



**Guilherme Oliveira Rabelo**

**Esquema Geral de Propagação Bidimensional de Trincas  
Usando o Método Consistente dos Elementos de Contorno**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont  
Coorientador: Prof. Luiz Carlos Wrobel

Rio de Janeiro  
Maio de 2022



**Guilherme Oliveira Rabelo**

**Esquema Geral de Propagação Bidimensional de Trincas  
Usando o Método Consistente dos Elementos de  
Contorno**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

**Prof. Ney Augusto Dumont**

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Prof. Luiz Carlos Wrobel**

Coorientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Prof. Luiz Fernando Campos Ramos Martha**

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Prof. Raul Rosas e Silva**

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Prof. José Cláudio de Faria Telles**

UFRJ

Rio de Janeiro, 03 de Maio de 2022

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

## **Guilherme Oliveira Rabelo**

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade de Fortaleza em 2018. Em 2019, deu início ao mestrado em estruturas no Departamento de Engenharia civil e Ambiental da PUC-Rio.

### Ficha Catalográfica

Rabelo, Guilherme Oliveira

Esquema geral de propagação bidimensional de trincas usando o Método Consistente dos Elementos de Contorno / Guilherme Oliveira Rabelo; orientador: Ney Augusto Dumont; coorientador: Luiz Carlos Wrobel. – 2022.

59 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2022.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil e Ambiental - Teses. 2. Método Consistente dos Elementos de Contorno. 3. Mecânica da Fratura. 4. Propagação de trincas. 5. Problemas bidimensionais. I. Dumont, Ney Augusto. II. Wrobel, Luiz Carlos. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. IV. Título.

CDD: 624

## Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Henrique e Susi, por me educar, incentivar, dar apoio, amor e fazer o possível para oferecer aos seus filhos tudo o que precisavam.

Aos meus familiares pelo carinho e amor, principalmente aos meus avós Tarcisio, Raimunda, Aluísio e Naíde, que me ofereceram todo o suporte possível durante o período do mestrado e em inúmeros momentos em minha vida, e aos meus tios Ronaldo, Flávia, Júlio e Rocivânia, por terem uma participação crucial na minha vida durante esse período.

Ao Júlio, que me acompanhou nesta jornada como um irmão.

Aos meus amigos, Iranildo, Verissa, William, Nayara, Patrícia, Eryane, Ilames e Felipe, que conheci durante esta jornada e que não tenho como escrever aqui a gratidão que tenho pela amizade de cada um.

Aos meus amigos, Matheus, Sales, Souza, Thais, Léa, Patrícia, “Lucão”, Marcelle e Bacelar, companheiros desde a graduação e que estão sempre presentes.

Aos meus amigos, Ícaro, Sérgio, Delano, Priscilla e Lucas “Ryohei”, que apesar da distância, conseguimos compartilhar muitos momentos de companheirismo e descontração.

Ao Osmar, pela grande contribuição na realização deste trabalho.

Ao meu amigo, Ítalo Salomão, pelo companheirismo, pelas orientações da vida e por acreditar no meu potencial.

Aos meus orientadores, Ney Dumont e Luiz Wrobel, por todo o apoio, pelos aprendizados, ensinamentos e pela oportunidade de desenvolver esta pesquisa.

Aos professores Luiz Fernando Martha, Raul Rosas e Silva e José Cláudio Telles por aceitarem participar da banca avaliadora e contribuir com seu conhecimento para a realização desta dissertação.

A todos os professores que tive, por todos os ensinamentos e conselhos que auxiliaram o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

A PUC-Rio e todos os seus funcionários, por providenciarem recursos adequados para a minha formação e de muitos outros alunos.

A todos que contribuíram de alguma forma para a conclusão desta jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Resumo

Rabelo, Guilherme Oliveira; Dumont, Ney Augusto (Orientador); Wrobel, Luiz Carlos (Coorientador). Esquema geral de propagação bidimensional de trincas usando o método consistente dos elementos de contorno. Rio de Janeiro, 2022. 59p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Apresenta-se neste trabalho um procedimento de análise de propagação de trincas a partir de um programa de computador baseado na formulação do método consistente dos elementos de contorno para problemas bidimensionais. Este método tem como uma das suas principais características a solução exata dos problemas de singularidade presentes na formulação. Além disso, com esta metodologia é possível representar a geometria da trinca com aberturas micrométricas, de forma semelhante ao observado em ensaios laboratoriais. Neste estudo, são analisados os resultados de propagação em três estruturas com geometrias distintas, cada estrutura submetida a diferentes combinações de carga, com o objetivo de reproduzir modos puros de carregamento I e II, assim como modo misto de carregamento. É realizado um estudo sobre o tamanho dos incrementos utilizados nos modelos e do ângulo de propagação, possibilitando determinar que o tamanho ideal dos elementos de novos trechos deve se limitar à mesma dimensão dos elementos vizinhos, evitando possíveis erros numéricos, enquanto o ângulo de propagação pode ser determinado utilizando os fatores de intensidade de tensão (FIT)  $K_I$  e  $K_{II}$ , empregando o conceito de tensão principal máxima. O FIT é obtido por meio de deslocamentos recíprocos próximos à ponta da trinca, sendo realizado um estudo com um exemplo de referência para medir a confiabilidade da técnica, com diferenças de no máximo 7%. O desempenho observado utilizando a metodologia adotada neste estudo é comparado com outros resultados encontrados na literatura, mostrando caminhos de propagação de trinca semelhantes em todas as simulações. No decorrer do trabalho são explicados os conceitos de mecânica da fratura linearmente elástica e da geometria da trinca adotada, assim como o desenvolvimento do código computacional.

## Palavras-chave

Mecânica da fratura, Propagação de trincas, Método dos Elementos de Contorno, Integração com precisão de máquina, Problemas bidimensionais.

## Abstract

Rabelo, Guilherme Oliveira; Dumont, Ney Augusto (Advisor); Wrobel, Luiz Carlos (Co-Advisor). General two-dimensional crack propagation scheme using the consistent boundary element method. Rio de Janeiro, 2022. 59p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work presents a crack propagation analysis procedure on a computer program based on the consistent boundary element formulation for two-dimensional problems. This method has as one of its main features the exact solution of the singularity problems present in the formulation. In addition, with this methodology it is possible to represent the crack geometry with micrometric openings, similar to the cracks presented in laboratory tests. In this study, the propagation results in three structures with different geometries are analyzed, each structure subjected to different load combinations, in order to reproduce pure loading modes I and II, as well as mixed loading modes. A study is carried out on the size of the increments used in the models and on the propagation angle, making it possible to determine that the ideal size of the elements of new sections should be limited to the same dimension of the neighboring elements, avoiding possible numerical errors, while the propagation angle can be determined using the stress intensity factors (FIT)  $K_I$  e  $K_{II}$ , employing the concept of maximum principal stress. The FIT is obtained through reciprocal displacements close to the crack tip, and a study is carried out with a reference example to measure the reliability of the technique, with differences of at most 7%. The performance observed using the methodology adopted in this study is compared with other results found in literature, showing similar crack propagation paths in all simulations. In the course of the chapters, the concepts of linearly elastic fracture mechanics and the adopted crack geometry are explained, as well as the development of the computational code.

## Keywords

Fracture mechanics, Crack propagation, Boundary Element Method, Machine precision integration, Two-dimensional problems.

## Sumário

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1     | Introdução   | 11 |
| 1.1   | Considerações iniciais   | 11 |
| 1.2   | Objetivos e escopo   | 13 |
| 1.3   | Estrutura do trabalho  | 14 |
| 2     | Fundamentos da Mecânica da Fratura   | 15 |
| 2.1   | Efeitos de concentração de tensões   | 15 |
| 2.2   | Balanço de energia de Griffith   | 16 |
| 2.3   | Fator de Intensidade de Tensões  | 18 |
| 2.4   | Função de Tensão de Westergaard  | 21 |
| 3     | Método Consistente dos Elementos de Contorno   | 24 |
| 3.1   | Formulação dos elementos de contorno   | 25 |
| 3.2   | Análise numérica das matrizes H e G  | 30 |
| 4     | Desenvolvimento da geometria da propagação no método consistente dos elementos de contorno | 33 |
| 5     | Aplicação do processo de propagação a problemas de mecânica da fratura                     | 40 |
| 5.1   | Análise do erro para malhas com refinamento regular  | 40 |
| 5.2   | Modelos de placa analisados por Portela et al. (1993)                                      | 43 |
| 5.2.1 | Aplicações em modo I e II puro   | 44 |
| 5.2.2 | Aplicações em modo misto   | 46 |
| 5.3   | Modelo de placa analisados por Ooi et al. (2012), Bouchard et al. (2000) e Rashid (1998)   | 49 |
| 6     | Considerações finais   | 53 |
| 6.1   | Sugestões para trabalhos futuros   | 54 |
| 7     | Referencias bibliográficas   | 56 |

## Lista de Figuras

|  |    |
|--|----|
| Figura 2.1 - Furo elíptico em uma placa plana submetida a um carregamento perpendicular ao eixo da trinca. Fonte: Anderson, 2017.                    | 15 |
| Figura 2.2 - Contorno arbitrário ao redor da ponta da trinca. Fonte: Anderson, 2017.   | 17 |
| Figura 2.3 - Indicação de eixos na ponta da trinca. Fonte: Anderson, 2017.   | 19 |
| Figura 2.4 - Modos de carregamento em uma trinca. Fonte: Anderson, 2017, adaptado.   | 20 |
| Figura 2.5 - Trinca em uma placa infinita submetida a um carregamento biaxial. Fonte: Anderson, 2017   | 22 |
| Figura 3.1 – Polos de singularidade e quase singularidade real e complexa. Fonte: Dumont e Amaral Neto, 2021a, adaptado.                             | 30 |
| Figura 4.1 – Geometria de propagação na ponta da trinca. Fonte: Dumont, 2021.  | 34 |
| Figura 4.2 – Numeração dos elementos na ponta da trinca, indicados por números com bordas, e nós, antes e depois da propagação. Fonte: Dumont, 2021. | 35 |
| Figura 4.3 – Configurações de geometria de ponta de trinca analisadas. Fonte: Dumont e Amaral Neto, 2021a, adaptado.                                 | 35 |
| Figura 4.4 – Erro relativo de $K_I$ para cada formato de ponta de trinca. Fonte: Dumont e Amaral Neto, 2021a, adaptado.                              | 36 |
| Figura 4.5 – Geometria da trinca antes e após a propagação com elementos quadráticos. Fonte: Dumont, 2021.   | 36 |
| Figura 5.1 – Modelo de placa retangular com trinca central   | 41 |
| Figura 5.2 – Gráfico dos valores de $K_I$ comparados com Murakami (1987), utilizando 5, 10, 15 e 20 elementos por quadrante da trinca.               | 42 |
| Figura 5.3 – Gráfico dos valores de $K_{II}$ comparados com Murakami (1987), utilizando 5, 10, 15 e 20 elementos por quadrante da trinca.            | 42 |
| Figura 5.4 – Modelo de placa com trinca de bordo em modo I de carregamento   | 45 |



|   |    |
|---|----|
| Figura 5.5 – Modelo de placa com trinca de bordo em modo II de carregamento   | 45 |
| Figura 5.6 – Caminhos de propagação obtidos por Portela et al. (1993) para trincas em modos puros I e II  | 46 |
| Figura 5.7 – Resultados adquiridos para modelos em modos puros I e II utilizando MCEC   | 46 |
| Figura 5.8 – Modelo de placa em cruz com trinca de bordo inicial inclinada  | 47 |
| Figura 5.9 – Caminhos de propagação obtidos por Portela et al. (1993) para o modelo de placa cruciforme   | 48 |
| Figura 5.10 – Resultados obtidos para o modelo de placa cruciforme com diferentes combinações de carga, utilizando o MCEC   | 48 |
| Figura 5.11 – Valores de abertura de ponta de trinca obtidos em modelos de placa cruciforme com carregamento $\bar{t}_2 = 2\bar{t}_1$ utilizando o MCEC               | 49 |
| Figura 5.12 – Geometria inicial de placa retangular com trinca de bordo e furo  | 50 |
| Figura 5.13 – Comparação de resultados de propagação de trinca encontrados na literatura para placa com trinca de bordo e furo  | 51 |
| Figura 5.14 – Resultados obtidos com MCEC utilizando uma placa com trinca de bordo e furo   | 52 |
| Figura 5.15 – Superposição de resultados de propagação de trinca encontrados na literatura com os resultados obtidos com o MCEC para placa com trinca de bordo e furo | 53 |

## **Lista de Abreviaturas**

FIT – Fator de Intensidade de Tensão

MCEC – Método Consistente dos Elementos de Contorno

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MEF – Método dos Elementos Finitos

# 1 Introdução

Na parte introdutória desta dissertação, são elaboradas as considerações iniciais sobre mecânica da fratura e o método dos elementos de contorno, seguidas dos objetivos definidos para o estudo e uma breve descrição dos capítulos que compõem este trabalho.

## 1.1 Considerações iniciais

Os problemas de mecânica da fratura acompanham a engenharia desde seu princípio, sempre associados às estruturas criadas pelo homem. Até o século XX, os estudos em mecânica da fratura eram pouco desenvolvidos e o uso de formulações clássicas de resistência dos materiais e de teoria da elasticidade eram utilizados em projetos sem considerar falhas ou imperfeições da estrutura, exigindo um fator de segurança alto, tornando o custo do projeto mais elevado.

Em 1913, Inglis (1913) apresentou estudos analisando a concentração de tensões causada por entalhes elípticos em placas planas, o que consistiu nos primeiros estudos de mecânica da fratura. Baseado neste trabalho, Griffith (1920) publicou um estudo sobre materiais frágeis utilizando conceitos de termodinâmica, propondo um critério de energia capaz de avaliar a iminência de propagação de uma trinca.

Ao final da década de 40, Irwin (1948) apresentou contribuições ao trabalho original de Griffith, estendendo a aplicação do conceito de energia a metais e, oito anos depois, introduziu o conceito de taxa de liberação de energia, aplicando a teoria de Griffith em um formato mais voltado para a solução de problemas de engenharia (Irwin, 1956). Além disso, Irwin (1957) utilizou desenvolvimentos de Westergaard (1939) para apresentar uma constante chamada de fator de intensidade de tensões (FIT), diretamente relacionada à taxa de liberação de energia, que descreve as tensões e deslocamentos nas proximidades da ponta da trinca.

Com o progresso realizado nesse período, o entendimento de como alguns elementos estruturais entram em colapso – e como prevenir a situação de falha –

creceu significativamente, resultando em diversas pesquisas sobre mecânica da fratura, como, por exemplo, estudos que relacionam efeitos de fadiga com a ruptura da fuselagem em aeronaves e o uso da taxa de liberação de Irwin para investigar a falha de rotores (Wells, 1955; Winne e Wundt, 1958).

Com o tempo, a tecnologia computacional surgiu e apresentou uma grande evolução ao longo do século XX e, junto a avanços em técnicas de análise numéricas, problemas de engenharia puderam ser representados por equações diferenciais parciais e com integrações numéricas, levando a um desenvolvimento de modelos que permitem a análise de resultados precisos em um tempo reduzido. Assim começaram a aparecer métodos como o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC).

Apesar de o MEF ser utilizado de uma forma mais generalizada e ter aplicações mais simples, em geral, acaba apresentando algumas desvantagens no tratamento de problemas de mecânica da fratura, exigindo um grande refinamento de malha nas proximidades de trinca para apresentar resultados precisos e um processo mais trabalhoso para refazer a malha em casos de propagação, necessitando de alterações e enriquecimentos na formulação convencional para solucionar estes problemas.

O MEC apresenta uma formulação mais complexa, utilizando soluções fundamentais da elasticidade, mas permite uma aplicação de malha menos discretizada em relação ao MEF para atingir o mesmo nível de precisão em seus modelos. A modelagem se torna mais simples devido à aplicação de elementos apenas no contorno do objeto em análise.

A metodologia apresenta um bom desempenho para problemas de mecânica da fratura, sendo ideal para aplicação em propagação de trincas, pois é possível estender a malha ao longo do caminho de propagação sem a necessidade de grandes alterações no processamento geral da malha, simplesmente adicionando novos elementos à nova configuração da estrutura.

Na década de 60 foram apresentados os conceitos de deslocamento de abertura de ponta de trinca por Dugdale (1960), para uma investigação sobre o escoamento em extremidades de aberturas estreitas, e a integral J por Rice (1968), que obtém a taxa de liberação de energia através de uma integral aplicada ao redor da ponta da trinca. Esses conceitos podem ser utilizados para a resolução de

problemas de mecânica da fratura desde que se tenha uma representação adequada do campo de tensões nas proximidades da ponta da trinca.

Em tempos recentes, uma formulação consistente para o método dos elementos de contorno foi desenvolvida por Dumont (1994; 1998; 2010), solucionando problemas de singularidade presentes na formulação original de modo exato, além de apresentar melhorias na interpolação das forças de superfície, resultando em uma montagem mais fácil das matrizes do problema, além de representar corretamente, mesmo para elementos curvos, deslocamentos de corpo rígido e os correspondentes a campos de tensão constantes.

## 1.2 Objetivos e escopo

Esta dissertação de mestrado tem a proposta de solucionar problemas de mecânica da fratura e propagação de trinca em modo misto de carregamento utilizando um programa desenvolvido em Maple aplicando a formulação do Método Consistente dos Elementos de Contorno (MCEC) desenvolvido por Dumont. A metodologia apresentada neste trabalho pode ser aplicada a qualquer problema de propagação de trinca em estruturas bidimensionais.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Verificar o desempenho do método para a obtenção do fator de intensidade de tensões utilizando o critério de abertura de ponta de trinca.
- Determinar tamanho ideal do incremento e o ângulo de direção de propagação em termos da tensão principal máxima.
- Desenvolver uma geometria adequada para o processo de propagação levando em consideração o desempenho do cálculo de tensões nas proximidades da ponta da trinca e uma aplicação otimizada no programa levando em consideração a numeração dos nós e elementos, assim como as conectividades da malha.
- Avaliar o desempenho do caminho de propagação resultante utilizando diversos problemas de mecânica da fratura em modos de carregamentos puros e mistos.

### 1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho está dividido em 6 capítulos, incluindo este capítulo introdutório ao tema da dissertação, apresentando os objetivos pretendidos e a estruturação.

No capítulo 2, os conceitos básicos sobre mecânica da fratura linearmente elástica utilizados no trabalho são desenvolvidos e contextualizados, envolvendo com mais detalhes as definições de Balanço de Energia de Griffith, FIT, Função de Tensão de Westergaard, Integral J e propagação de fratura.

No capítulo 3, é apresentada a formulação básica do método dos elementos de contorno e do método consistente dos elementos de contorno, mostrando o desenvolvimento das equações aplicadas a problemas de elastostática plana, indicando algumas diferenças da formulação e problemas de singularidade e quase singularidades, reais e complexas.

No capítulo 4, é apresentado como foi realizada a concepção da geometria de propagação e do código utilizado para representar a geometria no programa, assim como as conectividades dos elementos.

No capítulo 5, são apresentados os modelos adotados para o estudo juntamente com os resultados obtidos na literatura comparados com os resultados obtidos pelo método desenvolvido. Dentre os modelos analisados estão situações de modos de carregamento I e II puros, carregamento em modo misto em placas sem furos e carregamentos em placas com furos.

No capítulo 6, são apresentadas as conclusões do autor em relação aos resultados encontrados no estudo e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 Fundamentos da Mecânica da Fratura

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos referentes à mecânica da fratura linearmente elástica, abordando tópicos como o Balanço de Energia de Griffith, Fator de Intensidade de Tensões, Função de Tensão de Westergaard, Integral J e Propagação de trinca.

### 2.1 Efeitos de concentração de tensões

Inglis (1913) produziu um dos primeiros estudos relacionados ao efeito de concentração de tensões. Seu trabalho consistiu na análise de furos elípticos, com dimensões de comprimento  $2a$  e de abertura  $2b$ , em placas planas, submetidas a esforços de tração,  $\sigma$ , aplicados no sentido perpendicular ao eixo da maior dimensão da elipse, como ilustrado na figura 2.1. Para que não ocorra influência das bordas da placa no furo, foram consideradas grandes dimensões para o comprimento e largura da placa.

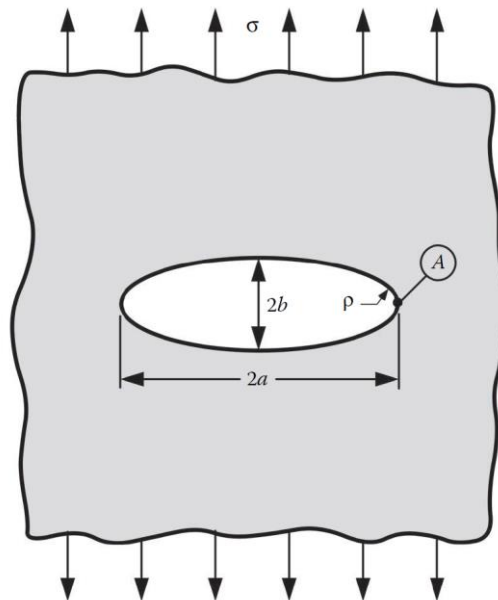


Figura 2.1: Furo elíptico em uma placa plana submetida a um carregamento perpendicular ao eixo da trinca (Anderson, 2017)

A tensão no ponto A, ponto extremo da elipse no eixo da maior dimensão, pode ser obtida utilizando a expressão

$$\sigma_A = \sigma \left( 1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (2-1)$$

Quando o comprimento da elipse,  $a$ , aumenta em relação à abertura,  $b$ , o furo na placa toma a forma de uma trinca fina. Neste caso, o autor apresenta a equação

$$\sigma_A = \sigma \left( 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2-2)$$

onde o valor da curvatura  $\rho$  da elipse é

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (2-3)$$

No caso de  $a \gg b$ , a equação (2-2) fica

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2-4)$$

A equação (2-4) indica que, quando o raio de curvatura tende a 0, o valor da tensão  $\sigma_A$  se torna infinito. Esse resultado não tem aplicação experimental, pois um material romperia com esse tipo de trinca ao se aplicar uma carga pequena. Então Griffith (1920) apresentou uma solução para este problema utilizando critérios de energia ao invés de uma tensão localizada.

## 2.2 Balanço de energia de Griffith

Griffith (1920) estudou o exemplo apresentado por Inglis (1913), ilustrado na Figura 2.1, e determinou que, para ocorrer a propagação de uma trinca, a energia potencial  $\Pi$  na placa, gerada pelos esforços, deve ser suficiente para exceder a energia  $W_s$  necessária para romper as ligações atômicas do material. Para um acréscimo na área da trinca,  $dA$ , as condições de equilíbrio desse sistema podem ser dadas pela expressão

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (2-5)$$



Griffith (1920) apresenta, a partir da análise de tensões feitas por Inglis (1913), que

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (2-6)$$

onde  $\Pi_0$  é a energia potencial de uma placa sem trinca,  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $B$  é a espessura da placa. Considerando  $\gamma_s$  como a energia de superfície do material,  $W_s$  pode ser calculado por

$$W_s = 4aB\gamma_s \quad (2-7)$$

Substituindo as equações (2-6) e (2-7) na equação (2-5), é possível encontrar a expressão para a tensão de ruptura:

$$\sigma_f = \left( \frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-8)$$

Irwin (1956) apresentou um modelo de cálculo de energia equivalente ao modelo de Griffith, que consiste em mensurar a quantidade de energia disponível por incremento da trinca, definido como uma taxa de liberação de energia,  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2-9)$$

Um método para a determinação da taxa de liberação de energia foi desenvolvido por Rice (1968) a partir da análise de trincas em materiais com propriedades mecânicas não lineares. Este método utiliza uma integral independente do caminho percorrido, aplicada ao redor da ponta da trinca, seguindo o sentido anti-horário, dentro do domínio do material da estrutura. A figura 2.2 ilustra o sistema descrito.

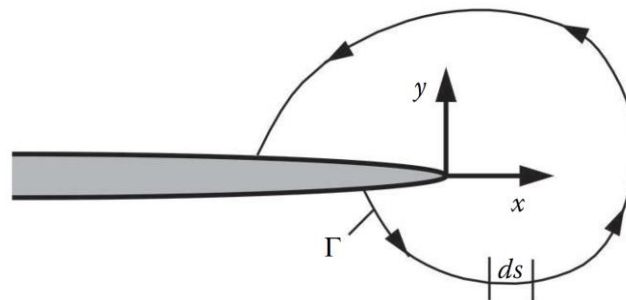


Figura 2.2: Contorno arbitrário ao redor da ponta da trinca (Anderson, 2017)

Utilizando o sistema ilustrado na figura 2.2, a equação da integral  $J$  é dada por

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (2-10)$$

onde  $W$  é a densidade de energia de deformação,  $T_i$  são os componentes do vetor de forças de superfície,  $u_i$  são as componentes do vetor de deslocamentos e  $ds$  é o acréscimo de comprimento ao longo do contorno  $\Gamma$ . Os termos  $W$  e  $T_i$  são:

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d \epsilon_{ij} \quad (2-11)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2-12)$$

Rice (1968) demonstra que a integral  $J$  tem o mesmo valor independentemente do caminho de integração para problemas envolvendo materiais linearmente elásticos ou não, sendo uma forma geral da taxa de liberação de energia apresentada por Irwin (1956). Para a utilização em mecânica da fratura linear,  $J$  e  $\mathcal{G}$  são equivalentes.

Baseado no conceito de balanço de energia apresentado por Griffith (1920), Mai e Lawn (1986) apresentou um estudo sobre as condições de estabilidade da trinca, indicando que a estabilidade da trinca depende da segunda derivada da energia do sistema, podendo ser ela maior ou menor que zero:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Pi}{dA^2} &> \frac{d^2W_s}{dA^2} && \text{(Instável)} \\ \frac{d^2\Pi}{dA^2} &< \frac{d^2W_s}{dA^2} && \text{(Estável)} \end{aligned} \quad (2-13)$$

Para a situação específica em que o lado direito da equação é igual a zero, ou seja,  $dW_s$  é independente de  $dA$ , a estabilidade é determinada exclusivamente se o valor de  $\mathcal{G}$  for uma função crescente ou decrescente da área da trinca.

### 2.3 Fator de Intensidade de Tensões

É possível desenvolver algumas expressões para calcular tensões em um corpo submetido a um carregamento externo, de acordo com a configuração da

trinca presente no objeto em estudo. Autores como Westergaard (1939) e Williams (1957) estão entre os primeiros a apresentar essas soluções.

Utilizando um sistema de coordenadas polares com origem na ponta da trinca, como ilustrado na figura 2.3, Irwin (1957) determinou o campo de tensões de qualquer trinca em um corpo com material linearmente elástico utilizando a equação

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij} \quad (2-14)$$

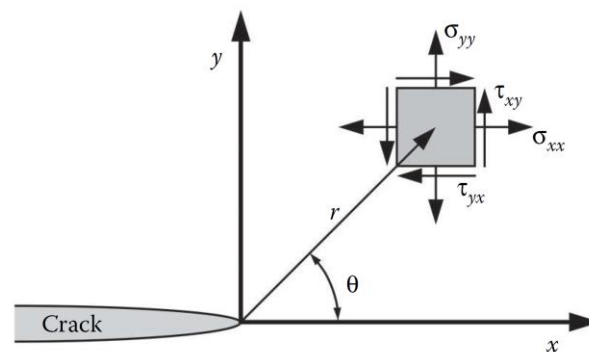


Figura 2.3: Indicação de eixos na ponta da trinca (Anderson, 2017)

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões,  $r$  é a distância da origem ao ponto de análise,  $\theta$  é o ângulo entre o ponto de análise e o eixo da trinca,  $f_{ij}$  é uma função adimensional de  $\theta$  e  $K$  é o fator de intensidade de tensões, sugerido por Irwin para indicar como as tensões tendem a infinito. Tanto  $K$  quanto os termos de ordem superior dependem da geometria do corpo.

É importante ressaltar que, quando  $r \rightarrow 0$ , o primeiro termo tende a infinito, devido à proporcionalidade  $1/\sqrt{r}$ , enquanto o segundo termo aproxima-se de um valor nulo.

O fator de intensidade de tensões depende do modo de carregamento que é gerado de acordo com a configuração das cargas no sistema. Há três modos de carregamento que podem atuar individualmente, ou em combinações de dois ou três modos simultâneos em uma trinca.

O modo I de carregamento ocorre com uma tensão de tração normal ao plano da trinca, com as faces da trinca tendendo a se distanciar. O modo II de carregamento é caracterizado pelo cisalhamento no plano da trinca, com as faces

deslizando entre si por translação recíproca. Já o modo III de carregamento ocorre quando as faces da trinca giram em relação uma da outra, com um movimento, no caso particular de uma placa, de rasgamento. Estes modos de carregamento estão ilustrados na Figura 2.4, para uma trinca de bordo numa placa.

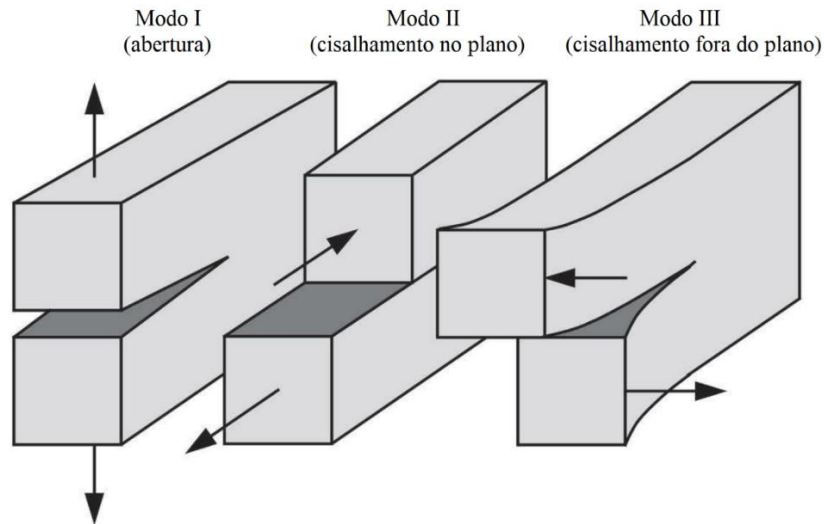


Figura 2.4: Modos de carregamento em uma trinca (Anderson, 2017, adaptado)

De forma geral, a estrutura de cálculo dos fatores de intensidade é dada por

$$K_{(I,II,III)} = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2-15)$$

onde  $Y$  é uma constante adimensional em função da geometria e do modo de carregamento do sistema,  $\sigma$  é a tensão característica e  $a$  é a dimensão longitudinal da trinca.

Neste trabalho, será aplicado o cálculo do fator de intensidade de tensões, para problemas bidimensionais, em termos do deslocamento de abertura da ponta da trinca para os modos de carregamento I e II utilizando a equação (2-16), conforme apresentado por Dumont e Amaral Neto (2021a),

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{G\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta u_{\perp}}{\sqrt{r}} + O(\Delta\theta)^2 \\ K_{II} &= \frac{G\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta u_{\parallel}}{\sqrt{r}} + O(\Delta\theta)^2 \end{aligned} \quad (2-16)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento do material,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\Delta u_{\perp}$  e  $\Delta u_{\parallel}$  são deslocamentos relativos de abertura e de deslizamento,

respectivamente, entre dois pontos opostos em cada face, localizados na menor distância  $r$  possível da ponta da trinca, e  $O(\Delta\theta)^2$  é o erro inerente ao modelo.

O conceito de deslocamento de abertura de ponta de trinca foi introduzido inicialmente por Dugdale (1960) em seu estudo sobre a determinação da extensão da zona de plasticidade em pontos de concentração de tensões em chapas metálicas, relacionando o escoamento nas proximidades da ponta da trinca com a carga aplicada. Wells (1961) também realizou um estudo similar, ao observar que elementos estruturais metálicos possuíam uma alta tenacidade para serem caracterizados pelos conceitos de mecânica da fratura linearmente elástica, propondo a utilização do deslocamento de abertura de ponta de trinca para medir a resistência do material em termos de FIT, representada por  $K_c$ .

## 2.4 Função de Tensão de Westergaard

Westergaard (1939) desenvolveu uma forma de relacionar os campos locais da ponta da trinca às condições de contorno globais em problemas de modo I de fratura, utilizando uma função de tensão complexa  $Z(z)$ , no qual  $z = x + iy$  e  $i = \sqrt{-1}$ . A função de tensão de Airy está conectada com a função de tensão de Westergaard na forma

$$\Phi = \Re(\overline{\overline{Z}}) + y\Im(\overline{Z}) \quad (2-17)$$

em que  $\Re$  e  $\Im$  representam as partes real e imaginária da função, respectivamente, e as barras sobre  $Z$  indicam integrações em relação a  $z$ , ou seja:

$$\overline{\overline{Z}} = \frac{d\overline{\overline{Z}}}{dz} \quad Z = \frac{d\overline{Z}}{dz} \quad (2-18)$$

As tensões são calculadas utilizando as equações

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \Re(Z) - y\Im(Z') \\ \sigma_{yy} &= \Re(Z) + y\Im(Z') \\ \tau_{xy} &= -y\Re(Z') \end{aligned} \quad (2-19)$$

Para o estado plano de deformações, os deslocamentos são representados na forma

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2\mu} \left[ (1-2\nu) \Re(\bar{Z}) - y \Im(Z) \right] \\ u_y &= \frac{1}{2\mu} \left[ 2(1-\nu) \Im(\bar{Z}) - y \Re(Z) \right] \end{aligned} \quad (2-20)$$

Nota-se que, quando o valor de  $y$  é zero, o termo imaginário das funções é nulo, indicando que o plano principal é o plano da trinca, em que  $\theta = 0$ , onde os campos de tensões são simétricos.

Em uma placa infinita submetida a uma tensão biaxial uniforme,  $\sigma$ , com uma trinca de comprimento  $2a$  e origem localizada no centro da trinca, como ilustra a figura 2.5, a função de tensão de Westergaard é dada por

$$Z(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2-21)$$

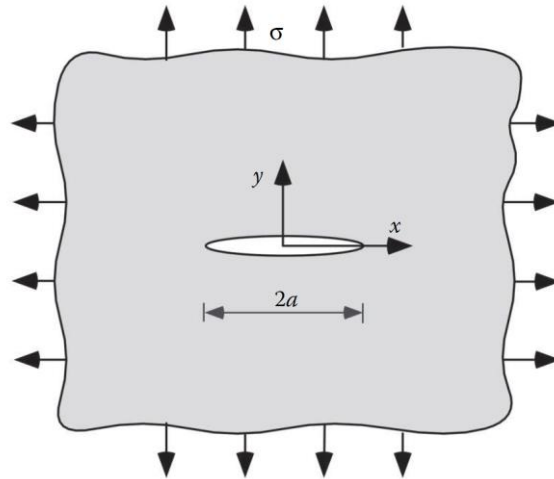


Figura 2.5: Trinca em uma placa infinita submetida a um carregamento biaxial (Anderson, 2017)

Para  $y = 0$ , no plano da trinca, a função de tensão  $Z$  é totalmente imaginária quando  $-a < x < a$  e real para  $|x| > |a|$ . Utilizando as equações (2-19) e (2-21), é possível determinar as tensões normais no plano da trinca como

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \Re(Z) = \frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (2-22)$$

Determinando a distância horizontal da origem das coordenadas para a ponta da trinca, fazendo  $x^* = x - a$ , a equação (2-22) fica

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \lim_{x^* \rightarrow 0} \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2x^*}} \quad (2-23)$$

Esta equação explicita a singularidade presente na equação (2-14). Utilizando as equações de tensão radial ( $\sigma_r$ ) e tangencial ( $\sigma_\theta$ ) desenvolvidas por Williams (1957) é possível encontrar as tensões no plano da trinca, para  $\theta = 0$ ,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \lim_{x^* \rightarrow 0} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x^*}} \quad (2-24)$$

Igualando as equações (2-23) e (2-24), temos

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2-25)$$

A função de tensão de Westergaard pode ser utilizada em termos de  $K_I$  ao substituir a equação (2-25) na equação (2-21) e utilizando  $z^* = z - a$ :

$$Z(z^*) = \lim_{z^* \rightarrow 0} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z^*}} \quad (2-26)$$

O cálculo de tensões singulares para um ângulo  $\theta$  não nulo é possível ao realizar a substituição  $z^* = re^{i\theta}$ , onde  $r^2 = (x-a)^2 + y^2$  e  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right)$ .

Com a equação (2-26), é possível obter os campos de tensões e deslocamentos em qualquer direção e determinar seus valores em um ponto da placa nas proximidades da ponta da trinca, para  $r \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ u_y &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (2-27)$$

Para estado plano de deformação,  $k = 3 - 4\nu$  e, para estado plano de tensão,  $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ .

### 3

## Método Consistente dos Elementos de Contorno

O método dos elementos de contorno tem origem no trabalho de Green (1828), que apresentou uma formulação integral para problemas de Dirichlet e Neumann da equação de Laplace ao introduzir a chamada função de Green. Em sequência, Betti (1872) apresentou um desenvolvimento relacionado à análise de Green sobre as equações de elasticidade de Navier. Em seu trabalho foi demonstrado um método geral para a integração de equações de elasticidade, derivando, em seguida, sua solução em formato integral.

Utilizando o teorema da reciprocidade de Betti, Somigliana (1885) apresentou a solução de problemas de elasticidade aplicando forças de superfície, deslocamentos e forças de corpo na sua expressão.

No século XX, Fredholm (1903) e Mikhlin (1957) desenvolveram conceitos fundamentais para solucionar problemas de potencial, enquanto Muskhelishvili (1953) e Kupradze (1965) fizeram contribuições em relação a problemas de elasticidade, que foram empregadas em métodos numéricos, devido ao avanço de técnicas computacionais, com os trabalhos de Massonnet (1965), Rizzo (1967) e Cruse (1969), aplicando o método a problemas de elasticidade bidimensional e tridimensional, e Jaswon (1963) e Symm (1963) para problemas bidimensionais de potencial. A implementação numérica do Método dos Elementos de Contorno recebeu uma grande contribuição com os trabalhos de Lachat (1975) e Lachat e Watson (1976), ao desenvolverem uma representação isoparamétrica aplicada aos elementos, facilitando a programação do método.

A formulação do método dos elementos de contorno pode ser dividida em duas categorias. A primeira categoria é chamada de formulação direta, em que os termos desconhecidos das equações representam variáveis físicas, como campos de forças e de deslocamentos. Cruze e Rizzo (1968) foram os primeiros a apresentar essa formulação. A segunda categoria é chamada de formulação indireta, onde, ao contrário da formulação direta, as incógnitas das equações não apresentam um valor físico.



Brebbia (1978; 1984) foi o primeiro a realizar um trabalho utilizando métodos aproximados, como o método de resíduos ponderados, para deduzir a formulação das equações integrais.

Dumont (1994; 1998; 2010) e Dumont e Noronha (1998) aplicaram melhorias aos resultados relacionados a problemas envolvendo as singularidades existentes ao método convencional, criando o método consistente dos elementos de contorno.

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento do método consistente dos elementos de contorno aplicado a problemas de elastostática.

### 3.1 Formulação dos elementos de contorno

Considerando um sistema formado por um corpo elástico com forças de corpo  $b_i$  aplicadas em seu domínio  $\Omega$ , forças de superfície  $\bar{t}_i$  aplicadas na região  $\Gamma_\sigma$  do contorno e deslocamentos  $\bar{u}_i$  conhecidos na região  $\Gamma_u$ , é possível determinar uma equação do campo de tensões que satisfaz o equilíbrio no domínio da seguinte forma:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (3-1)$$

satisfazendo também as equações de equilíbrio e compatibilidade do contorno do sistema:

$$\sigma_{ji}\eta_j = \bar{t}_i \text{ ao longo de } \Gamma_\sigma \quad (3-2)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ ao longo de } \Gamma_u \quad (3-3)$$

onde  $\eta_j$  é a normal unitária externa ao contorno  $\Gamma$ .

Supondo que o tensor de tensões  $\sigma_{ij}$  seja simétrico e satisfaça a equação constitutiva  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}$ , o problema pode ser desenvolvido utilizando a fórmula forte do princípio da energia potencial total estacionária, com uma variação  $\delta u_i$  de  $u_i$ . Sendo  $\delta u_i = 0$  em  $\Gamma_u$ , como apresentado na equação (3-3), pode-se estender a integral de contorno de  $\Gamma_\sigma$  para  $\Gamma$ :

$$\delta \Pi = - \int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} (\sigma_{ji}\eta_j - \bar{t}_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3-4)$$

A equação (3-4) pode ser desenvolvida em um formato não variacional, utilizando o método dos resíduos ponderados. Este formato recorre a um campo de soluções fundamentais, em que tensões e deslocamentos fazem parte do mesmo problema de elasticidade,  $\delta\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}\delta u_{k,l}^*$ , e satisfaz o trecho homogêneo da equação (3-1), mas não necessariamente as condições de contorno (3-2):

$$-\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) \delta u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} (\sigma_{ji}\eta_j - t_i) \delta u_i^* d\Gamma = 0 \quad (3-5)$$

Integrando por partes duas vezes o primeiro termo do lado esquerdo da equação (3-5), aplicando o teorema de Green sucessivamente e utilizando a identidade  $\sigma_{ji}\delta u_{i,j}^* \equiv u_{k,l}C_{ijkl}\delta u_{i,j}^* \equiv u_{k,l}\delta\sigma_{kl}^*$ , é possível obter a equação

$$\int_{\Gamma} \delta\sigma_{ji}^*\eta_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta\sigma_{ji,j}^* u_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \delta u_i^* d\Omega \quad (3-6)$$

A partir da equação (3-6), é possível desenvolver o método dos elementos de contorno convencional. As soluções fundamentais  $\delta\sigma_{ij}^*$  e  $\delta u_i^*$  são definidas nas equações

$$\delta\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* \delta p_m^* \quad (3-7)$$

$$\delta u_i^* = (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) \delta p_m^* \quad (3-8)$$

onde  $u_{is}^r$  são deslocamentos de corpo rígido multiplicados por constantes arbitrárias  $C_{sm}$ ,  $\delta p_m^*$  são parâmetros de forças virtuais arbitrárias, em que  $m$  indica a localização e direção de aplicação dessas forças,  $\delta\sigma_{ijm}^*$  e  $\delta u_{im}^*$  são funções com suporte global das coordenadas e direções de  $\delta p_m^*$ , referido como ponto fonte ( $m$ ), e das coordenadas e direções onde os efeitos de  $\delta p_m^*$  são medidos, referidas como ponto de campo ( $i$ ).

As forças pontuais  $\delta p_m^*$  estão aplicadas pela extensão do contorno  $\Gamma$ , a uma distância infinitesimal da face externa do domínio  $\Omega$ . Apesar de  $\delta\sigma_{ijm}^*$  e  $\delta u_{im}^*$  tenderem a um valor infinito no ponto de aplicação de  $\delta p_m^*$ , apresentam resultados analíticos no domínio  $\Omega$ . Por conveniência, as funções  $\delta\sigma_{ijm}^*$  são normalizadas de modo que, para um domínio  $\Omega_0$  que contém  $\delta p_m^*$ , com um contorno  $\Gamma_0$ ,

$$\int_{\Omega_0} \sigma_{jim,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma_0} \sigma_{jim}^* \eta_j d\Gamma \equiv -\delta_{im} \quad (3-9)$$

De acordo com a definição de solução fundamental nas equações (3-7) e (3-8), a integral de domínio no lado esquerdo da equação (3-6) pode ser avaliada como  $\int_{\Omega} \delta\sigma_{ji,j}^* u_i d\Omega = -\delta_{im} u_i \delta p_m^* \equiv -u_m \delta p_m^*$ .

Utilizando as equações (3-7) e (3-8) e substituindo os termos  $\delta\sigma_{jim}^*$  e  $\delta u_{im}^*$  na equação (3-6), é possível encontrar uma expressão modificada da identidade de Somigliana, utilizada para calcular deslocamentos em pontos internos, escrita na forma

$$u_m = \int_{\Gamma} t_i u_{im}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega + C_{sm} \left( \int_{\Gamma} t_i u_{is}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{is}^* d\Omega \right) \quad (3-10)$$

O termo entre parênteses é nulo apenas quando há equilíbrio entre as forças de corpo  $b_i$  e forças de superfície  $t_i$ , podendo não corresponder com a realidade ao se tratar de aproximações.

Os deslocamentos  $u_i$  e as forças de superfície  $t_i$  podem ser calculados, aproximadamente, ao longo do contorno por

$$u_i = u_{in} d_n \quad (3-11)$$

$$t_i = t_{i\ell} t_{\ell} \quad (3-12)$$

onde  $d_n$  é um vetor de deslocamentos nodais e  $u_{in}$  são funções de interpolação com suporte local, geralmente polinômios escolhidos de maneira que  $u_{in} \equiv \delta_{in}$  nos pontos nodais. Assim como as forças  $t_i$ ,  $t_{\ell}$  são atributos de superfície que dependem da normal  $\eta_i$  do ponto de contorno ao qual está vinculado: alguns pontos podem apresentar mais de uma normal, visto que o contorno pode não estar suavizado. As funções de interpolação  $t_{i\ell}$  também têm suporte local, não necessariamente no mesmo formato de  $u_{in}$ . As funções de interpolação  $u_{in}$  também são utilizadas para aproximar a geometria do contorno, empregando uma representação isoparamétrica do problema.

Ao substituir  $u_i$  e  $t_i$  da equação (3-10) com suas aproximações apresentadas nas equações (3-11) e (3-12) e aplicando  $\delta p_m^*$  em pontos consecutivos do contorno,

de modo que  $\delta p_m^* d_m$  represente um trabalho virtual, é possível encontrar a equação fundamental do método dos elementos de contorno, escrita como

$$\left( \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \right) d_n = \int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{im}^* d\Gamma t_{\ell} + \int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega + C_{sm} \left( \int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{is}^r d\Gamma t_{\ell} + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right) \quad (3-13)$$

podendo ser escrita na forma matricial

$$Hd = Gt + b + \varepsilon \quad (3-14)$$

onde  $H = [H_{mn}]$  é uma matriz de transformação cinemática que transforma deslocamentos entre dois sistemas de referência,  $G = [G_{m\ell}]$  é uma matriz do tipo flexibilidade,  $b = [b_m]$  é um vetor de deslocamentos nodais equivalentes às forças de corpo aplicadas no sistema e  $\varepsilon$  é um erro cuja magnitude é definida pelos deslocamentos de corpo rígido implícitos na solução fundamental, apresentada na equação (3-8), e do refinamento da malha, afetando a precisão do equilíbrio entre forças de superfície e as forças de corpo.

Ao se conhecer uma solução particular e havendo forças de corpo no sistema, pode-se aproximar o termo  $b_m$ , apresentado na equação (3-14), na forma

$$\int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{im}^* d\Gamma t_{\ell}^p + \left( \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \right) d_n^p \quad (3-15)$$

Assim, a equação (3-14) pode ser escrita como

$$H(d - d^p) = G(t - t^p) + b + \varepsilon \quad (3-16)$$

O vetor de residuais  $\varepsilon$  pode ser escrito no formato

$$\varepsilon = C^T R^T (t - t^p) \quad (3-17)$$

onde  $R$  é calculado por

$$R_{\ell s} = \int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{is}^r d\Gamma \quad (3-18)$$

Ao substituir o termo apresentado na equação (3-15) na identidade de Somigliana, na equação (3-10), temos a expressão

$$\int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{im}^* d\Gamma t_{\ell}^p + \left( \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \right) d_n^p \quad (3-19)$$

Através do uso de aproximações e manipulações com álgebra linear envolvendo a equação (3-17) é possível encontrar a equação do método dos elementos de contorno consistente, escrita como

$$H(d - d^p) = G_a(t - t^p) \equiv GP_R^\perp(t - t^p) \quad (3-20)$$

onde  $G_a$  é a parte admissível de  $G$ , e  $P_R^\perp$  é o projetor ortogonal no espaço admissível das forças de superfície, encontrado por

$$P_R^\perp = I - P_R = I - R(R^T R)^{-1} R^T \quad (3-21)$$

No trabalho de Dumont (2010) é apresentado que as funções de interpolação  $u_{im}$  e  $t_{i\ell}$  nas equações (3-11) e (3-12), geralmente são polinômios das coordenadas naturais do contorno, que funciona bem para os deslocamentos e para o cálculo da matriz  $H$ . Entretanto, não seria possível para que as forças de superfície sejam interpoladas por um polinômio ao longo de um contorno curvo, já que as forças variam de acordo com o inverso do Jacobiano  $|J|$ , sendo proposta a substituição dos polinômios  $t_{i\ell}$  na equação (3-12) por

$$t_{i\ell} \leftarrow \frac{|J|_\ell}{|J|} t_{i\ell} \quad (3-22)$$

onde  $|J|_\ell$  é o valor do Jacobiano avaliado no ponto  $\ell$ . Esse formato é uma correção imprescindível do método para contornos curvos, em geral, além de permitir uma execução mais simples da integração numérica da matriz  $G$ .

Os termos  $u_{im}^*$  e  $\sigma_{ijm}^*$  presentes nas equações são determinados pelas soluções fundamentais de Kelvin (1848), em que, para o estado plano de deformações, as expressões para deslocamentos, tensões e forças de superfície são

$$u_{im}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{im} - r_{,i} r_{,m} + C \delta_{im} \right\} \quad (3-23)$$

$$\sigma_{ijm}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) (r_{,j} \delta_{im} + r_{,i} \delta_{jm} - r_{,m} \delta_{ij}) + 2r_{,j} r_{,m} r_{,i} \right\} \quad (3-24)$$

$$p_{im}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[ (1-2\nu) \delta_{im} + 2r_{,i} r_{,m} \right] \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu) (r_{,i} n_m - n_i r_{,m}) \right\} \quad (3-25)$$

em que  $r$  é a distância entre um ponto fonte – onde uma força unitária é aplicada – e um ponto campo localizado no contorno.

### 3.2 Análise numérica das matrizes H e G

A matriz H pode ser desenvolvida para a expressão em formato matricial

$$H = \frac{-1}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{r^2} f d\xi + \int_0^1 \frac{1}{r^4} h d\xi \right\} \quad (3-26)$$

onde

$$f = \left( \frac{1}{2} - \nu \right) N_n^{o_e} \begin{bmatrix} xy' - yx' & xx' + yy' \\ -(xx' + yy') & xy' - yx' \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

$$h = (xy' - yx') N_n^{o_e} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

e para a matriz G ,

$$G = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ \int_0^1 \ln(r) I_g d\xi + \int_0^1 \frac{1}{r^2} g d\xi \right\} \quad (3-29)$$

onde

$$I_g = (3-4\nu) N_{\ell^e}^{o_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

$$h = N_{\ell^e}^{o_e} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

Dumont (1994; 2021) mostra que podem ocorrer 3 tipos de singularidades em pontos distintos de um elemento, conforme ilustrado na figura 3.1.

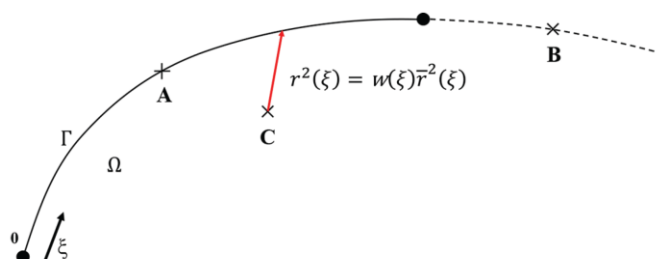


Figura 3.1: Polos de singularidade e quase singularidade real e complexa (Dumont e Amaral Neto, 2021a, adaptado)

Para um elemento de contorno, utilizando uma variável paramétrica  $\xi$ , uma singularidade pode ser localizada no ponto fonte A, dentro dos limites de integração, quando  $0 \leq \xi \leq 1$ . Para o ponto fonte B ocorre uma quase singularidade real, localizado no segmento do elemento, fora do limite de integração, porém suficientemente próximo, quando  $\xi > 1$  ou  $\xi < 0$ . O ponto fonte C representa a situação de uma quase singularidade complexa, posicionado fora, mas próximo ao segmento de integração, onde  $\xi = a \pm bi$ .

No caso de uma quase singularidade real, com seu polo representado pelo ponto B da figura 3.2, uma singularidade do tipo  $1/(\xi - \xi_s)$  mostra-se na matriz H, originado do cancelamento dos termos singulares  $1/r^2$  e  $1/r^4$  presentes na equação (3-26) com os termos singulares presentes nas equações (3-27) e (3-28), que tendem a zero quando  $r$  tende a zero.

De acordo com Dumont (1994), considerando um polinômio genérico  $p(\xi)$ , as integrais singulares de H podem ser representadas por

$$\int_0^1 \frac{p}{\xi - a} \equiv \int_0^1 \frac{p}{(\xi - a)} \frac{f(\xi - a)}{r^{2n}} \quad (3-32)$$

onde  $n$  é a multiplicidade da raiz real  $a$ . A solução do problema é encontrada ao realizar uma expansão em série de Taylor de  $p$  em torno de  $\xi_s = a$  e sucessivas aplicações da regra de L'Hospital ao limite de  $p$  para  $\xi \rightarrow a$ .

A matriz G, para o caso de quase singularidade real, apresenta apenas um núcleo de singularidade do tipo  $\ln(\xi - \xi_s)$ .

Para um polo de quase singularidade complexa, polo de singularidade no ponto C da figura 3.2, na matriz H o núcleo de singularidade presente é do tipo  $1/w$  e  $1/w^2$ , onde

$$w = (\xi - a - bi)(\xi - a + bi) \quad (3-33)$$

enquanto a matriz G apresenta dois tipos de singularidade, um do tipo  $\ln(w)$  e outra do tipo  $1/w$ . As integrais singulares da matriz H podem ser representadas pela expressão

$$\int_0^1 \frac{p}{w^n} \equiv \int_0^1 \frac{1}{(w^n)} \frac{fw^n}{r^{2n}} \quad (3-34)$$

onde  $n$  é a ordem do núcleo de singularidade. Dumont (1994) sugere uma expansão em série de  $p$  em torno de  $\xi_s = a \pm bi$  e sucessivas aplicações da regra de L'Hospital ao limite de  $p$  para  $\xi \rightarrow \xi_s$ .



## 4 Desenvolvimento da geometria da propagação no método consistente dos elementos de contorno

O processo de propagação de trinca envolve a criação de um modelo com geometria adequada para se obter os resultados mais coerentes possíveis e com um sistema de numeração que torne a adição de elementos compatível com o algoritmo do método dos elementos de contorno consistente, implementado neste estudo, de modo que a inclusão de dados dos novos elementos seja otimizada para todos os incrementos.

Foram considerados, para este estudo, formatos de ponta de trinca que permitissem a implementação de trincas com faces paralelas, visando que a trinca deve propagar a uma distância fixa a cada passo e com uma abertura constante. Alguns exemplos dos formatos de trinca estudados estão ilustrados na figura 4.1. Foi observado como critério de seleção do modelo de ponta, a acurácia do fator de intensidade de tensões obtidos pelo deslocamento de abertura da ponta da trinca.

A propagação idealizada consiste no acréscimo de dois elementos em cada face da trinca, imediatamente antes dos elementos localizados na ponta da trinca, sendo aplicado também uma inclinação ao conjunto, indicada pelo ângulo de propagação  $\alpha$ , calculado utilizando a expressão

$$\alpha = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\frac{K_I}{K_{II}} + 8} \right) \right] \quad (4-1)$$

A equação (4-1) é obtida através do critério de tensão principal máxima, indicando a direção onde ocorre a tensão tangencial máxima e onde ocorrerá a propagação a partir da ponta da trinca. O ângulo calculado utiliza o eixo da trinca como referência. Esta equação é utilizada nos trabalhos de Lacerda e Wrobel (2002) e Leonel e Venturini (2010). Erdogan e Sih (1963) e Saouma (2000) realizam um estudo mais detalhado sobre o assunto.

De acordo com Malekan (2017), a determinação do sinal na equação (4-1) depende se o valor de  $K_{II}$  é positivo ou negativo, devendo selecionar o sinal oposto

ao sinal de  $K_{II}$ . É possível observar que, para o modo II de carregamento, onde  $K_I$  é igual a zero, o ângulo  $\alpha$  assume um valor aproximado de  $\pm 70,5^\circ$ , definindo o alcance máximo da formulação para cada propagação.

Nos trabalhos de Leonel e Venturini (2010) e Portela et al. (1993), é citado que quanto menor o tamanho do incremento, mais exata é a análise. Porém o custo computacional se torna mais elevado. Portela et al. (1993) recomendam que o comprimento de propagação esteja mantido em um limite definido pela dimensão dos elementos na ponta da trinca, para que se possa evitar problemas numéricos nos modelos.

A geometria da trinca aplicada inicialmente pode ser observada na figura 4.1, onde os novos elementos estão destacados em vermelho. O comprimento de propagação é um valor fixo igual a dimensão do elemento da ponta da trinca, representado por  $\Delta l$  e a abertura constante da trinca é representado por  $2\Delta c$ . A princípio, o formato de ponta de trinca suave simples é adotado.

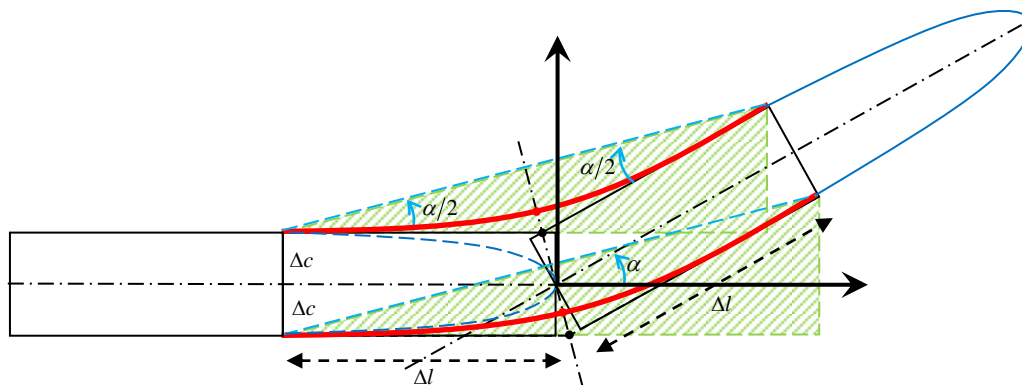


Figura 4.1: Geometria de propagação na ponta da trinca (Dumont, 2021)

Como os novos elementos são inseridos em uma posição anterior aos elementos da ponta da trinca, os nós da ponta são deslocados para uma nova posição determinada pelo ângulo de propagação  $\alpha$ .

A numeração dos elementos e dos nós inseridos na estrutura no processo de propagação é ilustrada na figura 4.2, onde o texto em azul indica a numeração antes da propagação, enquanto o texto em vermelho representa a numeração após a propagação.

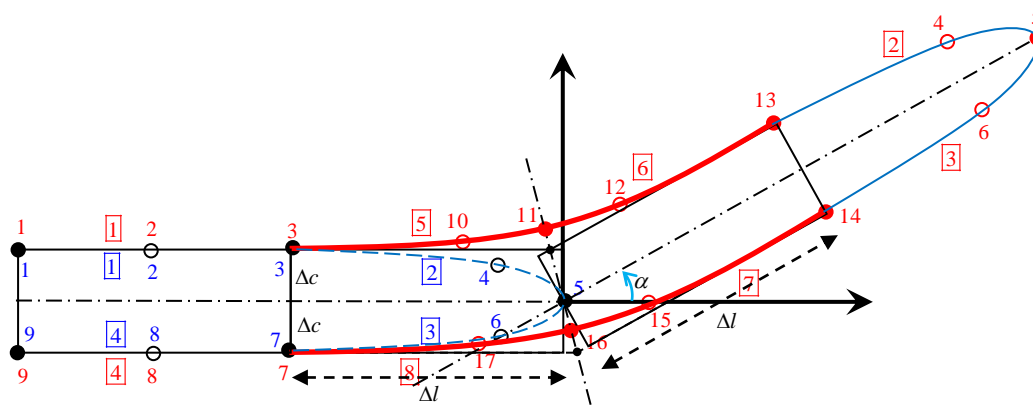


Figura 4.2: Numeração dos elementos na ponta da trinca, indicados por números com bordas, e nós, antes e depois da propagação (Dumont, 2021)

Entretanto, de acordo com um estudo feito por Dumont e Amaral Neto (2021), o modelo de trinca com ponta suave apresenta resultados inferiores comparados a um modelo de ponta de trinca triangular, em relação ao fator de intensidade de tensão obtido pelo deslocamento de abertura de ponta. O estudo apresenta dados comparativos entre diversos formatos de ponta de trinca ilustrados na figura 4.3.

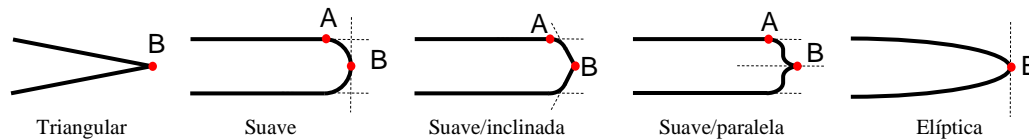


Figura 4.3: Configurações de geometria de ponta de trinca analisadas (Dumont e Amaral Neto, 2021b, adaptado)

Os modelos utilizados nas comparações usam elementos de contorno quadráticos, com integrações numéricas  $ng = 4$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ , com resultados semelhantes aos ilustrados na figura 4.4, obtidos para elementos quárticos e  $ng = 8$ . Para obter uma maior densidade de elementos na ponta da trinca, foi aplicada uma razão de proporção da distância de elementos para cada tipo de ponta, indicadas na legenda do gráfico, com o objetivo de aumentar a densidade de elementos na ponta da trinca. Os resultados obtidos com as configurações das pontas de trinca triangular e elíptica apresentaram os menores erros nesta análise.

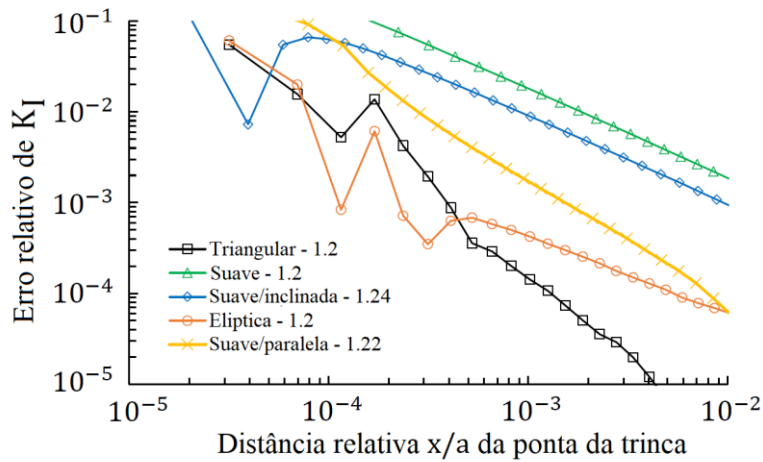


Figura 4.4: Erro relativo de  $K_I$  para cada formato de ponta de trinca (Dumont e Amaral Neto, 2021a, adaptado)

Assim, foram realizados ajustes na geometria de propagação para adotar o modelo de ponta de trinca triangular. Nesse modelo, os quatro elementos que formam a ponta da trinca são deslocados para uma nova localização, mantendo a composição da ponta da trinca, assim como a numeração original. Essa nova localização é definida pelo ângulo de propagação e comprimento de propagação adotado. Também são acrescentados 4 novos elementos, conectando os elementos da ponta da trinca ao restante da estrutura. A figura 4.5 ilustra a geometria descrita.

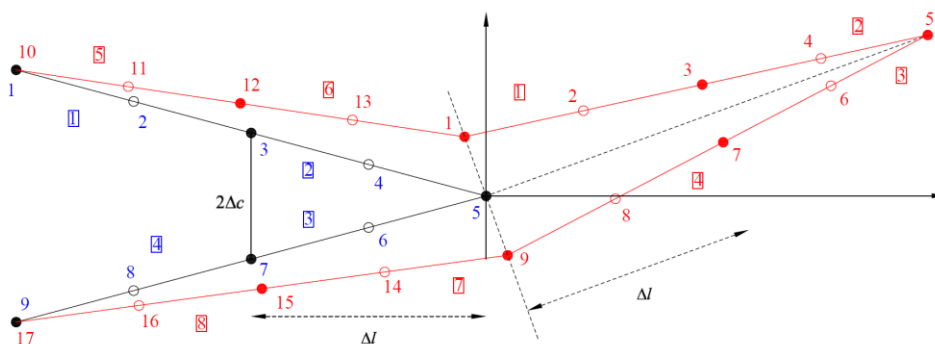


Figura 4.5: Geometria da trinca antes e após a propagação com elementos quadráticos (Dumont, 2021)

A implementação do processo de propagação no código segue uma ordem de comandos que é repetida a cada passo, descartando-se a necessidade de modificações para qualquer número de propagações na estrutura.

Antes de iniciar o processo de propagação, são definidas as variáveis  $e_t$  e  $n_t$ , que representam o número total de elementos e nós presentes na estrutura, e as variáveis  $e_c$  e  $n_c$ , que correspondem ao elemento imediatamente à esquerda da ponta da trinca e o último nó localizado na ponta da trinca. Para a figura 4.5,  $e_c = 2$  e  $n_c = 5$ .

Também são definidos na etapa preliminar à propagação os valores de  $\Delta c$  e  $\Delta l$ , calculados no programa utilizando as equações (Dumont, 2021)

$$\Delta c = \frac{1}{2} \left( \left( \text{Coord}[n_c + 2o_e, 1] + \text{Coord}[n_c - 2o_e, 1] \right)^2 + \left( \text{Coord}[n_c + 2o_e, 2] + \text{Coord}[n_c - 2o_e, 2] \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-2)$$

$$\Delta l = \left( \left( \text{Coord}[n_c, 1] - \frac{\text{Coord}[n_c + 2o_e, 1] + \text{Coord}[n_c - 2o_e, 1]}{2} \right)^2 + \left( \text{Coord}[n_c, 2] - \frac{\text{Coord}[n_c + 2o_e, 2] + \text{Coord}[n_c - 2o_e, 2]}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-3)$$

onde  $o_e$  é a ordem do elemento utilizada no sistema e  $\text{Coord}[i, j]$  representa uma matriz de coordenadas, de dimensão  $n_t \times 2$ , que indica a localização de um nó  $i$ . O índice  $j$  determina a coordenada no eixo  $x$  caso  $j = 1$  e a coordenada no eixo  $y$  caso  $j = 2$ .

A estratégia utilizada para atribuir as novas coordenadas dos nós presentes na ponta da trinca e dos novos nós consiste em determinar a localização dos nós  $n_t + 1$  e  $n_t + 4o_e$ , representados pelos nós 10 e 17 na figura 4.5,  $n_c - 2o_e$  e  $n_c + 2o_e$ , indicados como os nós 1 e 9, e, finalmente, o nó da ponta da trinca,  $n_c$ .

Para o primeiro grupo de nós descritos,  $n_t + 1$  e  $n_t + 4o_e$ , é possível observar que ocupam a mesma posição original dos nós  $n_c - 2o_e$  e  $n_c + 2o_e$ , correspondentes aos números 1 e 9 em azul. Com isso, é estabelecido que

$$\begin{aligned} \text{Coord}[n_t + 1] &= \text{Coord}[n_c - 2o_e] \\ \text{Coord}[n_t + 4o_e] &= \text{Coord}[n_c + 2o_e] \end{aligned} \quad (4-4)$$

O próximo passo é estabelecer as novas coordenadas dos nós  $n_c - 2o_e$ ,  $n_c + 2o_e$  e  $n_c$ , correspondentes aos nós 1, 9 e 5, respectivamente, utilizando as equações

$$\begin{aligned}
 Coord[n_c - 2o_e, 1] &= Coord[n_c] + \Delta c \left( -\cos \theta \tan \frac{\alpha}{2} - \sin \theta \right) \\
 Coord[n_c - 2o_e, 2] &= Coord[n_c] + \Delta c \left( -\sin \theta \tan \frac{\alpha}{2} + \cos \theta \right) \\
 Coord[n_c + 2o_e, 1] &= Coord[n_c] + \Delta c \left( \cos \theta \tan \frac{\alpha}{2} + \sin \theta \right) \\
 Coord[n_c + 2o_e, 2] &= Coord[n_c] + \Delta c \left( \sin \theta \tan \frac{\alpha}{2} - \cos \theta \right) \\
 Coord[n_c, 1] &= Coord[n_c] + 2\Delta l (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \\
 Coord[n_c, 2] &= Coord[n_c] + 2\Delta l (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha)
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

onde  $\theta$  é a inclinação da ponta da trinca antes da propagação.

Para concluir o posicionamento, deve-se aplicar as coordenadas dos nós existentes nos trechos entre os nós  $n_t + 1$  e  $n_c - 2o_e$  (números 10 e 1 na ilustração),  $n_c - 2o_e$  e  $n_c$  (números 1 e 5),  $n_c$  e  $n_c + 2o_e$  (números 5 e 9) e  $n_c + 2o_e$  e  $n_t + 4o_e$  (números 9 e 17). É possível realizar esse procedimento utilizando uma interpolação uniforme entre as coordenadas, com auxílio de estruturas de repetição da programação utilizando as equações

$$\begin{aligned}
 Coord[n_t + 1 + i] &= Coord[n_t + 1] + \frac{Coord[n_c - 2o_e] - Coord[n_t + 1]}{2o_e} i \\
 Coord[n_c - 2o_e + i] &= Coord[n_c - 2o_e] + \frac{Coord[n_c] - Coord[n_c - 2o_e]}{2o_e} i \\
 Coord[n_c + i] &= Coord[n_c] + \frac{Coord[n_c + 2o_e] - Coord[n_c]}{2o_e} i \\
 Coord[n_c + 2o_e + i] &= Coord[n_c + 2o_e] + \frac{Coord[n_t + 4o_e] - Coord[n_c + 2o_e]}{2o_e} i
 \end{aligned} \tag{4-6}$$

onde  $i$  é um número que varia de 1 a  $2o_e - 1$ .

Após atribuir a posição de todos os pontos abrangidos neste passo de propagação, é necessário indicar as incidências nodais dos novos elementos gerados

e dos elementos da estrutura adjacentes aos nós representados pelos nós 10 e 17 da figura 4.5.

Ao finalizar o processo de propagação, os valores de  $n_i$  e  $e_i$  são atualizados, adicionando respectivamente  $4o_e$  e  $4$ , representando os novos nós e elementos adicionados na estrutura.

Após determinação da nova geometria da estrutura, são geradas as matrizes G e H novamente, considerando os elementos recentes e obtendo os resultados de deslocamento e fator de intensidade de tensão para o próximo passo de propagação.

Esta última configuração apresentou um desempenho satisfatório em testes com sucessivas propagações e uma implementação simples na programação. A numeração permanente da ponta da trinca permite que a mensuração dos dados sempre ocorra nos mesmos nós, não necessitando de ajustes adicionais no código para verificar a contagem de nós na ponta da trinca (Dumont, 2021).

Também foi verificado que esta abordagem permite a realização de propagação em múltiplas trincas, bastando que seja determinado o nó da ponta da trinca,  $n_c$ .

## 5 Aplicação do processo de propagação a problemas de mecânica da fratura

Para validar o sistema de propagação de trinca desenvolvido neste trabalho, foram utilizados exemplos retirados dos trabalhos de Portela et al. (1993), Murakami (1987), Ooi et al. (2012), Bouchard et al. (2000) e Rashid (1998), comparando os resultados referentes ao fator de intensidade de tensões e caminho de propagação.

### 5.1 Análise do erro para malhas com refinamento regular

Para verificar a confiabilidade do cálculo do fator de intensidade de tensões em termos do deslocamento de abertura de ponta de trinca, foram executadas diferentes configurações de refinamento de trinca, buscando manter uma dimensão razoável dos elementos da ponta, para que cada propagação percorra uma distância relevante sem prejudicar os resultados.

Estudos já foram realizados por Dumont e Amaral Neto (2021b) utilizando o cálculo do FIT utilizando o deslocamento de abertura de ponta de trinca com o método dos elementos de contorno consistente. Entretanto, os modelos utilizam um refinamento elevado da malha e razões de proporção entre 1,1 e 1,5, reduzindo o tamanho do elemento da ponta da trinca para valores bem inferiores a  $10^{-2}$ , não representando um cenário prático para o caso de propagação.

Assim, foi realizado um estudo para analisar os valores de FIT com um modelo de placa retangular, de base e altura iguais a 10 e 20, respectivamente, com uma trinca central inclinada a  $45^\circ$  de tamanho igual a 4 e com abertura central de  $4 \times 10^{-4}$ . A configuração da trinca selecionada para deste modelo é o formato triangular demonstrado na figura 4.3, assim, a trinca, que possui simetria em seu centro, apresenta a forma de losango. A placa está carregada com uma tensão unitária de tração,  $\bar{t}$ , aplicada na direção vertical. Foram aplicados elementos quadráticos na modelagem, sendo 8 nas faces superior e inferior, 16 nas faces



laterais e 4 tipos de refinamento para a trinca, contendo 5, 10, 15 e 20 elementos para cada face de trinca. O modelo pode ser observado na figura 5.1.

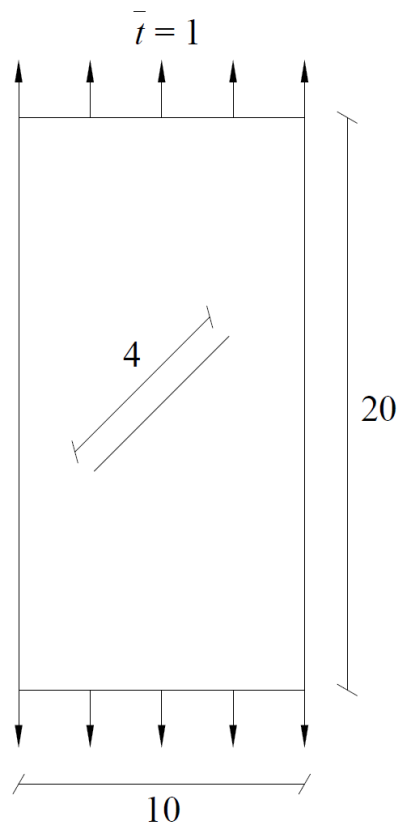


Figura 5.1: Modelo de placa retangular com trinca central

Os dados deste modelo utilizam o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ , módulo de elasticidade transversal  $G = 80000$ , número de pontos de Gauss,  $ng = 8$  e precisão numérica de 30 casas decimais, para elementos de contorno quadráticos. Deve-se observar que, conforme estudado por Dumont e Amaral Neto (2021b), neste caso  $ng = 4$  e precisão dupla dariam erros numéricos em torno de  $10^{-5}$  e  $10^{-6}$ , perfeitamente satisfatórios para as comparações com resultados da literatura técnica.

Os gráficos com os valores obtidos para  $K_I$  e  $K_{II}$ , calculados através do deslocamento de abertura da ponta da trinca para diferentes distâncias nodais, estão presentes na figura 5.2 e 5.3. Os valores de referência foram obtidos de Murakami (1987), onde os valores para  $K_I$  e  $K_{II}$  são, respectivamente, 0,572 e 0,529.

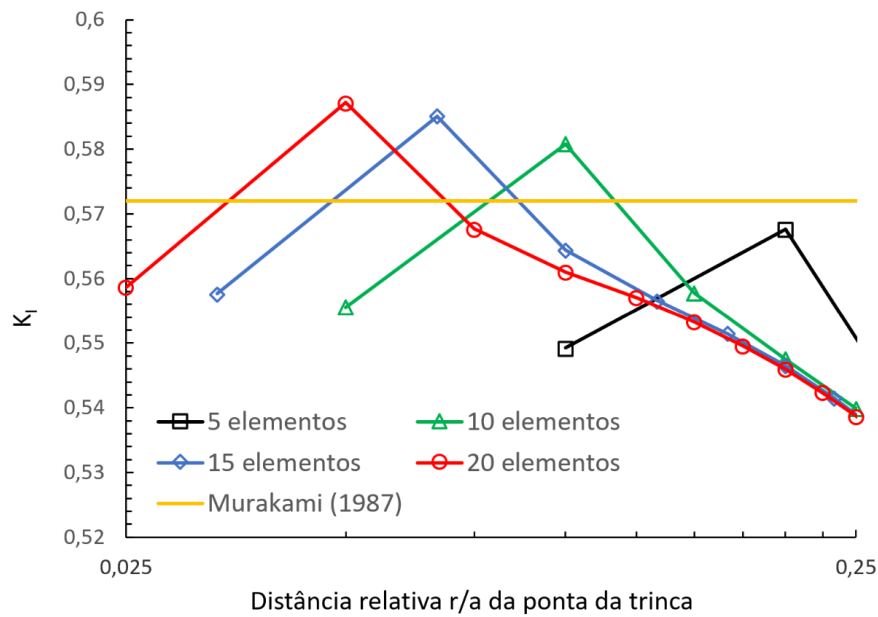


Figura 5.2: Gráfico dos valores de  $K_I$  comparados com Murakami (1987), utilizando 5, 10, 15 e 20 elementos por quadrante da trinca.

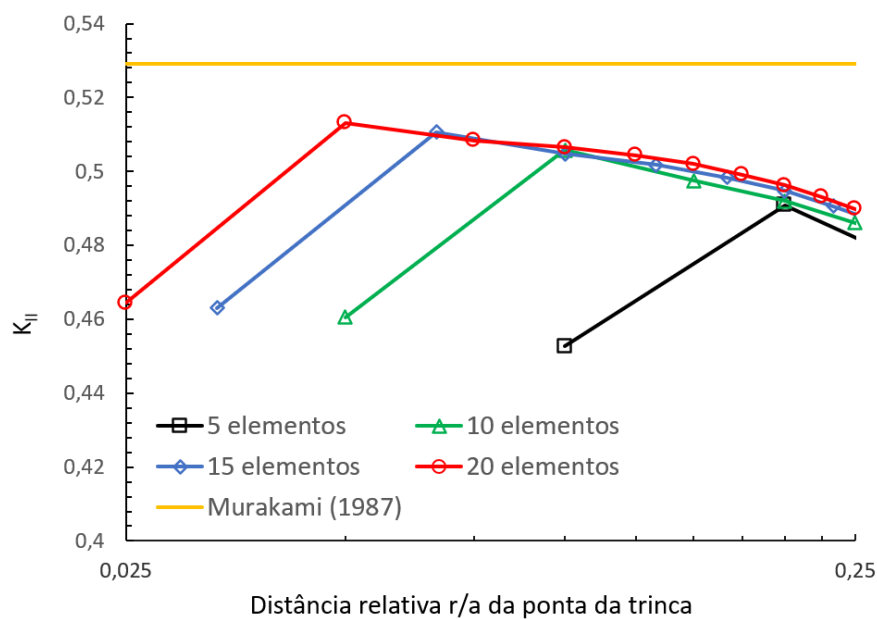


Figura 5.3: Gráfico dos valores de  $K_{II}$  comparados com Murakami (1987), utilizando 5, 10, 15 e 20 elementos por quadrante da trinca.

Analisando os resultados, é possível observar que os resultados medidos a dois nós de distância da ponta da trinca, ou seja, os nós  $n_c + 2$  e  $n_c - 2$ , apresentam valores mais consistentes em relação aos outros nós, com erros máximos de 2,65%

para  $K_I$  e 7,21% para  $K_{II}$ , passando assim a ser adotado como o ponto onde será medido o fator de intensidade de tensões dos modelos seguintes.

## 5.2 Modelos de placa analisados por Portela et al. (1993)

Os modelos utilizados no trabalho de Portela et al. (1993) empregam o método dos elementos de contorno dual em sua metodologia, analisando propagação de trincas em modo misto. O cálculo do ângulo de propagação da trinca utiliza o critério de tensão principal máxima, de modo análogo ao método apresentado neste trabalho, enquanto o fator de intensidade de tensões é obtido pela técnica da integral J, para cada instante da propagação. O comprimento de propagação utilizado no estudo é igual a três vezes o tamanho inicial do elemento da ponta da trinca.

Com um novo comprimento do incremento, as equações (4-4), (4-5) e (4-6) necessitam de alterações para executar a geometria corretamente, sendo substituídas por novas equações, assim como são somados aos valores de  $n_i$  e  $e_i$ , respectivamente,  $6o_e$  e 6, em vez de  $4o_e$  e 4.

Atualizando o conjunto de equações (4-4) para o novo sistema, temos

$$\begin{aligned} Coord[n_i + 1] &= Coord[n_c - 3o_e] \\ Coord[n_i + 6o_e] &= Coord[n_c + 3o_e] \end{aligned} \quad (4-7)$$

o grupo de equações (4-5) apresenta a forma

$$\begin{aligned} Coord[n_c - 3o_e, 1] &= Coord[n_c] + \Delta c \left( -\cos \theta \tan \frac{\alpha}{2} - \sin \theta \right) \\ Coord[n_c - 3o_e, 2] &= Coord[n_c] + \Delta c \left( -\sin \theta \tan \frac{\alpha}{2} + \cos \theta \right) \\ Coord[n_c + 3o_e, 1] &= Coord[n_c] + \Delta c \left( \cos \theta \tan \frac{\alpha}{2} + \sin \theta \right) \\ Coord[n_c + 3o_e, 2] &= Coord[n_c] + \Delta c \left( \sin \theta \tan \frac{\alpha}{2} - \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (4-8)$$

$$\begin{aligned} Coord[n_c, 1] &= Coord[n_c] + 3\Delta l (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \\ Coord[n_c, 2] &= Coord[n_c] + 3\Delta l (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \end{aligned}$$

e por fim, a equação (4-6) torna-se

$$\begin{aligned}
Coord[n_t + 1 + i] &= Coord[n_t + 1] + \frac{Coord[n_c - 3o_e] - Coord[n_t + 1]}{3o_e} i \\
Coord[n_c - 3o_e + i] &= Coord[n_c - 3o_e] + \frac{Coord[n_c] - Coord[n_c - 3o_e]}{3o_e} i \\
Coord[n_c + i] &= Coord[n_c] + \frac{Coord[n_c + 3o_e] - Coord[n_c]}{3o_e} i \\
Coord[n_c + 3o_e + i] &= Coord[n_c + 3o_e] + \frac{Coord[n_t + 6o_e] - Coord[n_c + 3o_e]}{3o_e} i
\end{aligned} \tag{4-9}$$

Portela et al. (1993) não descrevem os dados utilizados nos modelos, como o módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Com base no estudo de Osmar (2020), foram utilizados para esse trabalho elementos quadráticos,  $G = 80000$ ,  $\nu = 0,2$ , número de pontos de Gauss  $ng = 8$  e precisão numérica de 30 casas decimais.

Não foi utilizado um valor de resistência ao material presente nos modelos, fazendo com que a propagação seja sempre instável.

O número de elementos aplicados nos modelos não é revelado pelos autores. Essa informação tem impacto no processo de propagação pois o número de elementos utilizados na trinca determina o tamanho do incremento, que gera uma diferença na dimensão final da trinca após sucessivas propagações.

### 5.2.1 Aplicações em modo I e II puro

Os dois modelos analisados consistem numa placa quadrada de dimensão  $2h$ , com uma trinca de bordo reta de comprimento  $a = 2h/3$  e abertura  $b = 4 \cdot 10^{-5}$ , para  $h = 5$ . Há configurações de carregamento distintas, para cada modelo, com o objetivo de aplicar uma situação inicial de modo I puro no primeiro exemplo, aplicando uma tensão uniforme  $\bar{t} = 1$  na direção perpendicular ao eixo da trinca, e modo II puro no segundo modelo, apresentando uma região de compressão na região inferior da placa e uma de tração na superior, ambas na direção horizontal e de intensidade  $\bar{t}$ . As figuras 5.4 e 5.5 ilustram os casos descritos.

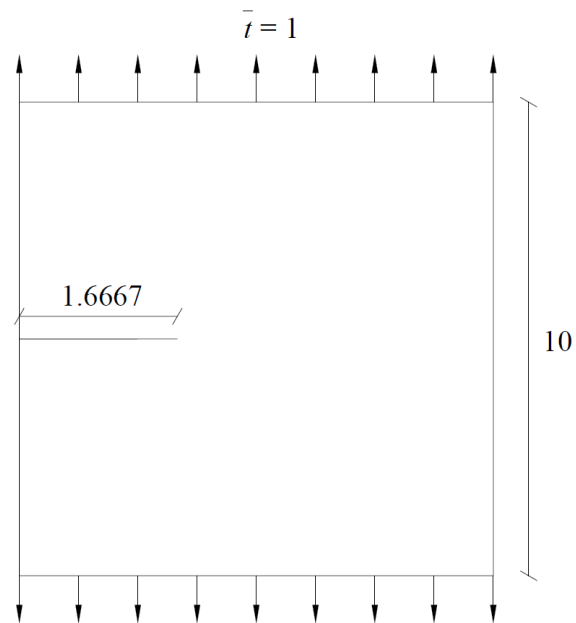


Figura 5.4: Modelo de placa com trinca de bordo em modo I de carregamento

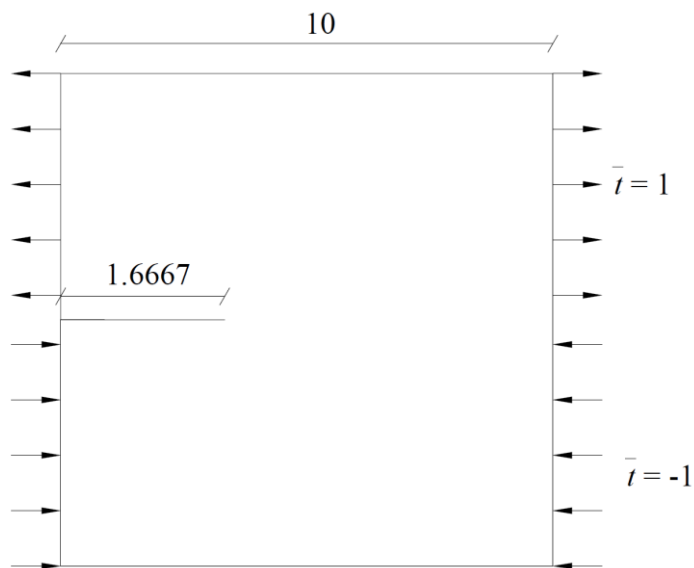


Figura 5.5: Modelo de placa com trinca de bordo em modo II de carregamento

Os resultados apresentados por Portela et al. (1993), para os modos de carregamento puro I e II, são dados na figura 5.6.

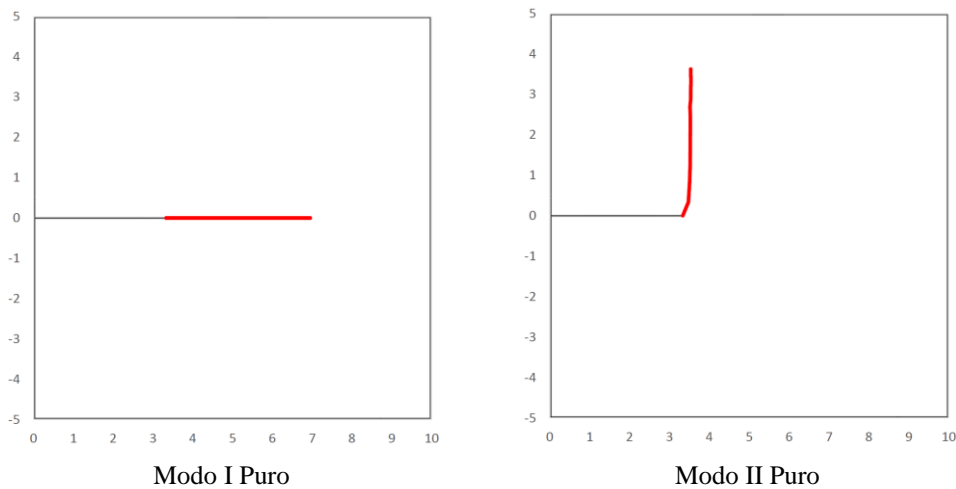


Figura 5.6: Caminhos de propagação obtidos por Portela et al. (1993) para trincas em modos puros I e II

Para atingir o tamanho de propagação similar ao utilizado nos modelos comparativos, foram utilizados 15 elementos por face da trinca, com um fator de proporção de 1,04, atingindo uma dimensão se aproximadamente 0,121 no elemento da ponta de trinca. Os resultados obtidos com a metodologia utilizada neste trabalho, para cada modelo, estão ilustrados na figura 5.7.

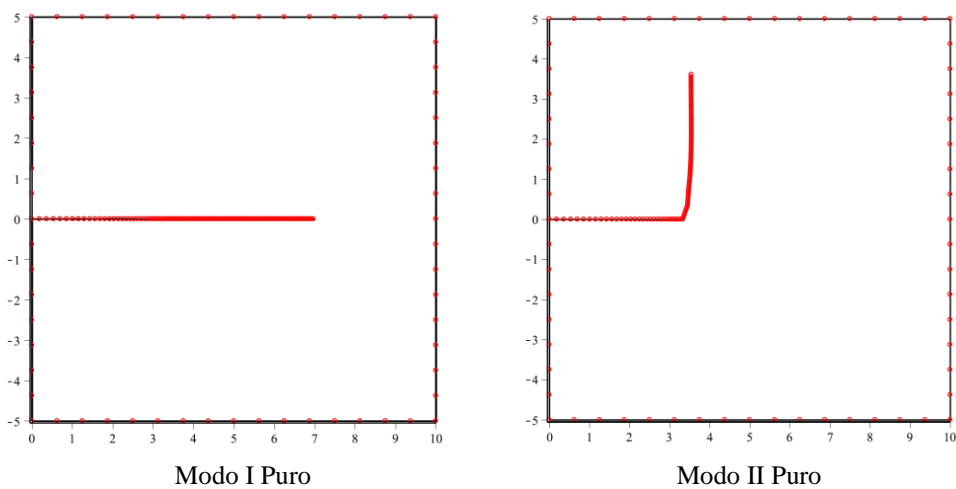


Figura 5.7: Resultados adquiridos para modelos em modos puros I e II utilizando MCEC

### 5.2.2 Aplicações em modo misto

O terceiro modelo tem formato de cruz (figura 5.8), composto por membros com faces de dimensão  $h$  e uma trinca inclinada a  $45^\circ$ , com dimensão  $h/4$ ,

aplicada entre os membros inferior e direito. A abertura da trinca utilizada é de  $10^{-4}$ . Nos extremos da cruz são aplicadas combinações de tensões  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  de tração nas direções vertical e horizontal da estrutura. Assim, são gerados quatro casos de carregamento,  $\bar{t}_1 = 0$ ,  $\bar{t}_2 = 0$ ,  $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$  e  $\bar{t}_2 = 2\bar{t}_1$ , para se verificar o caminho de propagação realizado em cada situação.

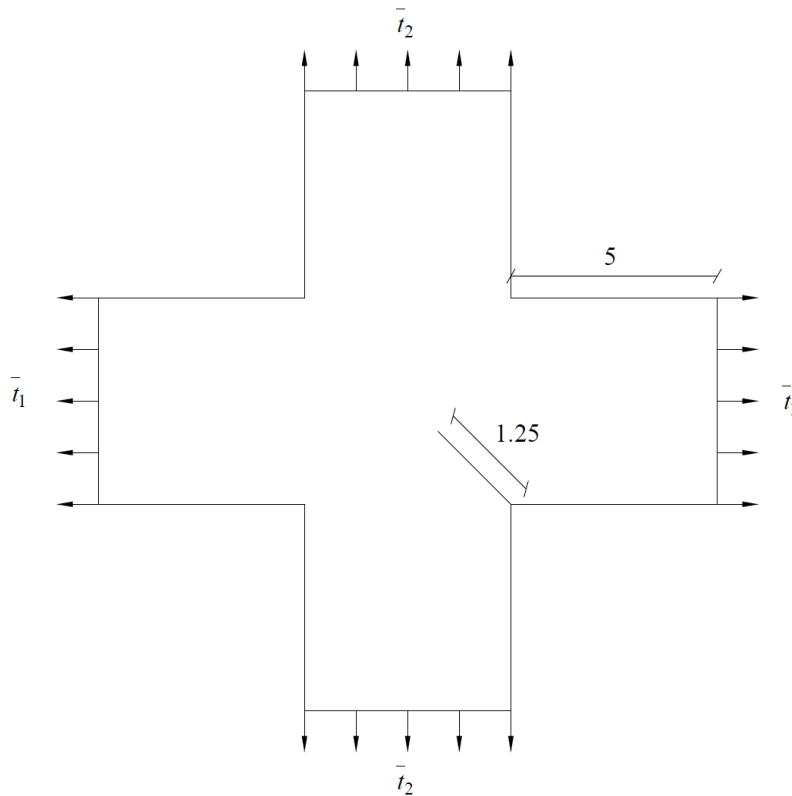


Figura 5.8: Modelo de placa em cruz com trinca de borda inicial inclinada

A figura 5.9 ilustra os resultados encontrados por Portela et al. (1993) para as diferentes combinações de  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$ .

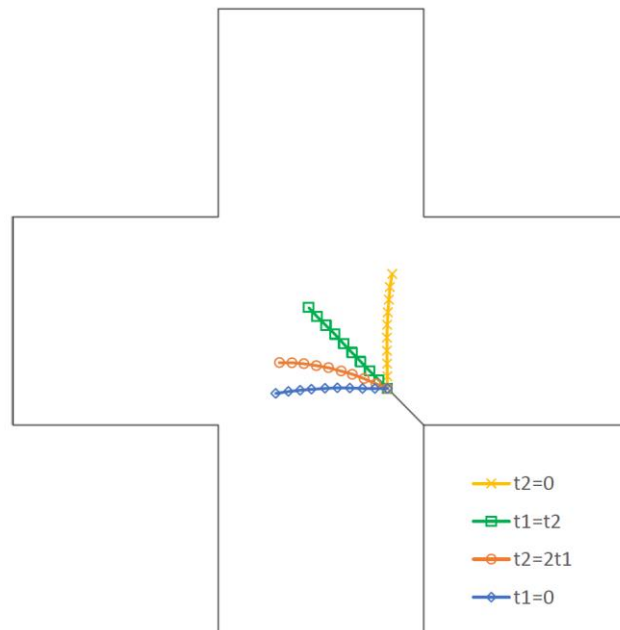


Figura 5.9: Caminhos de propagação obtidos por Portela et al. (1993) para o modelo de placa cruciforme

Em nosso modelo, foram utilizados 12 elementos para cada face da trinca, sem aplicar fator de proporção na distribuição dos elementos, obtendo-se assim um valor de comprimento da ponta da trinca de aproximadamente 0,104. Todos os resultados calculados utilizando MCEC estão mostrados na figura 5.10.

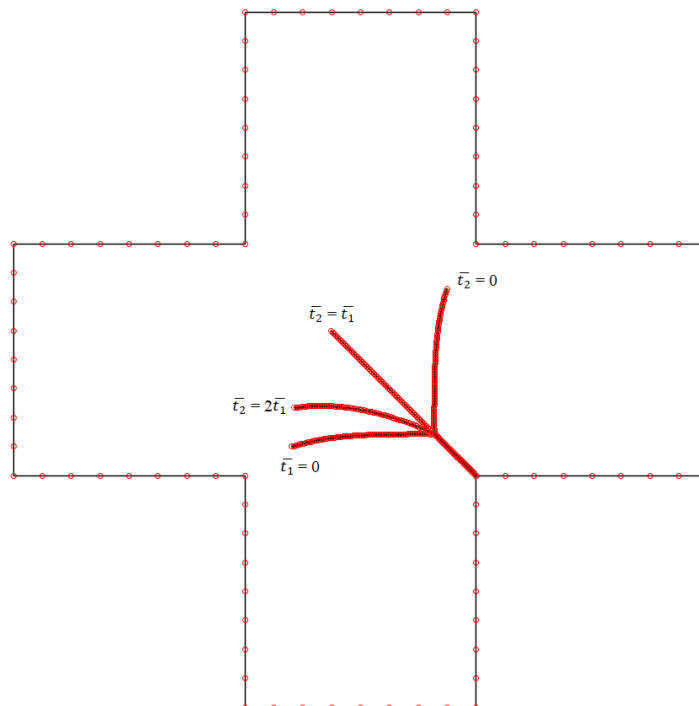


Figura 5.10: Resultados obtidos para o modelo de placa cruciforme com diferentes combinações de carga, utilizando o MCEC



É possível observar que os resultados de todos os modelos realizados com o MCEC em comparação aos resultados encontrados por Portela et al. (1993) apresentam caminhos similares.

Com o objetivo de monitorar a geometria de ponta de trinca a cada incremento, foram coletados os valores de abertura da trinca em termos de deslocamentos recíprocos dos nós  $n_c + 2$  e  $n_c - 2$ . O gráfico da distância de abertura para o caso de carregamento  $\bar{t}_2 = 2\bar{t}_1$  é ilustrado na figura 5.11.

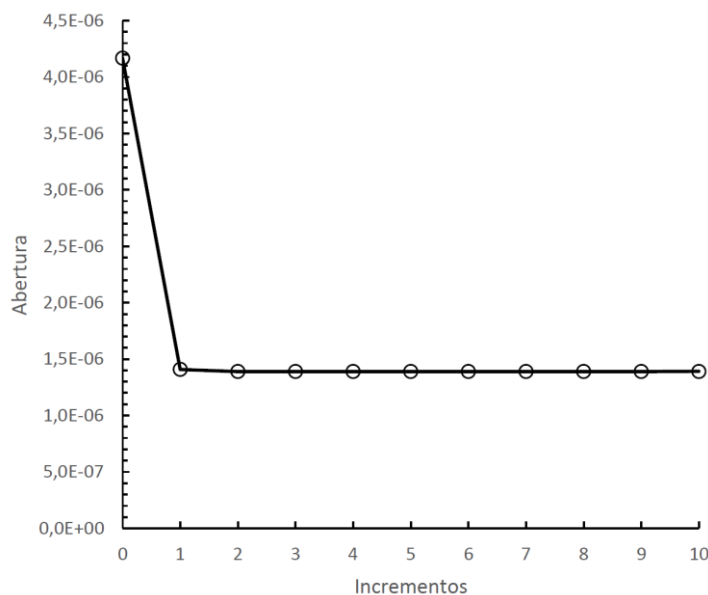


Figura 5.11: Valores de abertura de ponta trinca obtidos em modelos de placa cruciforme com carregamento  $\bar{t}_2 = 2\bar{t}_1$  utilizando o MCEC

Todos os outros casos utilizados para o modelo de placa cruciforme apresentam os mesmos resultados, apresentando pequenas variações ao longo da propagação devido à geometria de cada trinca. Com isso é possível verificar que a abertura de ponta da trinca sofre uma redução após a primeira propagação, mas se mantém estável nos passos seguintes, garantindo que a geometria da trinca é mantida a cada incremento.

### 5.3 Modelo de placa analisados por Ooi et al. (2012), Bouchard et al. (2000) e Rashid (1998)

Foi verificado o desempenho de propagação em uma placa com um furo em um modelo, analisado por Ooi et al. (2012), Bouchard et al. (2000) e Rashid (1998), composto por uma placa retangular com 20 unidades de altura e 15 de largura, com

uma trinca de bordo na face esquerda, de comprimento de 2,75 a uma distância de 5,3 da face inferior. Há também furo de raio de 3,45, com centro localizado na coordenada (5, 11,9). É aplicada uma tensão de tração unitária na direção vertical. Como a abertura de trinca inicial não é informada, foi adotada uma abertura de  $4 \cdot 10^{-5}$ . O sistema está ilustrado na imagem 5.12.

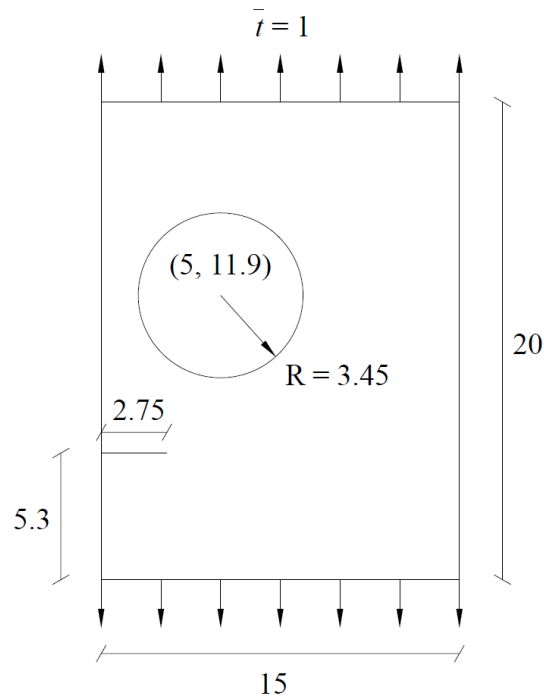


Figura 5.12: Geometria inicial de placa retangular com trinca de bordo e furo

Os resultados encontrados na literatura utilizam o método dos elementos finitos com diferentes abordagens na concepção da malha e na remodelagem a cada incremento, entretanto, todos utilizam o critério de tensão principal máxima para determinar a direção de propagação. O caminho de propagação de cada obra foi obtido por estimativa utilizando as ilustrações de resultados apresentadas pelos autores, reunido na figura 5.13.

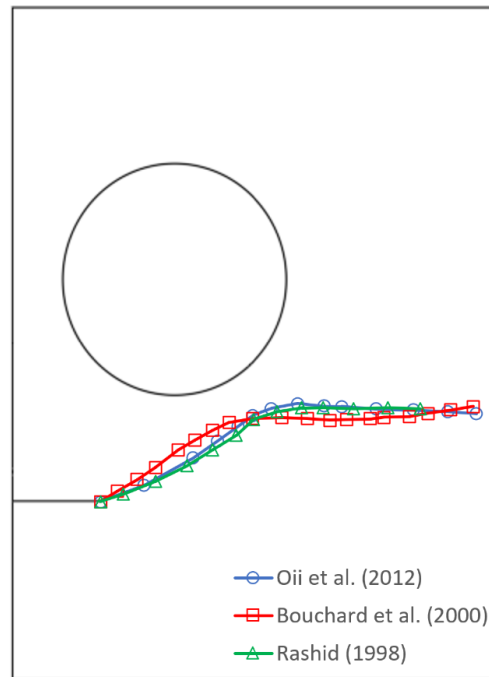


Figura 5.13: Comparação de resultados de propagação de trinca encontrados na literatura para placa com trinca de bordo e furo

Para o modelo de trinca de bordo com furo, foram utilizados 8 elementos para cada face da trinca, sem a aplicação de fator de proporção, exibindo elementos com comprimento de 0,34375. Nos bordos, foram utilizados 6 elementos nas faces superior e inferior, 8 elementos nas faces laterais e 12 elementos para furo. Para este modelo, foram utilizados elementos quadráticos,  $G = 37700$ ,  $\nu = 0,3$ , número de pontos de Gauss  $ng = 8$  e precisão numérica de 30 casas decimais.

Foram adotados dez passos de incremento para esta análise, atingindo uma distância de propagação similar aos autores apresentados para este modelo. Os resultados obtidos com o MCEC e a superposição dos resultados encontrados na literatura estão ilustrados na figura 5.14 e 5.15.

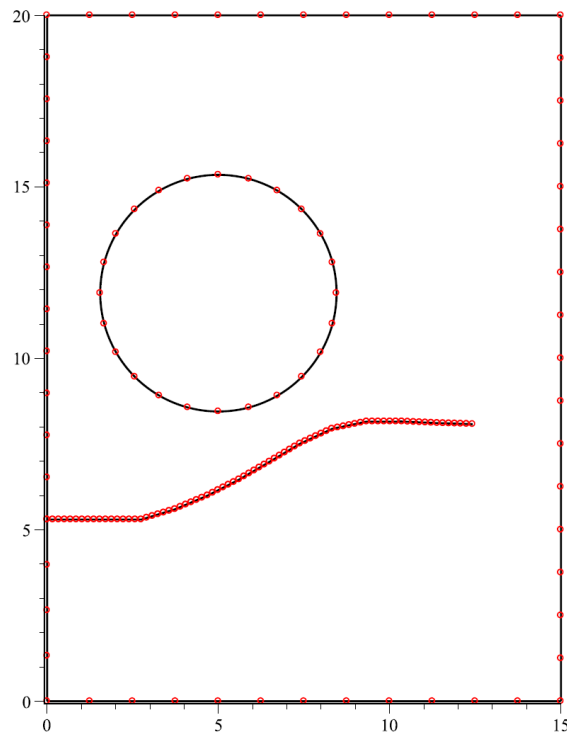


Figura 5.14: Resultados obtidos com MCEC utilizando uma placa com trinca de bordo e furo

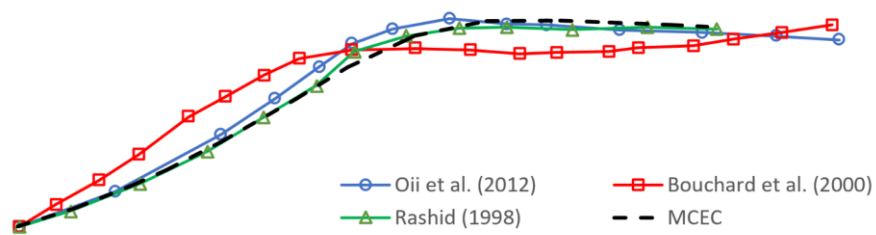


Figura 5.15: Superposição de resultados de propagação de trinca encontrados na literatura com os resultados obtidos com o MCEC para placa com trinca de bordo e furo

## 6 Considerações finais

Neste trabalho, foi desenvolvido um código para implementação de propagação de trincas em estruturas bidimensionais utilizando conceitos de mecânica da fratura no contexto do método consistente dos elementos de contorno, em que todas as avaliações numéricas, mesmo para elementos curvos, podem ser feitas com a precisão que se queira e sem grandes custos computacionais.

Foram reproduzidos exemplos encontrados na literatura e comparados os resultados, verificando que o caminho de propagação executado, utilizando-se o método proposto neste trabalho, apresenta uma variação mínima em relação às resoluções de diferentes estudos.

O uso do deslocamento de abertura de ponta de trinca para a medição do fator de intensidade de tensões apresentou um desempenho aceitável para a realização deste estudo, além de ser uma ferramenta bastante prática. Porém, para o nível de refinamento de malha aplicado nos modelos deste trabalho, outros métodos podem ser mais adequados, como a aplicação da integral J para o cálculo do FIT.

O processo de formação das matrizes H e G também pode ser simplificado para se obter um processamento mais rápido. A cada incremento, novas linhas e colunas são acrescentadas às matrizes, adicionando dados relativos aos novos elementos e alterando valores em trechos referentes a suas conectividades com elementos já existentes. Deste modo, grande parte dos dados originais das matrizes são mantidos.

É possível aplicar ao código desenvolvido neste trabalho dados de resistência do material utilizado, podendo-se aplicar informações de tensão de ruptura do material ou um valor crítico para o FIT, representado em diversas obras como  $K_c$  (WELLS, 1961; OOI, 2012; ANDERSON, 2017), verificando os valores a cada passo.

## 6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Com este trabalho, foi mostrado que é possível executar o processo de propagação de trincas utilizando a metodologia proposta, permitindo-se também a investigação e o desenvolvimento de ferramentas e funções com o intuito de aprimorar o processo. Dentre os tópicos sugeridos estão:

1. Obtenção de dados das matrizes  $H$  e  $G$  referentes apenas aos elementos adicionados no processo de propagação, verificando o valor e a localização dos novos dados e os elementos originais que devem ser mantidos, reduzindo o tempo de processamento do sistema, conforme já está esquematizado por Dumont (2021). Também já está esquematizado e implementado computacionalmente (Dumont, 2021) um algoritmo para solução dos sucessivos problemas de álgebra linear em termos dos resultados anteriores e no contexto de “matrizes vizinhas”.
2. Implementar a integral  $J$  para avaliação do modo misto de carregamento, como já está sendo desenvolvido no contexto da tese de doutorado de Amaral Neto (2023).
3. Aplicação do processo de propagação de trinca para modelos tridimensionais, dentro de um programa já desenvolvido na PUC-Rio que permite integrações exatas para elementos triangulares de três nós (DUMONT e KURZ, 2019; KURZ, 2021; DUMONT e KURZ, 2021).
4. Passar o código atual, desenvolvido por simplicidade e como uma mera ferramenta de estudo em Maple, para a linguagem de programação Fortran, Python ou C++.
5. Empregar a técnica de *fast multipole* para reduzir o esforço computacional na obtenção dos resultados finais das matrizes para problemas com centenas de milhares ou milhões de graus de liberdade. A aplicação em termos da técnica de *fast multipole* leva à avaliação direta de produtos matriz-vetor, o que elimina a necessidade de manutenção de elementos pré-calculados das matrizes, conforme se menciona no item 1 acima. Este método, conforme já desenvolvido na PUC-Rio, apresenta vantagens

computacionais para problemas a partir de poucas centenas de graus de liberdade (DUMONT e PEIXOTO, 2016; PEIXOTO, 2018; FLOREZ TTITO, 2020; DUMONT e SANTANA, 2021; SANTANA, 2022).

## 7 Referencias bibliográficas

AMARAL NETO, O. A.. **Aplicação consistente do método dos elementos de contorno a problemas de mecânica da fratura**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

AMARAL NETO, O. A.. **General fracture mechanics problems analyzed with the consistent boundary element method**. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. (Em progresso) 2023.

ANDERSON, T. L.. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. 4. ed. Boca Raton: CRC Press, 2017.

BETTI, E.. **Theoria dell' elasticita**. Nuovo Cimento, p. 7-10, 1872.

BOUCHARD, P. O. et al. **Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique**. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 189, n. 3, p. 723-742, 2000.

BREBBIA, C. A.. **The boundary element method for engineers**. Pentech Press, Plymouth, 1978.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. E.; WROBEL, L. C.. **Boundary Element Techniques**. New York, Springer, Berlin, 1984.

CRUSE, T. A.; RIZZO, F. J. **A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, I**. Journal of mathematical analysis and applications, v. 22, n. 1, p. 244-259, 1968.

CRUSE, T. A.. **Numerical solutions in three dimensional elastostatics**. International journal of solids and structures, v. 5, n. 12, p. 1259-1274, 1969.

DUGDALE, D. S.. **Yielding of steel sheets containing slits**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v. 8, n. 2, p. 100-104, 1960.

DUMONT, N. A.. **On the efficient numerical evaluation of integrals with complex singularity poles**. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 13, n. 2, p. 155-168, 1994.

DUMONT, N. A.. **An assessment of the spectral properties of the matrix G used in the boundary element methods**. Computational Mechanics, v. 22, n. 1, p. 32-41, 1998.

DUMONT, N. A.; NORONHA, M. A. M.. **A simple, accurate scheme for the numerical evaluation of integrals with complex singularity poles**. Computational mechanics, v. 22, n. 1, p. 42-49, 1998.

DUMONT, N. A.. **The boundary element method revisited**. Boundary elements and other mesh reduction methods XXXII, v. 50, p. 227-238, 2010.

DUMONT, N. A.; PEIXOTO, H. F. C. **A fast-multipole unified technique for the analysis of potential problems with the boundary element methods**.



Proceedings of the Indian National Science Academy, v. 82, n. 2, p. 289-299, 2016.

DUMONT, N. A.; KURZ, T. G.. **Analytical 3D boundary element implementation of flat triangle and quadrilateral elements for potential and linear elasticity problems.** Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods, v. 42, p. 1-11, 2019.

DUMONT, N. A.; AMARAL NETO, O. A. **Machine-precise evaluation of stress intensity factors with the consistent boundary element method.** International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements, v. 9, n. 2, p. 141-152, 2021a.

DUMONT, N. A.; AMARAL NETO, O. A. **Machine-precise evaluation with the consistent boundary element method.** In: Proceedings CILAMCE-PANACM 2021 - XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and III Pan-American Congress on Computational Mechanics ON-LINE, Rio de Janeiro, Brasil, p.7, 09-12 de novembro de 2021b.

DUMONT, N. A.; KURZ, T. G.. **Analytical evaluation of all terms required in 3D potential and elastostatics boundary element implementations using linear triangle elements.** In: Proceedings CILAMCE-PANACM 2021 - XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and III Pan-American Congress on Computational Mechanics ON-LINE, Rio de Janeiro, Brasil, p.7, 09-12 de novembro de 2021.

DUMONT, N. A.; SANTANA, H. M. S.. **Boundary element analysis of 3D linear potential problems combining fast multipole expansion and machine-precision numerical integration.** In: Proceedings CILAMCE-PANACM 2021 - XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and III Pan-American Congress on Computational Mechanics ON-LINE, Rio de Janeiro, Brasil, p.7, 09-12 de novembro de 2021.

DUMONT, N. A.. **Crack configurations with parallel faces.** Working paper, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro, 2021.

ERDOGAN, F.; SIH, G. C.. **On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear.** ASME, J. Basic Eng, v. 85, p. 519-525, 1963.

FREDHOLM, Ivar. **Sur une classe d'équations fonctionnelles.** Acta mathematica, v. 27, p. 365-390, 1903.

GREEN, G.. **An Essay on the Application on Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.** Notingham, 1828.

GRIFFITH, A. A.. **The phenomena of rupture and flow in solids.** Philosophical Transactions. Series A, v. 221, p. 163, 1920.

RABELO, G. O., WROBEL, L. C., DUMONT, N. A.. **Consistent boundary element method for crack propagation problems.** CILAMCE-PANACM 2021 ONLINE - XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and III Pan American Congress on Computational Mechanics ON-LINE, Rio de Janeiro, Brasil, p. 7, 09-12 de novembro de 2021.

INGLIS, C. E.. **Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners.** Transactions of the Institute of Naval Architects, v. 55, p. 219-241, 1913.

IRWIN, G. R.. **Fracture Dynamics.** Fracturing of Metals, American Society for Metals, Cleveland, p. 147-166, 1948.

IRWIN, G. R.. **Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys.** Sagamore Research Conference Proceedings, v. 2, p. 289-305, 1956.

IRWIN, G. R.. **Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.** Journal of Applied Mechanics, v.24, p. 361-364, 1957.

JASWON, M. A.. **Integral equation methods in potential theory, I.** Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, v. 275, n. 1360, p. 23-32, 1963.

KELVIN, W. T.. **Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid.** Cambridge and Dublin Mathematical Journal, v. 3, p. 87-89, 1848.

KUPRADZE, V. D.. **Potential methods in the theory of elasticity.** Israel Program for Scientific Translations, 1965.

KURZ, T. G.. **Avaliação analítica das integrais de elementos de contorno de elementos planos para problemas tridimensionais de potencial e elasticidade.** Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

LACERDA, L. A.; WROBEL, L. C.. **Dual boundary element method for axisymmetric crack analysis.** International Journal of Fracture, v. 113, n. 3, p. 267-284, 2002.

LACHAT, J. C.. **A further development of the boundary integral technique for elastostatics.** Tese de Doutorado, University of Southampton. 1975.

LACHAT, J. C.; WATSON, J.O.. **Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 10, n. 5, p. 991-1005, 1976.

LEONEL, E. D.; VENTURINI, W. S.. **Multiple random crack propagation using a boundary element formulation.** Engineering Fracture Mechanics, v. 78, n. 6, p. 1077-1090, 2011.

MAI, Y. W.; LAWN, B. R.. **Crack stability and toughness characteristics in brittle materials.** Annual Review of Materials Science, v. 16, n. 1, p. 415-439, 1986.

MALEKAN, M.. **Crack propagation modeling in plane structures using two-scale generalized/extended finite element method.** 2017. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017.

MASSONNET, C. E. **Numerical use of integral procedures.** Stress analysis, p. 198-235, Wiley, London, 1965.

MIKHLIN, S. G., **Integral Equations,** Pergamon Press, London, 1957.

MURAKAMI, Y.. **Stress Intensity Factors Handbook.** Pergamon Press, 1987.

MUSKHELISHVILI, N. I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.** Noordhoff, Groningen, 1953.

OOI, E. T. et al. **Automatic modelling of cohesive crack propagation in concrete using polygon scaled boundary finite elements.** Engineering Fracture Mechanics, v. 93, p. 13-33, 2012.

PEIXOTO, H. de F. C.. **A Fast Multipole Method for High Order Boundary Elements**. 2018. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P.. **Dual boundary element incremental analysis of crack propagation**. Computers & Structures, v. 46, n. 2, p. 237-247, 1993.

RASHID, M. M.. **The arbitrary local mesh replacement method: an alternative to remeshing for crack propagation analysis**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 154, n. 1-2, p. 133-150, 1998.

RICE, J. R. **A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks**. Journal of Applied Mechanics, v. 35, p. 379-386, 1968.

RIZZO, F. J.. **An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics**. Quarterly of applied mathematics, v. 25, n. 1, p. 83-95, 1967.

SANTANA, H. M. S.. **Implementação de uma técnica consistente de fast multipole para problemas tridimensionais de potencial**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

SAOUMA, V. E.. Lecture Notes on Fracture Mechanics, CVEN-6831, University of Colorado, 2000.

SOMIGLIANA, C.. **Sopra l'equilibrio di' un corpo elastico isotropo**. Nuovo Cimento, p. 17-20, 1885.

SYMM, G. T.. **Integral equation methods in potential theory, II**. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, v. 275, n. 1360, p. 33-46, 1963.

TTITO, A. R. F.. **Desenvolvimento de técnica de fast multipole para problemas tridimensionais de potencial**. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

WELLS, A. A.. **The condition of fast fracture in aluminum alloys with particular reference to comet failures**. British Welding Research Association Report, 1955.

WELLS, A. A.. **Unstable crack propagation in metals: Cleavage and fast fracture**. Proceedings of the crack propagation symposium, v. 1, n. 84, 1961.

WESTERGAARD, H. M.. **Bearing pressures and cracks**. Journal of Applied Mechanics, v.6, p. 49-53, 1939.

WILLIAMS, M. L.. **On the stress distribution at the base of a stationary crack**. Journal of Applied Mechanics, v. 24, p. 109-114, 1957.

WINNE, D. H.; WUNDT, B. M.. **Application of the Griffith-Irwin theory of crack propagation to the bursting behavior of disks, including analytical and experimental studies**. Transactions of the American society of mechanical engineers, v. 80, n. 8, p. 1643-1655, 1958.