

## 6

### O conceito de verdade em linguagens semanticamente fechadas

Neste capítulo vamos apresentar nossa definição de verdade. Como os comentários filosóficos acerca dos diversos aspectos de nossa definição já foram feitos no capítulo 1, neste capítulo vamos nos ater à apresentação da definição propriamente dita. Vamos começar, é claro, especificando a sintaxe das linguagens-objeto da definição, após o que vamos passar à construção da definição de verdade para essas linguagens. Depois disso, vamos encerrar a exposição da teoria mostrando que ela satisfaz as condições de adequação que estabelecemos para ela: satisfação da convenção T, aplicabilidade a linguagens semanticamente fechadas e consistência. No caso da consistência, é claro, vamos apenas mostrar que nossa teoria não é afetada pelos paradoxos semânticos conhecidos que dizem respeito à noção de verdade<sup>IV</sup>.

Para começar, vamos definir alguns conceitos auxiliares necessários para a definição da noção de uma *fórmula* de uma linguagem-objeto qualquer de nossa teoria da verdade. A definição de fórmula aparece na definição 5.5.

DEF. 5.1: Um *léxico* de uma linguagem L é um conjunto<sup>105</sup>  $A = \{F^n, G^n, H^n, \dots, a, b, c, \dots, x, y, z, \dots, \&, \sim, \forall, \}, \{ \},$  sendo  $\{F^n, G^n, H^n, \dots\}$  um conjunto não-vazio de constantes predicativas de ordem  $n$ , para qualquer número natural  $n$ ,  $\{a, b, c, \dots\}$  um conjunto não-vazio de constantes individuais, e  $\{x, y, z, \dots\}$  um conjunto ao menos denumerável de variáveis individuais,  $\&$  e  $\sim$  os operadores lógicos, respectivamente, da conjunção e da negação, e  $\forall$  o quantificador universal.

DEF. 5.2: Uma *expressão* sobre A é qualquer seqüência finita de elementos de A; designamos por  $E(A)$  o conjunto de todas as expressões sobre A.

---

<sup>105</sup> Vamos assumir que a teoria de conjuntos utilizada em nossas definições e teoremas é ZFC. Obviamente, qualquer teoria de conjuntos cujo universo contém o universo de ZFC poderia ser utilizada, como NGB ou ZFC-AFA, pois nesse caso apenas estaríamos dispondo de um aparato formal mais rico do que o necessário.

DEF. 5.3: Uma *fórmula atômica* é qualquer expressão sobre A da forma  $\Phi^n \bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_n$ , onde  $\Phi^n \in \{F^n, G^n, H^n, \dots\}$ , e  $\bar{c}_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

DEF. 5.4: Uma *linguagem formal* L sobre A é o menor subconjunto de E(A) que satisfaz as seguintes condições:

i) se  $\alpha$  é uma fórmula atômica, então  $\alpha \in L$

ii) se  $\alpha \in L$ , então  $\sim\alpha \in L$

iii) se  $\alpha, \beta \in L$ , então  $(\alpha \& \beta) \in L$

iv) se  $\alpha[\bar{c}]$  é um elemento de L com ao menos uma ocorrência de  $\bar{c}$ , onde  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$ , e  $\xi \in \{x, y, z, \dots\}$ , então  $\forall \xi \alpha[\bar{c}/\xi] \in L$ , sendo que  $\alpha[\bar{c}/\xi]$  é o resultado de se substituir ao menos uma ocorrência de  $\bar{c}$  em  $\alpha[\bar{c}]$  por  $\xi$ .

DEF. 5.5: Uma *fórmula* sobre A é um elemento qualquer de L.

Outros operadores lógicos além de  $\&$  e  $\sim$ , como  $\vee$ ,  $\rightarrow$  e  $\leftrightarrow$  podem ser introduzidos em L por definição a partir de  $\&$  e  $\sim$ , como de costume. Similarmente, o quantificador existencial  $\exists$  pode ser introduzido em L por definição a partir de  $\forall$ . Além disso, não incluímos símbolos funcionais no léxico das linguagens L para simplificar nossa definição. Como é bem sabido, esses símbolos são dispensáveis, já que podem ser substituídos por expressões que utilizam constantes predicativas no lugar dos símbolos em questão. Isso, é claro, ocorre porque os símbolos funcionais representam funções, enquanto as constantes predicativas representam relações, e uma função é uma relação de um tipo determinado<sup>106</sup>. Enfim, note-se que, dados os dispositivos formais com que dotamos as linguagens L, qualquer linguagem formal de 1ª ordem é uma

<sup>106</sup> Como exemplo, um símbolo funcional  $f$  representando a função quadrática pode ser substituído por uma expressão envolvendo uma relação binária Q, que relaciona dois números reais  $x$  e  $y$ , representando a relação ' $x$  é quadrado de  $y$ '. Assim, uma fórmula como ' $\exists x (Mf(x), a)$ ', significando, por exemplo, que existe um número real  $x$  tal que o quadrado de  $x$  é menor do que  $a$ , pode ser traduzida em uma linguagem que não possui símbolos funcionais para a fórmula ' $\exists x \exists y ((Qyx \& \forall z (Qzx \rightarrow z = y)) \& Mya)$ '. A cláusula ' $\forall z (Qzx \rightarrow z = y)$ ' é necessária, é claro, para determinar que a relação representada pela constante Q é uma função. Note-se que o símbolo = é apenas uma constante predicativa binária, que podemos admitir em nossas linguagens L em sua forma tradicional e com a maneira habitual de se construir fórmulas intercalando a constante em questão entre os dois argumentos da predicação.

linguagem  $L$ . Agora, vamos dotar as linguagens  $L$  com alguns dispositivos formais que nos permitirão especificar as fórmulas que expressam proposições.

DEF. 5.6: Uma *estrutura*  $E$  é um par-ordenado  $(D, I)$ , onde  $D$  é um conjunto não-vazio, e  $I$  é uma função cujo domínio é  $\{F^n, G^n, H^n, \dots\} \cup \{a, b, c, \dots\}$ , tal que:

- i)  $I(\bar{c})$  é um elemento de  $D$ , para todo  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$
- ii)  $I(\Phi^n)$  é um conjunto de  $n$ -uplas ordenadas de elementos de  $D$ , para todo  $\Phi^n \in \{F^n, G^n, H^n, \dots\}$ <sup>107</sup>.

Aqui faremos uma pausa para introduzir o conjunto das funções sentenciais, dada uma linguagem  $L$  qualquer. Será necessário utilizar esse conjunto – em vez do conjunto das fórmulas, isto é, em vez da própria linguagem  $L$  em questão – na definição das funções  $v^\sigma$  que atribuem um valor (0 ou 1) a uma função sentencial com base em uma função  $\sigma$  que atribui uma denotação às variáveis da linguagem  $L$ . Isso ocorre, é claro, porque, como Tarski já mostrou<sup>108</sup>, o valor de verdade de uma sentença composta depende do que ocorre, no que atine ao valor de verdade, com as partes atômicas das quais essa sentença é formada, e essas partes atômicas geralmente não são sentenças, mas funções sentenciais. E até aqui, é claro, estamos apenas seguindo a definição tarskiana de verdade, embora não estejamos utilizando a semântica de Tarski para especificar os valores de verdade das fórmulas de nossas linguagens  $L$ , mas apenas para determinar se elas expressam ou não uma proposição.

DEF. 5.7: Dada uma linguagem formal  $L$ , o conjunto  $L^+$  das *funções sentenciais* é o menor conjunto satisfazendo as seguintes condições:

- i) toda expressão sobre  $A$  da forma  $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n \in L^+$ , onde  $\Phi^n \in \{F^n, G^n, H^n, \dots\}$ , e  $t_i \in \{a, b, c, \dots\} \cup \{x, y, z, \dots\}$ ,  $1 \leq i \leq n$
- ii) se  $\alpha \in L^+$ , então  $\sim\alpha \in L^+$

<sup>107</sup> Vamos assumir que, entre as constantes predicativas de  $L$ , se encontram algumas cujas extensões se compõem de expressões de  $L$ . Como já observamos, tal seria o caso de um predicado como ‘tem o número de Gödel  $x$ ’. Vamos restringir esses casos a predicados que expressam propriedades *sintáticas* de sentenças ou outras expressões de  $L$ .

<sup>108</sup> Cf. cap. 2.

- iii) se  $\alpha, \beta \in L^+$ , então  $(\alpha \ \& \ \beta) \in L^+$
- iv) se  $\alpha \in L^+$ , e  $\xi \in \{x, y, z, \dots\}$ , então  $\forall \xi \alpha \in L^+$ .

Claramente,  $L \subset L^+$ , dada qualquer das linguagens  $L$ . Agora estamos em condições de introduzir as funções  $v^\sigma$ , conforme segue.

DEF. 5.8: Seja  $\sigma$  uma função-atribuição cujo domínio é  $\{a, b, c, \dots\} \cup \{x, y, z, \dots\}$ , e tal que  $\sigma(\bar{c}) = I(\bar{c})$  para todo  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$ , e  $\sigma(\xi)$  é um dado elemento de  $D$ , para todo  $\xi \in \{x, y, z, \dots\}$ ; então  $v^\sigma$  é uma função definida de  $L^+$  em  $\{0, 1\}$ , tal que:

- i)  $v^\sigma(\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n) = 1$  sse  $(\sigma(t_1), \sigma(t_2), \dots, \sigma(t_n)) \in I(\Phi^n)$ ; caso contrário,  $v^\sigma(\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n) = 0$
- ii)  $v^\sigma(\sim \alpha) = 1$  sse  $v^\sigma(\alpha) = 0$ ; caso contrário  $v^\sigma(\sim \alpha) = 0$
- iii)  $v^\sigma(\alpha \ \& \ \beta) = 1$  sse  $v^\sigma(\alpha) = v^\sigma(\beta) = 1$ ; caso contrário  $v^\sigma(\alpha \ \& \ \beta) = 0$
- iv)  $v^\sigma(\forall \xi \alpha) = 1$  sse  $v^\tau(\alpha) = 1$  para toda função-atribuição  $\tau$  que seja idêntica a  $\sigma$ , exceto, no máximo, que  $\tau(\xi) \neq \sigma(\xi)$ ; caso contrário  $v^\sigma(\forall \xi \alpha) = 0$ .

Se restringirmos  $v^\sigma$  para domínio  $L$ , fica claro que, se  $v^\sigma(\alpha) = x$ ,  $x \in \{0, 1\}$ , dada alguma função-atribuição  $\sigma$ , então  $v^\sigma(\alpha) = x$  dada qualquer função-atribuição  $\sigma$ . Portanto, isso nos permitirá falar do valor de uma fórmula qualquer de uma linguagem  $L$ , dado por  $v^\sigma$ , independente da função  $\sigma$  que for tomada.

Agora, vamos introduzir em nossa teoria os conceitos de definição parcial em  $(S_1, S_2)$  e de uma linguagem  $L^*_\alpha$ , para um ordinal  $\alpha$  qualquer, tais como definidos por Kripke, conforme apresentamos no capítulo 4. Com base nesses conceitos, podemos estender uma linguagem  $L$  qualquer (e  $L^+$ ) para linguagens  $L^*(S_1, S_2)$  ( $L^*(S_1, S_2)^+$ ), mediante a adição de uma constante predicativa  $V$  parcialmente definida em  $(S_1, S_2)$ . Num primeiro momento, seguindo Kripke, vamos estender  $L$  para uma linguagem  $L^*_0 = L^*(\emptyset, \emptyset)$ . Depois, podemos continuar a estender as linguagens  $L^*_\alpha$  de acordo com o procedimento determinado por Kripke, até atingirmos o ponto-fixo minimal  $L^*_\zeta$ , em que  $\varphi((S_1, S_2)) = (S_1, S_2)$ , dada a função  $\varphi$  também anteriormente definida. Para os objetivos de nossa teoria da verdade, será suficiente lidar com o ponto-fixo minimal, já que

só utilizamos esses dispositivos formais de Kripke para a identificação das sentenças infundadas, que, como já vimos, são definidas em termos de seu valor no ponto-fixo  $L^*_\zeta$ <sup>109</sup>.

Pois bem, como também já dissemos, em uma linguagem  $L^*_\alpha$  qualquer, todas as expressões significativas – isto é, aquelas que possuem uma interpretação – são interpretadas como em  $L$ , isto é, com base na interpretação das constantes dada pela função  $I$ , tal como na definição 5.6 acima. As exceções são apenas a constante  $V$  e qualquer expressão significativa em que  $V$  ocorre, que são interpretadas com base na definição parcial de  $V$  em  $(S_1, S_2)$ , dada qualquer linguagem  $L^*_\alpha = L^*(S_1, S_2)$ . Além disso, embora estejamos, como Kripke, falando sobre *linguagens*  $L^*$ , esse é um modo inapropriado de falar, considerando nossa definição de uma linguagem como um conjunto de fórmulas. Dada essa definição de linguagem, só temos uma linguagem  $L^*$ , que resulta de  $L$  pela adição das fórmulas com ocorrências da constante  $V$ <sup>110</sup>. Nesse caso, aquilo a que Kripke se refere como as *linguagens*  $L^*$ , por uma questão de rigor terminológico, nós devemos nos referir como diferentes interpretações de uma mesma linguagem  $L^*$ . Assim, devemos alterar as definições de ‘estrutura’ e da função  $v^\sigma$  para  $L$ , de modo a adequá-las a  $L^*$ , e incluindo de algum modo a construção de Kripke nas definições. Isso pode ser feito da seguinte maneira: podemos considerar como dadas a definição kripkeana de um predicado parcialmente definido em  $(S_1, S_2)$ , e a definição de seu método de construção das linguagens  $L^*_\alpha$ , para qualquer ordinal  $\alpha$ , apenas trocando a expressão ‘linguagem  $L^*_\alpha$ ’ por ‘interpretação  $\alpha$  de  $L^*$ ’, e definir os conceitos em questão como segue.

<sup>109</sup> Convém notar, no entanto, que essa escolha de só utilizarmos o ponto-fixo minimal em nossa teoria tem um significado filosófico. De fato, excluindo os outros pontos-fixos estamos assumindo que nenhuma sentença em que o predicado-verdade ocorre pode ter um valor de verdade determinado arbitrariamente, desde o início. O valor-verdade de qualquer sentença com alguma ocorrência do predicado-verdade deve sempre depender, nesse caso, do valor-verdade da cláusula de conteúdo à qual o predicado-verdade se aplica. Assim, o valor de verdade de uma sentença como ‘é verdade que a neve é branca’ vai depender do valor-verdade da sentença ‘a neve é branca’, e uma sentença que afirma acerca de si mesma que é verdadeira não poderá ter um valor de verdade, já que uma tal sentença não tem cláusula de conteúdo, e portanto só poderia ter um valor-verdade se ele fosse definido arbitrariamente desde o início. O fato para o qual estamos querendo chamar a atenção, é claro, é o fato de que sentenças como a que afirma sua própria veracidade não podem assumir um valor de verdade no ponto-fixo minimal, mas podem assumir um valor-verdade em outros pontos-fixos, desde que se lhes atribua arbitrariamente um valor diferente de 2 em  $L^*_0$  (nesses casos, convém lembrar,  $L^*_0 \neq L^*(\emptyset, \emptyset)$ ).

<sup>110</sup> Note-se que vamos falar a seguir em *linguagens*  $L^*$ , mas não em referência às várias interpretações  $\alpha$  de uma dessas linguagens, mas sim em referência ao fato de que, para cada linguagem  $L$  distinta que se tomar, haverá uma linguagem  $L^*$  distinta que deriva dela por adição das fórmulas com ocorrências da constante  $V$ .

DEF. 5.9: Seja  $S_{i\alpha}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , o conjunto  $S_i$  na interpretação  $\alpha$  de  $L^*$ ; nesse caso, uma *estrutura*  $E$  para uma linguagem  $L^*$  é uma terna-ordenada  $(D, O, I)$ , onde  $D$  é um conjunto não-vazio,  $O$  é a classe dos ordinais, e  $I$  é uma função cujo domínio é  $(\{F^n, G^n, H^n, \dots\} \cup \{a, b, c, \dots\} \cup \{V\}) \times O$ , tal que:

i)  $I(\bar{c}, \alpha)$  é um dado elemento de  $D$ , para todo  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$  e qualquer  $\alpha \in O$

ii)  $I(\Phi^n, \alpha)$  é um dado conjunto de  $n$ -uplas ordenadas de elementos de  $D$ , para todo  $\Phi^n \in \{F^n, G^n, H^n, \dots\}$  e qualquer  $\alpha \in O$

iii)  $I(V, \alpha) = S_{1\alpha}$ , para todo  $\alpha \in O$ .

Note-se que  $I(\bar{c}, \alpha)$  e  $I(\Phi^n, \alpha)$  permanecem fixos independente do ordinal  $\alpha$  que se estiver tomando, o que não ocorre no caso de  $I(V, \alpha)$ . Isso permite abreviar a notação  $I(\bar{c}, \alpha)$  para  $I(\bar{c})$  e  $I(\Phi^n, \alpha)$  para  $I(\Phi^n)$ .

DEF. 5.10: Seja  $\sigma$  uma função-atribuição cujo domínio é  $\{a, b, c, \dots\} \cup \{x, y, z, \dots\}$ , e tal que  $\sigma(\bar{c}) = I(\bar{c})$  para todo  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$ , e  $\sigma(\xi)$  é um dado elemento de  $D$ , para todo  $\xi \in \{x, y, z, \dots\}$ ; então se  $O$  é a classe dos ordinais,  $v^\sigma$  é uma função definida de  $L^{*+} \times O$  em  $\{0, 1, 2\}$ , tal que, para qualquer  $\alpha \in O$ :

i)  $v^\sigma(\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \alpha) = 1$  sse  $(\sigma(t_1), \sigma(t_2), \dots, \sigma(t_n)) \in I(\Phi^n)$ ; caso contrário,  $v^\sigma(\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \alpha) = 0$

ii)  $v^\sigma(Vt_1, \alpha) = 1$  sse  $\sigma(t_1) \in S_{1\alpha}$ ;  $v^\sigma(Vt_1) = 0$  sse  $\sigma(t_1) \in S_{2\alpha}$ ; caso contrário, isto é, caso  $\sigma(t_1) \notin S_{1\alpha}$  e  $\sigma(t_1) \notin S_{2\alpha}$ ,  $v^\sigma(Vt_1) = 2$

iii)  $v^\sigma(\sim\varphi, \alpha) = 1$  sse  $v^\sigma(\varphi, \alpha) = 0$ ;  $v^\sigma(\sim\varphi, \alpha) = 0$  sse  $v^\sigma(\varphi, \alpha) = 1$ ; senão  $v^\sigma(\sim\varphi, \alpha) = 2$

iii)  $v^\sigma(\varphi \& \psi, \alpha) = 1$  sse  $v^\sigma(\varphi, \alpha) = v^\sigma(\psi, \alpha) = 1$ ;  $v^\sigma(\varphi \& \psi, \alpha) = 0$  sse  $v^\sigma(\varphi, \alpha) = 0$  ou  $v^\sigma(\psi, \alpha) = 0$ ; senão  $v^\sigma(\varphi \& \psi, \alpha) = 2$

iv)  $v^\sigma(\forall\xi\varphi, \alpha) = 1$  sse  $v^\tau(\varphi, \alpha) = 1$  para toda função-atribuição  $\tau$  idêntica a  $\sigma$ , com a possível exceção de que  $\tau(\xi) \neq \sigma(\xi)$ ;  $v^\sigma(\forall\xi\varphi, \alpha) = 0$  sse  $v^\tau(\varphi, \alpha) = 0$  para alguma função-atribuição  $\tau$  caracterizada como acima; caso contrário  $v^\sigma(\forall\xi\varphi, \alpha) = 2$ .

Mais uma questão sobre terminologia: uma vez que, em nossa definição da função  $v^\sigma$ , não falamos em valores-verdade (já que, em nossa proposta, apenas as proposições possuem valores-verdade), mas em atribuições puramente técnicas dos valores 0, 1 e 2 às fórmulas das linguagens  $L^*$ , as definições de Kripke deveriam, também, sofrer as alterações adequadas. Por exemplo, devemos definir que, se na interpretação  $\alpha$  de  $L^*$  a constante  $V$  é parcialmente definida em  $(S_1, S_2)$ ,  $S_1'$  é o conjunto das fórmulas de  $L^*$  que possuem valor 1 na interpretação  $\alpha$ , e  $S_2'$  é o conjunto daquelas que possuem valor 0 nessa interpretação, bem como dos elementos do domínio  $D$  que não são fórmulas de  $L^*$ . Não faremos explicitamente essas adaptações aqui, já que, obviamente, trata-se do trabalho mecânico de substituir qualquer menção a sentenças verdadeiras nas definições de Kripke por menções a fórmulas com valor 1, menções a sentenças falsas por outras a fórmulas com valor 0, e menções a sentenças indeterminadas ou sem valor de verdade por menções a fórmulas com valor 2.

Assim, temos que em  $L^*_0$  (vamos usar essa notação para abreviar ‘a interpretação 0 de  $L^*$ ’) todas as fórmulas de  $L$  com valor 1 continuam com valor 1, e o mesmo para as fórmulas de  $L$  com valor 0. Já as fórmulas de  $L^*$  que envolvem a constante predicativa  $V$  possuem valor 2<sup>111</sup>. As fórmulas com valor 1 em  $L^*_\alpha$ , para um ordinal  $\alpha$  qualquer, continuam com valor 1 nas interpretações de  $L^*$  de nível superior a  $\alpha$ , o mesmo ocorrendo para as fórmulas com valor 0. Dada uma certa interpretação  $\alpha$  de  $L^*$ , as fórmulas em que a constante  $V$  está atribuída a fórmulas com valor 1 em  $L^*_\alpha$  têm valor 1 em  $L^*_{\alpha+1}$ . Têm valor 0 em  $L^*_{\alpha+1}$  aquelas fórmulas em que  $V$  está atribuída a fórmulas com valor 0 em  $L^*_\alpha$ . Particularmente importante, o conceito de ‘fórmula fundada’ fica definido assim: uma fórmula  $\varphi$  é fundada sse  $\varphi$  não tem valor 2 no ponto-fixo minimal  $L^*_\zeta$ <sup>112</sup>, isto é, sse  $v^\sigma(\varphi, \zeta) \neq 2$ .

<sup>111</sup> Na verdade, as coisas são um pouco mais complicadas que isso. Dadas as definições apresentadas até aqui, a situação é a seguinte: todas as *fórmulas atômicas* de  $L^*$  em que a constante  $V$  ocorre têm valor 2 na interpretação 0 de  $L^*$ . Para fórmulas compostas de  $L^*$ , porém, o resultado pode ser diferente. Considere-se, por exemplo, a fórmula de  $L^*$  ‘ $Pa \ \& \ Vs$ ’, e admita-se que ‘ $Pa$ ’ tem valor 0 em  $L^*_0$ . Nesse caso, a despeito do fato de que a constante  $V$  ocorre em ‘ $Pa \ \& \ Vs$ ’, a definição 5.10 determina que essa fórmula tem valor 0 na interpretação 0 de  $L^*$ .

<sup>112</sup> Todos esses fatos são consequência, é claro, do modo como a seqüência das linguagens (interpretações)  $L^*_\alpha$  é construída por Kripke, tal como mostramos no capítulo 4. Sobre a definição de fórmula fundada, convém lembrar que, como se está tratando de fórmulas, a função-atribuição  $\sigma$  que se estiver tomando é totalmente irrelevante, conforme comentamos mais acima. O ponto-fixo  $L^*_\zeta$ , obviamente, é a interpretação de  $L^*$  no nível  $\zeta$ .

O procedimento que descrevemos acima determina se uma fórmula, tomada em um determinado contexto, é fundada ou não. Mas como os contextos variam, como já observamos, uma mesma fórmula pode ser fundada em um contexto e infundada em outro. Para lidar formalmente com isso, é preciso determinar qual o efeito dos contextos sobre a valoração das fórmulas, bem como um modo de representar formalmente os contextos. Se prestarmos atenção ao exemplo que Kripke usou para mostrar a existência do efeito que estamos considerando, tal como mostramos no capítulo anterior, encontraremos algumas pistas indicando a solução para esses problemas. De fato, num primeiro momento, está claro que é essencial, para que o exemplo em questão funcione, que a sentença sobre Nixon tenha sido proferida por Dean, e que a sentença sobre Dean tenha sido proferida por Nixon. Conclui-se que um fator importante do contexto é o indivíduo que proferiu a sentença em questão. Além disso, podemos nos lembrar que consideramos duas circunstâncias envolvendo formalizações para as sentenças do exemplo de Kripke<sup>113</sup>, uma na qual as fórmulas resultantes eram fundadas, e uma outra na qual elas eram infundadas. Qual foi a diferença essencial entre os dois casos, que provocou esse efeito? É fácil notar que tal diferença reside no fato de que, no caso em que as fórmulas eram infundadas, a sentença de Dean sobre Nixon era a única sentença proferida por Dean sobre Watergate, o que restringia a extensão da constante predicativa D para essa sentença, o mesmo acontecendo com a sentença de Nixon sobre Dean. Ora, façamos uma pausa para tirar conclusões com base nessas pistas.

Em primeiro lugar, parece-nos que, além do indivíduo que proferiu a sentença, é importante para o contexto quando e onde a mesma foi proferida. Assim, a sentença ‘está chovendo’ deve ser avaliada levando-se em conta quem a proferiu, quando e onde o fez. É uma questão de verificação empírica determinar se esses elementos são suficientes para a determinação do contexto na maioria dos casos. No capítulo 1, seção 1.2, mostramos que há casos em que esses elementos não são suficientes. O tipo de casos que mencionamos no capítulo 1 é aquele em que o contexto determina a qual indivíduo o falante se refere ao utilizar um nome próprio em uma sentença. Como havíamos mencionado no capítulo 1, a determinação do contexto nesses casos envolve aspectos mais complicados como

---

<sup>113</sup> Na verdade, como já mencionamos, o exemplo dado por Kripke em seu artigo é similar, mas ligeiramente diferente do exemplo que apresentamos aqui.



as pressuposições do falante acerca do conhecimento de seu interlocutor, caso a sentença considerada tenha sido proferida em um diálogo. É algo não de todo fácil capturar esses aspectos em um formalismo. Entretanto, de todo modo, a especificação do indivíduo que proferiu uma dada sentença e de suas coordenadas espaço-temporais ao fazê-lo será suficiente em um grande número de casos para a determinação do contexto de uma sentença.

Agora, a respeito de qual deve ser o efeito do contexto sobre o método de valoração de fórmulas, a pista do exemplo de Kripke parece indicar que o contexto faz variar a extensão das constantes que ocorrem em uma fórmula. Assim, com o nome ‘Sócrates’, posso estar me referindo a uma pessoa em um dado contexto, e a outra em um contexto diferente. Da mesma maneira, o predicado ‘é uma sentença proferida por Dean sobre Watergate’ pode designar um conjunto de sentenças em um contexto, e outro em um contexto diferente. Por exemplo, se a única sentença de Dean sobre Watergate é aquela do exemplo de Kripke, se tomarmos um contexto que envolve um instante anterior àquele em que Dean proferiu a sentença em questão, a extensão do predicado acima, nesse contexto, será o conjunto vazio.

Feitas essas considerações, podemos especificar os nossos dispositivos formais, que devem capturar os aspectos mencionados dos contextos de uma sentença. Para tanto, mais uma vez, teremos também que reformular as definições de ‘estrutura’ e das funções  $v^\sigma$ .

DEF. 5.11: Um contexto  $c$  para uma fórmula  $\varphi$  de uma linguagem  $L^*$  qualquer é um par ordenado  $(i, (x, y, z, w))$ , onde  $i$  é o indivíduo que profere  $\varphi$ <sup>114</sup>, e a quádrupla-ordenada  $(x, y, z, w)$  dá as coordenadas espaço-temporais em que  $\varphi$  é proferida.

DEF. 5.12: Seja  $S_{i(\alpha, c)}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , o conjunto  $S_i$  na interpretação  $\alpha$  de  $L^*$  dado o contexto  $c$ ; nesse caso, uma *estrutura*  $E$  para uma linguagem  $L^*$  é uma quádrupla-ordenada  $(D, O, C, I)$ , onde  $D$  é um conjunto não-vazio,  $O$  é a classe

---

<sup>114</sup> Ou a sentença que  $\varphi$  formaliza.

dos ordinais,  $C$  é um conjunto não-vazio de contextos  $(i, (x, y, z, w))$ , e  $I$  é uma função cujo domínio é  $((\{F^n, G^n, H^n, \dots\} \cup \{a, b, c, \dots\} \cup \{V\}) \times O) \times C$ , tal que:

i)  $I((\bar{c}, \alpha), c)$  é um dado elemento de  $D$ , para todo  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$ , qualquer  $\alpha \in O$  e  $c \in C$

ii)  $I((\Phi^n, \alpha), c)$  é um dado conjunto de  $n$ -uplas ordenadas de elementos de  $D$ , para todo  $\Phi^n \in \{F^n, G^n, H^n, \dots\}$ , qualquer  $\alpha \in O$  e  $c \in C$

iii)  $I((V, \alpha), c) = S_{1(\alpha, c)}$ , para todo  $\alpha \in O$  e  $c \in C$ .

Tal como comentamos acerca das funções  $I$  definidas na definição 5.10, as funções  $I$  tal como definidas na definição 5.12 são tais que  $I((\bar{c}, \alpha), c)$  e  $I((\Phi^n, \alpha), c)$  não variam com o ordinal  $\alpha$  que for tomado. Desse modo, podemos aqui abreviar as notações  $I((\bar{c}, \alpha), c)$  e  $I((\Phi^n, \alpha), c)$ , respectivamente, para  $I(\bar{c}, c)$  e  $I(\Phi^n, c)$ .

DEF. 5.13: Seja  $\sigma$  uma função-atribuição cujo domínio é  $(\{a, b, c, \dots\} \cup \{x, y, z, \dots\}) \times C$ , e tal que  $\sigma(\bar{c}, c) = I(\bar{c}, c)$  para todo  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$  e  $c \in C$ , e  $\sigma(\xi, c)$  é um dado elemento de  $D$  para todo  $\xi \in \{x, y, z, \dots\}$  e  $c \in C$ ; então, se  $O$  é a classe dos ordinais,  $v^\sigma$  é uma função definida de  $(L^{*+} \times O) \times C$  em  $\{0, 1, 2\}$ , tal que, para qualquer  $\alpha \in O$ :

i)  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \alpha), c) = 1$  sse  $(\sigma(t_1, c), \sigma(t_2, c), \dots, \sigma(t_n, c)) \in I(\Phi^n, c)$ ; caso contrário,  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \alpha), c) = 0$

ii)  $v^\sigma((\forall t_1, \alpha), c) = 1$  sse  $\sigma(t_1, c) \in S_{1(\alpha, c)}$ <sup>115</sup>;  $v^\sigma((\forall t_1, \alpha), c) = 0$  sse  $\sigma(t_1, c) \in S_{2(\alpha, c)}$ ; caso contrário, isto é, caso  $\sigma(t_1, c) \notin S_{1(\alpha, c)} \cup S_{2(\alpha, c)}$ ,  $v^\sigma((\forall t_1, \alpha), c) = 2$

iii)  $v^\sigma((\sim \varphi, \alpha), c) = 1$  sse  $v^\sigma((\varphi, \alpha), c) = 0$ ;  $v^\sigma((\sim \varphi, \alpha), c) = 0$  sse  $v^\sigma((\varphi, \alpha), c) = 1$ ; senão  $v^\sigma((\sim \varphi, \alpha), c) = 2$

iv)  $v^\sigma((\varphi \& \psi, \alpha), c) = 1$  sse  $v^\sigma((\varphi, \alpha), c) = v^\sigma((\psi, \alpha), c) = 1$ ;  $v^\sigma((\varphi \& \psi, \alpha), c) = 0$  sse  $v^\sigma((\varphi, \alpha), c) = 0$  ou  $v^\sigma((\psi, \alpha), c) = 0$ ; senão  $v^\sigma((\varphi \& \psi, \alpha), c) = 2$

<sup>115</sup> É importante notar aqui que, dada a construção de Kripke,  $\sigma(t_1, c)$  vai pertencer a  $S_{1(\alpha, c)}$  se  $\sigma(t_1, c)$  for uma fórmula com valor 1 em  $c$  na interpretação  $\alpha - 1$  de  $L^*$ . Isso quer dizer que  $t_1$  está nomeando uma fórmula, e não uma proposição. Esse aspecto de nossa definição de verdade pode causar estranheza, já que nossa definição atribui o predicado-verdade às proposições. Entretanto, convém notar que o conceito de verdade que emerge de nossa teoria será dado pela interpretação da constante  $V$  na interpretação  $\zeta$  de  $L^{*V}$ .

v)  $v^\sigma((\forall \xi \varphi, \alpha), c) = 1$  sse  $v^\tau((\varphi, \alpha), c) = 1$  para toda função-atribuição  $\tau$  idêntica a  $\sigma$ , com a possível exceção de que  $\tau(\xi, c) \neq \sigma(\xi, c)$ ;  $v^\sigma((\forall \xi \varphi, \alpha), c) = 0$  sse  $v^\tau((\varphi, \alpha), c) = 0$  para alguma função-atribuição  $\tau$  satisfazendo a condição acima; caso contrário  $v^\sigma((\forall \xi \varphi, \alpha), c) = 2$ .

Pois bem, as definições 5.11 a 5.13 nos fornecem os recursos necessários para determinar quais fórmulas de uma linguagem  $L^*$  expressam proposições. De fato, como estaremos considerando que somente uma fórmula fundada pode expressar uma proposição, bastará verificar se a fórmula em questão possui um valor diferente de 2 na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ . Agora, utilizando um esquema similar ao de Barwise e Etchemendy para representar estados-de-coisas<sup>116</sup>, podemos definir as relações *Exp* e  $\models$ , da seguinte maneira.

DEF. 5.14: Seja  $p$  uma função cujo domínio é o conjunto dos pares ordenados  $(\gamma, c)$ ,  $\gamma \in L^*$  e  $c \in C$ , tais que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , e tal que  $p(\gamma, c)$  é a proposição expressa pela fórmula  $\gamma$  no contexto  $c$ <sup>117</sup>; então *Exp* é uma relação binária definida entre  $L^* \times C$  e o conjunto das proposições da maneira seguinte:

i) se  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 2$ , para  $\gamma \in L^*$  e  $c \in C$ , então a relação *Exp* não associa nenhum elemento do conjunto das proposições ao par  $(\gamma, c)$ , ou seja, nenhum par ordenado cujo primeiro membro é  $(\gamma, c)$  pertence a *Exp*

ii) se  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ ,  $\gamma \in L^*$  e  $c \in C$ , então  $(\gamma, c) \text{ Exp } p(\gamma, c)$ , isto é,  $((\gamma, c), p(\gamma, c)) \in \text{Exp}$ .

Note-se que estamos usando um procedimento semelhante ao de Montague<sup>118</sup> para representar proposições: nossa função  $p$  funciona mais ou menos como o operador  $\wedge$  de Montague. Dadas as condições em que uma fórmula

<sup>116</sup> Adotaremos um esquema diferente para representar proposições.

<sup>117</sup> Note-se que estamos, como era de se esperar, mantendo fixa na verificação do valor de  $\gamma$  em  $c$  a interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ . Isso porque, como já dissemos, nos interessa o valor de  $\gamma$  no ponto-fixo minimal, para verificar se  $\gamma$  é fundada ou não. Desse modo, podemos nos dispensar de mencionar a interpretação de  $L^*$  que se está considerando, e falar da proposição expressa por  $\gamma$  no contexto  $c$ , em vez de falar na proposição expressa por  $\gamma$  na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$  e no contexto  $c$ . De fato, como só verificamos se  $\gamma$  expressa ou não uma proposição no nível  $\zeta$ , não faz nenhum sentido perguntar se  $\gamma$  expressa alguma proposição em um nível inferior a  $\zeta$ .

<sup>118</sup> Cf. MONTAGUE, 1976, pp. 256 - 260.

$\gamma$  em um dado contexto  $c$  expressa uma proposição, representamos essa proposição simplesmente como ' $p(\gamma, c)$ '. Agora, vamos definir a relação  $\models$  (torna verdadeira), com base em algumas definições auxiliares, da seguinte maneira.

DEF. 5.15: Considere-se uma função bijetora que associa um átomo distinto  $\Phi_c^n$  a todo par  $(\Phi^n, c)$  tal que  $\Phi^n \in \{F^n, G^n, H^n, \dots\}$  e  $c \in C$ , e um átomo  $V_c$  a cada par  $(V, c)$ ; então EDC, o conjunto dos estados-de-coisas, é o conjunto das  $n$ -uplas ordenadas, para qualquer número natural  $n$ , que possuem uma das seguintes formas:

- i)  $(\Phi_c^n, I(\bar{c}_1, c), I(\bar{c}_2, c), \dots, I(\bar{c}_n, c), 1)$ ; sendo que  $\bar{c}_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ,  $1 \leq i \leq n$
- ii)  $(\Phi_c^n, I(\bar{c}_1, c), I(\bar{c}_2, c), \dots, I(\bar{c}_n, c), 0)$ ; sendo que  $\bar{c}_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ,  $1 \leq i \leq n$
- iii)  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), 1)$ ; sendo que  $\bar{c}_1 \in \{a, b, c, \dots\}$
- iv)  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), 0)$ ; sendo que  $\bar{c}_1 \in \{a, b, c, \dots\}$

DEF. 5.16:  $s \in \text{SIT}$ , o conjunto das situações, sse  $s$  é um subconjunto de EDC. SIT, portanto, é o conjunto potência de EDC  $\mathcal{P}_{\text{EDC}}$ .

DEF. 5.17: Se  $\Phi^n \in \{F^n, G^n, H^n, \dots\}$ ,  $\bar{c}_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\xi \in \{x, y, z, \dots\}$ ,  $\gamma \in L^*$  e  $c \in C$ , então 'torna verdadeira' é a menor relação  $\models \subset \text{SIT} \times \text{PROP}$ , sendo PROP o conjunto das proposições, que satisfaz as seguintes condições:

- i) se  $\gamma = \Phi^n \bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_n$  e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , então  $s \models p(\gamma, c)$  sse  $(\Phi_c^n, I(\bar{c}_1, c), I(\bar{c}_2, c), \dots, I(\bar{c}_n, c), 1) \in s^{\text{VI}}$
- ii) se  $\gamma = V \bar{c}_1$  e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , então  $s \models p(\gamma, c)$  sse  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), 1) \in s$
- iii) se  $\gamma = \sim \Phi^n \bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_n$  e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , então  $s \models p(\gamma, c)$  sse  $(\Phi_c^n, I(\bar{c}_1, c), I(\bar{c}_2, c), \dots, I(\bar{c}_n, c), 0) \in s$

iv) se  $\gamma = \sim V\bar{c}_1$  e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , então  $s \models p(\gamma, c)$  sse  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), 0) \in s$

v) se  $\gamma = \sim\sim\delta$  e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , então  $s \models p(\gamma, c)$  sse  $s \models p(\delta, c)$

vi) se  $\gamma = \delta \ \& \ \varepsilon$  e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , então  $s \models p(\gamma, c)$  sse  $s \models p(\delta, c)$  e  $s \models p(\varepsilon, c)$

vii) se  $\gamma = \sim(\delta \ \& \ \varepsilon)$  e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , então  $s \models p(\gamma, c)$  sse  $s \models p(\sim\delta, c)$  ou  $s \models p(\sim\varepsilon, c)$

viii) se  $\gamma = \forall\xi\delta[\xi]$  e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , então  $s \models p(\gamma, c)$  sse  $s \models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$ , para todo  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$ , sendo  $\delta[\xi/\bar{c}]$  o resultado de se substituir  $\xi$  por  $\bar{c}$  em  $\delta[\xi]$ <sup>119</sup>

ix) se  $\gamma = \sim\forall\xi\delta[\xi]$  e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , então  $s \models p(\gamma, c)$  sse  $s \models p(\sim\delta[\xi/\bar{c}], c)$ , para algum  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$ , sendo  $\delta[\xi/\bar{c}]$  especificada como acima.

Agora, vamos definir a noção de modelo em estilo semelhante ao de Barwise e Etchemendy, mas garantindo que a convenção T esteja satisfeita, conforme segue.

DEF. 5.18: Seja  $\mathfrak{M}$  um subconjunto de EDC; então, dizemos que  $\mathfrak{M}$  torna uma proposição  $p$  verdadeira [ $\mathfrak{M} \models p$ ] sse existe uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p$ ; dizemos que  $\mathfrak{M}$  torna  $p$  falsa [ $\mathfrak{M} \not\models p$ ] sse não há tal situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$ .

DEF. 5.19: Seja  $\mathfrak{M}$  um subconjunto de EDC; então, dizemos que uma proposição  $p$  é verdadeira em  $\mathfrak{M}$  [ $V_{\mathfrak{M}}(p)$ ] sse  $(V_c, I(\bar{c}, c), 1) \in \mathfrak{M}$ , sendo que  $\bar{c}$

<sup>119</sup> Estamos pressupondo que há um nome para cada objeto no domínio D da estrutura que estiver sendo considerada. Note-se que isso não quer dizer que todos os objetos do domínio já vêm nomeados, de modo a termos uma parte de nossa semântica, por assim dizer, pré-estabelecida. O que ocorre, apenas, é que, quando restrita ao conjunto das constantes individuais, a função I de uma estrutura E qualquer deve ser bijetora (ou a menos sobrejetora, caso quisermos admitir a circunstância estranha de que duas constantes diferentes possam denotar o mesmo objeto). Assim, os nomes dos objetos do domínio variam com as estruturas, e não estão portanto pré-estabelecidos. Só o que está pré-estabelecido devido a uma exigência do modo como nossas definições foram construídas é que, *em cada estrutura*, não pode haver um elemento do domínio D da estrutura em questão que não possua um nome.

denota a fórmula  $\gamma$  tal que  $p = p(\gamma, c)$ , e  $c \in C$ ; dizemos que  $p$  é falsa em  $\mathfrak{M}$  [ $F_{\mathfrak{M}}(p)$ ] sse  $(V_c, I(\bar{c}, c), 0) \in \mathfrak{M}$ , sendo que  $\bar{c}$  e  $c$  satisfazem as condições acima.

DEF. 5.20: Para cada  $n$ -upla ordenada de EDC cujo último membro é 1, definimos como seu dual a  $n$ -upla ordenada idêntica à primeira, exceto que seu último membro é 0, e admitimos que se um elemento  $\sigma'$  de EDC é o dual de  $\sigma$ ,  $\sigma$  é o dual de  $\sigma'$ ; então, um *modelo*  $\mathfrak{M}$  é um subconjunto de EDC tal que:

i) nenhum estado-de-coisas  $\sigma$  e seu dual pertencem ambos a  $\mathfrak{M}$

ii) para qualquer proposição  $p$ ,  $\mathfrak{M} \models p$  sse  $V_{\mathfrak{M}}(p)$  e  $\mathfrak{M} \not\models p$  sse  $F_{\mathfrak{M}}(p)$ <sup>120</sup>

iii) dado um certo contexto  $c$  e dado  $\mathfrak{M}$ :

a)  $(\Phi_c^n, I(\bar{c}_1, c), I(\bar{c}_2, c), \dots, I(\bar{c}_n, c), 1) \in \mathfrak{M}$ , sendo que  $\bar{c}_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ,  
 $1 \leq i \leq n$ , sse  $(I(\bar{c}_1, c), I(\bar{c}_2, c), \dots, I(\bar{c}_n, c)) \in I(\Phi^n, c)$

b)  $(\Phi_c^n, I(\bar{c}_1, c), I(\bar{c}_2, c), \dots, I(\bar{c}_n, c), 0) \in \mathfrak{M}$ , sendo que  $\bar{c}_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ,  
 $1 \leq i \leq n$ , sse  $(I(\bar{c}_1, c), I(\bar{c}_2, c), \dots, I(\bar{c}_n, c)) \notin I(\Phi^n, c)$

c)  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), 1) \in \mathfrak{M}$ , sendo que  $\bar{c}_1 \in \{a, b, c, \dots\}$ , sse  $I(\bar{c}_1, c) \in S_{1(c,c)}$

d)  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), 0) \in \mathfrak{M}$ , sendo que  $\bar{c}_1 \in \{a, b, c, \dots\}$ , sse  $I(\bar{c}_1, c) \in S_{2(c,c)}$

Portanto, a def. 5.20 estabelece que nossos modelos serão sempre semanticamente fechados, e também que a escolha de um modelo determina as condições que serão consideradas para a distribuição dos valores 0, 1 e 2 às fórmulas de uma linguagem  $L^*$ . Sobre esse último aspecto de nossa definição de modelo, lembramos que seu significado filosófico – de que a escolha de um modelo já vai determinar de início o valor de verdade de uma proposição expressa por uma fórmula qualquer de  $L^*$  – foi discutido no capítulo 1, na seção 1.2. Agora, concluindo a exposição de nossa definição de verdade, daremos a definição de um modelo maximal.

<sup>120</sup> Essa condição determina, portanto, que nossa definição de verdade satisfaz a convenção T. Desse modo, dadas essas equivalências, vamos utilizar no texto que segue as expressões ‘ $\mathfrak{M}$  torna a proposição  $p$  verdadeira’ e ‘ $p$  é verdadeira em  $\mathfrak{M}$ ’ de modo indistinto.

DEF. 5.21: Um *modelo maximal* é um modelo  $\mathfrak{M}$  tal que  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{M}'$ , dado qualquer modelo  $\mathfrak{M}'$ .

Tomaremos o conceito de uma proposição  $p$  verdadeira em um modelo maximal  $\mathfrak{M}$  como caracterizando a noção de verdade que emerge da teoria que acabamos de expor. Na seqüência, vamos provar alguns teoremas e lemas, entre eles o teorema 5.2, que mencionamos no capítulo 1.

TEO. 5.1: Seja  $\mathfrak{M}$  um modelo qualquer,  $\gamma$  e  $\delta$  fórmulas de  $L^*$ ,  $\varepsilon$  uma função sentencial de  $L^{*+}$  com a variável  $\xi$  livre, e  $c$  um contexto<sup>121</sup>; nesse caso, se, dado  $\mathfrak{M}$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  e  $\forall \xi \varepsilon$  expressam proposições em  $c$ , temos:

- i)  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$  sse  $\mathfrak{M} \models p(\sim\sim\gamma, c)$
- ii)  $\mathfrak{M} \models p(\gamma \& \delta, c)$  sse  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$  e  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$
- iii)  $\mathfrak{M} \models p(\sim(\gamma \& \delta), c)$  sse  $\mathfrak{M} \models p(\sim\gamma, c)$  ou  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta, c)$
- iv)  $\mathfrak{M} \models p(\forall \xi \varepsilon, c)$  sse  $\mathfrak{M} \models p(\varepsilon[\bar{c}/\xi], c)$ , para qualquer constante individual  $\bar{c}$
- v)  $\mathfrak{M} \models p(\sim\forall \xi \varepsilon, c)$  sse  $\mathfrak{M} \models p(\sim\varepsilon[\bar{c}/\xi], c)$ , para alguma constante individual  $\bar{c}$ .

Prova:

i) Suponha-se que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ ; daí, por def. 5.17, temos que  $s \models p(\sim\sim\gamma, c)$ , donde se segue que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\sim\gamma, c)$ ; agora, suponha-se que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\sim\gamma, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim\sim\gamma, c)$ ; daí, por def. 5.17, temos que  $s \models p(\gamma, c)$ , donde se segue que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

ii) Suponha-se que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma \& \delta, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\gamma \& \delta, c)$ ; daí, por def. 5.17, temos que  $s \models p(\gamma, c)$  e que  $s \models p(\delta, c)$ ; mas isso quer dizer que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$  e  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$ ; agora, vamos supor que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$  e  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que há um  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal

<sup>121</sup> Em todos os teoremas e lemas que vamos provar aqui, a estrutura dos contextos não terá qualquer influência sobre os resultados. Entretanto, é claro, a estrutura dos contextos é relevante para a determinação da situação semântica de uma fórmula específica, como vão evidenciar os exemplos que apresentaremos mais adiante.

que  $s \vdash p(\gamma, c)$  e  $s \vdash p(\delta, c)$ , donde se conclui pela def. 5.17 que  $s \vdash p(\gamma \& \delta, c)$ , isto é, novamente pela def. 5.18, temos que  $\mathfrak{M} \vdash p(\gamma \& \delta, c)$ .

iii) Suponha-se que  $\mathfrak{M} \vdash p(\sim(\gamma \& \delta), c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \vdash p(\sim(\gamma \& \delta), c)$ ; daí, por def. 5.17 temos que  $s \vdash p(\sim\gamma, c)$  ou  $s \vdash p(\sim\delta, c)$ , isto é, por def. 18, temos que  $\mathfrak{M} \vdash p(\sim\gamma, c)$  ou  $\mathfrak{M} \vdash p(\sim\delta, c)$ ; agora, vamos admitir que  $\mathfrak{M} \vdash p(\sim\gamma, c)$  ou  $\mathfrak{M} \vdash p(\sim\delta, c)$ ; temos por def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \vdash p(\sim\gamma, c)$  ou há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \vdash p(\sim\delta, c)$ ; segue-se por def. 5.17 que  $s \vdash p(\sim(\gamma \& \delta), c)$ , isto é, temos pela def. 5.18 que  $\mathfrak{M} \vdash p(\sim(\gamma \& \delta), c)$ .

iv) Suponha-se que  $\mathfrak{M} \vdash p(\forall\xi\varepsilon, c)$ ; segue-se por def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \vdash p(\forall\xi\varepsilon, c)$ ; portanto, por def. 5.17,  $s \vdash p(\varepsilon[\xi/\bar{c}], c)$ , para todo  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$ , isto é, temos por def. 5.18 que  $\mathfrak{M} \vdash p(\varepsilon[\xi/\bar{c}], c)$ , para toda constante individual  $\bar{c}$ ; agora, admita-se que  $\mathfrak{M} \vdash p(\varepsilon[\xi/\bar{c}], c)$ , para toda constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se por def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \vdash p(\varepsilon[\xi/\bar{c}], c)$ , para toda constante individual  $\bar{c}$ ; mas isso quer dizer, pela def. 5.17, que  $\mathfrak{M} \vdash p(\forall\xi\varepsilon, c)$ .

v) Suponha-se que  $\mathfrak{M} \vdash p(\sim\forall\xi\varepsilon, c)$ ; segue-se por def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \vdash p(\sim\forall\xi\varepsilon, c)$ ; portanto, por def. 5.17,  $s \vdash p(\sim\varepsilon[\xi/\bar{c}], c)$ , para algum  $\bar{c} \in \{a, b, c, \dots\}$ , isto é, temos por def. 5.18 que  $\mathfrak{M} \vdash p(\sim\varepsilon[\xi/\bar{c}], c)$ , para alguma constante individual  $\bar{c}$ ; agora, admita-se que  $\mathfrak{M} \vdash p(\sim\varepsilon[\xi/\bar{c}], c)$ , para alguma constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se por def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \vdash p(\sim\varepsilon[\xi/\bar{c}], c)$ , para alguma constante individual  $\bar{c}$ ; mas isso quer dizer, pela def. 5.17, que  $\mathfrak{M} \vdash p(\sim\forall\xi\varepsilon, c)$ .

LEMA 5.1: Se  $\mathfrak{M}$  é um modelo maximal e  $\sigma$  é um estado-de-coisas cujo dual é  $\sigma'$ , e  $\sigma$  não possui a forma  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), i)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , com  $I(\bar{c}_1, c)$  representando uma fórmula com valor 2 em  $c$  na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ , então ou  $\sigma \in \mathfrak{M}$  ou  $\sigma' \in \mathfrak{M}$ .



Prova: Suponha-se que  $\mathfrak{M}$  é um modelo maximal e  $\sigma$  um estado-de-coisas que não possui a forma  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), i)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , com  $I(\bar{c}_1, c)$  representando uma fórmula com valor 2 em  $c$  na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ , e nem  $\sigma$  nem  $\sigma'$  pertencem a  $\mathfrak{M}$ ; agora, considere-se o modelo  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cup \{\sigma\}$ ; temos que  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ , o que não pode ser o caso, dada a maximalidade de  $\mathfrak{M}$ , portanto, ou  $\sigma \in \mathfrak{M}$  ou  $\sigma' \in \mathfrak{M}$ . Já se  $\sigma$  possui a forma  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), i)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , com  $I(\bar{c}_1, c)$  representando uma fórmula com valor 2 em  $c$  na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ , então o conjunto de estados-de-coisas  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cup \{\sigma\}$  não é um modelo que contém  $\mathfrak{M}$ , uma vez que, nesse caso,  $\mathfrak{M}$  não é um modelo, pois, de acordo com a def. 5.20, se  $\mathfrak{M}$  é um modelo e  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), i) \in \mathfrak{M}$ ,  $I(\bar{c}_1, c) \in S_{1(\zeta, c)}$  ou  $I(\bar{c}_1, c) \in S_{2(\zeta, c)}$ ; mas como  $I(\bar{c}_1, c)$  tem valor 2 no contexto  $c$ , na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ , temos pela def. 5.13 que  $I(\bar{c}_1, c) \notin S_{1(\zeta, c)} \cup S_{2(\zeta, c)}$ ; portanto, ou  $(V_c, I(\bar{c}_1, c), i) \notin \mathfrak{M}$ , ou  $\mathfrak{M}$  não é um modelo.

LEMA. 5.2: Se  $\mathfrak{M}$  é um modelo maximal, então, dada uma fórmula  $\gamma$  qualquer de  $L^*$ , se  $\gamma$  expressa uma proposição em um dado contexto  $c$ , então  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\gamma, c)$ , e  $\mathfrak{M} \models p(\sim\gamma, c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

Prova: Por indução sobre o número  $n$  de operadores e quantificadores de  $\gamma$  em I e II.

Suponha-se que  $\mathfrak{M}$  é um modelo maximal, e que  $\gamma$  é uma fórmula de  $L^*$  que expressa uma proposição em um dado contexto  $c$ :

$$I) \mathfrak{M} \models p(\gamma, c) \text{ sse } \mathfrak{M} \not\models p(\sim\gamma, c).$$

Base:  $n = 0$

Considerando que  $\gamma$  não possui operadores ou quantificadores, há duas possibilidades:

i)  $\gamma$  é da forma  $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n$ , com  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ , já que  $\gamma$  é uma fórmula (de fato, temos  $\gamma \in L^*$ , e não  $\gamma \in L^{*+}$ ):

→) Suponha-se que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ : segue-se pela def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ , donde temos, pela def. 5.17, que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \in s$ , e portanto que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \in$

$\mathfrak{M}$ ; daí, dada a condição de coerência de um modelo qualquer, estabelecida pela def. 5.20 i), temos que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 0) \notin \mathfrak{M}$ , donde se segue que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim\gamma, c)$ , o que significa que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\gamma, c)$ , dada a def. 5.18.

←) Agora, suponha-se que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\gamma, c)$ : segue-se pela def. 5.18 que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim\gamma, c)$ , donde temos que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 0) \notin \mathfrak{M}$ ; daí, dada a maximalidade de  $\mathfrak{M}$ , segue-se pelo lema 5.1 que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \in \mathfrak{M}$ , isto é, temos que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ , por exemplo  $\{(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1)\}$ , o que quer dizer, dada a def. 5.18, que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

ii)  $\gamma$  tem a forma  $\forall t_1$  com  $t_1 \in \{a, b, c, \dots\}$ :

→) Suponha-se que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ : segue-se pela def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ , donde temos, pela def. 5.17, que  $(V_c, I(t_1, c), 1) \in s$ , e portanto que  $(V_c, I(t_1, c), 1) \in \mathfrak{M}$ ; daí, dada a condição de coerência de um modelo qualquer, temos que  $(V_c, I(t_1, c), 0) \notin \mathfrak{M}$ , donde se segue que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim\gamma, c)$ , o que significa que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\gamma, c)$ , dada a def. 5.18.

←) Agora, suponha-se que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\gamma, c)$ : segue-se pela def. 5.18 que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim\gamma, c)$ , donde temos que  $(V_c, I(t_1, c), 0) \notin \mathfrak{M}$ ; daí, dada a maximalidade de  $\mathfrak{M}$ , segue-se pelo lema 5.1 que  $(V_c, I(t_1, c), 1) \in \mathfrak{M}$ <sup>122</sup>, isto é, temos que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ , por exemplo  $\{(V_c, I(t_1, c), 1)\}$ , o que quer dizer, dada a def. 5.18, que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

Passo de indução: Suponhamos, como hipótese de indução, que lema 5.2 vale para todo  $k < n$ , temos três casos a considerar:

i)  $\gamma = \sim\delta$ :

<sup>122</sup> Obviamente, a condição do lema 1 de que  $I(t_1, c)$  não represente uma fórmula com valor 2 na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$  está satisfeita. De fato, se estamos supondo que  $\gamma = \forall t_1$  e que  $\gamma$  expressa uma proposição,  $\gamma$  deve ter valor 0 ou 1 na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ , e portanto, dada a construção de Kripke,  $t_1$  deve representar uma fórmula com valor 0 ou 1 na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ . Desse modo, a aplicação do lema 1 é legítima aqui (a mesma observação deve ser feita com relação à aplicação do lema 1 na cláusula relativa a fórmulas da forma ‘ $\forall t_1$ ’ na parte II do lema que está sendo provado).

Pela hipótese de indução, temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\delta, c)$ , e que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta, c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$ , já que o número  $k$  de operadores e quantificadores de  $\delta$  é menor que  $n$ ;

→) Suponha-se que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta, c)$ ; da hipótese de indução se segue que se  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$  então  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\delta, c)$ ; daí, temos por *modus tollens* que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$ , donde, pela def. 5.18, temos que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\delta, c)$ ; daí, como pela def. 5.17 temos que  $s \models p(\sim\sim\delta, c)$  sse  $s \models p(\delta, c)$ , segue-se que se não há em  $\mathfrak{M}$  uma situação  $s$  tal que  $s \models p(\delta, c)$ , então não há em  $\mathfrak{M}$  uma situação  $s$  tal que  $s \models p(\sim\sim\delta, c)$ , isto é, segue-se que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\sim\delta, c)$ , ou seja, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\gamma, c)$ .

←) Admita-se agora que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\sim\delta, c)$ ; portanto, pela def. 5.18 temos que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim\sim\delta, c)$ ; daí, pela def. 5.17, temos que não há uma situação  $s$  em  $\mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\delta, c)$ , isto é, temos que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$ ; mas disso se segue pela hipótese de indução que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

ii)  $\gamma = \delta \ \& \ \varepsilon$ :

Pela hipótese de indução, temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\delta, c)$ , e que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta, c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$ , já que o número  $k$  de operadores e quantificadores de  $\delta$  é menor que  $n$ , e ainda que  $\mathfrak{M} \models p(\varepsilon, c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\varepsilon, c)$ , e que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\varepsilon, c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\varepsilon, c)$ , já que o número  $j$  de operadores e quantificadores de  $\varepsilon$  é menor que  $n$ ;

→) Suponha-se que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\delta \ \& \ \varepsilon, c)$ ; pelo teorema 5.1 temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$  e que  $\mathfrak{M} \models p(\varepsilon, c)$ ; daí, pela hipótese de indução, temos que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\delta, c)$  e que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\varepsilon, c)$ ; isso significa que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim\delta, c)$  e nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim\varepsilon, c)$ ; como, por def. 5.17, temos que  $s \models p(\sim(\delta \ \& \ \varepsilon), c)$  sse  $s \models p(\sim\delta, c)$  ou  $s \models p(\sim\varepsilon, c)$ , temos por *modus tollens* que  $s \not\models p(\sim(\delta \ \& \ \varepsilon), c)$ , o que significa, por def. 5.18, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim(\delta \ \& \ \varepsilon), c)$ , isto é que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\gamma, c)$ .

←) Vamos agora supor que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim \gamma, c)$ , isto é, que,  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim (\delta \& \varepsilon), c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que não há em  $\mathfrak{M}$  uma situação  $s$  tal que  $s \models p(\sim (\delta \& \varepsilon), c)$ , donde se conclui, pela def. 5.17, que não há em  $\mathfrak{M}$  uma situação  $s$  tal que  $s \models p(\sim \delta, c)$  ou  $s \models p(\sim \varepsilon, c)$ ; mas isso significa que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \delta, c)$  e que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \varepsilon, c)$ ; então, pela hipótese de indução, temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$  e que  $\mathfrak{M} \models p(\varepsilon, c)$ ; daí, pelo teorema 5.1 concluímos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta \& \varepsilon, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

iii)  $\gamma = \forall \xi \delta$ :

Pela hipótese de indução, temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim \delta[\xi/\bar{c}], c)$ , e que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \delta[\xi/\bar{c}], c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$ , para qualquer constante individual  $\bar{c}$ , já que o número  $k$  de operadores e quantificadores de  $\delta[\xi/\bar{c}]$  é menor que  $n$ ;

→) Admita-se que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\forall \xi \delta, c)$ ; pelo teorema 5.1 temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$ , dada toda constante individual  $\bar{c}$ ; utilizando a hipótese indutiva, temos que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim \delta[\xi/\bar{c}], c)$ , dada qualquer constante individual  $\bar{c}$ ; isso quer dizer, pela def. 5.18, que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim \delta[\xi/\bar{c}], c)$ , dada alguma constante  $\bar{c}$ ; mas, pela def. 5.17, isso quer dizer que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim \forall \xi \delta, c)$ , o que significa que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim \forall \xi \delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

←) Vamos assumir agora que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim \gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim \forall \xi \delta, c)$ ; isso quer dizer que não há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim \forall \xi \delta, c)$ ; pela def. 5.17, segue-se que não há em  $\mathfrak{M}$  uma situação  $s$  tal que  $s \models p(\sim \delta[\xi/\bar{c}], c)$ , para alguma constante individual  $\bar{c}$ ; mas isso quer dizer, dada a def. 5.18, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \delta[\xi/\bar{c}], c)$ , dada qualquer constante  $\bar{c}$ ; daí, pela hipótese de indução, temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$ , dada qualquer constante  $\bar{c}$ , donde se segue pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\forall \xi \delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

II)  $\mathfrak{M} \models p(\sim \gamma, c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

Base:  $n = 0$

Mais uma vez, considerando que  $\gamma$  não possui operadores ou quantificadores, há duas possibilidades:

i)  $\gamma$  é da forma  $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n$ , com  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ :

→) Suponhamos que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; daí se segue pela def. 5.17 que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 0) \in s$ , e portanto que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 0) \in \mathfrak{M}$ ; daí, pela condição de coerência de um modelo, temos que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \notin \mathfrak{M}$ ; isso significa, dada a def. 5.17, que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; mas isso quer dizer, dada a def. 5.18, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

←) Agora, vamos admitir que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ ; temos pela def. 5.18 que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ , isto é, tal que  $s \models p(\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; isso significa, dada a def. 5.17, que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \notin s \subseteq \mathfrak{M}$ , o que por sua vez significa que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \notin \mathfrak{M}$ ; mas nesse caso, dada a maximalidade de  $\mathfrak{M}$ , temos pelo lema 5.1 que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 0) \in \mathfrak{M}$ ; como já mostramos, isso quer dizer que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ , donde, dada a def. 5.18, se conclui que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\gamma, c)$ .

ii)  $\gamma$  tem a forma  $\forall t_1$  com  $t_1 \in \{a, b, c, \dots\}$ :

→) Vamos supor que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\forall t_1, c)$ ; pela def. 5.18, temos que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$ , tal que  $s \models p(\sim\forall t_1, c)$ ; mas isso, dada a def. 5.17, quer dizer que  $(V_c, I(t_1, c), 0) \in s$ , donde se segue que  $(V_c, I(t_1, c), 0) \in \mathfrak{M}$ ; daí, pela condição de coerência de qualquer modelo, temos que  $(V_c, I(t_1, c), 1) \notin \mathfrak{M}$ , e portanto, dada a def. 5.17 temos que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\forall t_1, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\forall t_1, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

←) Admita-se agora que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ , temos pela def. 5.18 que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ , isto é, tal que  $s \models p(\forall t_1, c)$ ; isso significa, dada a def. 5.17, que  $(V_c, I(t_1, c), 1) \notin s \subseteq \mathfrak{M}$ , o que por sua vez

significa que  $(V_c, I(t_1, c), 1) \notin \mathfrak{M}$ ; mas nesse caso, dada a maximalidade de  $\mathfrak{M}$ , temos pelo lema 5.1 que  $(V_c, I(t_1, c), 0) \in \mathfrak{M}$ ; segue-se daí que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim \forall t_1, c)$ , donde, dada a def. 5.18, se conclui que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \forall t_1, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \gamma, c)$ .

Passo de indução: Suponhamos, como hipótese de indução, que lema 5.2 vale para todo  $k < n$ , temos três casos a considerar:

i)  $\gamma = \sim \delta$ :

→) Vamos assumir que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \sim \delta, c)$ ; temos pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$ ; pela hipótese de indução, temos que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim \delta, c)$ , isto é, temos que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

←) Admita-se agora que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim \delta, c)$ ; pela hipótese de indução, temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim \delta, c)$ ; daí, obtemos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$ , donde se segue pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \sim \delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \gamma, c)$ .

ii)  $\gamma = \delta \ \& \ \varepsilon$ :

→) Vamos assumir que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim(\delta \ \& \ \varepsilon), c)$ ; temos pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \models p(\sim \varepsilon, c)$ ; utilizando a hipótese indutiva temos que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \not\models p(\varepsilon, c)$ ; isso quer dizer, dada a def. 5.18, que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\delta, c)$  e  $s \models p(\varepsilon, c)$ ; mas daí, considerando a def. 5.17, temos que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\delta \ \& \ \varepsilon, c)$ ; daí, dada a def. 5.18, temos que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta \ \& \ \varepsilon, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

←) Admita-se agora que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta \ \& \ \varepsilon, c)$ ; dada a def. 5.18, isso quer dizer que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\delta \ \& \ \varepsilon, c)$ ; segue-se por def. 5.17 que não há em  $\mathfrak{M}$  uma situação  $s$  tal que  $s \models p(\delta, c)$  e  $s \models p(\varepsilon, c)$ ; mas isso significa, pela def. 5.18, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \not\models p(\varepsilon, c)$ ; segue-se pela hipótese de indução que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \models p(\sim \varepsilon, c)$ , donde se segue, pelo teorema 5.1, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim(\delta \ \& \ \varepsilon), c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \gamma, c)$ .

iii)  $\gamma = \forall \xi \delta$ :

→) Vamos admitir que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\forall\xi\delta, c)$ ; segue-se pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta[\xi/\bar{c}], c)$ , para alguma constante individual  $\bar{c}$ ; daí temos, pela hipótese indutiva, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$ , para alguma constante individual  $\bar{c}$ ; mas isso quer dizer, dada a def. 5.18, que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$  para toda constante individual  $\bar{c}$ ; daí, pela def. 5.17, temos que não há em  $\mathfrak{M}$  uma situação  $s$  tal que  $s \models p(\forall\xi\delta, c)$ , donde obtemos, pela def. 5.18, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\forall\xi\delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

←) Agora vamos admitir que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\forall\xi\delta, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que não há nenhuma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$  para toda constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pela def. 5.18 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$  para alguma constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pela hipótese de indução que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta[\xi/\bar{c}], c)$  para alguma constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\forall\xi\delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\gamma, c)$ .

TEO. 5.2: Seja  $\gamma$  uma fórmula de  $L$ , e  $c$  um contexto qualquer de  $\gamma$ , então temos que  $\gamma$  expressa uma proposição no contexto  $c$  e, dado um modelo maximal  $\mathfrak{M}$  e uma atribuição  $\sigma$  qualquer, temos que  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$  sse  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$  e  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 0$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

Prova: Por indução sobre o número  $n$  de operadores e quantificadores de  $\gamma$  em I e indução sobre o número  $n$  de operadores e quantificadores de  $\gamma$  subordinada a prova de equivalência em II.

I)  $\gamma$  expressa uma proposição no contexto  $c$ .

Base:  $n = 0$

Como  $\gamma \in L$ ,  $\gamma$  não possui ocorrências da constante  $V$ , e como  $\gamma$  não possui operadores e quantificadores, temos que  $\gamma$  tem a forma  $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n$  com  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$  (já que  $\gamma$  é uma fórmula); daí, pela def. 5.13,  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \alpha), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \alpha), c) = 0$ , para qualquer ordinal  $\alpha$  e qualquer atribuição  $\sigma$ ; portanto,  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \zeta), c) = 0$ , o que significa que  $\gamma$  é fundada, e portanto expressa uma proposição;

Passo de indução: Vamos admitir, como hipótese indutiva, que o teorema 5.2 I vale para  $k < n$ ; temos três casos a considerar:

i)  $\gamma = \sim\delta$ :

Como o número  $k$  de operadores e quantificadores de  $\delta$  é menor que  $n$ , temos por hipótese que  $\delta$  expressa uma proposição, o que quer dizer que  $\delta$  é fundada, donde se segue que, dada qualquer atribuição  $\sigma$ ,  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$ ; daí, pela def. 5.13, se  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$  então  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , e se  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$  então  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ , donde se segue que  $\gamma$  é fundada, e portanto expressa uma proposição;

ii)  $\gamma = \delta \ \& \ \varepsilon$ :

Como o número  $k$  de operadores e quantificadores de  $\delta$  é menor que  $n$ , o mesmo valendo para o número  $j$  de operadores e quantificadores de  $\varepsilon$ , temos por hipótese que, dada qualquer atribuição  $\sigma$ ,  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$  e  $v^\sigma((\varepsilon, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\varepsilon, \zeta), c) = 0$ ; daí, pela def. 5.13  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , já que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  se  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$  e  $v^\sigma((\varepsilon, \zeta), c) = 1$ , e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$  se  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$  ou  $v^\sigma((\varepsilon, \zeta), c) = 0$  (ou ambos); logo,  $\gamma$  é fundada, e portanto expressa uma proposição;

iii)  $\gamma = \forall\xi\delta$ :

Como o número  $k$  de operadores e quantificadores de  $\delta$  é menor que  $n$ , temos por hipótese que, dada qualquer atribuição  $\sigma$ ,  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$ ; daí, pela def. 5.13,  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  ou  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , já que, para qualquer atribuição  $\tau$   $\xi$ -variante<sup>123</sup> de  $\sigma$ , dadas essas condições, ou  $v^\tau((\delta, \zeta), c) = 1$  dadas todas essas atribuições, ou  $v^\tau((\delta, \zeta), c) = 0$  dada alguma delas; portanto,  $\gamma$  é fundada, donde se segue que  $\gamma$  expressa uma proposição.

II)  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$  sse  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$  e  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 0$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

a)  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$  sse  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

→) Vamos supor que  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$ , dados um modelo maximal  $\mathfrak{M}$  e uma atribuição  $\sigma$  qualquer;

Base:  $n = 0$

<sup>123</sup> Na definição 5.13 não aparece a expressão ‘ $\xi$ -variante’, com referência a atribuições. Em lugar disso, essa definição fala em atribuições  $\tau$  idênticas a  $\sigma$ , com a possível exceção de que  $\tau(\xi) \neq \sigma(\xi)$ . Entretanto, é exatamente isso o que é uma atribuição  $\tau$   $\xi$ -variante de  $\sigma$ . A definição para essa expressão se encontra no capítulo 2, definição 2.9.



Mais uma vez, como  $\gamma \in L$ ,  $\gamma$  não possui ocorrências da constante  $V$ , e como  $\gamma$  não possui operadores e quantificadores, temos que  $\gamma$  tem a forma  $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n$  com  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ; daí, como  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$ , temos que  $(\sigma(t_1, c), \sigma(t_2, c), \dots, \sigma(t_n, c)) \in I(\Phi^n, c)$ , pela def. 5.13; daí, como  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ , temos que  $\sigma(t_i) = I(t_i)$ , ainda pela def. 5.13; portanto, temos que  $(I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c)) \in I(\Phi^n, c)$ , donde se segue, pela def. 5.20, que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \in \mathfrak{M}$ ; daí, considerando a situação  $s = \{(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1)\}$ , temos que  $s \subseteq \mathfrak{M}$ , e, pela def. 5.17, que  $s \models p(\gamma, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ . Note-se que as abreviações  $I(\Phi^n, c)$  e  $I(t_i, c)$ , respectivamente para  $I((\Phi^n, 0), c)$  e  $I((t_i, 0), c)$ , são apropriadas, dado que, como já foi dito,  $I((\Phi^n, \alpha), c)$  e  $I((t_i, \alpha), c)$  permanecem constantes para qualquer ordinal  $\alpha$ .

Passo de indução: Vamos admitir, como hipótese indutiva, que o teorema 5.2 II vale para  $k < n$ ; temos três casos a considerar:

i)  $\gamma = \sim\delta$ :

Como  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$ , temos por def. 5.13 que  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 0$ ; daí, como o número  $k$  de operadores e quantificadores de  $\delta$  é menor que  $n$ , temos por hipótese que  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 0$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$ , donde se segue que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$ ; daí, temos pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta, c)$ , isto é, temos que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

ii)  $\gamma = \delta \ \& \ \varepsilon$ :

Como  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$ , isto é,  $v^\sigma((\delta \ \& \ \varepsilon, 0), c) = 1$ , temos por def. 5.13 que  $v^\sigma((\delta, 0), c) = v^\sigma((\varepsilon, 0), c) = 1$ ; daí, pela hipótese de indução temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$  e que  $\mathfrak{M} \models p(\varepsilon, c)$ ; segue-se pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\delta \ \& \ \varepsilon, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

iii)  $\gamma = \forall\xi\delta$ :

Como  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$ , isto é,  $v^\sigma((\forall\xi\delta, 0), c) = 1$ , temos por def. 5.13 que  $v^\tau((\delta, 0), c) = 1$  dada toda atribuição  $\tau$   $\xi$ -variante de  $\sigma$ ; como  $v^\sigma((\forall\xi\delta, 0), c) = 1$  dada qualquer atribuição  $\sigma$ , já que  $\forall\xi\delta$  é uma fórmula, e como toda atribuição é  $\xi$ -variante de si mesma, temos que  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 1$  dada qualquer atribuição; é fácil notar que isso significa que toda fórmula de  $L$   $\delta[\xi/\bar{c}]$ , obtida da função sentencial  $\delta$  por substituição da variável  $\xi$  por uma constante individual  $\bar{c}$  é tal

que  $v^\sigma((\delta[\xi/\bar{c}], 0), c) = 1$ ; daí, pela hipótese de indução, temos que  $\mathfrak{M} \models p$  ( $\delta[\xi/\bar{c}], c$ ) dada qualquer constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p$  ( $\forall \xi \delta, c$ ), isto é, que  $\mathfrak{M} \models p$  ( $\gamma, c$ ).

←) Agora, admitamos que  $\mathfrak{M} \models p$  ( $\gamma, c$ ), dado um modelo maximal  $\mathfrak{M}$ ;

Base:  $n = 0$

Novamente, como  $\gamma \in L$ ,  $\gamma$  não possui ocorrências da constante  $V$ , e como  $\gamma$  não possui operadores e quantificadores, temos que  $\gamma$  tem a forma  $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n$  com  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ; daí, temos por hipótese que  $\mathfrak{M} \models p$  ( $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c$ ); pela def. 5.18, temos que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p$  ( $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c$ ), o que significa, dada a def. 5.17, que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \in s$ ; segue-se que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \in \mathfrak{M}$ ; daí, dada a def. 5.20 temos que  $(I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c)) \in I(\Phi^n, c)$ ; daí, pela def. 5.13, temos que  $v^\sigma((\gamma, \alpha), c) = 1$ , dados uma atribuição  $\sigma$  qualquer e qualquer ordinal  $\alpha$ ; portanto,  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$ .

Passo de indução: Vamos admitir, como hipótese indutiva, que o teorema 5.2 II vale para  $k < n$ ; temos três casos a considerar:

i)  $\gamma = \sim \delta$ :

Por hipótese  $\mathfrak{M} \models p$  ( $\sim \delta, c$ ); daí, pelo lema 5.2 temos que  $\mathfrak{M} \not\models p$  ( $\delta, c$ ); pela hipótese indutiva, dada uma atribuição  $\sigma$  qualquer,  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 1$  sse  $\mathfrak{M} \models p$  ( $\delta, c$ ); nesse caso, segue-se por *modus tollens*<sup>124</sup> que  $v^\sigma((\delta, 0), c) \neq 1$ ; portanto, dado o contradomínio de  $v^\sigma$ , determinado na def. 5.13,  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 0$  ou  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 2$ ; como  $\delta \in L$ , não pode ser o caso que  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 2$ ; portanto,  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 0$ ; mas nesse caso, temos pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\sim \delta, 0), c) = 1$ , isto é,  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$ .

ii)  $\gamma = \delta \ \& \ \varepsilon$ :

Por hipótese  $\mathfrak{M} \models p$  ( $\delta \ \& \ \varepsilon, c$ ); daí, pelo teorema 5.1 temos que  $\mathfrak{M} \models p$  ( $\delta, c$ ) e  $\mathfrak{M} \models p$  ( $\varepsilon, c$ ); segue-se pela hipótese indutiva que, dada uma atribuição  $\sigma$  qualquer,  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 1$  e  $v^\sigma((\varepsilon, 0), c) = 1$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\delta \ \& \ \varepsilon, 0), c) = 1$ , isto é, que  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 1$ .

iii)  $\gamma = \forall \xi \delta$ :

<sup>124</sup> É óbvio que estamos pressupondo que uma eliminação de equivalência precedeu esse *modus tollens*.

Por hipótese  $\mathfrak{M} \models p (\forall \xi \delta, c)$ ; daí, pelo teorema 5.1 temos que  $\mathfrak{M} \models p (\delta[\bar{c}/\bar{c}], c)$  para toda constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pela hipótese indutiva que  $v^\sigma ((\delta[\bar{c}/\bar{c}], 0), c) = 1$ , dada qualquer constante individual  $\bar{c}$ ; é fácil notar que daí se segue que  $v^\sigma ((\delta, 0), c) = 1$  dada uma atribuição  $\sigma$  qualquer, e portanto também dada qualquer atribuição  $\xi$ -variante de uma tal  $\sigma$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\sigma ((\forall \xi \delta, 0), c) = 1$ , isto é, que  $v^\sigma ((\gamma, 0), c) = 1$ .

b)  $v^\sigma ((\gamma, 0), c) = 0$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p (\gamma, c)$ .

→ Vamos admitir que  $v^\sigma ((\gamma, 0), c) = 0$ ;

Base:  $n = 0$

Mais uma vez, como  $\gamma \in L$ ,  $\gamma$  não possui ocorrências da constante  $V$ , e como  $\gamma$  não possui operadores e quantificadores, temos que  $\gamma$  tem a forma  $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n$  com  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ; daí, temos por hipótese que  $v^\sigma ((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, 0), c) = 0$ ; pela def. 5.13, isso quer dizer que  $(I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c)) \notin I(\Phi^n, c)$ ; segue-se pela def. 5.20 que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 0) \in \mathfrak{M}$ , o que quer dizer, dada a def. 5.17, que há uma situação  $s$  em  $\mathfrak{M}$  tal que  $s \models p (\sim \Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que  $\mathfrak{M} \models p (\sim \Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p (\sim \gamma, c)$ ; daí, temos pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p (\gamma, c)$ .

Passo de indução: Vamos admitir, como hipótese indutiva, que o teorema 5.2 II vale para  $k < n$ ; temos três casos a considerar:

i)  $\gamma = \sim \delta$ :

Por hipótese,  $v^\sigma ((\sim \delta, 0), c) = 0$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\sigma ((\delta, 0), c) = 1$ ; daí temos, pela hipótese de indução, que  $\mathfrak{M} \models p (\delta, c)$ ; daí temos, pelo lema 5.2, que  $\mathfrak{M} \not\models p (\sim \delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p (\gamma, c)$ .

ii)  $\gamma = \delta \ \& \ \varepsilon$ :

Por hipótese,  $v^\sigma ((\delta \ \& \ \varepsilon, 0), c) = 0$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\sigma ((\delta, 0), c) = 0$  ou  $v^\sigma ((\varepsilon, 0), c) = 0$ ; daí, temos pela hipótese indutiva que  $\mathfrak{M} \not\models p (\delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \not\models p (\varepsilon, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p (\sim \delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \models p (\sim \varepsilon, c)$ ; daí, pelo teorema 5.1, temos que  $\mathfrak{M} \models p (\sim (\delta \ \& \ \varepsilon), c)$ , isto é,  $\mathfrak{M} \models p (\sim \gamma, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p (\gamma, c)$ .

iii)  $\gamma = \forall \xi \delta$ :

Por hipótese,  $v^\sigma((\forall \xi \delta, 0), c) = 0$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\tau((\delta, 0), c) = 0$  dada alguma atribuição  $\tau$   $\xi$ -variante de  $\sigma$ ; é fácil notar que daí se segue que, para qualquer atribuição  $\sigma$ ,  $v^\sigma((\delta[\xi/\bar{c}], 0), c) = 0$  dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; daí, pela hipótese de indução temos que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$  dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; nesse caso, pelo lema 5.2, temos que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \delta[\xi/\bar{c}], c)$  dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \forall \xi \delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \gamma, c)$ ; disso se obtém pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

←) Vamos assumir que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ ;

Base:  $n = 0$

Ainda uma vez, como  $\gamma \in L$ ,  $\gamma$  não possui ocorrências da constante  $V$ , e como  $\gamma$  não possui operadores e quantificadores, temos que  $\gamma$  tem a forma  $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n$  com  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ; daí, temos por hipótese que  $\mathfrak{M} \not\models p(\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; daí se obtém pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; isso quer dizer que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 0) \in \mathfrak{M}$ ; daí temos, pela def. 5.20, que  $(I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c)) \notin I(\Phi^n, c)$ ; disso se segue pela def. 5.13 que, dada qualquer atribuição  $\sigma$ ,  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \alpha), c) = 0$ , para qualquer ordinal  $\alpha$ ; portanto,  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, 0), c) = 0$ , isto é,  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 0$ .

Passo de indução: Vamos admitir, como hipótese indutiva, que o teorema 5.2 II vale para  $k < n$ ; temos três casos a considerar:

i)  $\gamma = \sim \delta$ :

Por hipótese  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim \delta, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$ ; daí, temos pela hipótese de indução que  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 1$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\sim \delta, 0), c) = 0$ , ou seja, que  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 0$ .

ii)  $\gamma = \delta \ \& \ \varepsilon$ :

Por hipótese  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta \ \& \ \varepsilon, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim(\delta \ \& \ \varepsilon), c)$ ; daí, temos pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \models p(\sim \varepsilon, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \not\models p(\varepsilon, c)$ ; daí, temos pela hipótese de indução que  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 0$  ou  $v^\sigma((\varepsilon, 0), c) = 0$ ; nesse caso,  $v^\sigma((\delta \ \& \ \varepsilon, 0), c) = 0$ , isto é,  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 0$ .

iii)  $\gamma = \forall \xi \delta$ :

Por hipótese  $\mathfrak{M} \not\models p(\forall \xi \delta, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \forall \xi \delta, c)$ ; daí, temos pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \delta[\xi/\bar{c}], c)$ , dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$ , dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; daí, temos pela hipótese de indução que, dada qualquer atribuição  $\sigma$ ,  $v^\sigma((\delta[\xi/\bar{c}], 0), c) = 0$  dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; é fácil notar que disso se segue que  $v^\sigma((\delta, 0), c) = 0$  dada alguma atribuição  $\sigma$ ; como qualquer atribuição  $\sigma$  é  $\xi$ -variante de si mesma, temos que  $v^\tau((\delta, 0), c) = 0$  dada alguma atribuição  $\tau$   $\xi$ -variante de  $\sigma$ ; pela def. 5.13, isso quer dizer que  $v^\sigma((\forall \xi \delta, 0), c) = 0$ , isto é, que  $v^\sigma((\gamma, 0), c) = 0$ .

O teorema que acabamos de provar comprova o que dissemos no capítulo 1, que nossa definição de verdade, quando restrita a linguagens semanticamente abertas, se reduz à definição tarskiana de verdade. Entretanto, note-se que isso é o caso apenas em um sentido puramente formal, isto é, no sentido de que, no que atine às linguagens semanticamente abertas, as sentenças verdadeiras de acordo com a teoria da verdade de Tarski são precisamente as que expressam proposições verdadeiras de acordo com nossa definição, e as sentenças falsas de acordo com a definição tarskiana são exatamente as sentenças que expressam proposições falsas de acordo com nossa definição. Obviamente, isso não poderia deixar de ser assim, dada a correção da definição de verdade de Tarski no domínio das linguagens semanticamente abertas. Contudo, do ponto de vista filosófico, mesmo quando restrita às linguagens semanticamente abertas a nossa definição de verdade não se reduz à de Tarski, já que a nossa definição é correspondencial e se aplica às proposições, ao passo que a definição de Tarski se aplica a sentenças e não é uma definição correspondencial de verdade.

Agora, vamos provar um teorema bastante similar ao que acabamos de demonstrar. De fato, o teorema 5.2 mostrou que, dado um modelo maximal, uma sentença de  $L$  tem valor 1 em um determinado contexto na interpretação  $\theta$  de  $L^*$  se e somente se esse modelo torna verdadeira a proposição expressa por ela nesse contexto, e que uma sentença de  $L$  tem valor 0 em um determinado contexto na interpretação  $\theta$  de  $L^*$  se e somente se esse modelo torna falsa a proposição

expressa por ela no contexto em questão. O teorema que vamos provar na sequência, por sua vez, vai mostrar que, dado um modelo maximal, uma sentença de  $L^*$  tem valor 1 em um determinado contexto na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$  se e somente se esse modelo torna verdadeira a proposição expressa por tal sentença nesse contexto, e que uma sentença de  $L^*$  tem valor 0 em um determinado contexto na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$  se e somente se esse modelo torna falsa a proposição expressa por ela no contexto em questão<sup>125</sup>.

TEO. 5.3: Seja  $\gamma$  uma fórmula de  $L^*$ ,  $c$  um contexto qualquer de  $\gamma$ ,  $\mathfrak{M}$  um modelo maximal e  $\sigma$  uma atribuição qualquer; nesse caso, dado o modelo  $\mathfrak{M}$ , temos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  sse  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$  e  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

Prova: Por indução sobre o número  $n$  de operadores e quantificadores de  $\gamma$ .

I)  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$  sse  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ .

Base:  $n = 0$

Considerando que  $\gamma$  não possui operadores ou quantificadores, há duas possibilidades:

i)  $\gamma$  é da forma  $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n$ , com  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ :

Suponhamos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ , isto é,  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \zeta), c) = 1$ ; temos pela def. 5.13 que  $(\sigma(t_1, c), \sigma(t_2, c), \dots, \sigma(t_n, c)) \in I(\Phi^n, c)$ ; daí se segue pela def. 5.20 que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \in \mathfrak{M}$ , já que, como  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ,  $\sigma(t_i, c) = I(t_i, c)$ ; daí, temos pela def. 5.17 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ ; disso se segue, pela def. 5.18, que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ . Agora, vamos supor que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ ; portanto, temos pela def. 5.17 que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \in s$ , donde se segue que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 1) \in \mathfrak{M}$ ; disso se segue pela def. 5.20 que  $(\sigma(t_1, c), \sigma(t_2, c), \dots, \sigma(t_n, c)) \in I(\Phi^n, c)$ , uma vez que, como  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ,  $\sigma(t_i, c) = I(t_i, c)$ ; portanto, temos

<sup>125</sup> Portanto, podemos provar para  $L^*$  o mesmo que provamos para  $L$  no teorema 5.2, com exceção de que devemos tomar a interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ , em vez da interpretação 0. Assim, o teorema 5.3 é mais amplo do que o anterior por se aplicar a  $L^*$ , mas é mais fraco porque necessita utilizar a interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ , enquanto o resultado do teorema 5.2 já vale para a interpretação 0 de  $L^*$ .

pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\gamma, \alpha), c) = 1$  para todo ordinal  $\alpha$ , e portanto que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ .

ii)  $\gamma$  tem a forma  $\forall t_1$ , com  $t_1 \in \{a, b, c, \dots\}$ :

Suponhamos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ , isto é,  $v^\sigma((\forall t_1, \zeta), c) = 1$ ; temos pela def. 5.13 que  $\sigma(t_1, c) \in I((V, \zeta), c)$ <sup>126</sup>, isto é,  $\sigma(t_1, c) \in S_{1(\zeta, c)}$ ; daí se segue pela def. 5.20 que  $(V_c, I(t_1, c), 1) \in \mathfrak{N}$ <sup>127</sup>, já que, como  $t_1 \in \{a, b, c, \dots\}$ ,  $\sigma(t_1, c) = I(t_1, c)$ ; daí, temos pela def. 5.17 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{N}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ ; disso se segue, pela def. 5.18, que  $\mathfrak{N} \models p(\gamma, c)$ . Agora, vamos supor que  $\mathfrak{N} \not\models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{N} \not\models p(\forall t_1, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que há uma situação  $s \subseteq \mathfrak{N}$  tal que  $s \models p(\gamma, c)$ ; portanto, temos pela def. 5.17 que  $(V_c, I(t_1, c), 1) \in s$ , donde se segue que  $(V_c, I(t_1, c), 1) \in \mathfrak{N}$ ; disso se segue pela def. 5.20 que  $\sigma(t_1, c) \in S_{1(\zeta, c)}$ , uma vez que, como  $t_1 \in \{a, b, c, \dots\}$ ,  $\sigma(t_1, c) = I(t_1, c)$ ; portanto, temos pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ .

Passo de indução: Vamos admitir, como hipótese indutiva, que o teorema 5.3 vale para  $k < n$ ; temos três casos a considerar:

i)  $\gamma = \sim\delta$ :

Suponhamos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ , isto é, que  $v^\sigma((\sim\delta, \zeta), c) = 1$ ; segue-se por def. 5.13 que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$ ; daí, como o número  $k$  de operadores e quantificadores de  $\delta$  é menor que  $n$ , temos por hipótese que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$  sse  $\mathfrak{N} \not\models p(\delta, c)$ , donde se segue que  $\mathfrak{N} \not\models p(\delta, c)$ ; daí, temos pelo lema 5.2<sup>128</sup> que  $\mathfrak{N} \models p(\sim\delta, c)$ , isto é, temos que  $\mathfrak{N} \models p(\gamma, c)$ . Agora, vamos supor que  $\mathfrak{N} \not\models p(\gamma, c)$ ; isto é, que  $\mathfrak{N} \not\models p(\sim\delta, c)$ ; daí, pelo lema 5.2 temos que  $\mathfrak{N} \not\models p(\delta, c)$ ; pela hipótese indutiva  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$  sse  $\mathfrak{N} \models p(\delta, c)$ ; nesse caso, segue-se por *modus tollens* que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) \neq 1$ ; portanto, dado o contradomínio de  $v^\sigma$ ,

<sup>126</sup> Note-se que aqui não é possível abreviar  $I((V, \zeta), c)$  como  $I(V, c)$ , como fizemos para  $\Phi^n$ , uma vez que a extensão de  $V$ , diferentemente do que ocorre com uma constante  $\Phi^n$  qualquer, varia com a interpretação de  $L^*$  que se estiver considerando.

<sup>127</sup> Note-se que isso não se seguiria da def. 5.20 caso tivéssemos  $\sigma(t_1, c) \in I((V, \alpha), c)$ , dado qualquer ordinal  $\alpha < \zeta$ . Obviamente, reside neste ponto a razão pela qual o teorema 5.2 não pode ser provado para  $L^*$ .

<sup>128</sup> De fato, o lema 5.2 foi demonstrado para  $L^*$ . No entanto, embora a prova dos passos de indução do teorema 5.3 seja quase idêntica à prova desses passos no teorema 5.2, note-se que não poderíamos usar o resultado do teorema 5.2 para a obtenção dessa prova no teorema 5.3, pois obviamente, por exemplo, a sub-fórmula  $\delta$ , no composto funcional-veritativo  $\sim\delta$ , pode bem conter ocorrências da constante  $V$ . Esse fato faz diferença, por exemplo, na prova da segunda parte ( $\leftarrow$ ) da cláusula i) do passo de indução da parte I do teorema 5.3.

determinado na def. 5.13,  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$  ou  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 2$ ; como estamos supondo que  $\sim\delta$  expressa uma proposição, já que assumimos que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta, c)$ ,  $\sim\delta$  deve ser fundada, e portanto não pode ser o caso que  $v^\sigma((\sim\delta, \zeta), c) = 2$ ; nesse caso, portanto, também  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) \neq 2$ , donde se segue que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$ ; mas nesse caso, temos pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\sim\delta, \zeta), c) = 1$ , isto é,  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ .

ii)  $\gamma = \delta \ \& \ \varepsilon$ :

Suponhamos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ , isto é,  $v^\sigma((\delta \ \& \ \varepsilon, \zeta), c) = 1$ ; temos por def. 5.13 que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = v^\sigma((\varepsilon, \zeta), c) = 1$ ; daí, pela hipótese de indução temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$  e que  $\mathfrak{M} \models p(\varepsilon, c)$ ; segue-se pelo teorema 5.1<sup>129</sup> que  $\mathfrak{M} \models p(\delta \ \& \ \varepsilon, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ . Vamos agora supor que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\delta \ \& \ \varepsilon, c)$ ; daí, pelo teorema 5.1 temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$  e  $\mathfrak{M} \models p(\varepsilon, c)$ ; segue-se pela hipótese indutiva que, dada uma atribuição  $\sigma$  qualquer,  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$  e  $v^\sigma((\varepsilon, \zeta), c) = 1$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\delta \ \& \ \varepsilon, \zeta), c) = 1$ , isto é, que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ .

iii)  $\gamma = \forall\xi\delta$ :

Suponhamos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ , isto é,  $v^\sigma((\forall\xi\delta, \zeta), c) = 1$ ; temos por def. 5.13 que  $v^\tau((\delta, \zeta), c) = 1$  dada toda atribuição  $\tau$   $\xi$ -variante de  $\sigma$ ; como  $v^\sigma((\forall\xi\delta, \zeta), c) = 1$  dada qualquer atribuição  $\sigma$ , já que  $\forall\xi\delta$  é uma fórmula, e como toda atribuição é  $\xi$ -variante de si mesma, temos que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$  dada qualquer atribuição; é fácil notar que isso significa que toda fórmula de  $L^* \delta[\xi/\bar{c}]$ , obtida da função sentencial  $\delta$  por substituição da variável  $\xi$  por uma constante individual  $\bar{c}$  é tal que  $v^\sigma((\delta[\xi/\bar{c}], \zeta), c) = 1$ ; daí, pela hipótese de indução, temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$  dada qualquer constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\forall\xi\delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ . Agora vamos assumir que  $\mathfrak{M} \models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\forall\xi\delta, c)$ ; daí, pelo teorema 5.1 temos que  $\mathfrak{M} \models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$  para toda constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pela hipótese indutiva que  $v^\sigma((\delta[\xi/\bar{c}], \zeta), c) = 1$ , dada qualquer constante individual  $\bar{c}$ ; é fácil notar que daí se segue que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$  dada uma atribuição  $\sigma$  qualquer, e portanto também dada qualquer atribuição  $\xi$ -variante de uma tal  $\sigma$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\forall\xi\delta, \zeta), c) = 1$ , isto é, que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 1$ .

<sup>129</sup> Note-se que o teorema 5.1 também foi demonstrado para  $L^*$ .



II)  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$  sse  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ .

Base:  $n = 0$

De novo, considerando que  $\gamma$  não possui operadores ou quantificadores, há duas possibilidades:

i)  $\gamma$  é da forma  $\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n$ , com  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ :

Suponhamos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , isto é, que  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \zeta), c) = 0$ ; pela def. 5.13, isso quer dizer que  $(I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c)) \notin I(\Phi^n, c)$ , já que neste caso  $\sigma(t_i) = I(t_i)$ , pois  $t_i \in \{a, b, c, \dots\}$ ; segue-se pela def. 5.20 que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 0) \in \mathfrak{M}$ , o que quer dizer, dada a def. 5.17, que há uma situação  $s$  em  $\mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim \Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \gamma, c)$ ; daí, temos pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ . Vamos agora admitir que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; daí se obtém pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, c)$ ; isso quer dizer que  $(\Phi_c^n, I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c), 0) \in \mathfrak{M}$ ; daí temos, pela def. 5.20, que  $(I(t_1, c), I(t_2, c), \dots, I(t_n, c)) \notin I(\Phi^n, c)$ ; como temos  $\sigma(t_i) = I(t_i)$ , disso se segue pela def. 5.13 que, dada qualquer atribuição  $\sigma$ ,  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \alpha), c) = 0$ , para qualquer ordinal  $\alpha$ ; portanto,  $v^\sigma((\Phi^n t_1 t_2 \dots t_n, \zeta), c) = 0$ , isto é,  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ .

ii)  $\gamma$  tem a forma  $\forall t_1$  com  $t_1 \in \{a, b, c, \dots\}$ :

Suponhamos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , isto é, que  $v^\sigma((\forall t_1, \zeta), c) = 0$ ; pela def. 5.13, isso quer dizer que  $I(t_1, c) \notin I((\forall, \zeta), c)$ , isto é, que  $I(t_1, c) \notin S_{1(\zeta, c)}$ , já que neste caso  $\sigma(t_1) = I(t_1)$ , pois  $t_1 \in \{a, b, c, \dots\}$ ; mas, nesse caso, ou  $I(t_1, c) \in S_{2(\zeta, c)}$ , ou  $I(t_1, c)$  pertence ao complemento de  $S_{1(\zeta, c)} \cup S_{2(\zeta, c)}$  com relação ao domínio  $D$  da estrutura que se estiver considerando; não ocorre este último caso, pois se isso ocorresse, dada a def. 5.13, teríamos  $v^\sigma((\forall t_1, \zeta), c) = 2$ ; assim, temos que  $I(t_1, c) \in S_{2(\zeta, c)}$ ; segue-se pela def. 5.20 que  $(V_c, I(t_1, c), 0) \in \mathfrak{M}$ , o que quer dizer, dada a def. 5.17, que há uma situação  $s$  em  $\mathfrak{M}$  tal que  $s \models p(\sim \forall t_1, c)$ ; segue-se pela def. 5.18 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \forall t_1, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \gamma, c)$ ; daí, temos pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ . Vamos agora admitir que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\forall t_1, c)$ ; daí se obtém pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim \forall t_1, c)$ ; isso quer dizer que  $(V_c, I(t_1, c), 0) \in \mathfrak{M}$ ; daí temos, pela def. 5.20, que  $I(t_1, c) \notin S_{1(\zeta, c)}$ ; como temos  $\sigma(t_i)$

$= I(t_i)$ , disso se segue pela def. 5.13 que, dada qualquer atribuição  $\sigma$ ,  $v^\sigma((\forall t_1, \zeta), c) = 0$  ou  $v^\sigma((\forall t_1, \zeta), c) = 2$ ; não pode ser o caso que  $v^\sigma((\forall t_1, \zeta), c) = 2$ , pois assumimos que  $\gamma$  expressa uma proposição, o que implica que  $\gamma$  é fundada; assim, temos que  $v^\sigma((\forall t_1, \zeta), c) = 0$ , isto é,  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ .

Passo de indução: Vamos admitir, como hipótese indutiva, que o teorema 5.3 vale para  $k < n$ ; temos três casos a considerar:

i)  $\gamma = \sim\delta$ :

Suponhamos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , isto é, que  $v^\sigma((\sim\delta, \zeta), c) = 0$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$ ; daí temos, pela hipótese de indução, que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$ ; daí temos, pelo lema 5.2, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ . Agora, vamos admitir que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\sim\delta, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\delta, c)$ ; daí, temos pela hipótese de indução que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 1$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\sim\delta, \zeta), c) = 0$ , ou seja, que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ .

ii)  $\gamma = \delta \ \& \ \varepsilon$ :

Suponhamos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , isto é, que  $v^\sigma((\delta \ \& \ \varepsilon, \zeta), c) = 0$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$  ou  $v^\sigma((\varepsilon, \zeta), c) = 0$ ; daí, temos pela hipótese indutiva que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \not\models p(\varepsilon, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \models p(\sim\varepsilon, c)$ ; daí, pelo teorema 5.1, temos que  $\mathfrak{M} \models p(\sim(\delta \ \& \ \varepsilon), c)$ , isto é,  $\mathfrak{M} \models p(\sim\gamma, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ . Agora vamos supor que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta \ \& \ \varepsilon, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim(\delta \ \& \ \varepsilon), c)$ ; daí, temos pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \models p(\sim\varepsilon, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta, c)$  ou  $\mathfrak{M} \not\models p(\varepsilon, c)$ ; daí, temos pela hipótese de indução que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$  ou  $v^\sigma((\varepsilon, \zeta), c) = 0$ ; nesse caso, dada a def. 5.13,  $v^\sigma((\delta \ \& \ \varepsilon, \zeta), c) = 0$ , isto é,  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ .

iii)  $\gamma = \forall\xi\delta$ :

Suponhamos que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ , isto é, que  $v^\sigma((\forall\xi\delta, \zeta), c) = 0$ ; segue-se pela def. 5.13 que  $v^\tau((\delta, \zeta), c) = 0$  dada alguma atribuição  $\tau$   $\xi$ -variante de  $\sigma$ ; é fácil notar que daí se segue que, para qualquer atribuição  $\sigma$ ,  $v^\sigma((\delta[\xi/\bar{c}], \zeta), c) = 0$  dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; daí, pela hipótese de indução temos que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$  dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; nesse caso, pelo lema 5.2,

temos que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta[\xi/\bar{c}], c)$  dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\forall\xi\delta, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\gamma, c)$ ; disso se obtém pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ . Vamos agora assumir que  $\mathfrak{M} \not\models p(\gamma, c)$ , isto é, que  $\mathfrak{M} \models p(\forall\xi\delta, c)$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\forall\xi\delta, c)$ ; daí, temos pelo teorema 5.1 que  $\mathfrak{M} \models p(\sim\delta[\xi/\bar{c}], c)$ , dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; segue-se pelo lema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\delta[\xi/\bar{c}], c)$ , dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; daí, temos pela hipótese de indução que, dada qualquer atribuição  $\sigma$ ,  $v^\sigma((\delta[\xi/\bar{c}], \zeta), c) = 0$  dada alguma constante individual  $\bar{c}$ ; é fácil notar que disso se segue que  $v^\sigma((\delta, \zeta), c) = 0$  dada alguma atribuição  $\sigma$ ; como qualquer atribuição  $\sigma$  é  $\xi$ -variante de si mesma, temos que  $v^\tau((\delta, \zeta), c) = 0$  dada alguma atribuição  $\tau$   $\xi$ -variante de  $\sigma$ ; pela def. 5.13, isso quer dizer que  $v^\sigma((\forall\xi\delta, \zeta), c) = 0$ , isto é, que  $v^\sigma((\gamma, \zeta), c) = 0$ .

Sobre o teorema que acabamos de provar, um fato importante a ser notado é que esse teorema demonstra que há uma simetria, em nossa definição de verdade, entre a aplicação direta do predicado-verdade às proposições e sua aplicação indireta às sentenças, tal como deveria ocorrer. Como comentamos no capítulo 1, isso mostra que, do ponto de vista formal, nossa teoria é equivalente a uma possível teoria resultante dela, em que o predicado-verdade fosse atribuído às sentenças apenas. Nesse caso, as diferenças formais entre essas teorias estariam reduzidas a questões relativas à simplicidade e à elegância, como também já estivemos comentando. De resto, note-se que a possível teoria em questão, embora também fosse satisfazer as condições de adequação que estabelecemos para a nossa teoria, não estaria no entanto assentada sobre as intuições russellianas relativas à noção de verdade, como é evidente.

Na seqüência, vamos mostrar como algumas sentenças são analisadas semanticamente com base em nossa definição de verdade (tendo em consideração alguns modelos), inclusive a sentença do mentiroso, que afirma acerca de si mesma que não é verdadeira.

Para começar, vamos analisar a sentença ‘o atual rei da França é careca’, que estivemos considerando no capítulo 1, na sua formalização ‘ $\exists x ((Rx \ \& \ \forall y (Ry \rightarrow y = x)) \ \& \ Cx)$ ’.

EX. 5.1:  $\exists x ((Rx \ \& \ \forall y (Ry \rightarrow y = x)) \ \& \ Cx)$ , em uma estrutura  $(D, O, C, I)$ , com  $D = \{x \mid x \text{ é humano}\}$ , e com  $I(R, c) = \{x \in D \mid x \text{ é um atual rei da França em } c\}$ ,  $I(C, c) = \{x \in D \mid x \text{ é calvo em } c\}$ ,  $I(=, c) = \{(x, y) \in D^2 \mid x = y \text{ em } c\}$ <sup>130</sup>,  $I(114, 1650)$ <sup>131</sup> = Louis XIV e  $I(116, 1788) = \text{Louis XVI}$ .<sup>132</sup>

Vamos considerar como modelo (maximal) um universo  $\mathfrak{U}$  idêntico ao universo real, exceto que Louis XIV era careca em 1650 e Louis XVI tinha todos os cabelos em 1788. Assim, temos que  $(R_{1650}^1, I(114, 1650), 1) \in \mathfrak{U}$ , com  $R_{1650}^1$  representando a propriedade de ser um atual rei da França em 1650<sup>133</sup>;  $(C_{1650}^1, I(114, 1650), 1) \in \mathfrak{U}$ , com  $C_{1650}^1$  representando a propriedade de ser careca em 1650<sup>VII</sup>;  $(R_{1788}^1, I(116, 1788), 1) \in \mathfrak{U}$ , com  $R_{1788}^1$  representando a propriedade de ser um atual rei da França em 1788;  $(C_{1788}^1, I(116, 1788), 0) \in \mathfrak{U}$ , com  $C_{1788}^1$  representando a propriedade de ser careca em 1788;  $(R_{1650}^1, I(\bar{c}, 1650), 0) \in \mathfrak{U}$ , para qualquer constante individual  $\bar{c} \neq 114$ ;  $(R_{1788}^1, I(\bar{c}, 1788), 0) \in \mathfrak{U}$ , para qualquer constante individual  $\bar{c} \neq 116$ ; e  $(R_{2003}^1, I(\bar{c}, 2003), 0) \in \mathfrak{U}$ , para qualquer constante individual  $\bar{c}$ . Para analisar a fórmula ‘ $\exists x ((Rx \ \& \ \forall y (Ry \rightarrow y = x)) \ \& \ Cx)$ ’, primeiro devemos, do modo habitual, transformá-la para a fórmula ‘ $\sim \forall x \sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx)$ ’. Vamos chamar essa fórmula de  $\varphi$ .

<sup>130</sup> Assim, estamos admitindo as convenções notacionais habituais para a constante predicativa que vai representar a relação de igualdade.

<sup>131</sup> Um problema que alguém poderia encontrar aqui é o seguinte: no século X, por exemplo, não havia um Louis XIV, e portanto  $I(114, 1000)$  não existe, dado o universo real como modelo. E nesse caso não há como avaliar, por exemplo,  $v^\sigma((R114, 0), 1000)$ , pois só permitimos o valor 2 para sentenças com ocorrências da constante V. Essa impressão é causada por estarmos abreviando o contexto  $c$  para a coordenada temporal do falante. De fato, se supomos que alguém profere uma sentença sobre Louis XIV no ano 1000, esse falante se refere a alguém com o nome ‘Louis XIV’, e é esse alguém que deveria ser  $I(114, c)$  nesse contexto  $c$ , embora a nossa contraparte formal desse contexto possa eventualmente não ser capaz de especificar o indivíduo em questão. Se isso ocorrer, no entanto, essa falha se deve apenas à insuficiência do método de modelagem formal de contextos que escolhemos. Esse problema foi discutido no capítulo 1. Agora, se o falante não pretendia se referir a ninguém com o nome ‘Louis XIV’ em sua sentença, essa sentença sem sentido simplesmente não possuirá nenhuma contraparte formal em nossa  $L^*$ , já que  $L^*$  é uma linguagem formal construída de tal modo a não admitir constantes individuais sem denotação em alguns contextos. No entanto, note-se que  $L^*$  admite constantes predicativas sem denotação em alguns contextos, o que permite lidar com sentenças da linguagem natural que possuem nomes que não denotam, de um modo simples, como veremos no exemplo seguinte.

<sup>132</sup> Como se nota, estamos admitindo seqüências alfanuméricas com letras minúsculas como constantes individuais, além das letras minúsculas apenas.

<sup>133</sup> Estamos representando o contexto  $c$  em questão apenas com a coordenada temporal do falante da sentença, uma vez que os demais elementos do contexto são irrelevantes no caso sob consideração.

Daí, em primeiro lugar, vamos verificar se  $\varphi$  expressa uma proposição em alguns contextos. Como  $\varphi \in L$ , temos pelo teorema 5.2 que  $\varphi$  expressa uma proposição em qualquer contexto, e que se  $v^\sigma((\varphi, 0), c) = 1$ , dados nosso modelo  $\mathfrak{M}$ , um contexto  $c$  qualquer e qualquer atribuição  $\sigma$ , então  $\mathfrak{M} \models_p(\varphi, c)$ , e se  $v^\sigma((\varphi, 0), c) = 0$ , dadas as mesmas circunstâncias,  $\mathfrak{M} \not\models_p(\varphi, c)$ . Portanto, basta verificar  $v^\sigma((\varphi, 0), c)$  nos contextos que nos interessam.

i) Vamos começar por  $v^\sigma((\varphi, 0), 1650)$ . A atribuição  $\sigma$  não interessa, pois como  $\varphi$  é uma fórmula ela terá valor 1 dadas todas as atribuições ou valor 0 dadas todas elas. Vamos utilizar a def. 5.13:  $v^\nu((Rx, 0), 1650) = 1$  dada uma atribuição  $\nu$  tal que  $\nu(x, 1650) = \text{Louis XIV}$ , pois  $\text{Louis XIV} \in I((R, 0), 1650)$ <sup>134</sup>;  $v^\nu((Cx, 0), 1650) = 1$  dada a mesma atribuição  $\nu$ , pois  $\text{Louis XIV} \in I((C, 0), 1650)$ ;  $v^\nu((y = x, 0), 1650) = 1$ , pois vamos assumir que  $\nu(y, 1650) = \text{Louis XIV}$ .  $v^\nu((Ry, 0), 1650) = 1$ , pois  $\text{Louis XIV} \in I((R, 0), 1650)$ . Dadas essas condições,  $v^\nu((\sim y = x, 0), 1650) = 0$ , e daí  $v^\nu((Ry \ \& \ \sim y = x, 0), 1650) = 0$ . Daí,  $v^\nu((\sim (Ry \ \& \ \sim y = x), 0), 1650) = 1$ . Agora, dada, por exemplo, uma atribuição  $\tau$   $y$ -variante de  $\nu$  tal que  $\tau(y, 1650) = \text{Henrique VIII}$ ,  $v^\tau((\sim (Ry \ \& \ \sim y = x), 0), 1650) = 1$ ; como  $(R_{1650}^1, I(\bar{c}, 1650), 0) \in \mathfrak{M}$ , para qualquer  $\bar{c} \neq 114$ , é fácil perceber que a def. 5.20 determina que, dado  $\mathfrak{M}$ ,  $v^\tau((\sim (Ry \ \& \ \sim y = x), 0), 1650) = 1$  para qualquer uma dessas atribuições  $y$ -variantes de  $\nu$ . Portanto,  $v^\nu((\forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x), 0), 1650) = 1$ . Dadas essas condições  $v^\nu((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x), 0), 1650) = 1$ , e daí  $v^\nu(((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx, 0), 1650) = 1$ . Segue-se que  $v^\nu((\sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx), 0), 1650) = 0$ . Tomando uma atribuição  $\sigma = \nu$ , exceto que  $\sigma(x) = \text{Henrique VIII}$ , vemos que  $v^\sigma((\sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx), 0), 1650) = 1$ . Como  $\nu$  é  $x$ -variante de  $\sigma$ , temos que não é o caso que  $v^\nu((\sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx), 0), 1650) = 1$  dadas todas as atribuições  $x$ -variantes de  $\sigma$ . Temos, portanto, que  $v^\sigma((\forall x \sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx), 0), 1650) = 0$ , donde se segue que  $v^\sigma((\sim \forall x \sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx), 0), 1650) = 1$ .

<sup>134</sup> De fato,  $(R_{1650}^1, I(114, 1650), 1) \in \mathfrak{M}$ . Portanto, dado  $\mathfrak{M}$  como modelo, temos pela def. 5.20 que  $I(114, 1650) \in I(R, 1650)$ , isto é, que  $\text{Louis XIV} \in I(R, 1650)$ . Como isso vale para qualquer ordinal  $\alpha$ , vale também para 0.

$Cx, 0), 1650) = 1$ . Como  $\varphi$  é uma fórmula, isso vale para qualquer atribuição  $\sigma$ . Temos, portanto, que  $\mathfrak{U} \models p(\varphi, 1650)$ , tal como esperávamos.

ii) Agora vamos considerar  $v^\sigma((\varphi, 0), 1788)$ . Mais uma vez, é claro, vamos utilizar a def. 5.13:  $v^\sigma((Rx, 0), 1788) = 1$  dada uma atribuição  $\sigma$  tal que  $\sigma(x, 1788) = \text{Louis XVI}$ , pois  $\text{Louis XVI} \in I((R, 0), 1788)$ ;  $v^\sigma((Cx, 0), 1788) = 0$  dada a mesma atribuição  $\sigma$ , pois  $\text{Louis XVI} \notin I((C, 0), 1788)$ ;  $v^\sigma((y = x, 0), 1788) = 1$ , pois vamos assumir que  $\sigma(y, 1788) = \text{Louis XVI}$ .  $v^\sigma((Ry, 0), 1788) = 1$ , pois  $\text{Louis XVI} \in I((R, 0), 1788)$ . Dadas essas condições,  $v^\sigma((\sim y = x, 0), 1788) = 0$ , e daí  $v^\sigma((Ry \ \& \ \sim y = x, 0), 1788) = 0$ . Daí,  $v^\sigma((\sim (Ry \ \& \ \sim y = x), 0), 1788) = 1$ . Agora, dada, por exemplo, uma atribuição  $\tau$  y-variante de  $\sigma$  tal que  $\tau(y, 1788) = \text{Robespierre}$ ,  $v^\tau((\sim (Ry \ \& \ \sim y = x), 0), 1788) = 1$ ; como  $(R_{1788}^1, I(\bar{c}, 1788), 0) \in \mathfrak{U}$ , para qualquer constante individual  $\bar{c} \neq 116$ , é fácil perceber que a def. 5.20 determina que, dado  $\mathfrak{U}$ ,  $v^\tau((\sim (Ry \ \& \ \sim y = x), 0), 1788) = 1$  para qualquer uma dessas atribuições y-variantes de  $\sigma$ . Portanto,  $v^\sigma((\forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x), 0), 1788) = 1$ . Dadas essas condições  $v^\sigma((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x), 0), 1788) = 1$ , e daí  $v^\sigma(((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx, 0), 1788) = 0$ . Segue-se que  $v^\sigma((\sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx), 0), 1788) = 1$ . Tomando uma atribuição  $\upsilon$  x-variante de  $\sigma$  tal que  $\upsilon(x) = \text{Robespierre}$ , vemos que  $v^\upsilon((\sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx), 0), 1788) = 1$ . Mais uma vez, como  $(R_{1788}^1, I(\bar{c}, 1788), 0) \in \mathfrak{U}$ , para qualquer constante individual  $\bar{c} \neq 116$ , é fácil perceber que a def. 5.20 determina que, dado  $\mathfrak{U}$ ,  $v^\upsilon((\sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx), 0), 1788) = 1$  dadas todas essas atribuições x-variantes de  $\sigma$ . Temos, portanto, que  $v^\sigma((\forall x \sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx), 0), 1788) = 1$ , donde se segue que  $v^\sigma((\sim \forall x \sim ((Rx \ \& \ \forall y \sim (Ry \ \& \ \sim y = x)) \ \& \ Cx), 0), 1788) = 0$ . Como  $\varphi$  é uma fórmula, isso vale para qualquer atribuição  $\sigma$ . Temos, portanto, que  $\mathfrak{U} \not\models p(\varphi, 1788)$ , mais uma vez como era esperado.

iii) Por fim, vamos considerar  $v^\sigma((\varphi, 0), 2003)$ . Vamos utilizar novamente a def. 5.13:  $v^\sigma((Rx, 0), 2003) = 0$  dada uma atribuição  $\sigma$  qualquer; isso se segue da def. 5.20, já que  $(R_{2003}^1, I(\bar{c}, 2003), 0) \in \mathfrak{U}$ , para qualquer constante individual  $\bar{c}$ ; portanto, isso vale para uma atribuição  $\sigma$  tal que  $\sigma(x) = \text{G. W. Bush}$ . Nessas

condições,  $v^\sigma((Cx, 0), 2003) = 0$  dada a mesma atribuição  $\sigma$ , pois  $Bush \notin I((C, 0), 2003)$ ;  $v^\sigma((y = x, 0), 2003) = 1$ , pois vamos assumir que  $\sigma(y, 2003) = G. W. Bush$ .  $v^\sigma((Ry, 0), 2003) = 0$ , pois  $Bush \notin I((R, 0), 2003)$ <sup>135</sup>. Dadas essas condições,  $v^\sigma((\sim y = x, 0), 2003) = 0$ , e daí  $v^\sigma((Ry \& \sim y = x, 0), 2003) = 0$ . Daí,  $v^\sigma((\sim(Ry \& \sim y = x), 0), 2003) = 1$ . Agora, dada, por exemplo, uma atribuição  $\tau$  y-variante de  $\sigma$  tal que  $\tau(y, 2003) = Saddam Hussein$ ,  $v^\tau((\sim(Ry \& \sim y = x), 0), 2003) = 1$ ; como, novamente,  $(R_{2003}^1, I(\bar{c}, 2003), 0) \in \mathfrak{M}$ , para qualquer constante individual  $\bar{c}$ , é fácil perceber que a def. 5.20 determina que, dado  $\mathfrak{M}$ ,  $v^\tau((\sim(Ry \& \sim y = x), 0), 2003) = 1$  para qualquer uma dessas atribuições y-variantes de  $\sigma$ . Portanto,  $v^\sigma((\forall y \sim(Ry \& \sim y = x), 0), 2003) = 1$ . Dadas essas condições  $v^\sigma((Rx \& \forall y \sim(Ry \& \sim y = x), 0), 2003) = 0$ , e daí  $v^\sigma(((Rx \& \forall y \sim(Ry \& \sim y = x)) \& Cx, 0), 2003) = 0$ . Segue-se que  $v^\sigma((\sim((Rx \& \forall y \sim(Ry \& \sim y = x)) \& Cx), 0), 2003) = 1$ . Tomando uma atribuição  $\upsilon$  x-variante de  $\sigma$  tal que  $\upsilon(x) = Saddam Hussein$ , vemos que  $v^\upsilon((\sim((Rx \& \forall y \sim(Ry \& \sim y = x)) \& Cx), 0), 2003) = 1$ . Ainda uma vez, como  $(R_{2003}^1, I(\bar{c}, 2003), 0) \in \mathfrak{M}$ , para qualquer constante individual  $\bar{c}$ , é fácil perceber que a def. 5.20 determina que, dado  $\mathfrak{M}$ ,  $v^\upsilon((\sim((Rx \& \forall y \sim(Ry \& \sim y = x)) \& Cx), 0), 2003) = 1$  dadas todas essas atribuições x-variantes de  $\sigma$ . Temos, portanto, que  $v^\sigma((\forall x \sim((Rx \& \forall y \sim(Ry \& \sim y = x)) \& Cx), 0), 2003) = 1$ , donde se segue que  $v^\sigma((\sim \forall x \sim((Rx \& \forall y \sim(Ry \& \sim y = x)) \& Cx), 0), 2003) = 0$ . Como  $\varphi$  é uma fórmula, isso vale para qualquer atribuição  $\sigma$ . Temos, portanto, que  $\mathfrak{M} \not\models \varphi$  ( $\varphi, 2003$ ), esta vez novamente como era esperado.

Vamos agora analisar a sentença ‘Ulisses foi desembarcado em Ítaca’, que também foi considerada no capítulo 1, na sua formalização ‘ $\exists x((Ux \& Hx) \& Dxi)$ ’.

EX. 5.2:  $\exists x((Ux \& Hx) \& Dxi)$ , em uma estrutura  $(D, O, C, I)$ , onde  $D$  é o conjunto universo, e com  $I(U, c) = \{x \in D \mid x \text{ chama-se Ulisses em } c\}$ ,  $I(H, c) =$

<sup>135</sup> De fato,  $I((R, 0), 2003) = \emptyset$ , dado o modelo  $\mathfrak{M}$ .

$\{x \in D \mid \text{Homero fala sobre } x \text{ na Odisséia, em } c\}$ <sup>136</sup>,  $I(D, c) = \{(x, y) \in D^2 \mid x \text{ foi desembarcado em } y \text{ em } c\}$  e  $I(i, c) = \text{Ítaca}$ , dado qualquer contexto  $c$ .

Vamos considerar dois modelos diferentes. O universo real  $\mathfrak{U}$ , e um universo  $\mathfrak{U}$  idêntico ao real, com a exceção de que Homero nesse universo não é um autor de ficção, mas um historiador que descreve, inclusive na Odisséia, fatos desse universo. Não é necessário especificar os estados-de-coisas relevantes que pertencem a cada um desses modelos, uma vez que já mostramos no ex. 5.1 como funciona a atribuição dos valores 0, 1 e 2 a fórmulas de  $L^*$ , com base nas definições 5.13 e 5.20. Aqui temos também que modificar a fórmula acima, de modo a que só ocorram nela os operadores e o quantificador que admitimos como primitivos em  $L^*$ . Nesse caso, a fórmula a ser analisada será  $\sim \forall x \sim ((Ux \ \& \ Hx) \ \& \ Dxi)$ . E como aqui também temos uma fórmula de  $L$ , podemos utilizar o teorema 5.2 e concluir que essa fórmula – vamos chamá-la de  $\psi$  – expressa uma proposição em qualquer contexto  $c$ , e que, dada qualquer atribuição  $\sigma$  e qualquer contexto  $c$ ,  $v^\sigma((\psi, 0), c) = 1$  sse  $M \models p(\psi, c)$ .

i) Vamos começar verificando o que acontece com  $v^\sigma((\psi, 0), c)$  dado o modelo  $\mathfrak{U}$ , para um contexto  $c$  arbitrário. Em primeiro lugar  $v^\sigma((Ux, 0), c) = 1$ , dada uma atribuição  $\sigma$  tal que  $\sigma(x, c)$  é alguém que se chama Ulisses. Por exemplo, esse é o caso de  $v^\sigma((Ux, 0), 1989)$ , dada uma atribuição  $\sigma$  tal que  $\sigma(x, 1989) = \text{Ulisses Guimarães}$ . Dada uma tal atribuição,  $v^\sigma((Hx, 0), c) = 0$ , já que Homero não fala de nenhum desses Ulisses no universo real<sup>137</sup>.  $v^\sigma((Dxi, 0), c) = 0$ , por exemplo naquelas dentre as atribuições sob consideração tais que, por exemplo, o Ulisses que corresponde a  $\sigma(x, c)$  nunca esteve em ilha nenhuma. No caso dessas atribuições, portanto,  $v^\sigma((Ux \ \& \ Hx, 0), c) = 0$ , e  $v^\sigma(((Ux \ \& \ Hx) \ \& \ Dxi, 0), c) = 0$ . Portanto,  $v^\sigma((\sim((Ux \ \& \ Hx) \ \& \ Dxi), 0), c) = 1$ . Claramente,  $v^\tau((\sim((Ux \ \& \ Hx) \ \& \ Dxi), 0), c) = 1$  para qualquer atribuição  $\tau$   $x$ -variante de  $\sigma$ , pois  $v^\tau$

<sup>136</sup> Note-se que, por exemplo,  $I(H, 2003)$  não é o conjunto dos objetos acerca dos quais Homero fala na Odisséia em 2003, mas sim como está em 2003 o conjunto dos objetos acerca dos quais Homero fala na Odisséia. Obviamente, depois que Homero concluiu a redação da Odisséia esse conjunto se mantém inalterado.

<sup>137</sup> De fato, Homero não fala de nenhum Ulisses real na Odisséia. Como estamos tomando o conjunto universo como domínio, poderíamos considerar que estão no domínio inclusive objetos abstratos de ficção, que podem se chamar Ulisses, e nesse caso podemos ter  $v^\sigma((Hx, 0), c) = 1$ , já que  $\sigma(x, c)$  pode ser, nesse caso, o objeto fictício de nome Ulisses acerca do qual Homero fala na Odisséia. Mas nesse caso vamos ter obrigatoriamente  $v^\sigma((Dxi, 0), c) = 0$ , já que obviamente esse objeto fictício não foi desembarcado em lugar algum no universo real.



$((Hx, 0), c) = 0$  dada qualquer dessas atribuições<sup>138</sup>. Portanto,  $v^\sigma((\forall x \sim ((Ux \& Hx) \& Dxi), 0), c) = 1$ , e daí temos que  $v^\sigma((\sim \forall x \sim ((Ux \& Hx) \& Dxi), 0), c) = 0$ . Pelo teorema 5.2, segue-se que  $\mathfrak{U} \not\models p(\psi, c)$ , para qualquer contexto  $c$ , tal como esperávamos.

ii) Agora vejamos o que ocorre com  $v^\sigma((\psi, 0), c)$  dado o modelo  $\mathfrak{U}$ . Temos  $v^\tau((Ux, 0), c) = 1$ , por exemplo, dada uma atribuição  $\tau$  tal que  $\tau(x, c)$  é o homem que enfrentou Polifemo, dado um contexto  $c$  que envolve um tempo posterior aos relatos históricos de Homero. Dada essa mesma atribuição  $\tau$ , temos que  $v^\tau((Hx, 0), c) = 1$  e  $v^\tau((Dxi, 0), c) = 1$ , já que são fatos no universo  $\mathfrak{U}$  que Homero fala sobre esse Ulisses na sua obra de história intitulada Odisséia, e que esse homem foi desembarcado na ilha de Ítaca. Assim, temos que  $v^\tau((Ux \& Hx, 0), c) = 1$ , e que  $v^\tau(((Ux \& Hx) \& Dxi), 0), c) = 1$ . Daí se segue que  $v^\tau((\sim ((Ux \& Hx) \& Dxi), 0), c) = 0$ . Agora vamos considerar uma atribuição  $\sigma$  idêntica a  $\tau$ , exceto que  $\sigma(x, c) = \text{Homero}$ . Temos que  $v^\sigma((Ux, 0), c) = 0$ , e é fácil perceber que, dada a def. 5.13,  $v^\sigma((\sim ((Ux \& Hx) \& Dxi), 0), c) = 1$ . Como  $\tau$  é  $x$ -variante de  $\sigma$ , e  $v^\tau((\sim ((Ux \& Hx) \& Dxi), 0), c) \neq 1$ , temos que  $v^\sigma((\forall x \sim ((Ux \& Hx) \& Dxi), 0), c) = 0$ , e, portanto,  $v^\sigma((\sim \forall x \sim ((Ux \& Hx) \& Dxi), 0), c) = 1$ . Isso vale para toda atribuição  $\sigma$ , pois  $\psi$  é uma fórmula, e portanto temos pelo teorema 5.2, mais uma vez como era esperado, que  $\mathfrak{U} \models p(\psi, c)$ , dado qualquer contexto  $c$ , exceto é claro, contextos que envolvem um tempo anterior àquele em que os relatos históricos de Homero tiveram parte no universo  $\mathfrak{U}$ <sup>139</sup>.

Agora, vamos analisar a sentença que afirma acerca de si mesma que não é verdadeira, ou seja, a sentença do mentiroso, na sua formalização em  $L^*$  que segue:  $\forall x (Px \rightarrow \sim Vx)$ , modificada para ' $\forall x \sim (Px \& Vx)$ '<sup>140</sup>.

<sup>138</sup> No caso comentado na nota anterior, podemos ter  $v^\tau((Hx, 0), c) = 1$ , mas então teremos  $v^\tau((Dxi, 0), c) = 0$ .

<sup>139</sup> Num tal contexto, mesmo para  $\tau(x, c)$  especificado como acima, teremos que  $v^\tau((Hx, 0), c) = 0$ , de modo que teremos  $v^\tau((\sim ((Ux \& Hx) \& Dxi), 0), c) = 1$ . Esse será então o caso de todas as atribuições  $x$ -variantes de  $\sigma$ , o que vai resultar que  $v^\sigma((\sim \forall x \sim ((Ux \& Hx) \& Dxi), 0), c) = 0$ , e que, portanto,  $\mathfrak{U} \not\models p(\psi, c)$ .

<sup>140</sup> Há aqui uma questão interessante. Estamos tomando como exemplo da antinomia do mentiroso uma *sentença* que afirma sobre si própria que não é verdadeira. Como não pode haver uma proposição que não seja veiculada por nenhuma sentença, não podemos tentar analisar diretamente algo como uma proposição que afirma sobre si própria que não é verdadeira. Então o que fazemos é verificar se a sentença que afirma sua própria falsidade expressa ou não uma proposição. O que

EX. 5.3:  $\lambda = \forall x \sim (Px \ \& \ Vx)$ , em uma estrutura  $(D, O, C, I)$ , onde  $D$  é o conjunto universo, e com  $I(P, c) = \{x \in D \mid x \text{ tem o número de Gödel } k \text{ em } c\}$ <sup>141</sup>, sendo  $k$  o número de Gödel da própria  $\lambda$ , e  $I((V, \alpha), c) = \{x \in D \mid x \text{ é verdadeira no nível } \alpha, \text{ em } c\}$ .

Para começar, independente do modelo considerado, temos que  $v^\sigma((Vx, 0), c) = 2$  dado qualquer contexto  $c$  e qualquer atribuição  $\sigma$ , já que  $I((V, 0), c) = \emptyset$  (ou seja,  $S_{1(0,c)} = \emptyset$ ) dado qualquer contexto  $c$ , e dado que  $S_{2(0,c)} = \emptyset$  dado qualquer contexto  $c$ . Daí,  $v^\sigma((Px \ \& \ Vx, 0), c) = 2$  na situação em que  $\sigma(x, c) = \lambda$ , caso em que  $v^\sigma((Px, 0), c) = 1$ . Nesse caso, portanto,  $v^\sigma((\sim(Px \ \& \ Vx), 0), c) = 2$ . Se tomarmos uma atribuição  $\tau$   $x$ -variante de  $\sigma$ , então  $v^\tau((Px, 0), c) = 0$ , e daí teremos que  $v^\tau((Px \ \& \ Vx), 0), c) = 0$ , e portanto que  $v^\tau((\sim(Px \ \& \ Vx), 0), c) = 1$ . Assim, como não é o caso que  $v^\tau((Px \ \& \ Vx), 0), c) = 1$  para toda atribuição  $x$ -variante de  $\sigma$ , já que  $\sigma$  é  $x$ -variante de si mesma, e como não é o caso que  $v^\tau((Px \ \& \ Vx), 0), c) = 0$  para alguma dessas atribuições, temos que  $v^\sigma((\forall x \sim (Px \ \& \ Vx), 0), c) = 2$ , dada qualquer atribuição  $\sigma$  e qualquer contexto  $c$ . Vamos agora supor que  $v^\sigma((\forall x \sim (Px \ \& \ Vx), \beta), c) = 2$ , dado um certo ordinal  $\beta$  e qualquer contexto  $c$ . Vamos tomar uma atribuição  $\sigma$  tal que  $\sigma(x, c) = \lambda$ , dado qualquer contexto  $c$ . Temos que  $v^\sigma((Px, \beta + 1), c) = 1$  dado qualquer contexto  $c$ , já que  $I((P, \alpha), c)$  permanece invariável para qualquer ordinal  $\alpha$  e para qualquer contexto  $c$ . E como  $\lambda \notin S_{1(\beta+1,c)} \cup S_{2(\beta+1,c)}$  independente do contexto  $c$ , já que  $v^\sigma((\lambda, \beta), c) \neq 0$  e  $v^\sigma((\lambda, \beta), c) \neq 1$  dado todo contexto  $c$ , temos que  $v^\sigma((Vx, \beta + 1), c) = 2$  para todo  $c$ . Portanto,  $v^\sigma((Px \ \& \ Vx, \beta + 1), c) = 2$  para todo  $c$ , donde se segue que  $v^\sigma((\sim(Px \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 2$  para todo  $c$ . Agora, vamos considerar uma atribuição  $\tau$   $x$ -variante de  $\sigma$ . Temos que  $\tau(x, c) \neq \lambda$ , dado qualquer contexto  $c$ . Então, para todo  $c$ ,  $v^\tau((Px, \beta + 1), c) = 0$ , e  $v^\tau((Vx, \beta + 1), c)$  tem valor 0, 1, ou 2. Nesse caso, para todo  $c$ ,  $v^\tau$

---

acaba ocorrendo, dada a maneira como nossa semântica é montada, é que sentenças que falam sobre o valor de verdade de outras sentenças estão, de fato, falando sobre o valor de verdade das proposições expressas por tais sentenças, se houver alguma. Nesse caso, se a sentença do mentiroso expressar alguma proposição, esta proposição estará dizendo acerca da proposição expressa pela sentença do mentiroso, ou seja, acerca de si mesma, que não é verdadeira. Como o exemplo 5.3 vai mostrar, a sentença do mentiroso não expressa uma proposição, o que quer dizer que não pode haver uma proposição que afirma sua própria falsidade.

<sup>141</sup> Note-se que  $I(P, c)$  é invariável, já que o número de Gödel de uma fórmula não varia com o contexto.

$((Px \ \& \ Vx, \beta + 1), c) = 0$ , e portanto  $v^\tau((\sim(Px \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 1$ , independente do valor de  $v^\tau((Vx, \beta + 1), c)$ . Portanto, lembrando que  $\sigma$  é x-variante de si mesma, não é o caso que  $v^\tau((\sim(Px \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 1$  dadas todas as atribuições x-variantes de  $\sigma$ , e também não é o caso que  $v^\tau((\sim(Px \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 0$  dada alguma dessas atribuições. Segue-se daí que  $v^\sigma((\forall x \sim(Px \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 2$ , dado qualquer contexto  $c$ . Como  $\lambda$  é uma fórmula, isso também vale dada qualquer atribuição  $\sigma$ . Assim, temos por indução sobre  $\alpha$  que  $v^\sigma((\lambda, \alpha), c) = 2$ , dados qualquer atribuição  $\sigma$ , ordinal  $\alpha$  e contexto  $c$ . Portanto,  $v^\sigma((\lambda, \zeta), c) = 2$ , donde se segue que  $\lambda$  é infundada, e portanto não expressa nenhuma proposição que possa *ser feita* verdadeira ou falsa dado um modelo qualquer, ou ser verdadeira ou falsa *em* um modelo qualquer.

Uma outra versão do paradoxo do mentiroso que convém analisar com as técnicas introduzidas em nossa definição é o chamado *ciclo do mentiroso*. Trata-se de uma seqüência de  $n$  sentenças, em que a  $k$ -ésima sentença afirma que a  $k+1$ -ésima sentença é verdadeira, para  $1 \leq k < n$ , e a  $n$ -ésima sentença afirma que a primeira sentença é falsa. Esse é um caso interessante porque as sentenças do ciclo não tratam sobre si próprias, como no caso da sentença do mentiroso, de modo que o caráter infundado dessas sentenças não é inteiramente evidente.

EX. 5.4: Vamos considerar um ciclo do mentiroso com três sentenças. A formalização do ciclo será a seguinte:  $\forall x (P_2x \rightarrow Vx)$ ,  $\forall x (P_3x \rightarrow Vx)$ ,  $\forall x (P_1x \rightarrow \sim Vx)$ ; com  $P_i$  representando um predicado sintático satisfeito apenas pela  $i$ -ésima fórmula do ciclo,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Modificando as fórmulas do ciclo de modo que as mesmas só exibam operadores primitivos, teremos a seqüência de fórmulas:  $\forall x \sim (P_2x \ \& \ \sim Vx)$ ,  $\forall x \sim (P_3x \ \& \ \sim Vx)$ ,  $\forall x \sim (P_1x \ \& \ Vx)$ . Vamos chamar a  $i$ -ésima fórmula dessa seqüência de  $\lambda_i$ . De resto, tomemos uma estrutura como a do exemplo 5.3 e consideremos um modelo qualquer.

Embora ocorra uma conjunção em  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , o mesmo tipo de raciocínio que utilizaremos no passo de indução vai mostrar que, dada qualquer atribuição  $\sigma$  e qualquer contexto  $c$ ,  $v^\sigma((\lambda_1, 0), c) = 2$ ,  $v^\sigma((\lambda_2, 0), c) = 2$  e  $v^\sigma((\lambda_3, 0), c) = 2$ . Vamos agora supor que, dada qualquer atribuição  $\sigma$  e um contexto  $c$  qualquer,  $v^\sigma$

$((\lambda_i, \beta), c) = 2$ , para  $i \in \{1, 2, 3\}$  e para um ordinal  $\beta$  qualquer. Vamos começar por  $\lambda_1$ . Consideremos uma atribuição  $\sigma$  tal que  $\sigma(x, c) = \lambda_2$ , dado qualquer contexto  $c$ . Temos que  $v^\sigma((P_2x, \beta + 1), c) = 1$  dado qualquer contexto  $c$ . E como  $\lambda_2 \notin S_{1(\beta+1,c)} \cup S_{2(\beta+1,c)}$  independente do contexto  $c$ , já que  $v^\sigma((\lambda_2, \beta), c) \neq 0$  e  $v^\sigma((\lambda_2, \beta), c) \neq 1$  dado todo contexto  $c$ , temos que  $v^\sigma((Vx, \beta + 1), c) = 2$  para todo  $c$ , donde se segue que  $v^\sigma((\sim Vx, \beta + 1), c) = 2$  para todo  $c$ . Portanto,  $v^\sigma((P_2x \ \& \ \sim Vx, \beta + 1), c) = 2$  para todo  $c$ , donde se segue que  $v^\sigma((\sim (P_2x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 2$  para todo  $c$ . Agora, vamos considerar uma atribuição  $\tau$   $x$ -variante de  $\sigma$ . Temos que  $\tau(x, c) \neq \lambda_2$ , dado qualquer contexto  $c$ . Então, para todo  $c$ ,  $v^\tau((P_2x, \beta + 1), c) = 0$ , e  $v^\tau((Vx, \beta + 1), c)$  tem valor 0, 1, ou 2, o mesmo ocorrendo, é claro, com  $v^\tau((\sim Vx, \beta + 1), c)$ . Nesse caso, para todo  $c$ ,  $v^\tau((P_2x \ \& \ \sim Vx, \beta + 1), c) = 0$ , e portanto  $v^\tau((\sim (P_2x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 1$ , independente do valor de  $v^\tau((\sim Vx, \beta + 1), c)$ . Portanto, lembrando que  $\sigma$  é  $x$ -variante de si mesma, não é o caso que  $v^\tau((\sim (P_2x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 1$  dadas todas as atribuições  $x$ -variantes de  $\sigma$ , e também não é o caso que  $v^\tau((\sim (P_2x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 0$  dada alguma dessas atribuições. Segue-se daí que  $v^\sigma((\forall x \sim (P_2x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 2$ , dado qualquer contexto  $c$ . Como  $\lambda_1$  é uma fórmula, isso também vale dada qualquer atribuição  $\sigma$ . Assim, temos por indução sobre  $\alpha$  que  $v^\sigma((\lambda_1, \alpha), c) = 2$ , dados qualquer atribuição  $\sigma$ , ordinal  $\alpha$  e contexto  $c$ . Portanto,  $v^\sigma((\lambda_1, \zeta), c) = 2$ , donde se segue que  $\lambda_1$  é infundada, e portanto não expressa nenhuma proposição que possa *ser feita* verdadeira ou falsa dado um modelo qualquer, ou ser verdadeira ou falsa *em* um modelo qualquer. Agora, vejamos o que acontece com  $\lambda_2$ . Em primeiro lugar, temos que  $v^\sigma((P_3x, \beta + 1), c) = 0$  dado qualquer contexto  $c$ . Como já vimos,  $\lambda_2 \notin S_{1(\beta+1,c)} \cup S_{2(\beta+1,c)}$  independente do contexto  $c$ , donde se segue que  $v^\sigma((Vx, \beta + 1), c) = 2$  para todo  $c$ , e portanto que  $v^\sigma((\sim Vx, \beta + 1), c) = 2$  para todo  $c$ . Por conseguinte,  $v^\sigma((P_3x \ \& \ \sim Vx, \beta + 1), c) = 0$  para todo  $c$ , donde se segue que  $v^\sigma((\sim (P_3x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 1$  para todo  $c$ . Seguindo adiante, temos que para todo  $c$ ,  $v^\tau((P_3x, \beta + 1), c) = 0$ , ou  $v^\tau((P_3x, \beta + 1), c) = 1$ , caso  $\tau(x, c)$  for  $\lambda_3$ . Ocorrendo de  $\tau(x, c) = \lambda_3$ , teremos que  $v^\tau((Vx, \beta + 1), c) = 2$ , uma vez que  $\lambda_3 \notin S_{1(\beta+1,c)} \cup S_{2(\beta+1,c)}$  independente do contexto  $c$ . Assim,  $v^\tau((\sim Vx, \beta + 1), c) = 2$  para qualquer contexto  $c$ . Nesse caso, para todo  $c$ ,  $v^\tau((P_3x \ \& \ \sim Vx, \beta + 1), c) = 2$ , e portanto  $v^\tau$

$((\sim (P_3x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 2$ . Se, no entanto, tivermos  $\tau(x, c) \neq \lambda_3$ , teremos que, para todo  $c$ ,  $v^\tau((P_3x \ \& \ \sim Vx, \beta + 1), c) = 0$ , e portanto que  $v^\tau((\sim (P_3x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 1$ , independente de  $v^\tau((\sim Vx, \beta + 1), c)$ . Assim,  $v^\tau((\sim (P_3x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c)$  tem valor 1 ou valor 2, mas nunca valor 0. Portanto, não é o caso que  $v^\tau((\sim (P_3x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 1$  dadas todas as atribuições  $x$ -variantes de  $\sigma$ , e também não é o caso que  $v^\tau((\sim (P_3x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 0$  dada alguma dessas atribuições. Segue-se daí que  $v^\sigma((\forall x \sim (P_3x \ \& \ \sim Vx), \beta + 1), c) = 2$ , dado qualquer contexto  $c$ . Como  $\lambda_2$  é uma fórmula, isso também vale dada qualquer atribuição  $\sigma$ . Assim, temos por indução sobre  $\alpha$  que  $v^\sigma((\lambda_2, \alpha), c) = 2$ , dados qualquer atribuição  $\sigma$ , ordinal  $\alpha$  e contexto  $c$ . Portanto,  $v^\sigma((\lambda_2, \zeta), c) = 2$ , donde se segue que  $\lambda_2$  é infundada, e portanto não expressa nenhuma proposição que possa *ser feita* verdadeira ou falsa dado um modelo qualquer, ou ser verdadeira ou falsa *em* um modelo qualquer. Por fim, vamos analisar o caso de  $\lambda_3$ . Para começar, temos que  $v^\sigma((P_1x, \beta + 1), c) = 0$  dado qualquer contexto  $c$ . De novo, como  $\lambda_2 \notin S_{1(\beta+1,c)} \cup S_{2(\beta+1,c)}$  independente do contexto  $c$ , temos que  $v^\sigma((Vx, \beta + 1), c) = 2$  para todo  $c$ . Daí,  $v^\sigma((P_1x \ \& \ Vx, \beta + 1), c) = 0$  para todo  $c$ , donde se segue que  $v^\sigma((\sim (P_1x \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 1$  para todo  $c$ . Prosseguindo, temos que para todo  $c$ ,  $v^\tau((P_1x, \beta + 1), c) = 0$ , ou  $v^\tau((P_1x, \beta + 1), c) = 1$ , caso  $\tau(x, c)$  for  $\lambda_1$ . Ocorrendo de  $\tau(x, c) = \lambda_1$ , teremos que  $v^\tau((Vx, \beta + 1), c) = 2$ , uma vez que  $\lambda_1 \notin S_{1(\beta+1,c)} \cup S_{2(\beta+1,c)}$  independente do contexto  $c$ . Nesse caso, para todo  $c$ ,  $v^\tau((P_1x \ \& \ Vx, \beta + 1), c) = 2$ , e portanto  $v^\tau((\sim (P_1x \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 2$ . Se, no entanto, tivermos  $\tau(x, c) \neq \lambda_1$ , teremos que, para todo  $c$ ,  $v^\tau((P_1x \ \& \ Vx, \beta + 1), c) = 0$ , e portanto que  $v^\tau((\sim (P_1x \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 1$ , independente de  $v^\tau((Vx, \beta + 1), c)$ . Assim,  $v^\tau((\sim (P_1x \ \& \ Vx), \beta + 1), c)$  tem valor 1 ou valor 2, mas nunca valor 0. Portanto, não é o caso que  $v^\tau((\sim (P_1x \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 1$  dadas todas as atribuições  $x$ -variantes de  $\sigma$ , e também não é o caso que  $v^\tau((\sim (P_1x \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 0$  dada alguma dessas atribuições. Segue-se daí que  $v^\sigma((\forall x \sim (P_1x \ \& \ Vx), \beta + 1), c) = 2$ , dado qualquer contexto  $c$ . Como  $\lambda_3$  é uma fórmula, isso também vale dada qualquer atribuição  $\sigma$ . Desse modo, temos por indução sobre  $\alpha$  que  $v^\sigma((\lambda_3, \alpha), c) = 2$ , dados qualquer atribuição  $\sigma$ , ordinal  $\alpha$  e contexto  $c$ . Portanto,  $v^\sigma((\lambda_3, \zeta), c) = 2$ , donde se segue que  $\lambda_3$  também é infundada, e que portanto também não expressa nenhuma

proposição que possa *ser feita* verdadeira ou falsa dado um modelo qualquer, ou ser verdadeira ou falsa *em* um modelo qualquer.

Assim, também os ciclos do mentiroso são compostos por sentenças infundadas, que falham em expressar uma proposição. Apenas para contrastar com esses ciclos, vamos analisar a inócua seqüência de sentenças  $s_1 = \text{'A sentença } s_2 \text{ é falsa'}$ ,  $s_2 = \text{'A sentença } s_3 \text{ é falsa'}$ ,  $s_3 = \text{'4}^2 = 16\text{'}$ .

EX. 5.5: Na seguinte seqüência de fórmulas, a fórmula  $\varphi_i$  vai formalizar a sentença  $s_i$  da seqüência mencionada acima,  $i \in \{1, 2, 3\}$ :  $\varphi_1 = \forall x \sim (P_2x \ \& \ Vx)$ ,  $\varphi_2 = \forall x \sim (P_3x \ \& \ Vx)$ , e  $\varphi_3 = Qab$ , em uma estrutura  $(D, O, C, I)$ , onde  $D$  é o conjunto universo, e com  $I(P_2, c) = \{x \in D \mid x \text{ tem o número de Gödel } k \text{ em } c\}$ , sendo  $k$  o número de Gödel de  $\varphi_2$ ,  $I(P_3, c) = \{x \in D \mid x \text{ tem o número de Gödel } m \text{ em } c\}$ , sendo  $m$  o número de Gödel de  $\varphi_3$ ,  $I((V, \alpha), c) = \{x \in D \mid x \text{ é verdadeira no nível } \alpha, \text{ em } c\}$ ,  $I(Q, c) = \{(x, y) \in D^2 \mid x \text{ é o quadrado de } y \text{ em } c\}$ ,  $I(a, c) = 16$  dado qualquer  $c$ , e  $I(b, c) = 4$  dado qualquer  $c$ . Como modelo podemos considerar o universo real  $\mathcal{R}$ .

Mais uma vez, embora ocorram conjunções em  $\varphi_1$  e em  $\varphi_2$ , demonstra-se pelo mesmo tipo de raciocínio que utilizamos no exemplo anterior que, dada qualquer atribuição  $\sigma$  e qualquer contexto  $c$ ,  $v^\sigma((\varphi_1, 0), c) = 2$  e  $v^\sigma((\varphi_2, 0), c) = 2$ . Quanto a  $\varphi_3$ , temos que  $v^\sigma((Qab, 0), c) = 1$  dado qualquer contexto  $c$ , donde se segue pelo teorema 5.2 que  $\mathcal{R} \models p(\varphi_3, c)$  dado qualquer  $c$ , já que  $\varphi_3 \in L$ . Agora, dado qualquer contexto  $c$ ,  $v^\sigma((\forall x, 1), c) = 1$ , dada uma atribuição  $\sigma$  tal que  $\sigma(x, c) = \varphi_3$ , já que  $\varphi_3 \in S_{1(c)}$ , pois já vimos que  $v^\sigma((\varphi_3, 0), c) = 1$ . Assim, como  $v^\sigma((P_3x, 1), c)$ , dado qualquer  $c$ , obviamente também tem valor 1, temos que  $v^\sigma((P_3x \ \& \ Vx, 1), c) = 1$  para todo  $c$ . Portanto, para qualquer  $c$ ,  $v^\sigma((\sim(P_3x \ \& \ Vx), 1), c) = 0$ . Considerando que  $\sigma$  é  $x$ -variante de si mesma, temos que há uma atribuição  $\tau$   $x$ -variante de  $\sigma$  tal que  $v^\tau((\sim(P_3x \ \& \ Vx), 1), c) = 0$ , e portanto que  $v^\sigma((\forall x \sim(P_3x \ \& \ Vx), 1), c) = 0$ . Isso vale para qualquer  $c$  e, como  $\varphi_2$  é uma fórmula, também vale para qualquer  $\sigma$ . Daí, dada a construção de Kripke, temos que  $v^\sigma((\varphi_2, \zeta), c) = 0$ , donde se segue que  $\varphi_2$  é fundada e tem nível 1, e também que, pelo teorema 5.3,  $\mathcal{R} \not\models p(\varphi_2, c)$ , dado qualquer contexto  $c$ . Mas do fato de que  $v^\sigma$

$((\varphi_2, 1), c) = 0$  para qualquer  $c$  se segue que  $\varphi_2 \in S_{2(2,c)}$ . Desse modo, para qualquer  $c$ ,  $v^\sigma((Vx, 2), c) = 0$ , dada uma atribuição  $\sigma$  tal que  $\sigma(x, c) = \varphi_2$ <sup>142</sup>. Como nesse caso obviamente  $v^\sigma((P_2x, 2), c) = 1$  para qualquer  $c$ , temos que, para qualquer  $c$ ,  $v^\sigma((P_2x \ \& \ Vx, 2), c) = 0$ , e portanto  $v^\sigma((\sim(P_2x \ \& \ Vx), 2), c) = 1$ . Se tomarmos uma atribuição  $\tau$   $x$ -variante de  $\sigma$ , obviamente  $v^\tau((P_2x, 2), c) = 0$  para qualquer  $c$ , donde teremos que  $v^\tau((P_2x \ \& \ Vx, 2), c) = 0$  para todo  $c$  independente do valor de  $v^\tau((Vx, 2), c)$ . Portanto  $v^\tau((\sim(P_2x \ \& \ Vx), 2), c) = 1$  para todo  $c$  e para todas essas atribuições  $x$ -variantes de  $\sigma$ . Assim,  $v^\sigma((\forall x \sim(P_2x \ \& \ Vx), 2), c) = 1$  para todo  $c$ , donde se segue pela construção de Kripke que  $v^\sigma((\forall x \sim(P_2x \ \& \ Vx), \zeta), c) = 1$  para todo  $c$ . Como  $\varphi_1$  é uma fórmula, isso vale para toda atribuição  $\sigma$ . Assim, temos que  $\varphi_1$  é fundada e tem nível 2. Dado o teorema 5.3, obtemos  $\models p$   $(\varphi_1, c)$  dado qualquer  $c$ .

Como era de se esperar, nossa análise nos mostrou que, na nossa seqüência de sentenças acima,  $s_1$  expressa uma proposição verdadeira sobre  $s_2$ ,  $s_2$  expressa uma proposição falsa sobre  $s_3$ , e  $s_3$  expressa uma proposição verdadeira (de conteúdo extra-lingüístico, por assim dizer). Comparado com o exemplo 5.5, o exemplo 5.4 nos mostra que nos ciclos do mentiroso não há nenhum problema com o fato de termos sentenças de uma linguagem se referindo a outras sentenças da mesma linguagem – coisa típica das linguagens semanticamente fechadas. O problema com tais ciclos, na verdade, reside no fato de que nos mesmos as sentenças fazem referência umas às outras de modo a fechar um círculo, sem que possa haver uma sentença fundada inicial da qual possa depender o caráter fundado das demais sentenças do ciclo.

Um outro caso a analisar é o assim chamado paradoxo do mentiroso contingente. Esse paradoxo pode ser expresso por qualquer das seguintes sentenças:  $r_1$ ) João tem uma Ferrari ou esta proposição é falsa;  $r_2$ ) João tem uma Ferrari e esta proposição é falsa. Vamos tomar  $r_1$  para análise, com a seguinte formalização:  $\psi$ )  $\text{Tj} \vee \forall x \sim(Px \ \& \ Vx)$ .

<sup>142</sup> Note-se que  $v^\sigma((Vx, 1), c) = 2$  para qualquer  $c$ , dada uma atribuição  $\sigma$  tal que  $\sigma(x, c) = \varphi_2$ , já que  $\varphi_2$  tem valor 2 na interpretação 0 de  $L^*$  dado qualquer  $c$ . Assim, vamos ter também  $v^\sigma((\varphi_1, 1), c) = 2$ .

EX. 5.6:  $\psi = \text{Tjf} \vee \forall x \sim (\text{Px} \ \& \ \text{Vx})$ , em uma estrutura  $(D, O, C, I)$ , onde  $D$  é o conjunto universo, e com  $I(\text{T}, c) = \{(x, y) \in D^2 \mid x \text{ possui } y \text{ em } c\}$ ,  $I(j, c) = \text{João}$ , dado qualquer  $c$ ,  $I(f, c) = \text{Ferrari}$ , dado qualquer  $c$ ,  $I(\text{P}, c) = \{x \in D \mid x \text{ tem o número de Gödel } k \text{ em } c\}$ , sendo  $k$  o número de Gödel de  $\psi$ , e  $I((\text{V}, \alpha), c) = \{x \in D \mid x \text{ é verdadeira no nível } \alpha, \text{ em } c\}$ . Para simplificar o exemplo, estamos pressupondo que estamos falando de um João determinado, e estamos ignorando o fato de o termo ‘Ferrari’ ser um nome comum (quando se está referindo ao carro, é claro, e não à empresa), e considerando que estamos falando de um objeto específico. Como modelo podemos considerar um modelo  $\mathfrak{M}$  qualquer. Vamos tomar o universo real  $\mathfrak{U}$ , por exemplo.

Como  $\forall x \sim (\text{Px} \ \& \ \text{Vx})$  é a versão só com operadores primitivos da fórmula  $\lambda$  do exemplo 5.3, e como vimos nesse exemplo que  $v^\sigma((\lambda, \zeta), c) = 2$  dado qualquer modelo, qualquer atribuição e qualquer contexto, temos que  $v^\sigma((\forall x \sim (\text{Px} \ \& \ \text{Vx}), \zeta), c) = 2$ , dadas essas mesmas condições. Agora, vamos supor que João não tem uma Ferrari no mundo real (ou melhor, que o João específico denotado por  $j$  não tem a Ferrari específica denotada por  $f$ ). Como isso pode ser o caso em alguns contextos e em outros não, vamos especificar como contexto um dado momento  $m$  de 2004, desprezando os demais elementos do contexto. Sem termos que revisar mais uma vez nossas definições e teoremas, é fácil saber que teremos  $v^\sigma((\text{Tjf}, \zeta), m) = 0$ , dada qualquer atribuição e dado o modelo  $\mathfrak{U}$ . Mas nesse caso,  $v^\sigma((\psi, \zeta), m) = 2$  dadas essas condições, o que significa que  $\psi$  é infundada, e que portanto não expressa nenhuma proposição no contexto  $m$ . Mas vamos agora supor que, no mundo real, João comprou uma Ferrari em um momento  $n$  qualquer de 2004 que seja posterior a  $m$ . Nesse caso teremos  $v^\sigma((\text{Tjf}, \zeta), n) = 1$  dada qualquer atribuição e dado o modelo  $\mathfrak{U}$ , o que resultará em  $v^\sigma((\psi, \zeta), n) = 1$  dadas ainda as mesmas condições. Isso quer dizer que  $\psi$  é fundada e de nível 0, o que significa que  $\psi$  expressa uma proposição no contexto  $n$ , e, pelo teorema 5.3 temos que essa proposição é tornada verdadeira pelo universo real, isto é, temos que  $\mathfrak{U} \models p(\psi, n)$ .

Assim, temos no paradoxo do mentiroso contingente um caso em que uma sentença determinada, mesmo quando é considerado um mesmo modelo, pode ser



infundada em alguns contextos e fundada em outros, e portanto pode expressar uma proposição em alguns contextos e não em outros. Em princípio isso não é nenhuma novidade: esse é o caso do exemplo de Kripke das sentenças de Dean e Nixon sobre Watergate. Entretanto, o exemplo 5.6 chama a atenção para uma questão importante. O que fez com que a fórmula  $\psi$  fosse fundada no contexto  $n$ , no exemplo 5.6, foi o fato de  $\psi$  ser uma fórmula disjuntiva com um dos disjuntos possuindo valor 1, somado ao fato de termos adotado o esquema trivalente de Kleene, tal como tinha feito Kripke, como esquema de valoração de fórmulas em nossa teoria. Nesse esquema, o valor 2 é interpretado como indefinição de valor. Daí, uma disjunção com disjuntos com valores 0 e 2, por exemplo, terá valor 2 pela seguinte razão: um dos disjuntos tem valor 0 e o outro é indefinido. Em caso de definição do valor do disjunto indefinido, teremos valor 0 ou valor 1. Se tivermos valor 0 a disjunção terá valor 0, mas se tivermos valor 1 a disjunção terá valor 1. Portanto, o valor da disjunção está indefinido. Já no caso de uma disjunção com disjuntos com valores 1 e 2, se definirmos o valor do disjunto indefinido, independente de como o fizermos a disjunção terá valor 1. No entanto, para alguém pode parecer mais natural que uma disjunção entre uma fórmula que expressa uma proposição verdadeira e uma fórmula sem sentido também fosse sem sentido. Embora nesse caso específico não nos pareça que este seja o caso, parece-nos que se pode dizer o seguinte a esse respeito. No caso de Kripke, o esquema de valoração de Kleene, como mencionamos no capítulo 4, foi admitido na teoria kripkeana da verdade apenas como um instrumento de valoração adequado para se lidar com falhas na distribuição dos valores de verdade às sentenças. No caso de nossa teoria, pode-se dizer que o esquema de Kleene foi admitido como um esquema de valoração adequado para se lidar com as sentenças que são verdadeiras ou falsas indiretamente em um dado contexto, por expressarem proposições verdadeiras ou falsas nesse contexto, e com aquelas sentenças que não assumem nenhum valor de verdade em um contexto determinado por não expressarem proposição alguma nesse contexto<sup>143</sup>. Do mesmo modo que no caso de Kripke, esse esquema não é parte essencial da teoria,

<sup>143</sup> Ou seja – se quisermos eliminar do nosso discurso referências a valores de verdade de sentenças – o esquema de Kleene foi admitido em nossa teoria como um esquema de valoração adequado para se lidar com as falhas de determinadas sentenças em expressar proposições em determinados contextos. Como já foi dito no capítulo 1, esse discurso sobre sentenças que assumem valores de verdade indiretamente é apenas ilustrativo em nossa teoria, e pode sem nenhuma dificuldade ser completamente banido da exposição de nossa teoria.

podendo-se utilizar qualquer outro que seja eficaz para lidar com, por assim dizer, as falhas na distribuição dos valores 0 e 1 às sentenças. É claro que ao se utilizar esquemas de valoração diferentes teremos resultados finais diferentes no que se refere às classes de sentenças que expressam ou deixam de expressar uma proposição em um determinado contexto. Não nos parece que seja possível determinar que um desses esquemas de valoração seja mais adequado que os demais para ser utilizado em nossa teoria da verdade, pura e simplesmente, mas apenas que um qualquer deles seja mais adequado para a utilização em nossa teoria na medida em que se tenha em vista a satisfação de algumas intuições acerca da noção de verdade, em detrimento de outras.

Por fim, vamos analisar uma versão da antinomia do mentiroso conhecida como o paradoxo do mentiroso reforçado. Nesse paradoxo, temos uma sentença que afirma acerca de si mesma que é falsa, e uma outra que afirma que a anterior é falsa. Assim, temos duas sentenças,  $t_1$  e  $t_2$ , como segue:  $t_1$ ) Esta sentença não é verdadeira.  $t_2$ ) A sentença  $t_1$  não é verdadeira. Esse é um caso interessante. Na análise que Barwise e Etchemendy fazem desse caso em *The liar*,<sup>144</sup> esses autores mencionam a intuição de acordo com a qual a sentença  $t_2$  poderia ser vista como a sentença de um lógico, por exemplo, que depois de analisar a sentença do mentiroso  $t_1$ , chegou à conclusão de que ela não é verdadeira. Desse modo,  $t_2$  intuitivamente deveria ser considerada como verdadeira. No caso de nossa teoria, entretanto,  $t_1$  deve ser entendida como afirmando que a proposição que ela própria expressa não é verdadeira. Alguém pode dizer:  $t_1$  não expressa uma proposição que não é verdadeira, e portanto  $t_1$  é falsa. Mas este não é o caso, porque em nossa teoria dizer que uma sentença é falsa é apenas um modo abreviado de dizer que a proposição que ela expressa é falsa. Assim, como  $t_1$  não expressa proposição alguma, não faz sentido fazer afirmações sobre verdade ou falsidade com relação a  $t_1$ <sup>VIII</sup>, como já vimos no exemplo 5.3. Já  $t_2$  está afirmando que  $t_1$  não é verdadeira, isto é, que a proposição que  $t_1$  expressa não é verdadeira. Mas como  $t_1$  não expressa proposição alguma, não faz sentido fazer atribuições de valor-verdade a  $t_1$ , donde se segue que  $t_2$  também não possui sentido. É muito importante notar aqui que, quando aplicado a sentenças, o uso técnico que nossa teoria faz do predicado verdade tem um descompasso com o uso intuitivo que

<sup>144</sup> Cf. BARWISE & ETCHEMENDY, 1987, p. 101 e p. 138.

fazemos desse predicado. O uso técnico que nossa teoria faz do predicado-verdade só acompanha o uso intuitivo desse predicado passo a passo quando tomamos o predicado-verdade enquanto aplicado às proposições. Nesse caso, sempre fará sentido fazer atribuições de valor-verdade. Vejamos formalmente o que ocorre com o paradoxo do mentiroso reforçado em nossa teoria da verdade.

EX. 5.7:  $\chi_1 = \forall x \sim (Px \ \& \ Vx)$  e  $\chi_2 = \sim \forall a$  em uma estrutura  $(D, O, C, I)$ , onde  $D$  é o conjunto universo, e com  $I(P, c) = \{x \in D \mid x \text{ tem o número de Gödel } k \text{ em } c\}$ , sendo  $k$  o número de Gödel de  $\chi_1$ ,  $I((V, \alpha), c) = \{x \in D \mid x \text{ é verdadeira no nível } \alpha, \text{ em } c\}$ , e  $I(a, c) = \chi_1$ . Vamos considerar um modelo  $\mathfrak{M}$  qualquer.

Já temos pelo exemplo 5.3 que  $v^\sigma((\chi_1, \zeta), c) = 2$  dado qualquer modelo, qualquer atribuição e qualquer contexto, e portanto que  $\chi_1$  não expressa uma proposição. Quanto a  $\chi_2$ , como, dada a situação de  $\chi_1$  e a construção de Kripke,  $I(a, c) \notin S_{1(\zeta, c)} \cup S_{2(\zeta, c)}$  independente do contexto  $c$ , temos por def. 5.13 que  $v^\sigma((\chi_2, \zeta), c) = 2$  dado qualquer modelo, qualquer atribuição e qualquer contexto, e portanto que  $\chi_2$  também não expressa uma proposição.

Agora, vamos verificar se a definição de verdade apresentada satisfaz as três condições de adequação que estabelecemos para ela. Para começar, temos que a cláusula ii) da definição 5.20 mostra que nossa teoria da verdade satisfaz a convenção T, em sua versão mais apropriada para uma teoria da verdade baseada em intuições russellianas. De fato, o esquema T, cujas instâncias devem ser implicadas por qualquer definição de verdade adequada, de acordo com a convenção T, tem a forma ‘ $s$  é verdadeira sse  $p$ ’, como já mencionamos, sendo  $p$  uma sentença qualquer de uma das linguagens-objeto da definição em questão, e sendo  $s$  um nome para tal sentença. Em uma teoria baseada em intuições russellianas, parece natural traduzir – por assim dizer – a parte ‘ $s$  é verdadeira’ do esquema T por ‘ $q$  é verdadeira em um modelo  $\mathfrak{M}$ ’, e a parte ‘sse  $p$ ’ por ‘sse  $\mathfrak{M}$  torna  $q$  verdadeira’, sendo  $q$  uma proposição qualquer expressa por uma sentença qualquer de uma das linguagens-objeto da definição de tipo russelliano em questão. E a razão para considerarmos isso assim é que, tal como a primeira parte do bicondicional na convenção T está no metanível com relação à segunda parte, em nossa tradução da convenção T para um contexto russelliano a segunda parte

do bicondicional está relacionada<sup>145</sup> a um estado-de-coisas qualquer – não necessariamente semântico – ao passo que a primeira parte do bicondicional está relacionada ao estado-de-coisas semântico em que a proposição expressa pela sentença que denota o estado-de-coisas relacionado à segunda parte do bicondicional é uma proposição verdadeira. Desse modo, a primeira parte do bicondicional é sempre construída a partir da segunda parte – tal como no esquema T original – e portanto constitui um metanível com relação a ela. E é precisamente essa redução do metanível ao nível imediatamente abaixo, até que não restem predicados semânticos – no caso da convenção T original – ou expressões relacionadas a estados-de-coisas semânticos – no caso de nossa versão da convenção T –, a nosso ver, que é a essência dessa convenção. Ora, como a cláusula ii) da definição 5.20 estabelece exatamente que, para qualquer proposição  $p$ ,  $\mathfrak{M} \models p$  sse  $V_{\mathfrak{M}}(p)$ <sup>146</sup> (e  $\mathfrak{M} \not\models p$  sse  $F_{\mathfrak{M}}(p)$ ), temos que nossa teoria da verdade satisfaz a versão da convenção T adaptada para teorias da verdade baseadas nas intuições russellianas relativas a esse conceito.

Quanto à aplicabilidade de nossa teoria da verdade a linguagens semanticamente fechadas, não há qualquer dúvida de que ela é aplicável às mesmas, já que as linguagens  $L^*$  são semanticamente fechadas quando se considera a interpretação  $\zeta$  de uma qualquer dessas linguagens. A esse respeito, é importante não confundir aplicabilidade a linguagens semanticamente fechadas com admissão de circularidade semântica. Nossa teoria é claramente aplicável a linguagens semanticamente fechadas, isto é, a linguagens que possuem predicados semânticos que podem ser aplicados a expressões da própria linguagem em questão. Todavia, ela admite a circularidade semântica apenas de um modo parcial, em um certo sentido. De fato, embora entre as linguagens-objeto de nossa teoria tenhamos linguagens que admitem sentenças que aplicam predicados semânticos a si mesmas – esse é o caso de qualquer linguagem  $L^*$  – essas

<sup>145</sup> A segunda parte do bicondicional em questão é ‘ $\mathfrak{M}$  torna  $q$  verdadeira’, e a relação dessa expressão metalingüística com um estado-de-coisas determinado, à qual nos referimos acima, é evidentemente a relação complexa de tal expressão significar que o estado-de-coisas em questão pertence a uma situação contida no modelo  $\mathfrak{M}$ .

<sup>146</sup> Note-se que nessa formulação a ordem das partes do bicondicional, em comparação com o esquema T original, está invertida. De fato, ‘ $V_{\mathfrak{M}}(p)$ ’ substitui ‘ $s$  é verdadeira’ do esquema original, e ‘ $\mathfrak{M} \models p$ ’ substitui ‘ $p$ ’ do esquema original. Tratando-se de uma equivalência lógica, é óbvio que essa ordem é irrelevante, e só chamamos a atenção para isso de modo a evidenciar a correlação que estamos fazendo entre o esquema T original e a sua versão para teorias que aplicam o predicado-verdade a proposições.

sentenças são sempre infundadas e portanto nunca expressam uma proposição em qualquer contexto<sup>147</sup>. Assim, nossa teoria admite *sentenças* semanticamente circulares, mas não admite *proposições* semanticamente circulares. O que se deve notar aqui é que em uma linguagem semanticamente fechada os predicados semânticos devem poder ser aplicados a expressões das próprias linguagens a que eles pertencem, o que pode incluir casos em que uma sentença de uma dessas linguagens aplica um predicado semântico a si mesma, mas isso não precisa ocorrer necessariamente. Em suma, se uma linguagem admite a circularidade semântica, ela é necessariamente semanticamente fechada, mas uma linguagem pode ser semanticamente fechada e não admitir circularidade semântica. As linguagens  $L^*$  em sua interpretação  $\zeta$  são semanticamente fechadas e admitem a circularidade semântica, mas este último caso ocorre apenas de um modo parcial, no sentido que mencionamos a pouco.

Por fim, os exemplos 5.3, 5.4, 5.6 e 5.7 mostram que nossa teoria é consistente, no sentido de que não está contaminada pelos paradoxos semânticos conhecidos que afetam a noção de verdade. Além disso, uma vez que ela pode ser construída utilizando-se exclusivamente recursos da teoria de conjuntos – de ZFC, por exemplo – ela é consistente se, digamos, ZFC for consistente.

Desse modo, temos que a teoria da verdade que apresentamos neste trabalho satisfaz as condições de adequação que estabelecemos para ela. Isso quer dizer que ela exhibe vantagens sobre algumas outras teorias da verdade, como comentamos no capítulo 1. Entretanto, como qualquer teoria, ela exhibe também alguns problemas, que vamos enumerar a seguir, procurando também mostrar que esses problemas não põem de modo algum a nossa teoria em desvantagem com relação às demais teorias da verdade existentes, embora seja obviamente desejável que se obtivesse uma teoria da verdade que exibisse as vantagens da nossa teoria sem contudo exhibir esses problemas.

Algo que pode ser considerado como uma limitação de nossa teoria é o fato de que somente fórmulas de uma linguagem  $L^*$  em que a constante predicativa  $V$  ocorre podem ter valor 2 em qualquer interpretação  $\alpha$  de  $L^*$ , de modo que somente essas fórmulas podem ser destituídas de sentido. Há ao menos dois

---

<sup>147</sup> É importante perceber que nossa teoria não trata as sentenças semanticamente circulares como sentenças destituídas de sentido pelo fato de serem semanticamente circulares, mas sim pelo fato de serem infundadas, o que é uma *conseqüência* de elas serem semanticamente circulares.

problema com isso: nossa teoria não pode lidar com fórmulas sem sentido que não envolvem predicados semânticos, e nem com fórmulas sem sentido envolvendo outros predicados semânticos que não o predicado-verdade. Esses não são problemas para uma teoria da verdade, mas constituem problemas para uma teoria da semântica em geral. Mas essa limitação acaba apontando para mais uma vantagem de nossa teoria. De fato, embora ela não pretenda ser uma teoria da semântica em geral, mas apenas uma teoria da verdade, ela pode ser estendida, de modo a poder lidar com um maior número de fórmulas, o que pode significar que ela pode obter a capacidade de lidar com um número maior de contrapartes formais de sentenças da linguagem natural. O caso menos interessante é o da inclusão de cláusulas na definição das funções  $v^\sigma$ , que permitam a atribuição do valor 2 a fórmulas de L em alguns casos. Com isso seria possível lidar com fórmulas sem sentido em que não ocorre nenhum predicado semântico. Mais interessante do que isso, entretanto, seria a introdução de outras constantes predicativas parcialmente definidas, para servir como contrapartes formais de outros predicados semânticos, tais como ‘satisfaz’ e ‘define’. Esses novos recursos formais nos permitiriam lidar com fórmulas sem sentido em que ocorrem outros predicados semânticos além do predicado-verdade e, melhor que isso, essa extensão de nossa teoria teria como lidar com fórmulas em que ocorre um predicado semântico qualquer – significativas ou não –, e portanto constituiria de fato uma teoria geral da semântica.

Um outro problema com nossa teoria é o risco de ela estar afetada por uma espécie de versão sintática do paradoxo do mentiroso, caso exista em L alguma constante predicativa sintática – Q, digamos – co-extensional à constante V na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ , dado um contexto qualquer. Nós comentamos brevemente esse tipo de problema no capítulo 2, quando mencionamos que a teoria da verdade de Tarski corre esse mesmo risco, caso haja em alguma de suas linguagens-objeto alguma constante predicativa representando um predicado sintático co-extensional ao predicado-verdade. No caso de nossa teoria, esse risco implica que L poderia conter uma fórmula como ‘ $\forall x (Px \rightarrow \sim Qx)$ ’, com a constante P representando um predicado sintático satisfeito unicamente pela própria fórmula em questão, que vamos chamar de  $\mu$ . Como Q é co-extensional com V na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$  dado um contexto  $c$  qualquer,  $\mu \in I(Q, c)$  sse  $\mu \in I((V, \zeta), c)$ . Então vamos supor

que, dado um modelo  $\mathfrak{M}$  qualquer,  $\mu \in I(Q, c)$ . Segue-se que  $\mu \in I((V, \zeta), c)$ , e portanto que  $v^\sigma((\mu, \zeta), c) = 1$ , pois  $I((V, \zeta), c) = S_{1(\zeta, c)}$ , dada a def. 5.12, e  $S_{1(\zeta, c)}$ , dadas as definições de Kripke apresentadas no capítulo 4, inclui todas e somente as fórmulas com valor 1 na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ , isto é, as fórmulas  $\phi$  de  $L^*$  tais que  $v^\sigma((\phi, \zeta), c) = 1$ . Como  $\mu$  é uma fórmula de  $L$ , isso implica que  $v^\sigma((\mu, 0), c) = 1$ , e daí, pelo teorema 5.2,  $\mu$  expressa uma proposição no contexto  $c$  e  $\mathfrak{M} \models p(\mu, c)$ . Mas ao mesmo tempo, se  $\mu \in I(Q, c)$ ,  $v^\tau((Qx, 0), c) = 1$  dada uma atribuição  $\tau$  tal que  $\tau(x) = \mu$ , e portanto  $v^\tau((\sim Qx, 0), c) = 0$ . Obviamente  $v^\tau((Px, 0), c) = 1$ , e como  $v^\tau((\sim\sim Qx, 0), c) = 1$ , temos que  $v^\tau((Px \& \sim\sim Qx, 0), c) = 1$ , e daí que  $v^\tau((\sim(Px \& \sim\sim Qx), 0), c) = 0$ . Se tomarmos uma atribuição  $\sigma$  idêntica a  $\tau$ , exceto que  $\sigma(x) \neq \mu$ ,  $v^\sigma((Px, 0), c) = 0$ , e  $v^\sigma((Px \& \sim\sim Qx, 0), c) = 0$ , independente de  $v^\sigma((\sim\sim Qx, 0), c)$ . Portanto,  $v^\sigma((\sim(Px \& \sim\sim Qx), 0), c) = 1$ . Como  $\tau$  é  $x$ -variante de  $\sigma$ , temos que não é o caso que  $v^\tau((\sim(Px \& \sim\sim Qx), 0), c) = 1$  dadas todas as atribuições  $\tau$   $x$ -variantes de  $\sigma$ , e portanto temos que  $v^\sigma((\forall x \sim(Px \& \sim\sim Qx), 0), c) = 0$ . Como por definição  $\mu$  é apenas uma abreviação de ' $\forall x \sim(Px \& \sim\sim Qx)$ ', segue-se que  $v^\sigma((\mu, 0), c) = 0$ , donde se segue pelo teorema 5.2 que  $\mathfrak{M} \not\models p(\mu, c)$ . Essa contradição nos leva a concluir que, dado  $\mathfrak{M}$ ,  $\mu \notin I(Q, c)$ . Nesse caso,  $\mu \notin I((V, \zeta), c)$ . Como  $I((V, \zeta), c) = S_{1(\zeta, c)}$ , e  $S_{1(\zeta, c)}$  inclui todas e somente as fórmulas com valor 1 na interpretação  $\zeta$  de  $L^*$ , isto é, as fórmulas  $\phi$  de  $L^*$  tais que  $v^\sigma((\phi, \zeta), c) = 1$ , temos que  $v^\sigma((\mu, \zeta), c) = 0$  ou  $v^\sigma((\mu, \zeta), c) = 2$ . Uma vez que  $\mu$  não apresenta ocorrências da constante  $V$ , não pode ser o caso que  $v^\sigma((\mu, \zeta), c) = 2$ , e portanto  $v^\sigma((\mu, \zeta), c) = 0$ <sup>148</sup>. Como  $\mu$  é uma fórmula de  $L$ , isso implica que  $v^\sigma((\mu, 0), c) = 0$ , e daí, pelo teorema 5.2,  $\mu$  expressa uma proposição no contexto  $c$  e  $\mathfrak{M} \not\models p(\mu, c)$ . Mas de novo, se  $\mu \notin I(Q, c)$ ,  $v^\sigma((Qx, 0), c) = 0$  dada uma atribuição  $\sigma$  tal que  $\sigma(x) = \mu$ , e portanto  $v^\sigma((\sim Qx, 0), c) = 1$ . Obviamente  $v^\sigma((Px, 0), c) = 1$ , e como  $v^\sigma((\sim\sim Qx, 0), c) = 0$ , temos que  $v^\sigma((Px \& \sim\sim Qx, 0), c) = 0$ , e daí que  $v^\sigma((\sim(Px \& \sim\sim Qx), 0), c) = 1$ . Se tomarmos uma atribuição  $\tau$  idêntica a  $\sigma$ , exceto que  $\tau(x) \neq \mu$ ,  $v^\tau((Px, 0), c) = 0$ , e  $v^\tau((Px \& \sim\sim Qx, 0), c) = 0$ , independente de  $v^\tau((\sim\sim Qx, 0), c)$ . Portanto,  $v^\tau((\sim(Px \& \sim\sim Qx), 0), c) = 1$ . Assim,

<sup>148</sup> É claro que é esse o passo crucial aqui, já que o caráter sintático da constante  $Q$  permite que  $\mu$  seja uma fórmula de  $L$ , e portanto que não possa ocorrer  $v^\sigma((\mu, \zeta), c) = 2$ , caso em que  $\mu$  não expressaria proposição alguma, não havendo portanto paradoxo.

temos que  $v^\tau((\sim(Px \ \& \ \sim\sim Qx), 0), c) = 1$  dadas todas as atribuições  $\tau$  x-variantes de  $\sigma$ , e portanto temos que  $v^\sigma((\forall x \sim(Px \ \& \ \sim\sim Qx), 0), c) = 1$ . Segue-se que  $v^\sigma((\mu, 0), c) = 1$ , e portanto temos pelo teorema 5.2 que  $\mathfrak{M} \models p(\mu, c)$ .

Assim, se houver em L uma constante predicativa como Q, haverá uma fórmula como  $\mu$  em L, e teremos, dado um modelo  $\mathfrak{M}$  qualquer, que  $\mathfrak{M} \models p(\mu, c)$  e  $\mathfrak{M} \not\models p(\mu, c)$ . Em princípio, tudo o que essa demonstração nos mostra é que não pode haver uma tal constante predicativa em L, totalmente definida no domínio D da estrutura que se estiver considerando, e representando algum predicado sintático das fórmulas de L. No entanto, não objetaríamos a quem nos dissesse que seria interessante obter uma prova de que não pode haver uma constante predicativa desse tipo em L por outros meios que não o uso da redução ao absurdo. Não dispomos de uma tal prova, mas notamos que a situação parece ser a mesma com teorias como a de Tarski e a de Kripke.

Por fim, a limitação mais aparente de nossa teoria parece ser a insuficiência de suas contrapartes formais dos contextos para a especificação do contexto de uma sentença. Como já comentamos no capítulo 1 e neste capítulo, em diversas situações o contexto de uma sentença envolve mais do que simplesmente o indivíduo que proferiu a sentença em questão e suas coordenadas espaço-temporais. E entre esses elementos a mais que os contextos de uma sentença envolvem muitas vezes se encontram elementos de natureza subjetiva, como o indivíduo a que um falante se refere ao usar um nome próprio, caso que mencionamos mais acima. Como optamos por manter nossa teoria livre desses elementos subjetivos, tivemos que pagar o preço da insuficiência de nossas contrapartes formais dos contextos para especificar o contexto de uma sentença em diversos casos<sup>149</sup>.

O que podemos dizer a esse respeito é que é mesmo difícil especificar o contexto de uma sentença até o ponto necessário para verificar se ela expressa uma proposição, e, em caso positivo, se essa proposição é verdadeira ou falsa, sem fazer uso de nenhum elemento de natureza subjetiva, e ao mesmo tempo sem complicar demasiadamente a teoria. A substituição de elementos subjetivos do contexto por elementos objetivos parece ser geralmente possível, mas ela sempre

<sup>149</sup> Na prática, nossos contextos ficaram reduzidos ao lugar e ao momento em que uma sentença é proferida, já que o falante só aparece em nossas contrapartes formais de contextos para marcar as coordenadas espaço-temporais que especificam quando e onde a sentença foi proferida.



traz consigo o preço do aumento da complexidade. Um exemplo disso é o ex. 5.2, em que a determinação do indivíduo ao qual o falante da sentença-exemplo se refere com o nome próprio ‘Ulisses’, normalmente feita pelo contexto, passou a ser feita pelo acréscimo de cláusulas restritivas à contraparte formal da sentença-exemplo. No caso de nossa teoria, preferimos adotar um meio-termo, em que alcançamos a capacidade de especificar suficientemente os contextos das sentenças em um grande número de casos, mantendo contudo um nível de complexidade razoável. No entanto, para fins tais como a programação de computadores, em que a complexidade não interessa, desde que o resultado seja computável e computacionalmente tratável<sup>150</sup>, pode-se muito bem utilizar um método de valoração de fórmulas como o de nossa definição de verdade, com a especificação de contextos feita por meios objetivos até onde isso for possível. Ademais, de novo comparando nossa teoria com as demais teorias da verdade existentes, convém notar que não há uma teoria que seja capaz de lidar com contextos, e que faça isso sem lançar mãos de elementos subjetivos e, ao mesmo tempo, mantendo um elevado grau de simplicidade. Aliás, das teorias consideradas neste trabalho, apenas a nossa inclui dispositivos formais que podem ser utilizados para a especificação das diferentes proposições que uma sentença pode expressar em contextos diferentes, ou, no caso de teorias da verdade aplicada a sentenças, para a especificação dos diferentes valores de verdade que uma sentença pode assumir em contextos distintos.

---

<sup>150</sup> Isto é, nos termos da teoria da complexidade, desde que o algoritmo a ser executado não seja NP-hard.