3
Verdade

Em 1933, A. Tarski apresentou ao público sua definição recursiva do conceito de verdade, construída com elevado rigor matemático, e provou que a mesma satisfazia certas condições de adequação, referentes ao conteúdo e à forma da definição. Dados o seu rigor e simplicidade, além das provas de sua adequação com relação a critérios bem definidos do que é, para uma teoria da verdade, ser adequada, a definição de Tarski obteve grande aceitação entre os estudiosos da lógica, e é hoje conhecida como a definição clássica de verdade. Na seqüência, vamos retomar a definição tarskiana de verdade em suas linhas gerais, e vamos em seguida mostrar as razões que levaram lógicos da atualidade a propor novas definições para a noção de verdade, o que será também o nosso caso neste trabalho.

Vamos começar pelas condições de adequação impostas por Tarski à sua definição de verdade. No que atine ao conteúdo da definição, Tarski propôs a seguinte condição de adequação: uma definição adequada da noção de verdade, no que respeita ao seu conteúdo, deve implicar logicamente todas as instâncias do esquema '*s* é verdadeira se e somente se *p*', onde *p* é uma sentença qualquer da linguagem L para a qual se está definindo a noção de verdade, e *s* é um nome para essa sentença[61]. Essa, é claro, é a condição de adequação material para definições de verdade, acerca da qual estivemos falando no capítulo anterior.

Além dessa condição de adequação material, Tarski propôs as seguintes condições de adequação referentes à forma das definições de verdade: i) uma definição formalmente adequada do conceito de verdade deve ser sempre relativizada a uma linguagem L, para a qual se vai definir a noção de verdade, que se vai chamar de *linguagem-objeto* da definição; ii) a linguagem-objeto L de uma definição de verdade formalmente adequada deve ter sua sintaxe formalmente especificada; iii) a linguagem-objeto L de uma definição de verdade formalmente adequada deve ser semanticamente aberta, isto é, não deve conter predicados semânticos cujas extensões contenham expressões (ou *n*-uplas ordenadas de expressões[62]) da própria L[63]; iv) uma definição de verdade adequada do ponto de

[61] Cf. TARSKI, 1993, p. 8.
[62] Para qualquer número natural *n*.

vista formal deve ser construída em uma metalinguagem M de L que contenha ao menos as expressões da linguagem-objeto L, ou traduções dessas expressões para M, nomes para as expressões de L, e predicados semânticos cujas extensões sejam conjuntos de expressões de L (ou de *n*-uplas ordenadas dessas expressões)[64].

Como já comentamos no capítulo precedente, com sua condição de adequação material Tarski pretende garantir que sua definição de verdade capture – por assim dizer – as intuições subjacentes à noção de verdade como correspondência com a realidade, noção essa à qual Tarski chama de noção clássica da verdade[65]. Já com suas condições de adequação formal, Tarski pretende garantir sobretudo a consistência de sua teoria da verdade. Como é sabido, Tarski atribui o aparecimento de paradoxos semânticos como a antinomia do mentiroso à excessiva riqueza semântica de linguagens como as línguas naturais, que possuem meios de auto-referência não apenas sintática, como também semântica. Vamos nos deter um pouco mais sobre esse ponto.

Consideremos um fragmento P do português, dotado de um determinado conjunto não-vazio E de expressões, que não envolva expressões cuja extensão sejam elementos ou conjuntos de elementos de E (ou conjuntos de *n*-uplas ordenadas de elementos de E, para um número natural *n* qualquer). Vamos estender esse fragmento P do português para um fragmento P', cujo conjunto de expressões E' é igual a $E \cup N$, onde N é o conjunto dos nomes das expressões de P, formados mediante a colocação de cada uma dessas expressões entre aspas. Assim, se temos que a) 'neve' $\in$ E, então temos que b) ''neve'' $\in$ N, isto é, ''neve'' é um nome para a expressão 'neve'. Agora, vamos estender P' para outro fragmento P", acrescentando a E' expressões cujas extensões sejam conjuntos de *n*-uplas ordenadas de elementos de E, para um número natural *n* qualquer. Chamemos E" a esse conjunto de expressões de P". Pois bem, P" é suficientemente rico – supondo que as regras de formação sejam as mesmas do

---

[63] Em Tarski uma linguagem semanticamente fechada é uma linguagem que contém nomes para suas expressões e predicados semânticos do tipo mencionado. Assim, uma linguagem semanticamente aberta será uma linguagem que não contém esses nomes *ou* esses predicados. No entanto, embora possamos ter uma linguagem com predicados semânticos desse tipo sem nomes do tipo em questão, e essa seria uma linguagem semanticamente aberta, apontamos para o essencial em uma linguagem semanticamente fechada que é a posse dos predicados semânticos em questão (note-se que par ser semanticamente aberta não é preciso que uma linguagem não contenha os predicados em questão e *nem* os nomes em questão).

[64] Cf. TARSKI, 1993, pp. 16 - 18.

[65] Cf. TARSKI, 1983, p. 153.

português, e supondo que ‘é um substantivo’, em c) abaixo, representa uma propriedade sintática de expressões de P, e que ‘denota’, em d) abaixo, representa uma relação semântica entre expressões de P e objetos ou conjuntos de *n*-uplas ordenadas de objetos, para um número natural *n* qualquer – para que se possa construir sentenças do tipo:

c) ‘Neve’ é um substantivo.

Uma sentença de P” que trata da sintaxe de P, e portanto também do próprio P”, já que P é parte de P”. Também podemos, dadas as mesmas condições, construir sentenças de P” do tipo:

d) ‘O mestre de Platão’ denota Sócrates.

Uma sentença de P” que trata da semântica de P, e portanto também de P”[66].

Agora, vamos admitir que o conjunto das sentenças de P” seja enumerável, e que, de fato, atribuímos um número natural *n* a cada sentença de P” e, com base nessa numeração, incluímos em E” nomes para as sentenças de P”, do tipo ‘a sentença de número *n*’, para algum natural *n*. Além disso, vamos agora incluir em E” expressões que denotam *n*-uplas ordenadas de elementos do próprio E”, e não mais apenas de E. Nesse caso, podemos construir em P” sentenças do tipo:

e) A sentença de número *k* contém oito palavras.

Sendo e) a *k*-ésima sentença de P”. Admitindo que a expressão ‘contém oito palavras’ representa uma propriedade sintática de sentenças ou outras expressões de P”, temos que e) é uma sentença de P” que trata da sintaxe da própria P” e, mais do que isso, temos que e) é uma sentença de P” que trata acerca de sua própria sintaxe.

Ora, se P” possui expressões que denotam propriedades semânticas de P”, ou relações semânticas entre expressões de P” e objetos ou conjuntos de *n*-uplas ordenadas de objetos, para um número natural *n* qualquer, então é claro que podemos construir sentenças de P” que tratam acerca de sua própria semântica.

---

[66] Até esse ponto temos que P” já é parcialmente semanticamente fechado, pois já é possível utilizar P” para tratar da semântica do próprio P”. De fato, como P é parte de P”, ao tratar da semântica de P, P” trata também de sua própria semântica. Isso, é claro, ocorre com qualquer metalinguagem da teoria de Tarski. P” não é entretanto totalmente semanticamente fechado até esse ponto, pois ainda não é possível utilizar P” para tratar da semântica da parte de P” que não é comum a P. Isso exclui de P” (até esse ponto) o fenômeno da circularidade semântica, no sentido de haver sentenças de P” que tratam de sua própria semântica. Para tanto, P” deve ser capaz de tratar acerca de sua porção que não é comum a P, já que, de fato, uma sentença de P” que trata acerca de sua própria semântica não pode pertencer a P, pois P não possui predicados sintáticos ou semânticos. Essa distinção entre uma linguagem semanticamente fechada e uma linguagem com circularidade semântica será importante para nossa teoria, como é possível conferir no capítulo 5.

Um exemplo pode ser, admitindo que ‘é verdadeira’ denota uma propriedade semântica de sentenças de P”:

f) A sentença de número *j* não é verdadeira.

Se considerarmos que a *j*-ésima sentença de P” é f), então temos aqui uma versão em P” da antinomia do mentiroso. De fato, se o predicado semântico ‘é verdadeira’ de P” deve capturar nossas intuições pré-teóricas acerca da noção de verdade e, particularmente, se o predicado ‘é verdadeira’ de P” satisfaz a condição de adequação material de que falamos a pouco, então temos que f) é uma sentença verdadeira se e somente se a sentença de número *j* não é verdadeira. Ora, considerando que a sentença de número *j* é f), isso significa que temos que f) é uma sentença verdadeira se e somente se f) não é verdadeira.

Pois bem, Tarski percebeu que todo o material necessário para se obter uma versão da antinomia do mentiroso, como a que expusemos acima, não vai além de uma linguagem: 1) dotada de nomes para suas expressões, 2) dotada de predicados semânticos cujas extensões sejam conjuntos de *n*-uplas ordenadas (para um número natural *n* qualquer) de expressões da própria linguagem em questão, e 3) à qual se possa aplicar as leis da lógica clássica. Então, julgando necessário, para a obtenção de teorias da verdade consistentes, excluir algum desses elementos, Tarski considerou que, uma vez que provavelmente não é o caso de se abrir mão da lógica clássica, o melhor a fazer é excluir as linguagens com meios de auto-referência semântica da classe das linguagens-objeto de definições de verdade formalmente adequadas[67]. Daí a exigência iii) – das condições de adequação formal de teorias da verdade – de que as linguagens-objeto de definições de verdade devem ser semanticamente abertas. Nesse caso, torna-se impossível construir uma definição de verdade para uma linguagem L na própria L, razão da introdução da exigência iv), de que a definição de verdade para L deve ser construída em uma metalinguagem M de L, que obviamente deverá conter os meios para referir-se sintática e semanticamente às expressões de L, tal como determina a condição iv). Quanto à condição i), note-se que ela está baseada em uma concepção de caráter mais geral acerca da noção de verdade, segundo a qual não pode haver algo como uma definição absoluta de verdade, válida para qualquer linguagem. Uma tal definição deveria ser construída em alguma

---

[67] Cf. TARSKI, 1993, pp. 14 - 16.

linguagem K, e sendo absoluta valeria para a própria K, o que tornaria a definição formalmente inadequada, já que, para ser possível construir em K uma definição de verdade válida para K mesma, K deveria possuir meios de auto-referência, incluindo nomes para suas sentenças e, obviamente, predicados semânticos aplicáveis a ela mesma, como seria então o caso do predicado-verdade construído em K. Além disso, ainda, Tarski menciona, em favor da impossibilidade de se obter uma definição absoluta de verdade, o fato de que sentenças verdadeiras de uma linguagem podem ser falsas ou não possuir sentido em outras linguagens[68].

Portanto, a antinomia semântica que encontramos em P" não torna a teoria da verdade de Tarski inconsistente pelo simples fato de que P" não pertence à classe das linguagens-objeto da definição de verdade de Tarski. A noção de verdade tal como definida por Tarski simplesmente não se aplica a linguagens como P". Um caso notável de um conjunto de linguagens às quais a definição de verdade de Tarski não se aplica é o conjunto das linguagens naturais. Agora, vamos considerar uma linguagem à qual a definição de verdade tarskiana se aplica – a linguagem do cálculo de predicados de 1ª ordem – e vamos conferir como Tarski define a noção de verdade para essa linguagem.

Como é sabido, a linguagem do cálculo de predicados de 1ª ordem (a seguir, por brevidade, vamos chamá-la de Q) é construída com base em um léxico que inclui um conjunto enumerável $\{F^n, G^n, H^n, ...\}$ de constantes predicativas *n*-ádicas, para todo $n < \omega$; um conjunto possivelmente vazio $\{a, b, c, ...\}$ de constantes individuais; um conjunto possivelmente vazio $\{f^n, g^n, h^n, ...\}$ de símbolos funcionais *n*-ádicos, para todo n tal que $1 \leq n < \omega$; um conjunto denumerável $\{x, y, z, ...\}$ de variáveis individuais; os operadores lógicos & e ~; o quantificador universal ∀, e os sinais de pontuação), (e ,.

Com base nesse léxico, podemos definir uma *expressão* de Q como sendo qualquer seqüência finita de elementos do léxico de Q. Vamos chamar de E(Q) ao conjunto de todas as expressões de Q. Daí, podemos definir as noções auxiliares de *termo* e *fórmula atômica*, que depois serão utilizadas na definição de uma *fórmula* de Q, conforme se segue.

[68] Cf. TARSKI, 1993, p. 4. Quanto à exigência ii) das condições de adequação formal, segundo a qual as linguagens-objeto das definições de verdade devem ter sintaxe formalmente especificada, trata-se de uma exigência que visa garantir a possibilidade de se construir uma definição recursiva de verdade, tendo como cláusulas cada uma das construções da linguagem-objeto, que devem estar especificadas em suas regras de formação (cf. TARSKI, 1993, pp. 10 - 12).

DEF. 2.1: Uma expressão t de Q é um *termo* sse:

i) t $\in \{a, b, c, ...\}$, ou

ii) t $\in \{x, y, z, ...\}$, ou

iii) $t = \varphi^n (t_1, t_2, ..., t_n)$, onde $\varphi^n \in \{f^n, g^n, h^n, ...\}$, e t_i é um termo, $1 \leq i \leq n$.

DEF. 2.2: Uma *fórmula atômica* é qualquer expressão de Q da forma $\Phi^n t_1 t_2 ... t_n$, onde $\Phi^n \in \{F^n, G^n, H^n, ...\}$, e t_i é um termo, $1 \leq i \leq n$.

DEF. 2.3: A *linguagem formal* Q é o menor subconjunto de E(Q) que satisfaz as seguintes condições:

i) se α é uma fórmula atômica, então $\alpha \in Q$

ii) se $\alpha \in Q$, então $\sim\alpha \in Q$

iii) se $\alpha, \beta \in Q$, então $(\alpha \,\&\, \beta) \in Q$

iv) se $\alpha \in Q$, e $\xi \in \{x, y, z, ...\}$, então $\forall\xi\alpha \in Q$

um elemento qualquer de Q é uma *fórmula* de Q.

Dada essa definição de uma fórmula de Q, temos que Q possui fórmulas que podem contar como contrapartes formais de sentenças, por exemplo, da aritmética, e outras que só podem contar como contrapartes formais de funções sentenciais de uma linguagem informal. Como podemos perceber intuitivamente, as sentenças podem ser verdadeiras ou falsas, mas as funções sentenciais só podem ser satisfeitas ou não por objetos ou seqüências de objetos. Por exemplo, na aritmética, uma sentença como '5 + 9 =15' é falsa, e uma outra como '$\forall$x,y (x + y = y + x)' é verdadeira, mas uma função sentencial como '$x^2 + 2 = 27$' não pode ser avaliada como sendo verdadeira ou falsa, mas apenas como sendo satisfeita por 5 e por -5, no sentido de que, ao substituirmos a variável x, na função sentencial em questão, por 5 ou por -5, obtemos uma sentença verdadeira. Nas definições 2.4 e 2.5 introduziremos duas noções auxiliares que nos permitirão, na definição 2.6, introduzir as noções de *fórmula aberta* e *fórmula fechada*. As fórmulas fechadas são aquelas fórmulas de Q que podem contar como contrapartes formais de sentenças, ao passo que as fórmulas abertas são as fórmulas de Q que só podem contar como contrapartes formais de funções sentenciais.

DEF. 2.4: Em uma fórmula de Q da forma $\forall\xi\alpha$, a fórmula α é chamada de '*escopo*' do quantificador $\forall\xi$.

DEF. 2.5: Se $\xi \in \{x, y, z, ...\}$, e α é uma fórmula de Q na qual ξ ocorre uma ou mais vezes, então uma dada ocorrência de ξ em α é dita *livre* sse essa ocorrência de ξ não está dentro do escopo de um quantificador $\forall\xi$; caso contrário, essa ocorrência de ξ em α é dita *ligada*.

DEF. 2.6: Uma fórmula α de Q é uma *fórmula fechada* sse, para qualquer $\xi \in \{x, y, z, ...\}$, não há ocorrências livres de ξ em α; caso contrário, α é uma *fórmula aberta*.

Ora, como o léxico C de qualquer teoria de 1ª ordem T é igual ou está propriamente contido no léxico A do cálculo de predicados de 1ª ordem, segue-se que o conjunto das fórmulas da linguagem de uma teoria de primeira ordem T qualquer está contido no conjunto das fórmulas da linguagem Q do cálculo de predicados de 1ª ordem, isto é, segue-se que $K \subseteq Q$, sendo K a linguagem de T, para uma teoria de 1ª ordem T qualquer. Como é evidente, isso significa que a definição de verdade de Tarski, tal como definida para a linguagem do cálculo de predicados de 1ª ordem – como vamos mostrar a seguir – se aplica à linguagem de qualquer teoria de primeira ordem. Um exemplo pode ser a linguagem de um sistema formal[69] S para a aritmética, construída aplicando-se as regras de formação da linguagem do cálculo de predicados de primeira ordem ao léxico formado pela união dos seguintes conjuntos de símbolos: {=}, o conjunto das constantes predicativas de S, que contém apenas o símbolo = para o predicado binário da igualdade; {0}, o conjunto das constantes individuais de S, que contém apenas o símbolo '0' para designar o número zero; {', +, x}, o conjunto das

---

[69] Como é sabido, por um *sistema formal* se entende um par ordenado envolvendo uma linguagem formal e um conjunto de postulados para essa linguagem, que pode incluir axiomas e regras de inferência. Assim, como é óbvio, o cálculo de predicados de 1ª ordem e as teorias de 1ª ordem de que estamos falando são sistemas formais.

constantes funcionais de S, que contém o símbolo ’, para a função monádica de sucessor, o símbolo + para a função binária da adição, e o símbolo x, para a função binária da multiplicação; $\{x, y, z, ...\}$, o conjunto das variáveis individuais de S; $\{\&, \sim, \forall\}$, o conjunto dos operadores lógicos e quantificadores de S; e {), (} o conjunto dos sinais de pontuação de S.

Agora, vejamos como Tarski define a noção de verdade para a linguagem formal Q, do cálculo de predicados de 1ª ordem, e portanto para a linguagem formal de qualquer teoria de primeira ordem T.

Como a denotação das constantes predicativas, individuais e funcionais de Q pode variar com a interpretação que se der às mesmas, começamos mostrando que o conceito de verdade para Q será relativizado a *estruturas*, envolvendo um domínio de discurso D e uma função-interpretação I, conforme segue.

DEF. 2.7: Uma *estrutura* E para Q é um par-ordenado (D, I), onde D é um conjunto não-vazio que não inclui expressões de Q, e I é uma função cujo domínio é $\{F^n, G^n, H^n, ...\} \cup \{a, b, c, ...\} \cup \{f^n, g^n, h^n, ...\}$, tal que:

i) I ($\bar{c}$) é um elemento de D, para todo $\bar{c} \in \{a, b, c, ...\}$

ii) I (Φ^n) é um conjunto de *n*-uplas ordenadas de elementos de D, para todo $\Phi^n \in \{F^n, G^n, H^n, ...\}$

iii) I (φ^n) é um conjunto de *n*+1-uplas ordenadas de elementos de D, para todo $\varphi^n \in \{f^n, g^n, h^n, ...\}$, sendo que, se uma *n*+1-upla $(x_1, x_2, ..., x_n, y) \in \varphi^n$, então $(x_1, x_2, ..., x_n, z) \in \varphi^n$ sse $y = z$.

Neste ponto já estamos em condições de apresentar as definições auxiliares mais diretamente relacionadas à definição de verdade de Tarski, bem como a própria definição de verdade. Como é bem sabido, a definição tarskiana de verdade possui caráter recursivo, isto é, tendo escolhido as sentenças como portadores de verdade, Tarski toma cada uma das regras de formação das sentenças da linguagem-objeto da definição de verdade, e define esse conceito, utilizando primeiramente a regra de formação inicial, que especifica as unidades atômicas a partir das quais as sentenças são construídas, e mostrando depois como o valor de verdade de uma sentença vai depender dos valores-verdade de suas partes atômicas e das regras de formação que foram aplicadas na sua composição.

Ora, no geral, as unidades atômicas a partir das quais as sentenças de uma linguagem L são construídas não são sentenças, mas funções sentenciais. Nesse caso, não é possível aplicar diretamente o conceito de verdade na cláusula inicial da definição recursiva (isto é, na base da recursão). Em vez disso, Tarski define como as funções sentenciais atômicas são satisfeitas por seqüências infinitas de objetos, e depois determina como funções sentenciais compostas são satisfeitas por essas seqüências dependendo do que ocorre com suas partes atômicas – no que se refere à sua satisfação ou não por tais seqüências – e das regras de formação que são aplicadas na sua composição (como já foi possível perceber na definição de uma fórmula de Q, dada mais acima, há uma regra de formação para cada um dos operadores & e ~, e para o quantificador $\forall$). Temos pois, num primeiro momento, uma definição recursiva da noção de *satisfação* de uma função sentencial por uma seqüência infinita de objetos. Daí, notando que as sentenças na realidade são um tipo específico de funções sentenciais, a saber, funções sentenciais cujo número de variáveis livres é zero, Tarski define a noção de *verdade* de uma sentença como sendo um caso especial da definição anterior de satisfação: como não possuem variáveis livres, obviamente as sentenças só podem ser satisfeitas por todas as seqüências infinitas de objetos, caso em que Tarski as define como sendo verdadeiras, ou não ser satisfeitas por nenhuma dessas seqüências, caso em que Tarski as define como sendo falsas.

Sobre os recursos formais utilizados na definição de verdade, vamos chamar a atenção para a utilização de seqüências *infinitas* de objetos na definição de satisfação. Tarski utiliza essas seqüências apenas para simplificar a definição: como uma função sentencial pode possuir qualquer número finito de variáveis livres, utilizando seqüências infinitas de objetos na definição de satisfação Tarski garante que qualquer função sentencial pode, se for o caso, ser satisfeita por uma dessas seqüências.

Em versões posteriores da definição de verdade de Tarski, como vamos mostrar a seguir, foram adotados recursos formais diferentes. Como já mostramos mais acima, em nossa linguagem formal Q as fórmulas abertas ocupam o lugar das funções sentenciais (para sermos mais exatos, vamos dizer que elas ocupam o lugar das funções sentenciais que não são sentenças) e as fórmulas fechadas ocupam o lugar das sentenças. Além disso, no geral as fórmulas fechadas compostas são construídas a partir de partes atômicas que são fórmulas abertas.

Entretanto, embora a situação seja quase idêntica à das sentenças e funções sentenciais que estivemos considerando, a utilização de funções que atribuem valores às variáveis livres de uma fórmula aberta – que serão introduzidas na definição 2.8 abaixo – tornou possível definir verdade diretamente, sem passar pela definição de satisfação, por meio da substituição da noção de uma função sentencial satisfeita por uma seqüência infinita de objetos pela noção de uma fórmula, aberta ou fechada – verdadeira dada uma dessas funções-atribuição. Essa noção será introduzida na definição 2.10, após a introdução de uma noção auxiliar na definição 2.9. Então, poderemos utilizar a noção de uma fórmula verdadeira dada uma determinada função-atribuição, para definir uma fórmula verdadeira, pura e simplesmente (em uma estrutura, é claro) como uma fórmula verdadeira dadas todas as funções-atribuição, e uma fórmula falsa como sendo uma fórmula que não é verdadeira dada nenhuma dessas funções, o que será feito na definição 2.11. No caso das fórmulas fechadas só vão existir essas duas possibilidades, como no caso das sentenças na definição original de Tarski.

DEF. 2.8: Dada uma estrutura E = (D, I), uma *atribuição* σ é uma função do conjunto dos termos em D, tal que:

i) $\sigma(\bar{c}) = I(\bar{c})$, para todo $\bar{c} \in \{a, b, c, ...\}$

ii) $\sigma(\xi)$ é um elemento de D, para todo $\xi \in \{x, y, z, ...\}$

iii) $\sigma(\varphi^n(t_1, t_2, ..., t_n))$ é o elemento y de D tal que $(\sigma(t_1), \sigma(t_2), ..., \sigma(t_n), y) \in I(\varphi^n)$, para todo $\varphi^n \in \{f^n, g^n, h^n, ...\}$.

DEF. 2.9: Se uma atribuição τ é idêntica a uma atribuição σ, exceto, no máximo, que $\tau(\xi) \neq \sigma(\xi)$ para um dado $\xi \in \{x, y, z, ...\}$, então, dizemos que τ é *ξ-variante de σ.*

DEF. 2.10: Uma *valoração* é uma função v^σ de Q em $\{0, 1\}$, tal que:

i) $v^\sigma(\Phi^n t_1 t_2 ... t_n) = 1$ sse $(\sigma(t_1), \sigma(t_2), ..., \sigma(t_n)) \in I(\Phi^n)$

ii) $v^\sigma(\sim\alpha) = 1$ sse $v^\sigma(\alpha) = 0$

iii) $v^\sigma(\alpha \,\&\, \beta) = 1$ sse $v^\sigma(\alpha) = v^\sigma(\beta) = 1$

iv) $v^\sigma(\forall\xi\alpha) = 1$ sse $v^\tau(\alpha) = 1$ para toda atribuição τ ξ-variante de σ.

DEF. 2.11: Uma fórmula α é *verdadeira em uma estrutura E* (em símbolos: $E \models \alpha$) sse $v^{\sigma}(\alpha) = 1$ dada qualquer atribuição σ, e, obviamente, sendo as constantes de α interpretadas de acordo com a função I de E; uma fórmula α é *falsa em uma estrutura E* (em símbolos: $E \not\models \alpha$) sse $v^{\sigma}(\alpha) = 0$ dada qualquer atribuição σ, e, de novo, sendo as constantes de α interpretadas de acordo com a função I de E.

Que as condições de adequação estabelecidas por Tarski para qualquer definição de verdade são satisfeitas pela definição que acabamos de apresentar, é fácil de se constatar. Vamos começar pelas condições de adequação formal. Antes de mais nada, note-se que a definição de verdade que apresentamos para a linguagem Q do cálculo de predicados de 1ª ordem foi construída em uma metalinguagem que combina a linguagem da teoria de conjuntos com a linguagem natural. Assim, a condição de adequação formal i) foi satisfeita, já que o conceito de verdade foi definido com relação à linguagem Q, e o mesmo obviamente também é o caso com relação à condição ii), já que Q tem uma sintaxe formalmente especificada, como mostramos acima. A satisfação da condição iii) decorre do fato de não termos permitido que o domínio D de uma estrutura qualquer para Q contivesse expressões de Q[70]. Isso obviamente acarreta que não pode haver constantes predicativas de Q denotando conjuntos de *n*-uplas ordenadas de expressões de Q, o que por sua vez impede a existência de predicados semânticos de Q cujas extensões contenham *n*-uplas ordenadas de expressões da própria Q. Por fim, a condição iv) também foi satisfeita, uma vez que a metalinguagem que utilizamos para construir a definição de verdade contém todas as expressões de Q, bem como seus nomes. De fato, utilizamos como nomes para as fórmulas – por exemplo – de Q, expressões idênticas a essas fórmulas. Assim, na sentença metalingüística ‘$E \models \forall x Fx$’, a expressão ‘$\forall x Fx$’ não aparece

[70] Essa nossa restrição sobre o domínio D das estruturas para Q impede também que haja predicados *sintáticos* em Q referentes à própria Q, e impede mesmo que hajam constantes individuais de Q denotando expressões de Q. Assim, Q é incapaz de ser utilizada para tratar de sua própria sintaxe, assim como de sua própria semântica. As condições de adequação formal impostas por Tarski às definições de verdade não exigem uma restrição tão forte sobre as linguagens-objeto. Contudo, é preciso ter cuidado ao se admitir predicados sintáticos referentes a uma linguagem K em K, pois um possível predicado sintático de K referente a K, que fosse co-extensional com o predicado-verdade para K, poderia ser utilizado para se formular uma espécie de versão sintática da antinomia do mentiroso em K.

como sendo a fórmula '$\forall x Fx$' de Q, ou como uma tradução sua para a metalinguagem, mas como um nome para essa fórmula de Q. Isso não gera nenhuma ambigüidade na definição de verdade apresentada, já que se pode distinguir exatamente os contextos em que uma expressão α aparece como uma fórmula de Q – por exemplo – no interior da metalinguagem, daqueles em que α aparece como um nome para a fórmula de Q possuidora da mesma notação. E de qualquer maneira, não haveria nenhum problema em introduzir nomes para as expressões de Q, na metalinguagem, com notações diferentes daquelas das expressões nomeadas. Em 'The concept of truth in formalized languages', Tarski introduz um sistema de notação na metalinguagem por ele utilizada para construir uma definição de verdade para a linguagem da teoria dos conjuntos, em que cada símbolo do léxico da linguagem-objeto possui uma contraparte metalingüística. Assim, para se construir um nome para uma expressão qualquer $s_1s_2...s_n$ da linguagem-objeto, sendo cada s_i, $1 \leq i \leq n$, um símbolo do léxico da linguagem-objeto em questão, basta tomar a expressão metalingüística $\sigma_1\sigma_2...\sigma_n$, onde σ_i, $1 \leq i \leq n$, é a contraparte metalingüística de s_i[71]. O mesmo método pode substituir o que utilizamos em nossa apresentação da definição de verdade para Q. Enfim, temos também que a metalinguagem que utilizamos possui constantes predicativas, como é o caso de $\models$, que denotam conjuntos de *n*-uplas ordenadas de expressões de Q, e são assim capazes de representar predicados semânticos de Q.

Passemos agora a considerar a condição de adequação material. Para provar que a definição de verdade apresentada implica todas as instâncias do esquema T[72], teríamos que passar a um meta-metanível, com relação à linguagem-objeto da definição apresentada[73]. Isso exigiria que substituíssemos a metalinguagem que utilizamos, que não possui sintaxe precisamente especificada, por uma linguagem formal. Isso não seria problema, pois a linguagem da teoria axiomática de conjuntos ZFC, por exemplo, serviria bem a esse propósito. Assim, poderíamos usar o símbolo V_E para denotar o conjunto das fórmulas verdadeiras de Q dada a estrutura E, e a expressão '$\alpha \in V_E$' para substituir nosso '$E \models \alpha$'. A partir daí, bastaria obter uma demonstração no meta-metanível para '$\alpha \in V_E \leftrightarrow \alpha$' dada qualquer estrutura E, desde que as constantes de α sejam interpretadas conforme

[71] Cf. TARSKI, 1983, pp. 175 - 176.
[72] Como é chamado o esquema que aparece na convenção T.
[73] Cf. TARSKI, 1983, p. 195.

especificado pela função I da estrutura E[74]. Como Tarski menciona em 'The concept of truth in formalized languages', essa não é uma prova difícil de se obter[75]. No entanto, Tarski não apresenta essa prova no trabalho mencionado, limitando-se a apresentar exemplos particulares da satisfação da convenção T por sua definição[76]. Nós vamos aqui fazer o mesmo, considerando que a prova no meta-metanível, embora não envolva nenhuma dificuldade substancial, é de fato longa e enfadonha, de modo que sua apresentação aqui iria alongar desnecessariamente o nosso trabalho.

Vamos então tomar como exemplo a fórmula de Q '$\forall x{\sim}\mathrm{F}x$'. Tomando uma estrutura E qualquer, e considerando a definição apresentada, suponhamos que E $\models$ $\forall x{\sim}\mathrm{F}x$. Segue-se que, dada qualquer atribuição σ, v^{σ} $(\forall x{\sim}\mathrm{F}x) = 1$. Mas isso quer dizer que v^{τ} $({\sim}\mathrm{F}x) = 1$ dada qualquer atribuição τ x-variante de σ. Mas como estamos considerando todas as atribuições σ, isso significa que v^{σ} $({\sim}\mathrm{F}x) = 1$ dada toda atribuição σ[77]. Mas isso, por sua vez, quer dizer que v^{σ} $(\mathrm{F}x) = 0$ para toda atribuição σ. Portanto, temos que, dada qualquer atribuição σ, $\sigma(x) \notin \mathrm{I}(\mathrm{F})$, sendo E = (D, I). Ora, isso significa que qualquer objeto do domínio D não está na extensão de F especificada pela estrutura E, o que é exatamente o que '$\forall x{\sim}\mathrm{F}x$' quer dizer, dada a estrutura E. Temos, portanto, que E $\models \forall x{\sim}\mathrm{F}x$ implica $\forall x{\sim}\mathrm{F}x$. A implicação na direção oposta pode ser demonstrada, com base na definição de verdade apresentada, de modo igualmente óbvio. Por conseguinte, temos que E $\models$ $\forall x{\sim}\mathrm{F}x$ se e somente $\forall x{\sim}\mathrm{F}x$, que é uma das instâncias da convenção T. É fácil notar que, para qualquer fórmula α de Q que se tomar, a definição apresentada vai implicar que E $\models \alpha$ sse α, dada qualquer estrutura E, e que a demonstração desse fato pode ser obtida, para qualquer α individual, de modo similar ao que empregamos para demonstrar que isso é o caso para $\alpha = \forall x{\sim}\mathrm{F}x$[78].

---

[74] Tal como ocorre na expressão '$\alpha \in V_E$', α não é uma fórmula, mas um nome para a fórmula de notação α. Como mencionamos mais acima, pode-se introduzir uma notação específica para os nomes das fórmulas de Q.
[75] Cf. TARSKI, 1983, p. 188, nota 1.
[76] Cf. TARSKI, 1983, p. 196.
[77] Para ter certeza disso, basta notar que toda atribuição σ é ξ-variante de si mesma, dada qualquer variável ξ em nossa linguagem Q.
[78] Mesmo nessa demonstração do caso particular da fórmula '$\forall x{\sim}\mathrm{F}x$', já tivemos que subir ao meta-metanível, e utilizamos como meta-metalinguagem uma combinação da linguagem natural com a linguagem da teoria dos conjuntos. Note-se que embora essa seja a mesma linguagem que utilizamos como metalinguagem na definição apresentada, ela pode ser utilizada como meta-

Como mencionamos no início deste capítulo, o fato de a definição tarskiana de verdade ter sido construída de modo rigoroso do ponto de vista formal, e de haver satisfeito também uma condição bem definida de adequação de seu conteúdo – a adequação material –, garantiu uma ampla aceitação dessa definição entre lógicos e filósofos, sendo a mesma às vezes considerada como o tratamento definitivo para a noção de verdade. Contudo, como também mencionamos no início deste capítulo, nas últimas décadas têm sido propostos diversos tratamentos alternativos para o conceito de verdade, e, na seqüência, vamos expor algumas razões que motivaram o surgimento de tais tratamentos alternativos.

Em *The liar*, Barwise e Etchemendy apresentam três problemas com a definição de verdade de Tarski[79]. O primeiro deles é a artificialidade do tratamento dado pela definição às antinomias semânticas, que foram evitadas mediante a introdução das condições de adequação formal que exigem que a definição de verdade seja relativizada a uma linguagem-objeto semanticamente aberta, e construída em uma metalinguagem da mesma. O que Barwise e Etchemendy consideram é que a exclusão das linguagens semanticamente fechadas da classe das linguagens-objeto de definições de verdade formalmente adequadas não é algo natural, mas algo que se exigiu com o fim exclusivo de se evitar os paradoxos semânticos.

A artificialidade de uma solução, em si mesma, não constitui um grande problema para uma teoria, mas Barwise e Etchemendy vão adiante, para mostrar um outro problema com a teoria clássica da verdade: citando o trabalho 'Outline of a theory of truth', de Kripke[80], Barwise e Etchemendy chamam a atenção para o fato de que linguagens com sentenças aparentemente comuns, e que não são problemáticas em todos os casos, mas apenas em algumas circunstâncias que dependem de fatores empíricos, são banidas, dados os critérios tarskianos, da classe das linguagens-objeto de definições formalmente corretas da noção de verdade. Os exemplos citados por Barwise e Etchemendy, extraídos do trabalho citado de Kripke, são as sentenças 'tudo o que Nixon disse sobre Watergate é

metalinguagem se utilizarmos na definição, por exemplo, a linguagem formal da teoria ZFC como metalinguagem.

[79] Cf. BARWISE & ETCHEMENDY, 1987, pp. 4 - 7.

[80] Cf. KRIPKE, 1984.

falso' e 'tudo o que Dean disse sobre Watergate é verdadeiro'[81]. Essas sentenças não são necessariamente problemáticas, mas elas o são na circunstância possível em que a primeira foi proferida por Dean, a segunda por Nixon, e a primeira é a única sentença proferida por Dean sobre Watergate, e a segunda é a única sentença proferida por Nixon sobre Watergate.

Isso também não seria um grande problema para a definição de verdade de Tarski, em princípio, pois se a consistência de uma teoria da verdade de fato exige que linguagens com sentenças como as do exemplo acima sejam excluídas da classe das linguagens-objeto dessa teoria, então é isso o que se deve fazer, desde que se considere que não é o caso de se abrir mão da consistência. Contudo, o terceiro problema apresentado por Barwise e Etchemendy com a teoria tarskiana da verdade reside exatamente em que, segundo esses autores, a consistência de uma teoria da verdade não exige a restrição da classe das linguagens-objeto de definições de verdade formalmente corretas à classe das linguagens semanticamente abertas. E como prova de que isso é assim, Barwise e Etchemendy apresentam o *fato* de que a teoria da verdade apresentada por Kripke no trabalho que mencionamos a pouco se aplica a linguagens semanticamente fechadas e, no entanto, não é afetada pelos paradoxos semânticos, tal como a teoria de Tarski. Esse é inegavelmente um problema mais sério para a teoria da verdade de Tarski, uma vez que, ao menos no que se refere ao modo como ela lida com os paradoxos semânticos, o problema em questão nos mostra que a solução utilizada para as antinomias é desnecessária, o que torna significativos os dois problemas anteriores: por que utilizar uma solução artificial e excessivamente restritiva para as antinomias, se ela não é realmente necessária para garantir a consistência da teoria da verdade? Isso seria aceitável no caso de não haver uma solução melhor para o problema com as antinomias, mas em *The liar* Barwise e Etchemendy pretendem justamente propor uma tal solução[82].

---

[81] O exemplo citado por Barwise e Etchemendy utiliza a expressão 'muito do que' em lugar de 'tudo o que', na primeira dessas sentenças. No entanto, o exemplo também funciona como propusemos acima. No capítulo 5, ao apresentarmos nosso tratamento para a noção de verdade, vamos propor uma solução para o problema com essas sentenças.

[82] Segundo Barwise e Etchemendy, além ainda de restringir desnecessariamente a classe das linguagens-objeto de teorias da verdade, a fim de solucionar o problema com os paradoxos semânticos, a teoria clássica da verdade ataca esse problema de forma equivocada. Para esses autores, a existência de soluções para as antinomias semânticas que não exigem esse tipo de restrição mostra que a teoria da verdade de Tarski falhou em identificar a fonte dos problemas com essas antinomias (cf. BARWISE & ETCHEMENDY, 1987, p. 7).

O próprio Kripke, entretanto, em seu trabalho que estivemos mencionando, defende que não se pode dizer corretamente que a definição de verdade de Tarski seja excessivamente restritiva. Para Kripke, a teoria tarskiana da verdade não proíbe nada, ela apenas apresenta uma série de teoremas acerca do que pode e do que não pode ser feito no âmbito das linguagens do cálculo de predicados clássico, de 1ª ordem e de ordem superior[83].

A nosso ver, embora inegavelmente Tarski apresente, com sua teoria da verdade, uma série de teoremas do tipo mencionado por Kripke com relação às linguagens do cálculo de predicados de 1ª ordem e de ordem superior, está contudo muito claro no trabalho de Tarski de 1933, que as linguagens semanticamente fechadas estão excluídas da classe das linguagens-objeto de definições de verdade formalmente corretas, pelos critérios tarskianos[84]. E essa exclusão não tem nada a ver com os teoremas que Tarski provou em seu trabalho, acerca das linguagens do cálculo de predicados clássico, uma vez que tal exclusão não é feita no interior da definição tarskiana de verdade, mas já nas condições formais de adequação, cuja escolha por Tarski não está determinada por critérios precisos e necessários: o objetivo que norteia essa escolha é garantir a consistência das teorias da verdade, mas é claro que as condições de adequação formal (em princípio o mesmo poderia ser dito das condições de adequação material) escolhidas por Tarski tendo em vista esse fim podem perfeitamente bem ser demasiadamente concessivas, ou restritivas além do necessário. E o que o argumento de Barwise e Etchemendy mostra, tomando como base a existência mesma de definições de verdade livres de paradoxos semânticos e entretanto aplicáveis a linguagens semanticamente fechadas, é que essas condições de adequação são restritivas além do necessário. O que Tarski provou acerca do que pode ou não ser feito no âmbito das linguagens do cálculo de predicados clássico está provado – é claro –, mas não é necessário, de fato, excluir as linguagens semanticamente fechadas da classe das linguagens-objeto das definições de verdade a fim de garantir que elas estejam livres de paradoxos semânticos. E o nosso argumento – que já apresentamos no capítulo precedente – em favor de definições de verdade que se apliquem também às linguagens semanticamente fechadas, é que evidentemente é uma vantagem para uma dada teoria, seja do conceito de verdade ou de qualquer outra coisa, que

[83] Cf. KRIPKE, 1984, p. 58, nota 9.
[84] Cf. TARSKI, 1983, pp. 154 - 165; 1993, pp. 12 - 16.

seu campo de aplicação seja amplo tanto quanto possível. Essa nos parece ser uma vantagem inegável de definições de verdade livres de paradoxos e aplicáveis também a linguagens semanticamente fechadas – desde que sejam também adequadas do ponto de vista material – sobre a definição clássica de verdade.