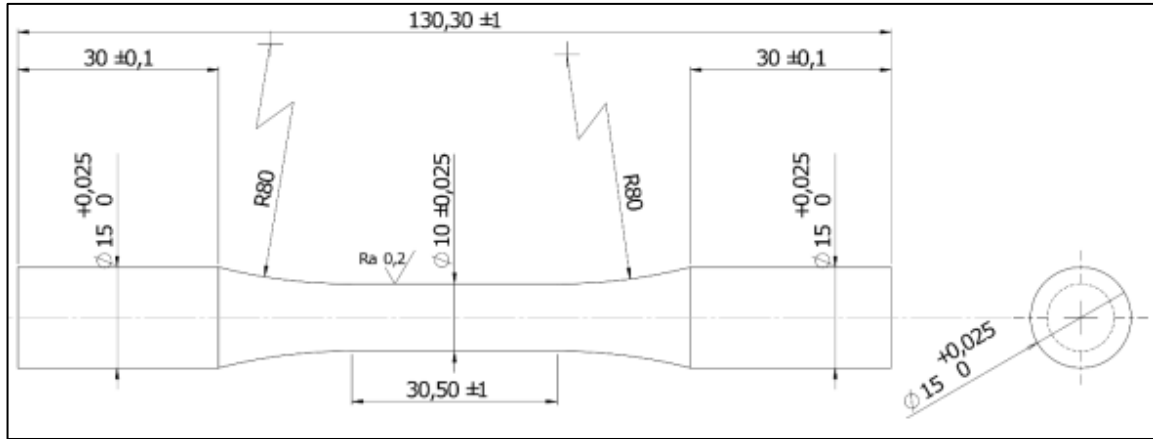


Figura 37 – Geometria do corpo de prova do tipo 2 com dimensões em mm. (Araujo, 2020)

#### 5.4. HIPÓTESE – MÉTODO DA ELIPSE

Conforme demonstrado nas seções anteriores, há dependência da maioria dos métodos apresentados acerca da definição de planos críticos, para que se possa concluir sobre a falha ou não do componente; o que demanda considerável esforço. Além disso, um ponto negativo dos métodos citados, que dependem de plano crítico, é que eles não são capazes de prever um número de ciclos para falha.

Dessa forma, torna-se interessante a busca por novos métodos que, assim como o de Papadopoulos, não sejam dependentes de plano crítico e que, possam ir além, sendo capazes de prever número de ciclos para falha.

Carpinteri & Spagnoli propuseram, em 2013, uma modificação no critério deles mesmos, de modo que o modelo passasse a prever número de ciclos para falha, o que culminou na Inequação 7.

$$\sqrt{N_{max}^2 + \left(\frac{f'_{-1}}{t'_{-1}}\right)^2 C_a^2} \leq f_{-1} \quad (\text{Inequação 7})$$

De modo que:

$$f'_{-1} = f_{-1} \left(\frac{N_f}{N_0}\right)^m \quad (\text{Equação 84})$$

$$t'_{-1} = t_{-1} \left(\frac{N_f}{N_0}\right)^n \quad (\text{Equação 85})$$

Para o modelo modificado de Carpinteri & Spagnoli, temos os parâmetros de resistência à fadiga para vida finita ( $f'_{-1}$  e  $t'_{-1}$ ) substituindo os limites de resistência à fadiga. Além do mais, os novos parâmetros ( $f'_{-1}$  e  $t'_{-1}$ ) são função do número de ciclos para falha ( $N_f$ ), de um número de ciclos usado como referência de valor igual a  $2 \times 10^6$  ( $N_0$ ), e dos expoentes da Equação de Basquin para flexão e para torção ( $m$  e  $n$  respectivamente). (Castro, 2019)

Então, Castro (2019), utilizando como base o método de Carpinteri & Spagnoli, buscou por uma função que pudesse prever o número de ciclos para falha e que utilizasse apenas os parâmetros macroscópicos de amplitude de tensão ( $\sigma_a$  e  $\tau_a$ ). Para tal, utilizou-se valores de  $N_f$  provenientes de ensaios de fadiga realizados previamente. (Castro, 2019)

Em seguida, escolhendo-se valores prévios para  $\sigma_a$  (Exemplo: fixar  $\sigma_a = 100 \text{ MPa}$ ) e fazendo com que  $\tau_a$  variasse, de 0 até um valor que retornasse a vida  $N_f$  obtida com o ensaio de fadiga escolhido, foi realizado todo o método para encontrar planos críticos e utilizou-se o modelo modificado de Carpinteri & Spagnoli. (Castro, 2019)

Assim, para diferentes combinações de  $\sigma_a$  e  $\tau_a$ , foi-se realizando o método para obtenção da vida  $N_f$  respectiva ao, previamente realizado, ensaio de fadiga com CP de aço DIN 42CrMo4; conforme exemplifica a Tabela 3.

Cabe ressaltar, que o  $N_f$ , obtido em ensaio de fadiga, escolhido por Castro (2019) para se realizar as iterações com  $\sigma_a$  e  $\tau_a$ , foi de 37.097 ciclos.

Tabela 3 – Pares de  $\sigma_a$  e  $\tau_a$  obtidos para  $N_f$  fixo de 37.097 ciclos. (Castro, 2019)

$\sigma_a$ [MPa]	$\tau_a$ [MPa]	$\phi_c$ [°]	$\sigma_{mises}$ [MPa]	$N_f$ [ciclos]
554,18	0,00	48,62	554,18	37.097
546,13	58,64	42,52	555,49	37.097
520,55	117,05	36,52	558,63	37.097
475,44	175,58	30,42	564,38	37.097
405,19	234,10	24,02	573,23	37.097
292,86	292,63	16,92	585,38	37.097
200,00	323,02	12,22	594,17	37.097
132,41	337,69	9,12	599,70	37.097
66,21	346,80	6,32	604,32	37.097
0,00	351,16	3,62	608,22	37.097

Dessa forma, ao plotar os pontos  $(\sigma_a, \tau_a)$  em um gráfico, foi obtido por Castro (2019), o perfil de curva representado pela Figura 38.

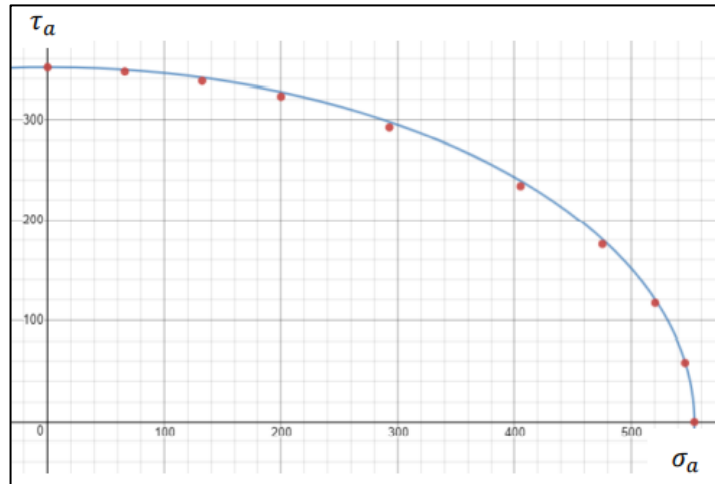


Figura 38 – Gráfico referente aos pares  $(\sigma_a, \tau_a)$  obtidos para  $N_f = 37.097$ . (Castro, 2019)

Logo, a partir dos pontos obtidos, Castro (2019), obteve que a curva é descrita por:

$$\frac{\sigma_a^2}{554,18^2} + \frac{\tau_a^2}{351,16^2} = 1, \quad \forall \sigma_a \geq 0, \forall \tau_a \geq 0 \quad (\text{Equação 86})$$

Cabe ressaltar que a equação geral da elipse é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Equação 87})$$

Além da característica elíptica da curva, vale destacar, que os pontos sobre os eixos correspondem a condições de carregamento uniaxial, ou seja, para um carregamento tração-compressão com amplitude de tensão igual a 554,18 MPa, a partir da curva obtida, o componente mecânico teria uma vida à fadiga de 37.097 ciclos e, de forma análoga, para um carregamento puramente de torção com amplitude de tensão igual a 351,16 MPa, o componente teria  $N_f = 37.097$  ciclos, em teoria.

É importante ressaltar que, no estudo de Castro (2019), foram obtidas curvas de Wöhler a partir de ensaios com corpos de prova de aço DIN 42CrMo4. Obteve-se uma curva para flexão pura e outra para torção pura.

Desse modo, a partir das curvas de Wöhler, foram obtidas as equações:

$$\sigma_a = 1183,6N_f^{-0,081} \quad (\text{Equação 88})$$

$$\tau_a = 1089,4N_f^{-0,108} \quad (\text{Equação 89})$$

O presente estudo tem por objetivo validar as previsões de vida em fadiga obtidos através do Método da Elipse, formulado por Castro, Pereira e Darwish (trabalho submetido e em revisão).

Este método propõe a generalização da elipse proposta por Castro (2019) para qualquer valor de vida em fadiga, através da substituição dos parâmetros “a” e “b”, da equação geral da elipse (Equação 88), pelos respectivos valores de  $\sigma_a$  e  $\tau_a$  das curvas de Wöhler de um determinado material. Um exemplo da proposta é descrito pela Equação 90, para o material aço DIN 42CrMo4, para um CP do tipo 1 (a seção 5.3 descreve o CP do tipo 1)

$$\frac{\sigma_a^2}{(1183,6N_f^{-0,081})^2} + \frac{\tau_a^2}{(1089,4N_f^{-0,108})^2} = 1 \quad (\text{Equação 90})$$

## 5.5. CONDIÇÕES DE CARREGAMENTO

Conforme mencionado anteriormente, um dos objetivos do presente estudo é testar a qualidade da previsão de número de ciclos para falha obtida pelo método da elipse, cuja hipótese foi formulada por Castro, Pereira e Darwish (trabalho submetido e em revisão).

Para realizar tal teste de qualidade, foram realizados ensaios de fadiga em máquinas capazes de solicitar os corpos de prova a carregamentos combinados dos tipos tração-compressão e torção-torção. A seção 5.2 contém a descrição das máquinas utilizadas para os ensaios.

Dessa forma, buscando-se obter dados de  $\sigma_a$  e  $\tau_a$  teóricos, associados a vidas em fadiga previamente estipuladas e separadas aproximadamente por uma ordem de grandeza, 40.000 e 200.000 ciclos para falha, utilizou-se o método da elipse (Equação 91 e Equação 92) para obter pares de  $\sigma_a$  e  $\tau_a$  respectivos aos dois números de ciclos para falha. A equação 91 refere-se aos corpos de prova do tipo 1, enquanto a equação 92 está associada a corpos de prova do tipo 2, descritos em etapa anterior do presente trabalho.

$$\frac{\sigma_a^2}{[1183,6(40000)^{-0,081}]^2} + \frac{\tau_a^2}{[1089,4(40000)^{-0,108}]^2} = 1 \quad (\text{Equação 91})$$

$$\frac{\sigma_a^2}{[1258(200000)^{-0,0868}]^2} + \frac{\tau_a^2}{[696(200000)^{-0,064}]^2} = 1 \quad (\text{Equação 92})$$

Então, como as equações obtidas possuem duas variáveis ( $\sigma_a$  e  $\tau_a$ ), traçaram-se, junto de cada curva de elipse obtida (Equação 91 e Equação 92), retas de modo a identificar pontos espaçados em cada arco de elipse que fossem objeto de estudo; conforme exemplificam a Figura 39 e a Figura 40. Tais pontos, obtidos pela interseção das retas com as elipses estão representados nas linhas da Tabela 4 através dos pares  $\sigma_a$  e  $\tau_a$ .

É importante lembrar que foram utilizados corpos de prova de geometria diferentes para os ensaios de  $N_f = 40$  mil ciclos e  $N_f = 200$  mil ciclos. Para os ensaios com vida teórica de 40 mil ciclos foram usados CPs do tipo 1 e para o os ensaios com vida teórica de 200 mil ciclos foram usados CPs do tipo 2. Portanto, esse é o motivo pelo qual temos equações de elipse com índices e expoentes completamente diferentes.

Cabe ressaltar que o número de retas traçadas, que equivale ao número de condições de carregamento escolhidas, também está associado ao número de corpos de prova (CP), do tipo 1 e do tipo 2, disponíveis para ensaio de fadiga.

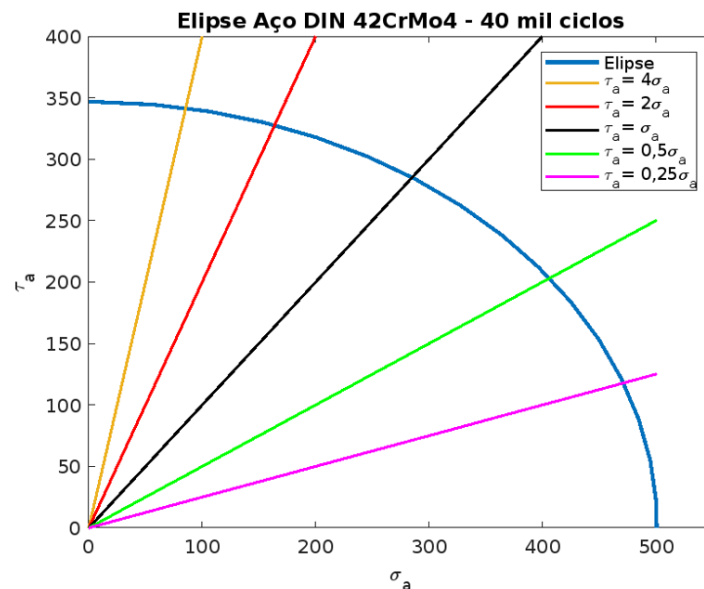


Figura 39 – Gráfico da elipse, com retas cruzando pontos de estudo, para  $N_f=40$  mil ciclos.

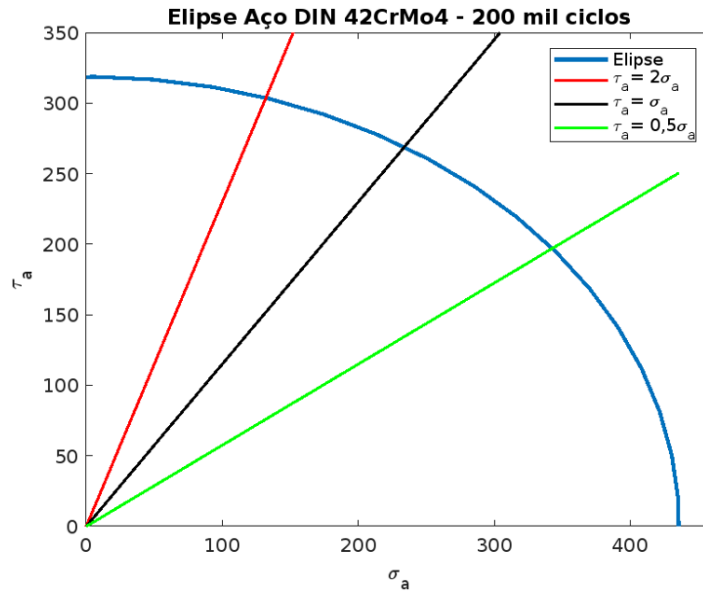


Figura 40 – Gráfico da elipse, com retas cruzando pontos de estudo, para  $N_f=200$  mil ciclos.

As retas utilizadas para interceptar a elipse de  $N_f=40$  mil ciclos e obter as condições de carregamento (pontos de estudo) são representadas por:

$$\tau_a = r_{40}\sigma_a \quad | \quad (r_{40} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2 \text{ e } 4) \quad (\text{Equação 93})$$

As retas utilizadas para interceptar elipse de  $N_f=200$  mil ciclos e obter outras condições de carregamento são representadas por:

$$\tau_a = r_{200}\sigma_a \quad | \quad (r_{200} = \frac{1}{2}, 1 \text{ e } 2) \quad (\text{Equação 94})$$

Além do mais, para ambas as elipses, também se considerou a condição para o carregamento de tração-compressão puro, que equivale ao ponto de cada elipse que intercepta o eixo das ordenadas ( $\tau_a$ ), tal que  $\sigma_a = 0$ .

A Tabela 4 apresenta as condições de carregamento, que são respectivas aos pontos em que as retas descritas pelas equações 93 e 94 cruzam os gráficos das elipses para  $N_f=40$  mil ciclos e  $N_f=200$  mil ciclos.



Tabela 4 – Condições de carregamento utilizadas nos ensaios de fadiga.

Nº	CONDIÇÕES DE CARREGAMENTO			
	$N_f = 40$ mil ciclos		$N_f = 200$ mil ciclos	
	$\sigma_a$ [MPa]	$\tau_a$ [MPa]	$\sigma_a$ [MPa]	$\tau_a$ [MPa]
1	0,0	346,7	0,0	318,7
2	85,4	341,7	149,7	299,3
3	163,9	327,7	257,3	257,3
4	285,2	285,2	359,9	179,9
5	406,3	203,2	-	-
6	471,6	117,9	-	-
7	501,4	0,0	-	-

## 5.6. MODIFICAÇÕES DOS CRITÉRIOS PARA PREVISÃO DE $N_f$

De modo a fazer com que todos os critérios, abordados no presente estudo, possam prever o número de ciclos para falha ( $N_f$ ), se propõe a substituição dos limites de resistência à fadiga por funções de Wöhler, ou seja, os limites de resistência à fadiga serão substituídos, em cada um dos modelos dependentes de plano crítico, pelas equações:

$$f'_{-1} = AN_f^m \quad (\text{Equação 95})$$

$$t'_{-1} = BN_f^n \quad (\text{Equação 96})$$

É interessante reparar que as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $m$  e  $n$  são justamente as constantes obtidas em curvas de Wöhler para um determinado material. Ademais, os modelos que antes eram inequações, agora serão representados por equações, pois o objetivo não será mais comparar os lados esquerdo e direito das inequações e sim definir um número de ciclos para falha.

### 5.6.1. Modificação para Matake

$$C_a + \left[ 2 \frac{B}{A} N_f^{n-m} - 1 \right] N_{max} - BN_f^n = 0 \quad (\text{Equação 97})$$

### 5.6.2. Modificação para Findley

$$C_a + \left[ \frac{2 - \left(\frac{A}{B} N_f^{m-n}\right)}{2 \sqrt{\frac{A}{B} N_f^{m-n} - 1}} \right] N_{max} - \sqrt{\frac{(AN_f^m)^2}{4 \left(\frac{A}{B} N_f^{m-n} - 1\right)}} = 0 \quad (\text{Equação 98})$$

### 5.6.3. Modificação para McDiarmid

$$C_a + \left( \frac{BN_f^n}{2\sigma_u} \right) N_{max} - BN_f^n = 0 \quad (\text{Equação 99})$$

### 5.6.4. Modificação para Susmel & Lazzarin

$$C_a + \left( BN_f^n - \frac{AN_f^m}{2} \right) \frac{N_{max}}{C_a} - BN_f^n = 0 \quad (\text{Equação 100})$$

### 5.6.5. Modificação para Papadopoulos

$$\sqrt{\left( \frac{\sigma_a^2}{3} + \tau_a^2 \right)} + \frac{BN_f^n - (AN_f^m/\sqrt{3})}{AN_f^m/3} \left( \frac{\sigma_a + \sigma_m}{3} \right) - BN_f^n = 0 \quad (\text{Equação 101})$$

## 6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Conforme já mencionado, o presente estudo tem como objetivo, propor e avaliar modificações em alguns critérios de fadiga multiaxial e, também, avaliar um novo critério de fadiga multiaxial chamado de Método da Elipse.

A partir das modificações nos critérios de fadiga multiaxial de alto ciclo (seção 5.6), é possível testá-los quanto à qualidade de previsão de número de ciclos para falha ( $N_f$ ).

Cabe ressaltar que o presente estudo não propôs modificação para o critério de Carpinteri & Spagnoli, uma vez que a modificação proposta pelos próprios autores, em 2013, tornou o modelo capaz de prever número de ciclos para falha ( $N_f$ ).

Dessa forma, essa parte do presente estudo busca comparar o novo método proposto (Método da Elipse), tanto com os métodos modificados, quanto com o método de Carpinteri & Spagnoli. Tal comparação será feita através de dados experimentais obtidos nos ensaios de fadiga com dois tipos de CP (tipo 1 e tipo 2), utilizando as máquinas apresentadas na seção 5.2, para as condições de carregamento apresentadas na Tabela 4.

A Tabela 5 apresenta os resultados experimentais obtidos, para os dois tipos de corpos de prova e  $N_f$ , além de apresentar as previsões teóricas obtidas com: os métodos modificados, método de Carpinteri & Spagnoli e método da Elipse. Foram realizados 23 ensaios de fadiga, 16 com CPs do tipo 1 e outros 7 ensaios com CPs do tipo 2.

Tabela 5 – Números de ciclos para falha teóricos e experimentais para cada condição de carregamento e CP.

Cód. CP			Condição de carregamento		Número de Ciclos para Falha							
T	C	N	$\sigma_a$ [Mpa]	$\tau_a$ [Mpa]	F	M	McD	S&L	C&S	P	E	Exp.
1	A	1	0,0	346,7	44.266	40.180	40.180	40.180	41.752	40.180	40.000	48.561
1	A	2	0,0	346,7	44.266	40.180	40.180	40.180	41.752	40.180	40.000	42.644
1	A	3	0,0	346,7	44.266	40.180	40.180	40.180	41.752	40.180	40.000	37.193
1	B	4	85,4	341,7	30.199	25.953	33.409	29.521	40.173	31.994	40.000	54.890
1	B	5	85,4	341,7	30.199	25.953	33.409	29.521	40.173	31.994	40.000	41.458
1	C	6	163,9	327,7	24.374	21.356	33.268	26.287	40.997	27.700	40.000	79.676
1	C	7	163,9	327,7	24.374	21.356	33.268	26.287	40.997	27.700	40.000	73.427
1	D	8	285,2	285,2	20.600	17.537	40.141	23.736	48.210	25.420	40.000	73.721
1	D	9	285,2	285,2	20.600	17.537	40.141	23.736	48.210	25.420	40.000	71.097
1	E	10	406,3	203,2	24.620	20.907	74.002	27.039	68.623	28.992	40.000	60.628
1	E	11	406,3	203,2	24.620	20.907	74.002	27.039	68.623	28.992	40.000	86.588
1	F	12	471,6	117,9	34.507	30.373	137.526	34.010	85.772	35.286	40.000	100.354
1	F	13	471,6	117,9	34.507	30.373	137.526	34.010	85.772	35.286	40.000	32.153
1	F	14	471,6	117,9	34.507	30.373	137.526	34.010	85.772	35.286	40.000	89.422
1	G	15	501,4	0,0	44.241	40.290	203.657	40.290	103.299	40.290	40.000	31.376
1	G	16	501,4	0,0	44.241	40.290	203.657	40.290	103.299	40.290	40.000	64.748
2	H	17	0,0	318,7	333.606	199.722	199.722	199.722	211.536	199.722	200.000	190.806
2	H	18	0,0	318,7	333.606	199.722	199.722	199.722	211.536	199.722	200.000	213.990
2	H	19	0,0	318,7	333.606	199.722	199.722	199.722	211.536	199.722	200.000	145.776
2	I	20	149,7	299,3	93.228	70.712	171.260	99.498	215.479	101.453	200.000	326.157
2	I	21	149,7	299,3	93.228	70.712	171.260	99.498	215.479	101.453	200.000	422.563
2	J	22	257,3	257,3	80.094	62.455	305.264	95.495	311.801	98.026	200.000	247.769
2	J	23	359,9	179,9	119.156	92.433	1.262.064	128.734	534.200	130.397	200.000	502.399

**Legenda**

Cód. CP - Código do corpo de prova

T - Tipo do corpo de prova

C - Condição de carregamento

N - Número do experimento

$\sigma_a$  - Amplitude de tensão normal macroscópica

$\tau_a$  - Amplitude de tensão cisalhante macroscópica

F - Findley

M - Matake

McD - McDiarmid

S&L - Susmel & Lazzarin

C&S - Carpinteri & Spagnoli

P - Papadopoulos

E - Elipse

Exp. - Experimental

A Figura 41 apresenta uma análise gráfica acerca dos resultados apresentados na Tabela 5.

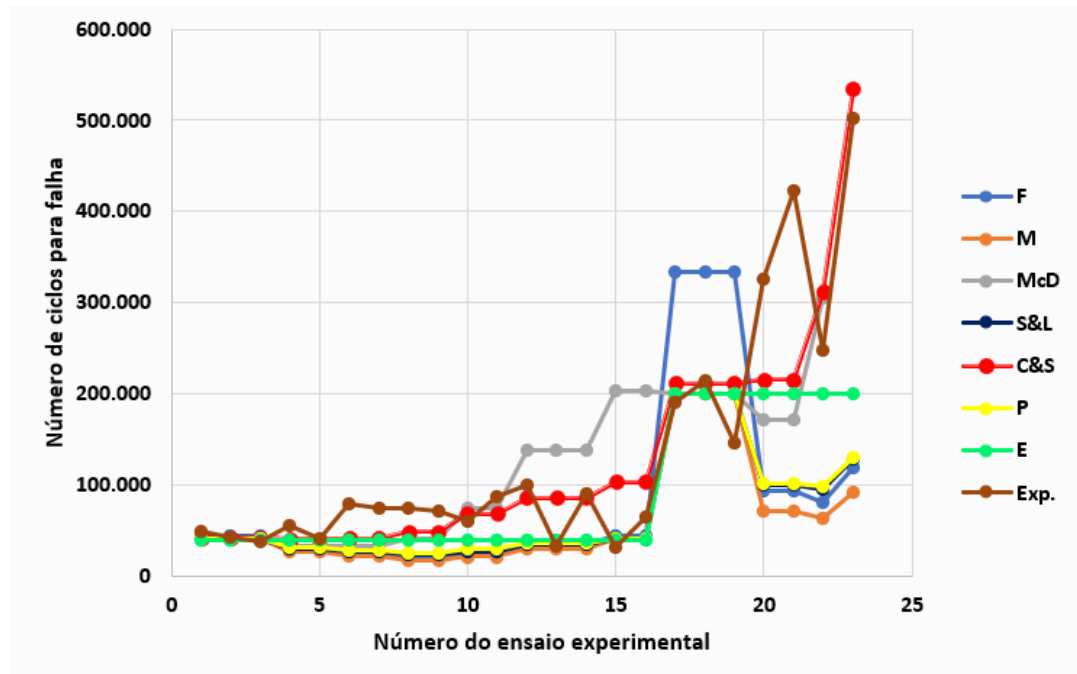


Figura 41 – Gráfico de  $N_f$  versus Número do ensaio experimental.

Conforme pode ser observado, C&S possui o perfil de curva que mais se aproxima da curva gerada com os ensaios experimentais.

Cabe ressaltar que, no gráfico da Figura 41, o dado do último ensaio (ensaio número 23), para o modelo de McDiarmid foi suprimido, pois tal dado experimental possui alto grau de dispersão, o que estava alterando muito a escala do gráfico e dificultando a visualização das outras curvas; o que justifica a supressão.

De modo a averiguar a diferença percentual entre os resultados teóricos de cada método e os resultados experimentais, é interessante que observemos os índices de erro, respectivos a cada ensaio realizado, em relação a cada previsão teórica de cada método. Para tal, utilizou-se a Equação 102 para o cálculo do índice de erro ( $I.E.$ ).

$$I.E. = \frac{N_{fTeórico} - N_{fExp}}{N_{fExp}} \quad (\text{Equação 102})$$

A Tabela 6 apresenta os índices de erro, respectivos a cada uma das previsões de  $N_f$  teóricas, em relação aos números de ciclos para falha obtidos experimentalmente; para cada CP e condição de carregamento.

Tabela 6 – Índices de erro entre previsões de  $N_f$  teóricas e resultados experimentais para cada condição de carregamento e CP.

Cód. CP			Condição de carregamento		Índice de erro entre previsão e resultado experimental						
T	C	N	$\sigma_a$ [Mpa]	$\tau_a$ [Mpa]	F	M	McD	S&L	C&S	P	E
1	A	1	0,0	346,7	-8,84%	-17,26%	-17,26%	-17,26%	-14,02%	-17,26%	-17,63%
1	A	2	0,0	346,7	3,80%	-5,78%	-5,78%	-5,78%	-2,09%	-5,78%	-6,20%
1	A	3	0,0	346,7	19,02%	8,03%	8,03%	8,03%	12,26%	8,03%	7,55%
1	B	4	85,4	341,7	-44,98%	-52,72%	-39,13%	-46,22%	-26,81%	-41,71%	-27,13%
1	B	5	85,4	341,7	-27,16%	-37,40%	-19,41%	-28,79%	-3,10%	-22,83%	-3,52%
1	C	6	163,9	327,7	-69,41%	-73,20%	-58,25%	-67,01%	-48,55%	-65,23%	-49,80%
1	C	7	163,9	327,7	-66,81%	-70,92%	-54,69%	-64,20%	-44,17%	-62,28%	-45,52%
1	D	8	285,2	285,2	-72,06%	-76,21%	-45,55%	-67,80%	-34,60%	-65,52%	-45,74%
1	D	9	285,2	285,2	-71,03%	-75,33%	-43,54%	-66,61%	-32,19%	-64,25%	-43,74%
1	E	10	406,3	203,2	-59,39%	-65,52%	22,06%	-55,40%	13,19%	-52,18%	-34,02%
1	E	11	406,3	203,2	-71,57%	-75,85%	-14,54%	-68,77%	-20,75%	-66,52%	-53,80%
1	F	12	471,6	117,9	-65,61%	-69,73%	37,04%	-66,11%	-14,53%	-64,84%	-60,14%
1	F	13	471,6	117,9	7,32%	-5,54%	327,72%	5,78%	166,76%	9,74%	24,41%
1	F	14	471,6	117,9	-61,41%	-66,03%	53,79%	-61,97%	-4,08%	-60,54%	-55,27%
1	G	15	501,4	0,0	41,00%	28,41%	549,09%	28,41%	229,23%	28,41%	27,49%
1	G	16	501,4	0,0	-31,67%	-37,77%	214,54%	-37,77%	59,54%	-37,77%	-38,22%
2	H	17	0,0	318,7	74,84%	4,67%	4,67%	4,67%	10,86%	4,67%	4,82%
2	H	18	0,0	318,7	55,90%	-6,67%	-6,67%	-6,67%	-1,15%	-6,67%	-6,54%
2	H	19	0,0	318,7	128,85%	37,01%	37,01%	37,01%	45,11%	37,01%	37,20%
2	I	20	149,7	299,3	-71,42%	-78,32%	-47,49%	-69,49%	-33,93%	-68,89%	-38,68%
2	I	21	149,7	299,3	-77,94%	-83,27%	-59,47%	-76,45%	-49,01%	-75,99%	-52,67%
2	J	22	257,3	257,3	-67,67%	-74,79%	23,21%	-61,46%	25,84%	-60,44%	-19,28%
2	J	23	359,9	179,9	-76,28%	-81,60%	151,21%	-74,38%	6,33%	-74,05%	-60,19%
				MÉDIA =	-26,63%	-42,43%	44,20%	-37,32%	10,44%	-35,86%	-24,20%

#### Legenda

Cód. CP - Código do corpo de prova

T - Tipo do corpo de prova

C - Condição de carregamento

N - Número do experimento

$\sigma_a$  - Amplitude de tensão normal macroscópica

$\tau_a$  - Amplitude de tensão cisalhante macroscópica

F - Findley

M - Mataké

McD - McDiarmid

S&L - Susmel & Lazzarin

C&S - Carpinteri & Spagnoli

P - Papadopoulos

E - Elipse

Exp. - Experimental

Conforme pode ser observado, a partir dos dados de ensaios obtidos, os índices de erro médios, para cada critério, de forma geral, não ultrapassaram 45%.

Cabe ressaltar que, para a situação do presente estudo, previsões conservadoras são aquelas que retornam valores de número de ciclos para falha ( $N_{fTeóricas}$ ) menores do que os valores obtidos com os ensaios experimentais ( $N_{fExp}$ ).

Logo, é importante observar que as previsões com índice de erro positivos, por si só, não são boas do ponto de vista de engenharia, pois não é prudente se ter uma previsão que diz que o componente irá resistir mais do que de fato ele resiste.

Dessa forma, outra análise possível, se dá a partir de um gráfico que nos mostra, para cada critério, o percentual de previsões que retornaram valores dentro de uma faixa de segurança. Tal faixa foi estipulada como sendo de -50% a 0% de índice de erro; conforme apresenta a Figura 42.

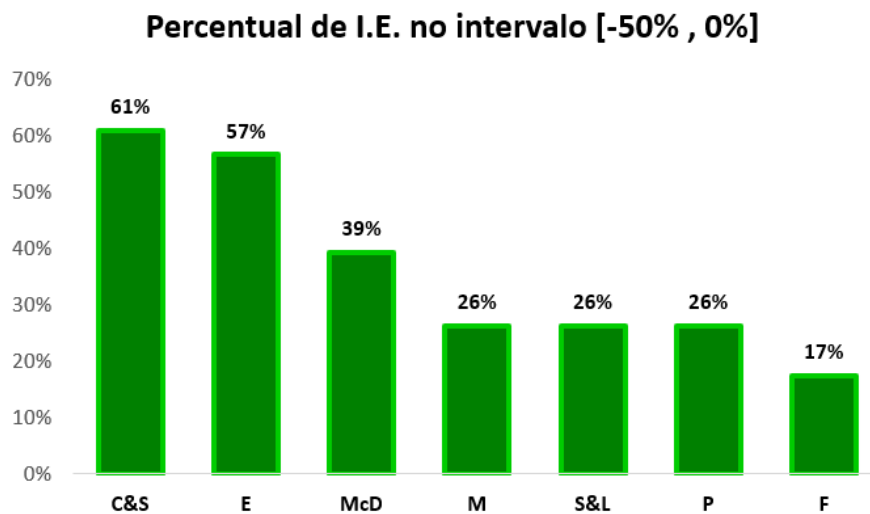


Figura 42 – Percentual de I.E. no intervalo [-50%,0%] para cada critério.

As previsões provenientes do método da Elipse apresentam mais erro para condições de carregamento afastadas dos eixos, i.e., apresenta erros maiores para condições de carregamento com razão  $\tau_a/\sigma_a$  mais próximas de 1. Naturalmente, para condições de carregamento mais próximas de carregamentos puramente trativos-compressivos ou puramente torcionais, o método da elipse apresentou melhor desempenho; para a gama de ensaios realizados para o presente estudo.

Através da Tabela 6, é possível se analisar mais rapidamente quais foram os métodos, de previsão de  $N_f$ , que apresentaram resultados mais ou menos conservadores, a partir das médias dos índices de erro obtidas; conforme representa a Tabela 7.

Tabela 7 – Lista dos índices de erro médios, para cada critério, em ordem crescente de conservadorismo.

#	CRITÉRIO	Índice de Erro Médio
1	McDiarmid	44,20%
2	Carpinteri & Spagnoli	10,44%
3	Elipse	-24,20%
4	Findley	-26,63%
5	Papadopoulos	-35,86%
6	Susmel & Lazzarin	-37,32%
7	Matake	-42,43%

Conforme pode ser observado, para os ensaios realizados, no geral o modelo de Matake apresentou resultados mais conservadores que os demais modelos, pois a média de seus respectivos índices de erro retornou o maior valor negativo. Contudo, o método da elipse, para os ensaios realizados, se mostrou o mais preciso dentre os que apresentaram valores conservativos para média do *I.E.*.

Contudo, do ponto de vista de engenharia, um bom método deve ter uma previsão próxima do real, porém com um valor abaixo do número de ciclos para falha que se experimentaria na prática, de modo a se considerar um fator de segurança no modelo de previsão.

Dessa forma, o método que apresentou o melhor desempenho, sem a utilização de um fator de correção aplicado, para a gama de ensaios analisados, foi o método da Elipse.

## 7. CONCLUSÃO

Ressaltando-se que as conclusões em questão se referem ao material aço DIN 42CrMo4, com as propriedades mecânicas dispostas. É possível que a ordenação da Tabela 7 mude se o material for outro (ex.: se o material for menos dúctil). A partir dos resultados obtidos e da análise realizada, conclui-se que:

- O modelo de Carpinteri & Spagnoli é o mais preciso, mas apresenta uma tendência levemente não conservadora. Adicionalmente, possui o equacionamento mais complicado dentre todos os critérios considerados, uma vez que depende de etapas adicionais para a determinação de plano crítico.
- Embora menos preciso que C&S, o critério da elipse tem um comportamento predominantemente conservador e sua aplicação é bastante simples, uma vez que uma simples varredura para o valor de  $N$  permite identificar o valor de  $N_f$ , correspondente ao número de ciclos para falha, associado a uma dada condição de carregamento combinada  $(\sigma_a, \tau_a)$ , síncrona e totalmente reversível.



## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DOWLING, N. E. – Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue for Deformation, Fracture and Fatigue –3 rd ed. 2007. Prentice Hall, p 357-548.
- [2] MATAKE, T. An explanation on fatigue limit under combined stress. Bull JSME, 1977; 20: 257-63. Citado em: Carpinteri, A. Spagnoli, A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. International Journal of Fatigue, v.23, p. 130- 145, 2001.
- [3] McDiarmid, D. L. Fatigue under out-of-phase bending and torsion. Fatigue Fract Engng Mater Struct, v.9, p. 447-475, 1987.
- [4] PAPADOPOULOS, I. V et al. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. International Journal of Fatigue, v.19. n.3, p. 212-235, 1997.
- [5] CARPINTERI, A. SPAGNOLI, A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. International Journal of Fatigue, v.23, p. 135-145, 2001.
- [6] SUSMEL, L. LAZZARIN, P. A bi-parametric Wohler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. Blackwell Science Ltd. Fatigue Fract Engng Mater Struct, v.25, p. 63-78, 2002.
- [7] DIETER, G. E., Mechanical Metallurgy. 3rd ed., Mc Graw-Hill Book Co., New York 1986. XXIII + 751 p., DM 138.50, ISBN 0–07–016893–8
- [8] RUCHERT, C. “Mecânica Da Fratura E Fadiga Dos Materiais”, p. 50, 2014, [Online]. Available:[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/241323/mod\\_resource/content/2/AULA\\_DE\\_FADIGA\\_E\\_FRATURA2.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/241323/mod_resource/content/2/AULA_DE_FADIGA_E_FRATURA2.pdf)
- [9] CASTRO, T. L. “Previsão da Vida em Fadiga de Eixos Virabrequim e Componentes Mecânicos Estruturais sob Carregamento Multiaxial”, PUC-Rio, Depto. de Engenharia Química e Materiais (DEQM), dissertação de mestrado, p.100, 2019.
- [10] JÚNIOR, A. I. V. “ESTUDO DE EFEITOS DINÂMICOS ATÉ O INÍCIO DA FRATURA FRÁGIL”, p. 84, 2007.
- [11] CASTRO, J. T.; MEGGIOLARO, M. A. Fadiga: técnicas e práticas de dimensionamento estrutural sob cargas reais de serviço. 1a ed, Rio de Janeiro: Createspace Independent Publishing Platform, v.1, 494 p., 2009
- [12] CALLISTER JR., W. D. Ciência e engenharia de materiais. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2008
- [13] IAEA, “Applicability of the leak before break concept,” laea-Tecd-710, p. 57, 1993.
- [14] I. ATOMIC AND E. AGENCY, “Guidance for the application of the leak before break concept,” p. 41, 1994.
- [15] MITCHELL, M. R., Fundamentals of modern fatigue analysis for design. In ASM Materials Science Seminar, October, 2008
- [16] ANDERSON, T. L. Fracture Mechanics: fundamentals and applications. 3. ed. New York. CRC Taylor & Francis, 2005.
- [17] SCHIJVE, J. Fatigue of Structures and Materials. 2a ed., Netherlands: Springer, 2009. 623p.
- [18] FORTES, C. Apostila de Mecânica da Fratura. Escola Superior Aberta do Brasil. 2003.
- [19] EWALDS, H.L.; WANHILL, R.J.H. (1986) Fracture Mechanics. Netherlands: Delftse Uitgevers Maatschappij, Third Edition, Co-Publication of Edward Arnold Publishers, London 1993.
- [20] CAMERON, D.W. et al. Fatigue Properties in Engineering, ASM Handbook Vol. 19: Fatigue and Fracture, Estados Unidos: ASM International, p 36-65, 1996
- [21] SURESH, S. – Fatigue of Materials – 2nd ed. 1998 Cambridge, p 148-234.
- [22] MEYERS, Mechanical Behavior of Materials. Cambridge.2009.
- [23] Pereira, H. F. S. G. “COMPORTAMENTO À FADIGA DE COMPONENTES ESTRUTURAIS SOB A ACÇÃO DE SOLICITAÇÕES DE AMPLITUDE VARIÁVEL,” p. 292, 2006.
- [24] FERREIRA, P. H. “PROJETO E OTIMIZAÇÃO DE ÁRVORES DE MANIVELAS,” p. 147, 2008

- [25] C. Mahle and M. Leve, "Manual técnico," p. 232, 2016, [Online]. Available: <https://docplayer.com.br/21625756-Manual-tecnico-curso-mahle-metal-leve-motores-de-combustao-interna-aftermarket.html>
- [26] L. C. ARAUJO, "PARA PROJETO CONTRA FADIGA MULTIAXIAL DE MATERIAL INTERNAMENTE DEFEITUOSO E NA PRESENÇA DE MICRO-DEFEITOS ARTIFICIAIS," p. 90, 2020.
- [27] STEPHENS, R. et al. Metal Fatigue in Engineering, 2 Ed, New York: Wiley Interscience, 2001
- [28] SOCIE, D. F.; MARQUIS, G. B. Multiaxial Fatigue 1a ed. Estados Unidos: SAE International, 2000. 484p.
- [29] A. CARPINTERI, A. SPAGNOLI, S. VANTADORI, AND C. BAGNI, "Structural integrity assessment of metallic components under multiaxial fatigue: The C-S criterion and its evolution," Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct., vol. 36, no. 9, pp. 870–883, 2013, doi: 10.1111/ffe.12037.
- [30] CASTRO, T. L., PEREIRA, M. V. S. and DARWISH, F. A. "On the Influence of Mean Shear Stress on Multiaxial High Cycle Fatigue of Metallic Materials," Mater. Res., vol. 24, no. 1, p. 20200319, 2021, doi: 10.1590/1980-5373-MR-2020-0319.
- [31] DA SILVA, P. A. B. V. "Uma Implementação do Método Estendido dos Elementos Finitos para Análise de Propagação de Fraturas Bidimensionais", PUC-Rio, Depto. De Engenharia Civil (DEC), dissertação de mestrado, p.105, 2015.