6
Resultados da Análise Não-Linear

Neste capítulo estuda-se a influência dos diversos parâmetros do sistema coluna-fundação nas vibrações livres e forçadas, com ou sem amortecimento, não-lineares.

6.1.
Relação Freqüência e Amplitude (Vibração Livre)

Neste item é tratado o caso de vibração livre, onde as vibrações são provocadas somente pela energia potencial e pela energia cinética presentes no sistema. O caso de vibração forçada, com ou sem amortecimento, será tratado em um item posterior.

Na análise paramétrica, assim como na análise linear, são adotados os mesmos parâmetros adimensionais. Para o parâmetro da base elástica K, será dado destaque aos valores de 500 e de 20.000, que podem ser considerados, respectivamente, como valores de rigidez baixa e alta.

Aplicando o método de Ritz como descrito no capítulo anterior, gera-se uma equação diferencial de 2ª ordem não-linear, do tipo:

$$\ddot{c} + ac + bc^3 + dc^5 = 0 \tag{6.1}$$

onde a, b e d são constantes arbitrárias.

Considera-se para a situação de vibração livre a expressão (5.2), logo, a expressão de $c(t)$ tem a seguinte forma:

$$c(t) = A_1 sen(\Omega t) \tag{6.2}$$

A partir da substituição da equação (6.2) na equação diferencial (6.1) e empregando um dos métodos aproximados indicados, pode-se obter a seguinte solução analítica relacionando freqüência e amplitude de vibração (A_1):

$$\Omega^2(A_1) = a + \frac{3bA_1^{\;2}}{4} + \frac{5dA_1^{\;4}}{8} \tag{6.3}$$

ou, na forma mais comumente encontrada, com a amplitude em função da freqüência:

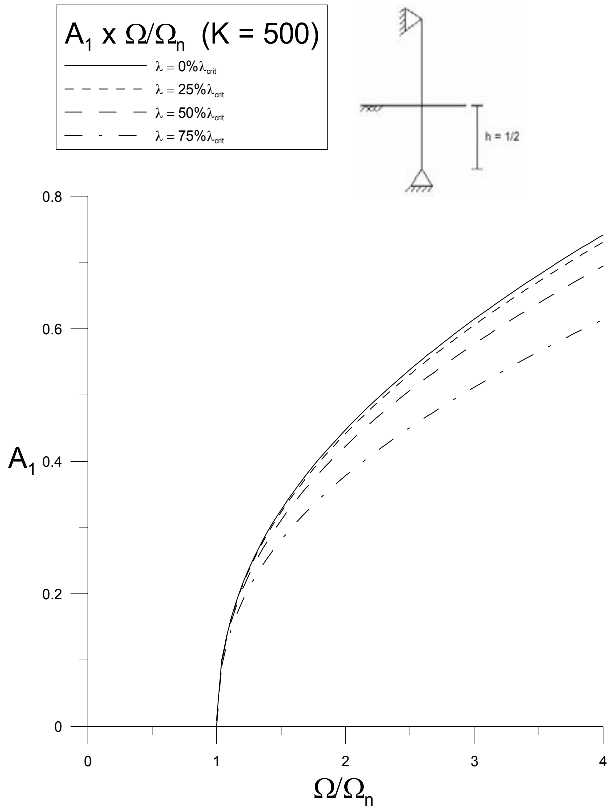
$$A_1 = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{-5d\left(3b - \sqrt{9b^2 + 40d\Omega^2 - 40da}\right)}}{d} \tag{6.4}$$

Com o procedimento citado acima, variou-se a porcentagem da carga crítica aplicada no topo da estaca e obteve-se, para dois valores distintos do parâmetro da base elástica, a Figura 6.1, que representa a variação da amplitude A_1 pela razão Ω/Ω_n, onde Ω_n é a menor freqüência natural da coluna para cada nível de carga.

Verifica-se, após a análise da Figura 6.1, que em todos os casos a freqüência cresce à medida que cresce a amplitude, comportamento típico de sistemas estruturais não-lineares com ganho de rigidez (*hardening*). Isto significa que a rigidez efetiva do sistema cresce com o aumento da amplitude de vibração. Observa-se, também, que o grau de não-linearidade cresce com o nível de carregamento estático, o que faz com que menores cargas gerem maiores amplitudes para uma mesma freqüência. A seguir, verifica-se que a influência do parâmetro K na relação entre freqüência e amplitude, quando se varia o carregamento, é muito pequena, pois se obteve gráficos que pouco diferem a cada nível de carregamento.

Outro aspecto que pode ser estudado refere-se à influência da fundação na obtenção das freqüências e das amplitudes. A Figura 6.2 apresenta a variação da amplitude A_1 em função da relação Ω/Ω_n para profundidades diferentes da base elástica. Nota-se que o grau de não-linearidade é bastante afetado pela profundidade da fundação, crescendo à medida que h cresce. Entretanto, quando a coluna se aproxima do valor limite h = 1,0 (coluna totalmente enterrada), há uma súbita mudança de comportamento, tornando-se a relação entre freqüência e amplitude praticamente linear.

Ressalta-se aqui a incapacidade de se plotar os valores referentes a h = 1,0 para K = 20.000 já que neste caso a freqüência se torna praticamente independente da amplitude.



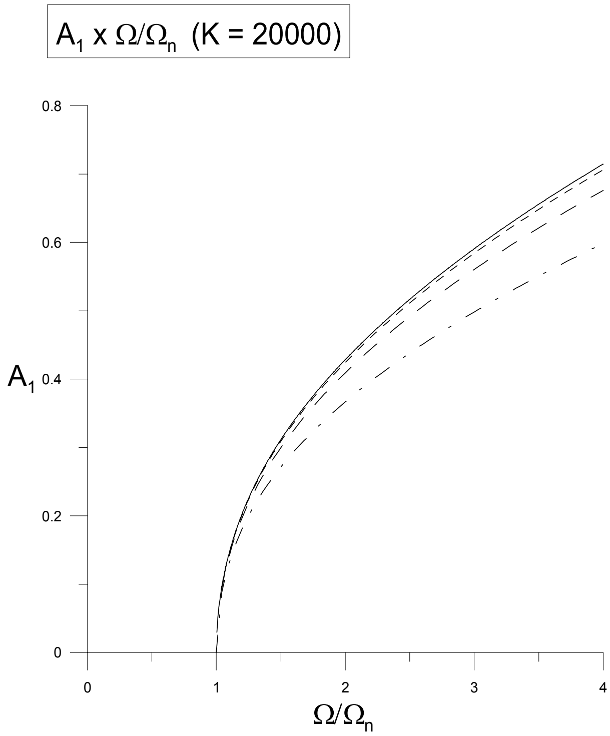


Figura 6.1 – Variação da amplitude A_1 da relação Ω/Ω_n para os casos em que K = 500 e K = 20.000 com carregamento variável.

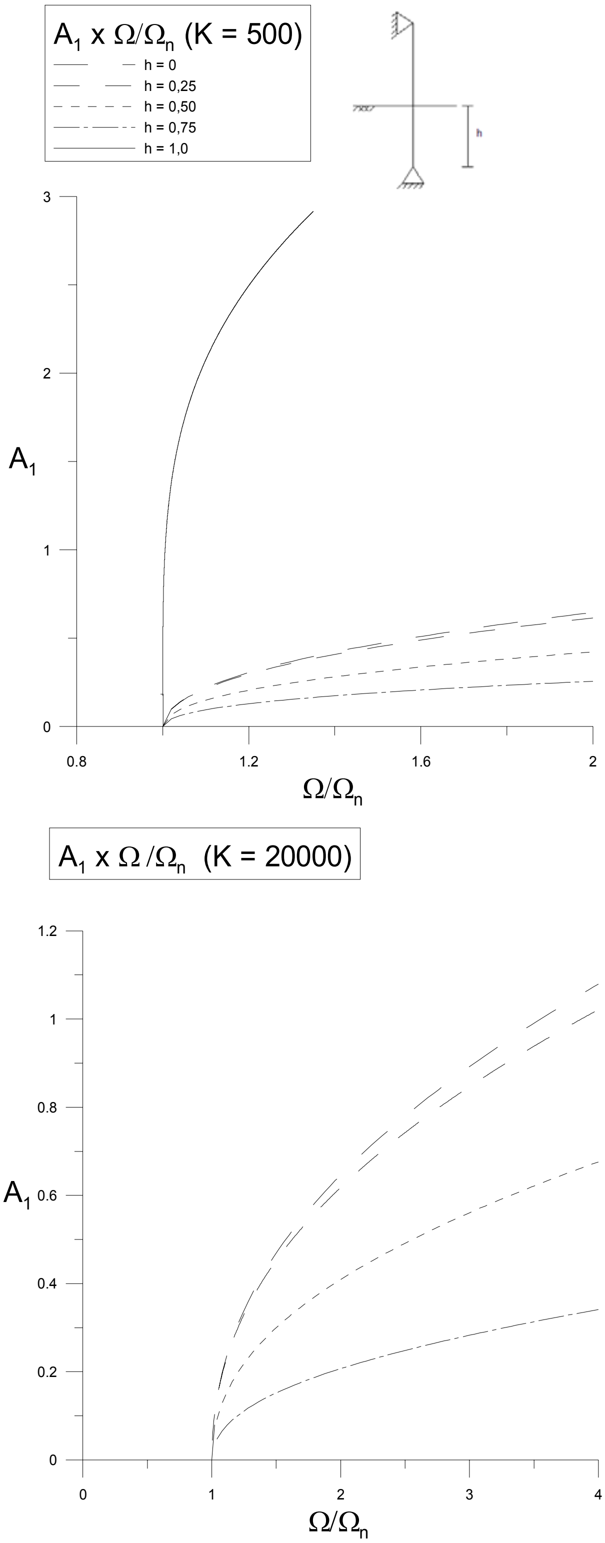


Figura 6.2 – Variação da amplitude A_1 pela relação Ω/Ω_n para os casos em que K = 500 e K = 20.000 com a profundidade variável.

6.2. Vibração Forçada – Ressonância Não-Linear e Bifurcações

Para a situação forçada sem amortecimento, o estudo da relação freqüência-amplitude é realizado acrescentando-se ao funcional de energia não-linear o trabalho da força harmônica, representado pela equação (2.26). Efetuando-se todas as operações, obtém-se uma equação de movimento do tipo:

$$\ddot{c} + ac + bc^3 + dc^5 = A_0 sen(\Omega t) \tag{6.5}$$

onde a, b e d são constantes e A_0 é a amplitude da excitação

Admite-se que a expressão (5.2) tem a seguinte forma para a vibração forçada sem amortecimento:

$$c(t) = A_1 sen(\Omega t) \tag{6.6}$$

onde A_1 é a amplitude de oscilação.

Tem-se mais uma vez, ao se aplicar os métodos aproximados de resolução da equação diferencial não-linear, uma expressão analítica para a relação amplitude - freqüência:

$$\Omega^2(A_1) = a + \frac{3bA_1^2}{4} + \frac{5dA_1^4}{8} + \frac{A_0}{A_1} \tag{6.7}$$

A Figura 6.3 mostra a influência da amplitude A_1 no cálculo das freqüências para $\lambda = 50\%\lambda_{crit}$, $h = ½$ e $K = 500$.

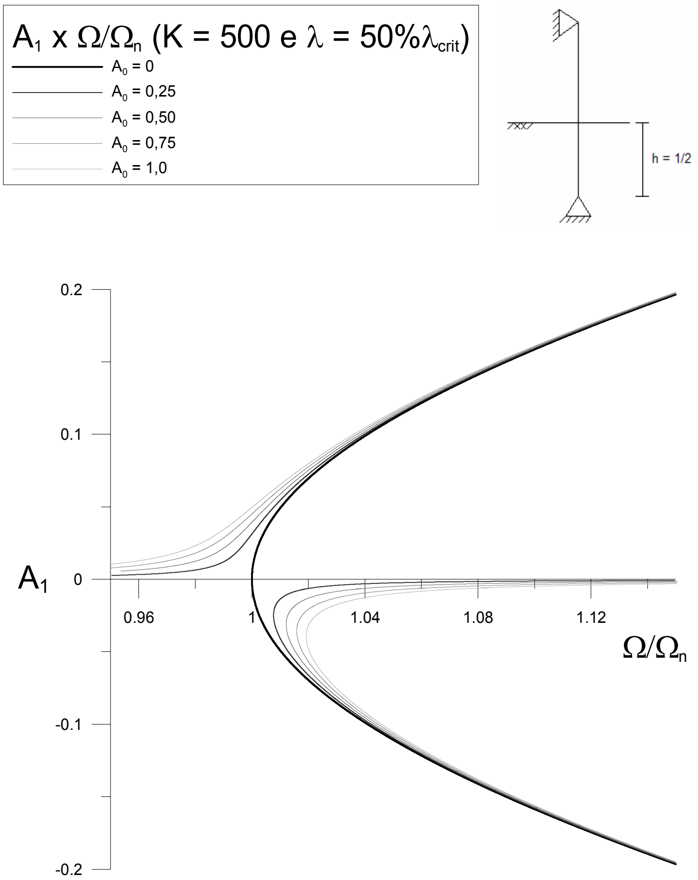


Figura 6.3 – Relação Ω/Ω_n pela amplitude A_1 para cinco valores de A_0 e K = 500.

As duas curvas obtidas, para cada valor da amplitude da excitação A_o, correspondem aos dois ramos da curva de ressonância não linear. Para o trecho em que a amplitude é positiva, tem-se que a vibração da coluna encontra-se em fase com a excitação e para o trecho de amplitude negativa tem-se que a excitação e a resposta da coluna estão fora de fase. Nota-se que a curva de ressonância dobra-se para a direita, em concordância com a curva obtida para as vibrações livres, aparecendo uma região em que pode haver mais de uma solução para a mesma freqüência de excitação. Este comportamento é diferente do caso linear, onde há unicidade de solução. Outra diferença é que no caso linear quando Ω/Ω_n = 1, a amplitude de vibração é infinita. No caso não-linear a amplitude é finita e função do grau de não-linearidade do sistema.

A Figura 6.4 mostra a variação do módulo da amplitude A_1 em função de Ω/Ω_n. para a coluna semi-enterrada com $K = 500$, $h = ½$ e $\lambda = 0{,}5\lambda_{crit}$. Nota-se que ao se decrescer a freqüência atinge-se para um valor um pouco superior a Ω/Ω_n = 1, onde há um ponto com tangente vertical na curva de ressonância (ponto limite de bifurcação, conhecido na literatura como bifurcação nó-sela), um salto com um crescimento brusco da amplitude e vibração.

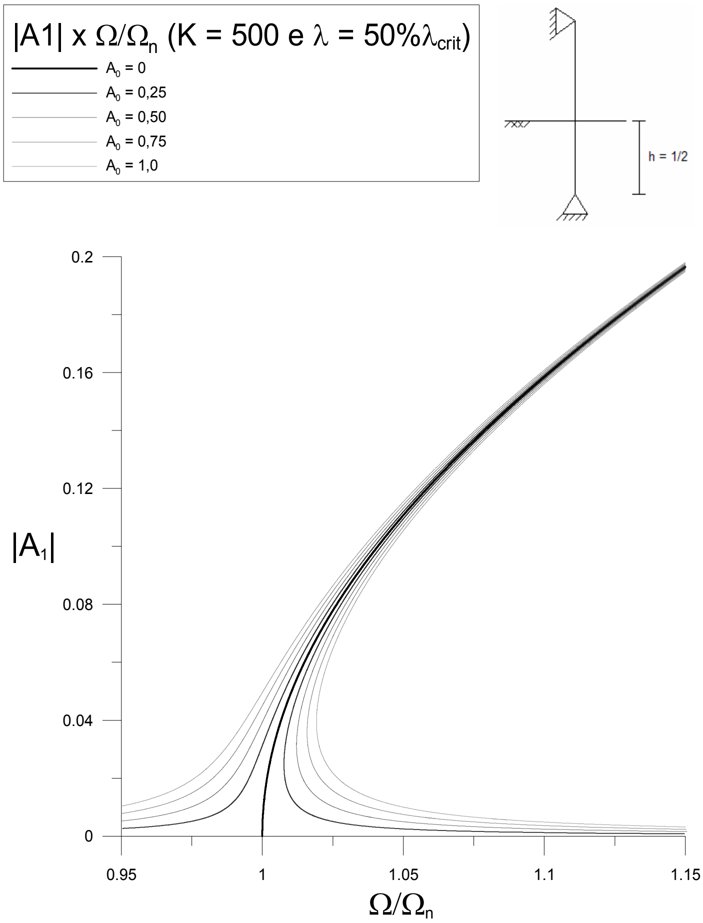


Figura 6.4 – Fenômeno do salto para a coluna semi-enterrada submetida à vibração forçada sem amortecimento.

No caso não-amortecido, portanto, as curvas amplitude-frequencia aproximam-se da curva central relativa ao caso de vibração livre (mais escura na Figura 6.4) assintoticamente. Este também é o caso para o sistema linear onde a curva central é a reta vertical para $\Omega/\Omega_n = 1$.

Considerando agora a presença do amortecimento viscoso, retira-se do sistema, portanto, uma parcela de energia que é proporcional à velocidade. Essa parcela de energia é explicitada pela equação (2.23) e mais uma vez se considera o funcional de energia da equação (2.27).

Desenvolvendo o funcional de energia seguindo as técnicas de cálculo variacional, obtém-se uma equação de movimento não linear da forma:

$$\ddot{c} = f(c, \dot{c}, t) \tag{6.8}$$

onde $c = c(t)$ e t é a variável independente tempo.

Buscando exemplificar a equação diferencial descrita, apresenta-se a equação (6.9) para o caso prático em que se tem a estaca biapoiada, com a fundação de rigidez K = 500 até a metade de sua altura e um carregamento axial equivalente à metade da carga crítica.

$$43{,}66M^4 \ddot{c}(t) + 616{,}94c(t) + 6871{,}50c(t)^3 + 46421{,}95c(t)^5 = \\ -0{,}45\beta_1 \dot{c}(t) + 0{,}63A_0 sen(\Omega t) \tag{6.9}$$

onde $M^4 = \dfrac{\rho A L^4}{\pi^4 EI}$.

A partir da equação (6.9) aplica-se o método de Galerkin ou o método do Balanço Harmônico, considerando a expressão $c(t)$ como:

$$c(t) = A_1 sen(\Omega t) + A_2 \cos(\Omega t) \tag{6.10}$$

onde A_1 e A_2 são as amplitudes das funções seno e co-seno, e Ω é a freqüência de vibração da excitação.

Na literatura costuma-se encontrar a equação (6.10) escrita na forma:

$$c(t) = A sen(\Omega t + \phi) \tag{6.11}$$

onde A é a amplitude de oscilação e ϕ é o ângulo de fase do deslocamento.

Desta forma, obtém-se um sistema com duas equações e três incógnitas (A_1, A_2 e Ω) que será resolvido pelo método de Newton-Rapson.

A primeira análise se baseará em um valor específico para o parâmetro de amortecimento β_l e a partir deste varia-se a profundidade h e o parâmetro de carregamento λ. Considerando o fator de amortecimento $\xi = 0{,}01$, que leva a $\beta_l = 0{,}01\beta_{l\ crit}$, tem-se a Figura 6.5, que mostra a variação das amplitudes A_1 e A_2 em função da razão Ω/Ω_n para quatro profundidades de fundação diferentes, considerando K = 500.

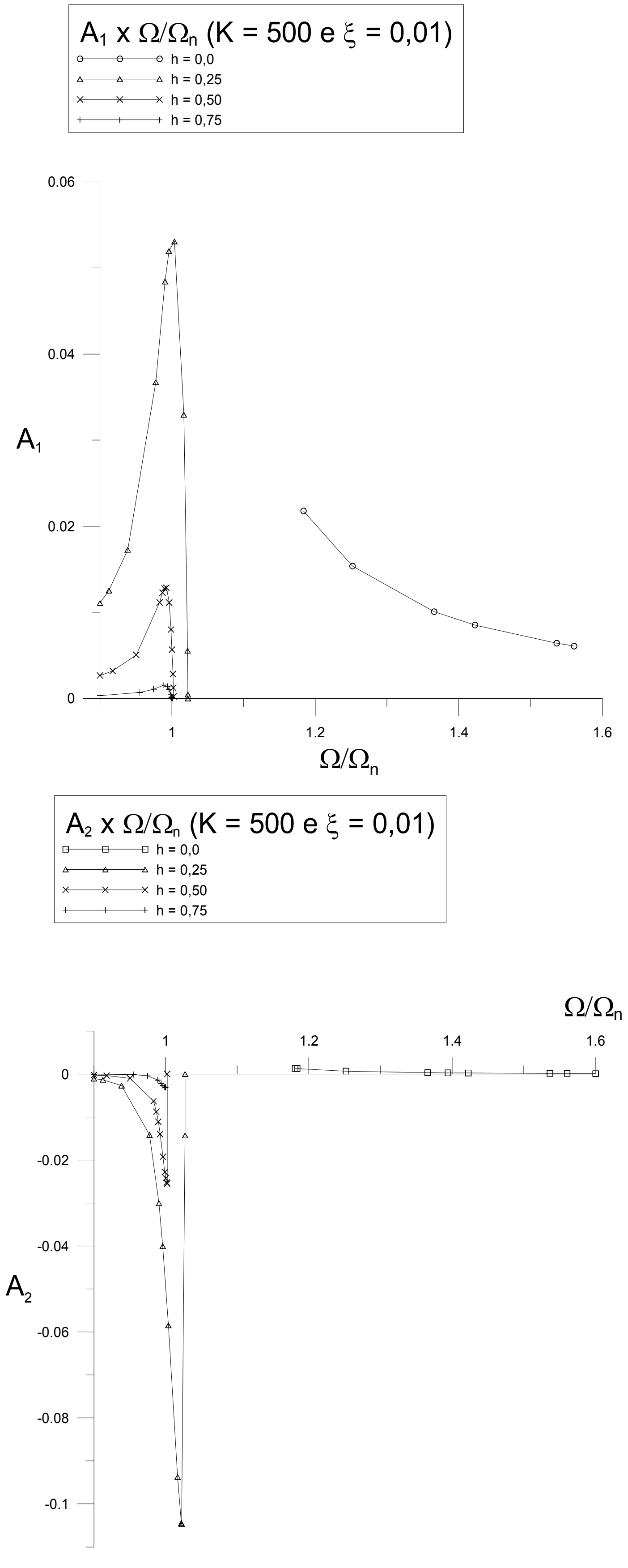


Figura 6.5 – Variação das amplitudes A_1 e A_2 versus a razão Ω/Ω_n para três profundidades de fundação, nos casos em que K = 500.

Para o gráfico em que aparece apenas A_1 são apresentadas apenas as amplitudes positivas. Para os valores em que a profundidade é diferente de zero a amplitude começa positiva e assim chega até aproximadamente $\Omega/\Omega_n = 1$. Quando a profundidade da fundação é igual a zero tem-se que os valores da amplitude A_1 começam com grandes valores negativos e passam para o quadrante positivo para $\Omega/\Omega_n > 1$.

Segundo Thomson (1978), a análise das vibrações do sistema fica mais clara quando se analisa a amplitude A dada pela seguinte expressão:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \tag{6.12}$$

Desta forma a Figura 6.6 mostra a relação entre A e o parâmetro de freqüência normalizado.

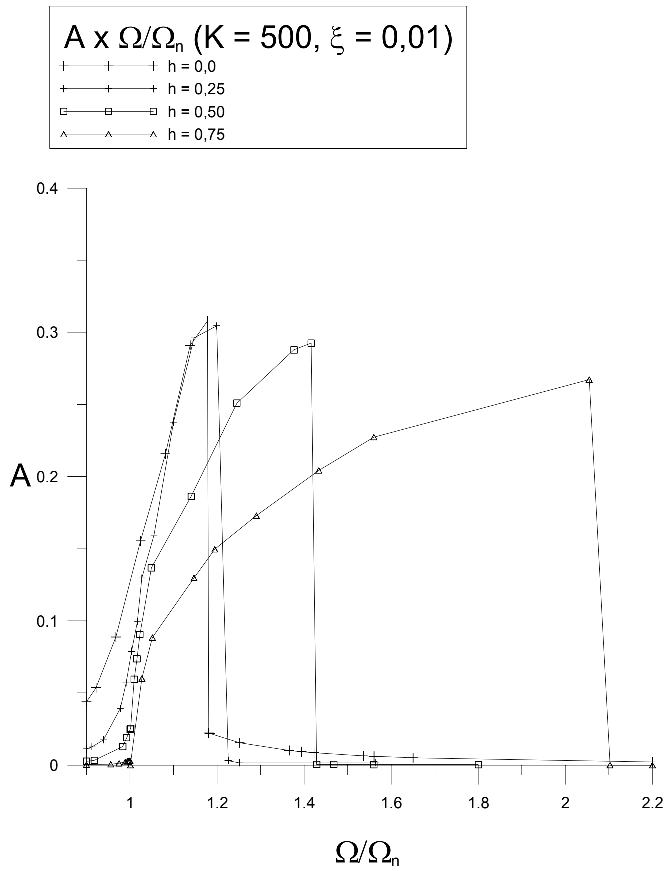


Figura 6.6 – Variação das amplitudes *A* versus a razão Ω/Ω_n.

A partir da Figura 6.6, pode-se ver claramente o fenômeno do salto que está presente também na situação forçada amortecida, com o amortecimento tendendo a reduzir o tamanho da região instável, criando uma espécie de "pico" na curva. Este pico corresponde a um segundo ponto de bifurcação nó-sela que surge quando se considera o efeito do amortecimento. Este segundo salto apresenta uma maior amplitude e ocorre quando a freqüência cresce, passando a estrutura de uma oscilação de grande amplitude para uma oscilação de pequena amplitude.

Outro aspecto a ser analisado é a influência do carregamento axial. A Figura 6.7 mostra a variação das duas amplitudes, para determinadas porcentagens da carga crítica.

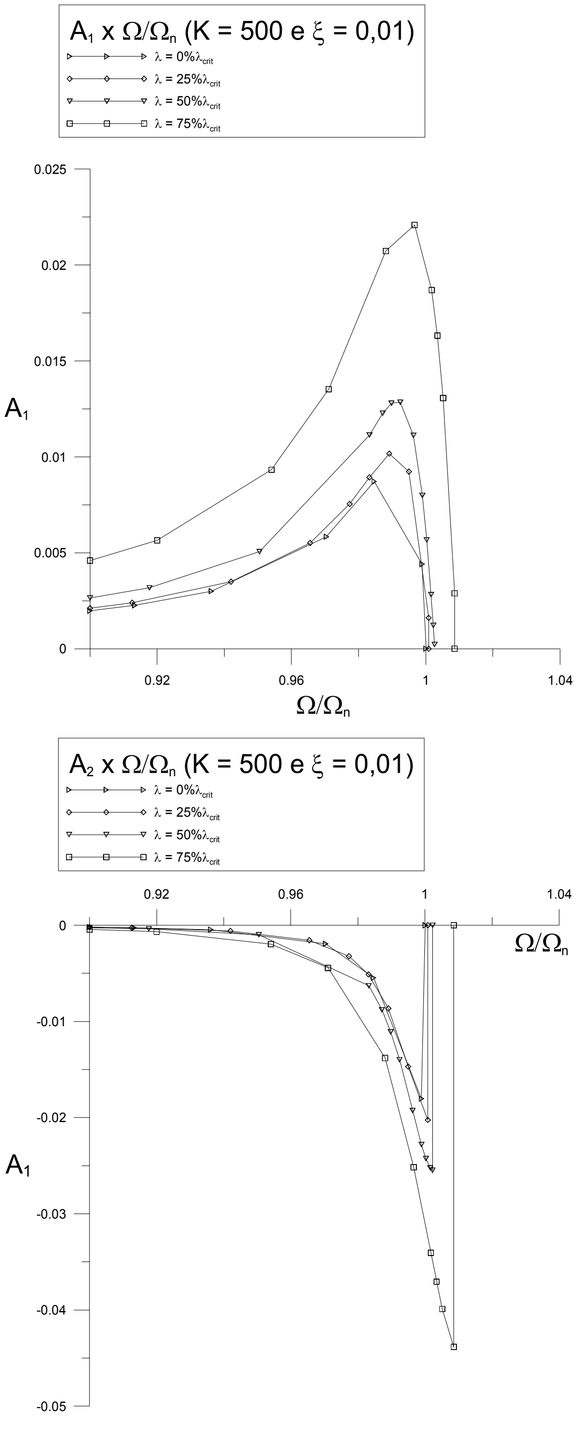


Figura 6.7 – Comportamento das amplitudes A_1 e A_2 da estaca, para determinadas porcentagens da carga crítica aplicadas.

A Figura 6.8, abaixo, complementa a análise do comportamento da estaca ao mostrar a variação de *A*, para duas situações de carregamento, destacando o fenômeno do salto.

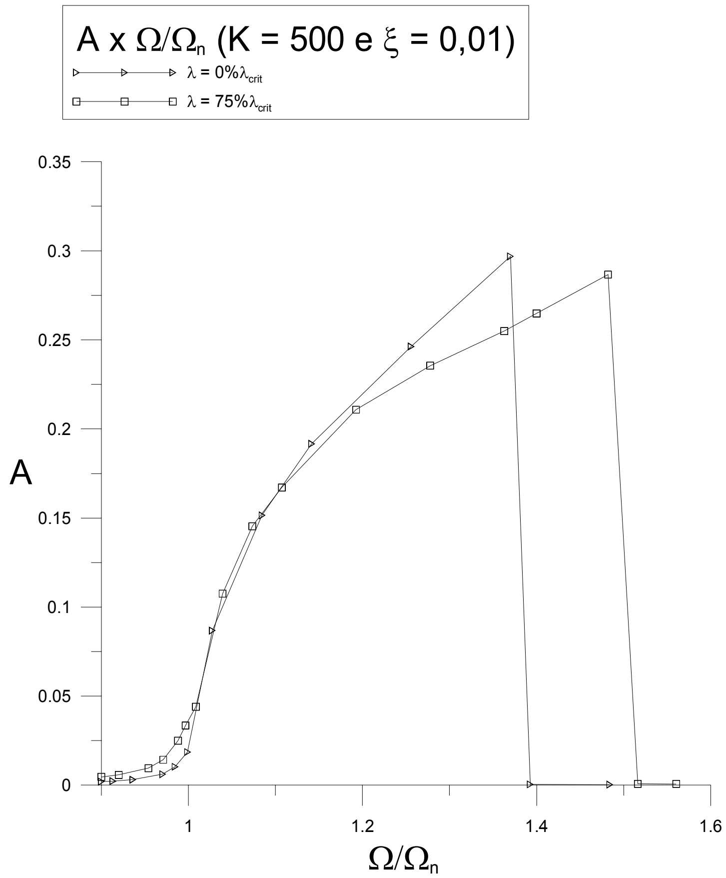


Figura 6.8 – Comportamento da amplitude A da estaca, para duas parcelas da carga crítica aplicadas.

Outro aspecto que pode ser observado refere-se ao estudo da influência dos valores do fator de amortecimento ξ na amplitude de vibração da estaca. Analisando o comportamento da estaca para, por exemplo, três valores de amortecimento que podem ser encontrados na prática (ξ = 0,01, 0,05 e 0,10), verifica-se, como esperado, que o aumento na taxa de amortecimento da estrutura leva a uma diminuição das amplitudes obtidas para ambas as amplitudes A_1 e A_2. A Figura 6.9, a seguir, mostra os gráficos de A_1 x Ω/Ω_n e A_2 x Ω/Ω_n, onde se pode comparar o comportamento destas duas amplitudes da coluna semi-enterrada.

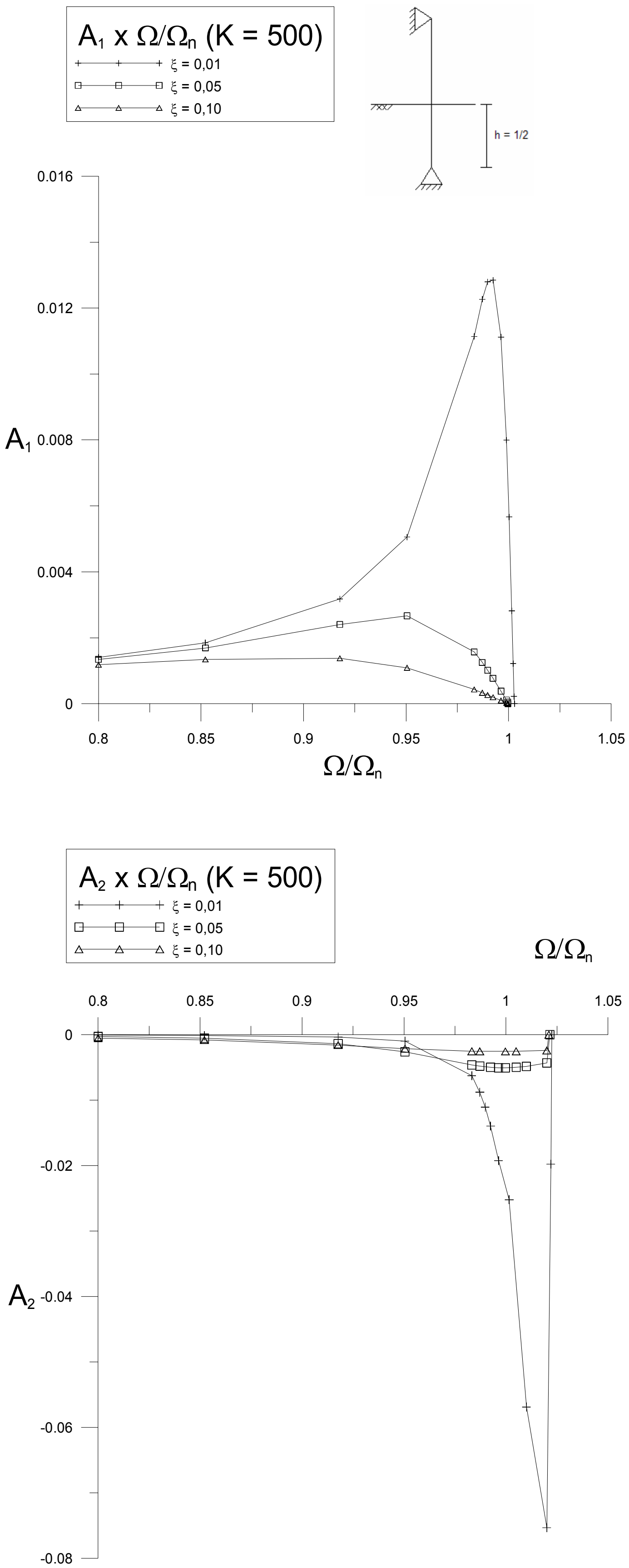


Figura 6.9 – Relação das amplitudes A_1 e A_2 versus o parâmetro de freqüência normalizado para fatores de amortecimento diferenciados.

A partir da Figura 6.9, pode-se observar que à medida que o amortecimento aumenta, decresce a amplitude do salto, podendo inclusive desaparecer os pontos de bifurcação nó-sela para valores elevados de ξ. Isto ressalta o efeito benéfico do amortecimento no regime não-linear.