

5

Análise Não-Linear pelos Métodos de Galerkin-Urabe e Balanço Harmônico

A expressão (2.27), obtida no Capítulo 2 para a função de Lagrange, é utilizada nessa seção para a obtenção das equações diferenciais de movimento utilizadas na análise não-linear da coluna.

A função de Lagrange (2.27) é da forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L L_g(w, w_{,x}, w_{,xx}, w_{,t}, x, t) dx dt \quad (5.1)$$

Objetiva-se encontrar uma função $w(x,t)$ para os deslocamentos transversais. Entretanto, as ferramentas do cálculo variacional não fornecem esta função diretamente, mas sim a equação diferencial não-linear que a função deve satisfazer. A equação diferencial não-linear encontrada não tem solução analítica e, portanto, deve-se procurar uma metodologia que forneça uma solução aproximada. Para isto, utiliza-se neste capítulo o método de Ritz para discretizar a coluna no espaço e, a seguir, obtém-se, usando-se as ferramentas do cálculo variacional, as equações de movimento que, por sua vez, são resolvidas pelo método de Galerkin-Urabe, como pode ser visto em Urabe (1966) e Bouc (1972), ou pelo método do Balanço Harmônico, de acordo com Leipholz (1970) e Meirovitch (1975).

O método de Ritz, como descrito anteriormente no capítulo 3, consiste em substituir no funcional de energia uma função de aproximação para a deflexão da coluna, usualmente na forma de séries que devem respeitar as condições de contorno forçadas do problema,

$$f_n = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \quad (5.2)$$

onde a_j são constantes que multiplicam as funções ϕ_j e n é o número de coordenadas adotadas para a descrição do campo de deslocamentos com a precisão necessária.

Supondo-se uma coluna esbelta enterrada até uma certa altura H , pode-se dividir esta em duas colunas, uma enterrada e outra desenterrada. Logo, pode-se escrever um funcional para cada sub-coluna. Para a sub-coluna desenterrada, tem-se um funcional com a expressão para os deslocamentos transversais $w_1(x,t)$ e para a sub-coluna enterrada, tem-se um funcional com a expressão para os deslocamentos transversais $w_2(x,t)$. A soma desses funcionais em um funcional único vai permitir uma discretização conveniente do funcional em questão.

Usando-se separação de variáveis, o campo de deslocamentos da coluna pode ser descrito pela seguinte função definida por partes

$$w(x,t) = \begin{cases} w_1(x,t) = \sum_{j=1}^n w_{1j}(x)c_j(t); & 0 \leq x \leq H \\ w_2(x,t) = \sum_{j=1}^n w_{2j}(x)c_j(t); & H \leq x \leq L \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $w_{1j}(x)$ e $w_{2j}(x)$ são as expressões para os deslocamentos, em função do eixo x , e $c_j(t)$ é a amplitude do deslocamento em função do tempo, que se quer efetivamente determinar.

A escolha adequada das funções de interpolação é um passo essencial nesse tipo de problema. Aqui se utiliza para $w_{ij}(x)$ as soluções analíticas obtidas no capítulo 3 para os modos de vibração da coluna. Assim são atendidas, modo a modo, todas as condições de contorno e continuidade. Com esta escolha consegue-se obter com um número pequeno de modos uma solução bastante precisa para o problema não-linear.

Substituindo as equações (5.3), na função de Lagrange e integrando ao longo do espaço, obtém-se um funcional da forma

$$\int_{t_1}^{t_2} F(c_j, \dot{c}_j, t) dt; \quad j = 1, n \quad (5.4)$$

onde $\dot{c}(t)$ é a derivada de $c(t)$ com relação ao tempo.

A aplicação das técnicas do cálculo variacional leva à obtenção do sistema de equações:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial c_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{c}_j} \right) \right] \delta c_j dt = 0 \quad (5.5)$$

onde a expressão de Euler-Lagrange dentro dos colchetes é uma equação diferencial não-linear de segunda ordem.

Ressalta-se que equações diferenciais lineares podem ser resolvidas mediante técnicas analíticas como a integração ou através do desenvolvimento em séries, gerando uma expressão exata para a solução. Para as equações não-lineares estes métodos não se aplicam. O surgimento de uma equação diferencial não-linear de 2ª ordem obtida a partir da equação de Euler-Lagrange, para a determinação da função $c(t)$, torna necessária a discussão de uma outra abordagem, a qual denomina-se aproximada. Buscando obter uma solução aproximada, foram usados dois métodos de resolução: o método de Galerkin-Urabe e o método do Balanço Harmônico.

Como a coluna apresenta pouca não-linearidade, uma aproximação considerando apenas um modo em (5.3) foi aqui adotada.

5.1. Método de Galerkin-Urabe

O método de Galerkin-Urabe nada mais é que uma adaptação do método de Galerkin para sistemas dinâmicos, fornecendo soluções aproximadas para sistemas sob vibração livre e forçada. A diferença básica do método de Galerkin é que no caso do tempo deve-se integrar a equação diferencial multiplicada pela função de ponderação ao longo de um período de tempo característico do sistema. No caso de sistemas sob vibrações livres ou cargas harmônicas, adota-se $t_1=0$ e $t_2=2\pi/\Omega$.

O método considera $c(t)$ como uma função que pode ser escrita em uma série do tipo:

$$c = \sum_{j=1}^n A_j \phi_j(t) \quad (5.6)$$

onde cada A_j é a amplitude da função ϕ_j . Se δc na expressão (5.5) pode ser substituído por

$$\delta c = \left(\frac{\partial c}{\partial A_j} \right) \delta A_j \quad (5.7)$$

tem-se n equações integrais da forma,

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F}{\partial c} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{c}} \right) \right] \phi_j dt = 0 \quad (5.8)$$

Uma solução comumente adotada para sistemas sob vibração livre ou cargas harmônicas é

$$c(t) = A_1 \text{sen}(\Omega t) + A_2 \text{cos}(\Omega t) \quad (5.9)$$

Logo, adotando a solução acima se obtêm duas equações:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F}{\partial c} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{c}} \right) \right] \text{sen}(\Omega t) dt = 0 \quad (5.10)$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F}{\partial c} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{c}} \right) \right] \text{cos}(\Omega t) dt = 0 \quad (5.11)$$

Após a integração, obtêm-se duas equações algébricas não-lineares com três incógnitas: A_1 , A_2 e Ω .

5.2. Método do Balanço Harmônico

O método do Balanço Harmônico é um método aproximado desenvolvido primeiramente por Krylov e Bogoljubov que tem como principal característica, segundo Meirovitch (1975), a simplicidade de sua aplicação. De acordo com Leipholz (1970), este método também é chamado de método da linearização harmônica e, difere do método de linearização, que substitui uma função não-linear por uma em séries de Taylor, pois reescreve a função não linear $f[x(t)]$ como uma aproximação linear $cx(t)$.

Analisando, inicialmente, a vibração de uma estaca parcialmente enterrada tem-se que a equação diferencial não-linear de 2ª ordem pode assumir, no caso mais geral de vibração forçada amortecida, a forma descrita a seguir, sendo a amplitude c uma variável dependente do tempo:

$$\ddot{c}(t) + a \dot{c}(t) + bc(t) + dc(t)^3 + ec(t)^5 - A_0 \text{sen}(\Omega t) = 0 \quad (5.12)$$

onde a , b , d , e são constantes arbitrárias, A_0 e Ω são, respectivamente, a amplitude e a frequência da excitação.

O método consiste na substituição da seguinte solução geral aproximada na equação (5.12):

$$c(t) = A_1 \text{sen}(\Omega t) + A_2 \cos(\Omega t) \quad (5.13)$$

Realizada esta substituição, tem-se uma expressão com termos em $\text{sen}(\Omega t)$, $\cos(\Omega t)$, bem como potências e produtos destas funções. Desta forma, torna-se necessário usar algumas transformações trigonométricas, objetivando transformar as potências e produtos das funções trigonométricas em uma combinação linear de senos e co-senos.

Para isso algumas transformações são usadas, a saber:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\Omega t)^3 &= \frac{3}{4} \text{sen}(\Omega t) - \frac{1}{4} \text{sen}(3\Omega t) \\ \text{sen}(\Omega t)^5 &= \frac{5}{8} \text{sen}(\Omega t) - \frac{5}{16} \text{sen}(3\Omega t) + \frac{1}{16} \text{sen}(5\Omega t) \\ \cos(\Omega t)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\Omega t) \\ \cos(\Omega t)^3 &= \frac{3}{4} \cos(\Omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\Omega t) \\ \cos(\Omega t)^4 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2\Omega t) + \frac{1}{8} \cos(4\Omega t) \\ \cos(\Omega t)^5 &= \frac{5}{8} \cos(\Omega t) + \frac{5}{16} \cos(3\Omega t) + \frac{1}{16} \cos(5\Omega t) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Complementar a estas transformações, tem-se

$$\text{sen}(\Omega t) \cos(2\Omega t) = -\frac{1}{2} \text{sen}(\Omega t) + \text{sen}(3\Omega t) \quad (5.15)$$

Para que a igualdade presente na equação obtida seja respeitada, são isolados os termos que multiplicam especificamente $\text{sen}(\Omega t)$ e $\cos(\Omega t)$, igualando estes a zero, obtendo-se assim duas equações não-lineares, onde as incógnitas do problema são A_1 , A_2 e Ω , obtidas através da utilização do método de Newton-Rapson.

Para o caso mais simples de vibração livre, a expressão (5.12) apresenta a seguinte forma:

$$\ddot{c}(t) + ac(t) + bc(t)^3 + dc(t)^5 = 0 \quad (5.16)$$

Neste problema, portanto, adota-se a solução

$$c(t) = A_1 \text{sen}(\Omega t) \quad (5.17)$$

Utilizando as transformações dadas pelas equações (5.14), (5.15) e separando desta vez os termos que multiplicam somente $\text{sen}(\Omega t)$, obtém-se uma

equação, que fornece diretamente a relação entre frequência e amplitude de vibração.

5.3. Resolução do Sistema de Equações Não-Lineares por Newton-Rapson

Como se tem um sistema de duas equações não-lineares com três incógnitas, geradas pelo método de Galerkin-Urabe ou do Balanço Harmônico, a resolução pelo método de Newton-Rapson é a mais indicada.

O método consiste em reescrever as equações não-lineares em séries de Taylor e substituir nestas, as coordenadas de um ponto inicial na vizinhança da frequência natural. Fazendo isto, o método indica o incremento para o novo passo e desta forma é possível obter um novo valor para as coordenadas, no caso, A_1 e A_2 . Repete-se este passo até um que o erro seja inferior a um valor previamente estipulado, gerando-se para cada frequência um valor para A_1 e A_2 .

Logo, considerando as duas equações não-lineares como sendo

$$g(A_1, A_2) = 0 \quad (5.38)$$

$$h(A_1, A_2) = 0 \quad (5.39)$$

Reescrevendo essas equações em séries de Taylor, obtém-se

$$g(A_1, A_2) = g(A_{10}, A_{20}) + \left(\frac{\partial g(A_1, A_2)}{\partial A_1} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \Delta_{A_1} + \left(\frac{\partial g(A_1, A_2)}{\partial A_2} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \Delta_{A_2} \quad (5.40)$$

$$h(A_1, A_2) = h(A_{10}, A_{20}) + \left(\frac{\partial h(A_1, A_2)}{\partial A_1} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \Delta_{A_1} + \left(\frac{\partial h(A_1, A_2)}{\partial A_2} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \Delta_{A_2} \quad (5.41)$$

onde $g(A_{10}, A_{20})$ e $h(A_{10}, A_{20})$ indicam o valor das expressões de g e h em um ponto inicial.

Ao escrever na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} \Delta_{A_1} \\ \Delta_{A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g(A_1, A_2)}{\partial A_1} \right)_{(A_{10}, A_{20})} & \left(\frac{\partial h(A_1, A_2)}{\partial A_1} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \\ \left(\frac{\partial g(A_1, A_2)}{\partial A_2} \right)_{(A_{10}, A_{20})} & \left(\frac{\partial h(A_1, A_2)}{\partial A_2} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -g(A_{10}, A_{20}) \\ -h(A_{10}, A_{20}) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

onde $g(A_1, A_2)$ e $h(A_1, A_2)$ são iguais a zero, Δ_{A_1} e Δ_{A_2} indicam o valor do incremento a ser somado à consideração inicial.

Logo,

$$A_1^{n+1} = A_1^n + \Delta_1^n \quad (5.43)$$

$$A_2^{n+1} = A_2^n + \Delta_2^n \quad (5.44)$$

$$\epsilon = A_1^{n+1} - A_1^n \quad (5.45)$$

onde (ϵ) é o erro.