6
Ambigüidade na determinação da posição em sistemas hiperbólicos

6.1
Introdução

Foi visto na Seção 1.3.5 que em sistemas hiperbólicos de localização a posição do terminal é estimada a partir de um conjunto de medidas de TDoA, obtidas na interface rádio entre o terminal e um mínimo de três bases com posições conhecidas. Dado um valor de TDoA, o lugar geométrico do terminal é uma hipérbole definida matematicamente pela equação (1-8), com focos dados pelas posições das bases utilizadas na obtenção da medida.

Em princípio a posição do móvel pode ser estimada com apenas 3 bases disponíveis. No entanto, nesta situação, duas soluções *possíveis* podem resultar do sistema de equações. Da geometria do problema, isto equivale à condição na qual os ramos das hipérboles interceptam-se em dois pontos distintos, como mostra a Figura 6.1. Neste caso, não é possível distinguir qual a solução correta, a menos que haja alguma informação adicional, derivada a partir de um outro conjunto de medidas (medida de potência, AoA etc). Todavia, esta solução demanda uma carga extra de sinalização e processamento do sistema de comunicações.

Se houver mais de três bases em contato com o móvel, a ambigüidade é resolvida. No entanto, em áreas típicas de cobertura celular, são freqüentes as situações nas quais apenas três bases conseguem estabelecer enlaces simultâneos com o terminal. De acordo com Silventoinen et al. [18], medidas realizadas em ambiente urbano para uma rede GSM mostraram que durante aproximadamente 30 % do tempo a estimativa da posição teve de ser realizada com apenas 3 bases. Em ambiente rural, a proporção foi elevada para 60 % do tempo. Para um sistema CDMA, medidas obtidas pela Korea Telecom indicaram também que em grande parte do tempo somente três bases estão disponíveis para uma estimativa confiável de posição [12].

Diante deste cenário, conclui-se que a ambigüidade de soluções para a

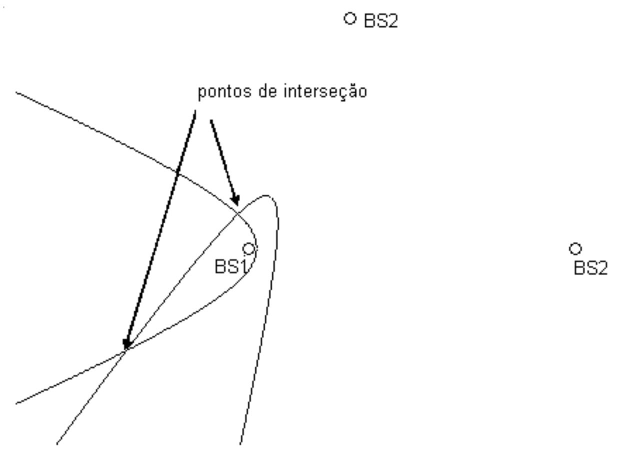

Figura 6.1: Ramos de hipérbolas com 2 pontos de intersecção, resultando em soluções ambíguas para a estimativa de posição.

posição do móvel pode representar uma limitação dos sistemas hiperbólicos de localização. Neste capítulo é feito um desenvolvimento matemático para identificar as regiões do plano onde as soluções produzidas a partir de medidas de TDoA são ambíguas. Estas regiões são aqui denominadas de *regiões de ambigüidade*. Além disso, é feita uma comparação entre a dimensão destas regiões com a área útil para triangulação (área em que o móvel tem contato com as três bases). Os resultados obtidos a seguir podem ser úteis para o planejamento de um sistema hiperbólico de localização, pois indicam a melhor posição relativa entre bases para que a probabilidade de se obter soluções ambíguas seja minimizada.

6.2 Determinação da Região de Ambigüidade

6.2.1 Definições iniciais

Sejam BS1, BS2 e BS3 as estações radio-base disponíveis para a determinação da posição do terminal (MS). A base BS1 é considerada a referência do sistema de localização[1] e está localizada no centro do sistema de coordenadas. Por sua vez, as bases BS2 e BS3 estão localizadas nos pontos $\mathbf{P}$ e $\mathbf{W}$ de coordenadas $(D_{12}, 0)$ e (W_x, W_y), respectivamente, e o terminal MS encontra-se no ponto $\mathbf{Z}$ de coordenada (x, y). As grandezas D_{13} e D_{23}

[1] O tempo de chegada do sinal (ToA) entre terminal e BS1 é usado para a obtenção das duas medidas de TDoA.

representam as distâncias que separam BS3 das bases BS1 e BS2. A Figura 6.2 mostra a configuração considerada para o problema.

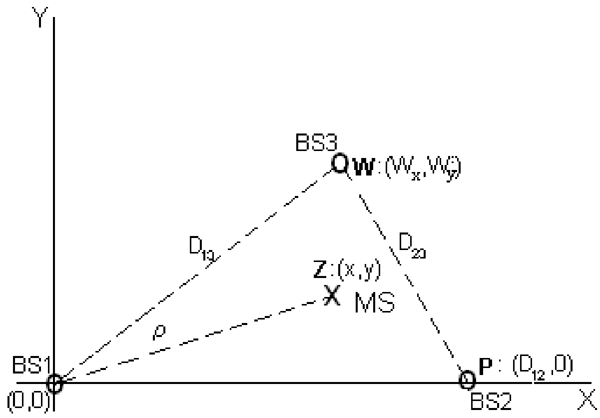

Figura 6.2: Configuração considerada para o cálculo da região de ambigüidade.

Definindo-se α e β como as diferenças de distâncias (TDoA$\times c$) entre MS e as bases, as equações correspondentes para as hipérboles que representam o lugar geométrico de MS são dadas por:

$$\|\mathbf{Z}\| - \|\mathbf{Z} - \mathbf{P}\| = \alpha \tag{6-1}$$

$$\|\mathbf{Z}\| - \|\mathbf{Z} - \mathbf{W}\| = \beta \tag{6-2}$$

Reescrevendo as equações (6-1) e (6-2) em termos das coordenadas de MS e rearrumando-se os termos resulta em

$$(x - D_{12})^2 + y^2 = (\rho - \alpha)^2 \tag{6-3}$$

$$(x - W_x)^2 + (y - W_y)^2 = (\rho - \beta)^2 \tag{6-4}$$

onde

$$\rho = x^2 + y^2 \tag{6-5}$$

é a distância de MS até a origem (BS1). A seguir a análise será feita em termos das variáveis α e β, obtendo-se como resultado a identificação da região no plano $\alpha\beta$ na qual as soluções obtidas para a posição de MS são ambíguas. Uma vez identificada esta região, a região correspondente no plano XY é determinada através de uma transformação matemática entre os dois domínios.

6.2.2
Região possível no plano $\alpha\beta$

Como D_{12} e D_{13} representam, respectivamente, as distâncias entre os focos das duas hipérbolas formadas pelas diferenças α e β, pode-se escrever que

$$\begin{aligned} -D_{12} \leq \alpha \leq D_{12} \\ -D_{13} \leq \beta \leq D_{13} \quad . \end{aligned} \tag{6-6}$$

Além disso, dados α e β, a diferença de distâncias entre MS e as bases BS2 e BS3 é $\beta - \alpha$. Portanto, seguindo raciocínio análogo tem-se que

$$-D_{23} \leq \beta - \alpha \leq D_{23} \tag{6-7}$$

As desigualdades de (6-6) e (6-7) determinam os valores possíveis para α e β. Em um plano $\alpha\beta$, a região correspondente é o interior do polígono Ω mostrado na Figura 6.3.

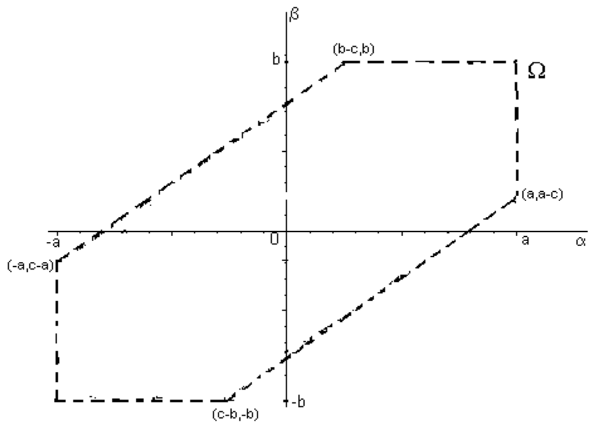

Figura 6.3: Polígono Ω que define os valores possíveis para α e β.

6.2.3
Região de Ambigüidade no plano $\alpha\beta$

Substituindo (6-5) em (6-3) e isolando x resulta, após algumas manipulações simples, a seguinte expressão para a coordenada horizontal de MS

$$x = A\rho + B \quad , \tag{6-8}$$

onde os coeficientes A e B são dados por

$$A = \frac{\alpha}{D_{12}} \tag{6-9}$$

$$B = \frac{D_{12}^2 - \alpha^2}{2D_{12}} \ . \tag{6-10}$$

De forma análoga, substituindo-se (6-5) em (6-4) e resolvendo para a coordenada y tem-se

$$y = C\rho + D \ \ , \tag{6-11}$$

onde

$$C = \frac{\beta - W_x A}{W_y} \tag{6-12}$$

$$D = \frac{D_{13}^2 - \beta^2 - 2W_x B}{2W_y} \ . \tag{6-13}$$

Elevando-se ao quadrado as equações (6-8) e (6-11) e somando-as resulta a seguinte equação do segundo grau para ρ:

$$(A^2 + C^2 - 1)\rho^2 + 2(AB + CD)\rho + (B^2 + D^2) = 0 \ . \tag{6-14}$$

Se $A^2 + C^2 = 1$ e $AB + CD \neq 0$, então (6-14) tem solução única dada por

$$\rho = -\frac{B^2 + D^2}{2(AB + CD)} \ . \tag{6-15}$$

Por outro lado, se $A^2 + C^2 \neq 1$, então as duas raízes da eq. (6-14) são dadas por

$$\rho = \frac{-(AB + CD) \pm \sqrt{(AB + CD)^2 - (A^2 + C^2 - 1)(B^2 + D^2)}}{A^2 + C^2 - 1} \ . \tag{6-16}$$

O discriminante de (6-16) é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= (AB + CD)^2 - (A^2 + C^2 - 1)(B^2 + D^2) \\ &= (B^2 + D^2) - (AD - BC)^2 \ \ , \end{aligned} \tag{6-17}$$

sendo possível mostrar que Δ pode ser fatorado da forma abaixo

$$\Delta = \frac{1}{4(W_y D_{12})^2}(D_{12}^2 - \alpha^2)(D_{13}^2 - \beta^2)(D_{23}^2 - (\beta - \alpha)^2) \ \ . \tag{6-18}$$

De (6-6) e (6-7) em (6-18) conclui-se que $\Delta \geq 0$. A igualdade ocorre quando pelo menos um dos TDoA's medidos é igual, em valor absoluto, à distância entre as bases das quais foi calculado seu valor. É fácil verificar que isto acontece somente quando MS é colinear com duas bases. No entanto, nesta situação particular, a triangulação não é possível [78] e portanto não será considerado na análise. Desta forma, admite-se a seguir que $\Delta > 0$.

Definindo-se agora as seguintes quantidades

$$Q = AB + CD \quad \text{e} \quad R = A^2 + C^2 - 1 \ , \tag{6-19}$$

é possível fazer as seguintes observações baseadas na tricotomia de R:

i) $R < 0$

Neste caso as raízes da eq. (6-14) são reais e têm sinais opostos. Portanto ρ é determinado unicamente pela raiz positiva.

ii) $R = 0$

A solução é dada por (6-15). Se $Q < 0$, ρ é único e possível (raiz positiva). Caso contrário, ρ é único e impossível (raiz negativa).

iii) $R > 0$

As raízes da eq. (6-14) apresentam sinais opostos a Q. Para $Q > 0$, ρ não é possível. Para $Q < 0$, a eq. (6-14) têm duas raízes positivas e portanto, neste caso, ρ pode assumir dois valores distintos.

De acordo com as observações acima, pode-se concluir que a determinação da posição do móvel será ambígua se, e somente se, o par (α, β) medido resultar em $R > 0$ e $Q < 0$.

A equação $R = 0$ em termos das variáveis α e β define uma elipse cuja equação é dada por

$$\frac{\alpha^2}{D_{12}^2} + \frac{\beta^2}{D_{13}^2} - 2\frac{\alpha\beta W_x}{D_{12}D_{13}^2} = \frac{W_y^2}{D_{13}^2} \ , \tag{6-20}$$

que tem centro na origem e está inscrita no polígono Ω, como mostrado na Figura 6.4. Os pontos tangentes **P1** a **P6** têm coordenadas $\mathbf{P1} = -\mathbf{P4} = (D_{12}W_x/D_{13}, D_{13})$, $\mathbf{P2} = -\mathbf{P5} = (D_{12}, W_x)$ e $\mathbf{P3} = -\mathbf{P6} = ((D_{12}^2 - D_{12}W_x)/D_{23}, (D_{12}W_x - D_{13}^2)/D_{23})$.

O termo Q, por sua vez, é dado pela seguinte expressão

$$Q = -\frac{1}{2aW_y^2}\Big[D_{12}\beta^3 - W_x\alpha\beta^2 + (W_x(D_{12}^2 - \alpha^2) - D_{12}D_{13}^2)\beta + \frac{\alpha D_{13}^2}{D_{12}}(\alpha^2 - D_{12}^2 + W_x a\alpha)\Big] \ . \tag{6-21}$$

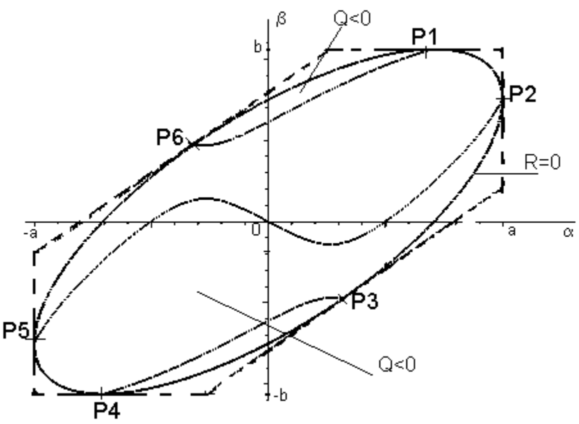

Figura 6.4: Curvas no interior do polígono Ω que definem $R = 0$ e $Q = 0$.

Verifica-se que a condição $Q = 0$ ocorre para cada um dos pontos **P1** − **P6**. Na realidade, $Q = 0$ define as três curvas apresentadas na Figura 6.4, que por sua vez determinam as regiões no interior do polígono Ω onde Q assume valores positivos ou negativos. Particularmente, pode ser verificado que Q assume valores negativos nas regiões assinaladas na figura.

Finalmente, de acordo com a análise desenvolvida, é possível determinar o conjunto de valores de α e β para os quais a solução por triangulação hiperbólica é ambígua. As regiões em que $R > 0$ e $Q < 0$ são delimitadas externamente pelo polígono Ω e internamente pelos arcos de elipse entre os pontos **P1** − **P6**, **P2** − **P3** e **P4** − **P5**, como mostrado na Figura 6.5. Portanto, conclui-se que se o par de diferenças de distância (α,β) pertencer a uma das três regiões mostradas na Figura 6.5, haverá duplicidade de soluções na estimativa de posição por triangulação hiperbólica.

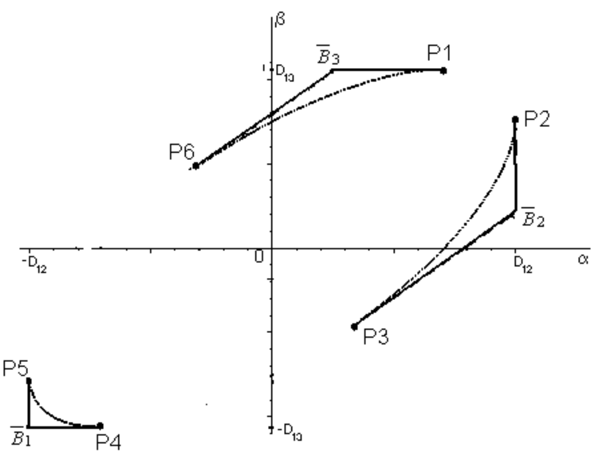

Figura 6.5: Regiões no plano $\alpha\beta$ onde $R > 0$ e $Q < 0$.

6.2.4
Região de Ambigüidade no plano XY

A região de ambigüidade em termos das coordenadas (X, Y) pode ser finalmente determinada calculando-se a transformação $T : (\alpha, \beta) \rightarrow (X, Y)$ das regiões mostradas na Figura 6.5. Para este fim, mostra-se conveniente escrever a elipse definida na equação (6-20) em coordenadas polares:

$$r = \frac{|W_y|}{\left[\left(\frac{1+D_{13}^2}{2}\right) - \left(\frac{1-D_{13}^2}{2}\right)\cos 2\theta - W_x \mathrm{sen} 2\theta\right]^{1/2}} \quad , \tag{6-22}$$

onde

$$\alpha = D_{12} r \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \beta = r \mathrm{sen}\theta \quad . \tag{6-23}$$

Com base na expressão (6-22), é trivial obter os valores de (r, θ) correspondentes aos arcos de elipse mostrados na Figura 6.5. Uma vez obtidos, utiliza-se a seqüencia de equações (6-23), (6-9), (6-12), (6-8) e (6-11), nesta ordem, para determinar as fronteiras das regiões de ambigüidade no plano XY. A Figura 6.6 apresenta o resultado obtido para as regiões da Figura 6.5. Observa-se que a região de ambigüidade em XY é na realidade composta por três regiões disjuntas, que envolvem as bases e se estendem para o infinito.

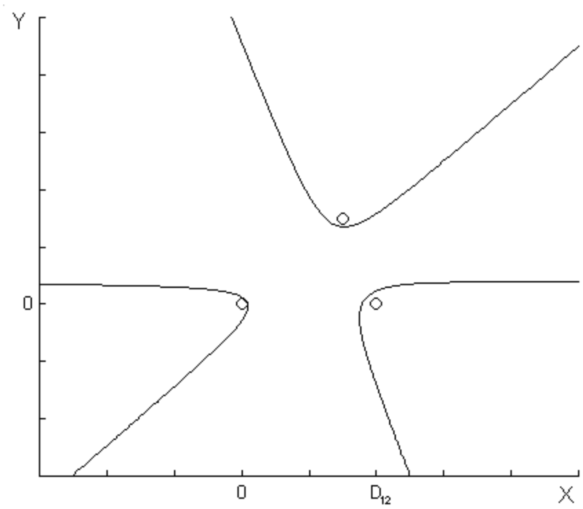

Figura 6.6: Regiões de ambigüidade no plano XY.

Convém ainda identificar alguns pontos importantes no mapeamento realizado entre os dois domínios. Os pontos $\mathbf{\bar{B}_1}$, $\mathbf{\bar{B}_2}$ e $\mathbf{\bar{B}_3}$ na Figura 6.5, de coordenadas $(-D_{12}, -D_{13})$, $(D_{12}, D_{12} - D_{23})$ e $(D_{13} - D_{23}, D_{13})$ respectivamente, são levados a BS1 (origem), BS2 (**P**) e BS3 (**W**). Os seis segmentos de reta que ligam os pontos $\mathbf{\bar{B}_1}$, $\mathbf{\bar{B}_2}$ e $\mathbf{\bar{B}_3}$ aos pontos **P1** a **P6**, correspondem, no plano XY, aos prolongamentos dos lados do triângulo formado pelas 3 bases. Finalmente, verifica-se que os pontos **P1** a **P6** são levados ao infinito pela transformação entre os dois domínios.

6.2.5
Distância entre soluções ambíguas

Quando (6-14) tem duas raízes reais positivas, ρ_1 e ρ_2, a coordenada correspondente do terminal no plano XY é dada por

$$\begin{aligned} x1 &= A\rho_1 + B \\ y1 &= C\rho_1 + D \end{aligned} \tag{6-24}$$

ou

$$\begin{aligned} x2 &= A\rho_2 + B \\ y2 &= C\rho_2 + D \quad . \end{aligned} \tag{6-25}$$

De (6-24) e (6-25) pode-se escrever

$$(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2 = (A^2 + C^2)(\rho_1 - \rho_2)^2 \tag{6-26}$$

ou seja,

$$d = \sqrt{A^2 + C^2}|\Delta\rho| \quad , \tag{6-27}$$

onde d representa a distância entre as duas soluções e $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$. No entanto,

$$\rho_1 = \frac{-Q + \sqrt{\Delta}}{R} \qquad \text{e} \qquad \rho_2 = \frac{-Q - \sqrt{\Delta}}{R} \quad ; \tag{6-28}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} |\Delta\rho| &= \frac{2\sqrt{\Delta}}{|R|} \\ &= \frac{2\sqrt{\Delta}}{R} \qquad \text{(duas soluções possíveis} \Leftrightarrow R > 0) \end{aligned} \tag{6-29}$$

Portanto, tem-se finalmente

$$d = \frac{2\sqrt{(B^2 + D^2 - (AD - BC)^2)(A^2 + C^2)}}{A^2 + C^2 - 1} \quad . \tag{6-30}$$

6.3 Cálculo da área da região de ambigüidade

Calcula-se a seguir a extensão da região de ambigüidade comparada à área da *região de triangulação*. A região de triangulação é aqui definida como sendo a região na qual o terminal consegue receber simultaneamente o sinal de três bases, com nível de potência suficiente para realizar o processamento necessário à estimativa de sua posição. Os resultados são obtidos para diferentes posições relativas entre as bases no plano XY.

Cabe ressaltar que os mecanismos de propagação em um ambiente de comunicações móveis são modelados de forma probabilística, e portanto, para a definição da região de triangulação, admite-se que a condição descrita acima ocorre com uma dada probabilidade.

6.3.1 Determinação da região de triangulação

Inicialmente faz-se necessária a determinação da área de cobertura celular, utilizando-se para esta finalidade o *critério de área*, amplamente considerado na literatura [10][79][80]. Nesta abordagem, o raio da célula (R) é calculado com base na proporção da área de uma célula circular, na qual a potência recebida está acima de um dado limiar. Considerando μ a proporção de uma área S em que ocorre tal condição, pode-se mostrar que

$$\mu = \frac{1}{S}\iint_S \Pr(\omega_r \geq \omega_T) dS \tag{6-31}$$

onde ω_T é o valor considerado para o limiar, e ω_r é a potência do sinal recebido a uma distância r da base. Dada em decibéis, admite-se que ω_r tem distribuição gaussiana de média m_ω e desvio padrão σ_ω. Portanto, chamando de β o integrando de (6-31), pode-se escrever que

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\omega_T - m_\omega}{\sqrt{2}\sigma_\omega}\right) \tag{6-32}$$

onde erf(.) denota a função erro[2]. Em outras palavras, admite-se que a variação de potência em torno de seu valor médio é descrita por uma distribuição log-normal (desvanecimento de longa-escala). Considerando ainda o modelo usual em que a potência média (em dB) varia logaritmicamente com a distância, com coeficiente negativo dado por $-\alpha$ (coeficiente de perda de

[2] $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} \exp(-z^2)dz$

propagação), chega-se a

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left[\frac{\omega_T - \bar{\omega}_R + 10\alpha\log(r/R)}{\sqrt{2}\sigma_\omega}\right] \tag{6-33}$$

onde $\bar{\omega}_R$ representa a potência média do sinal a uma distância R da base.

Considerando R o raio da célula, pode-se reescrever a equação (6-31) da forma

$$\mu = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \beta(r) r dr d\theta \quad . \tag{6-34}$$

Substituindo (6-33) em (6-34) e após algumas manipulações, chega-se finalmente à seguinte expressão

$$\mu = \frac{1}{2}\left\{1 + \mathrm{erf}(a) + \exp\left(\frac{2ab+1}{b^2}\right)\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{ab+1}{b}\right)\right]\right\} \quad , \tag{6-35}$$

onde $a = (\bar{\omega}_R - \omega_T)/\sqrt{2}\sigma_w$ e $b = 10\alpha\log(e)/\sqrt{2}\sigma_w$.

Admite-se a seguir que $\sigma_\omega = 12$ dB e $\alpha = 3$ (30 dB por década). Estes valores são típicos de um ambiente de propagação urbano [10]. A diferença entre a potência média na borda da célula e o limiar, $\bar{\omega}_R - \omega_T$, é determinada considerando que a razão entre a área de serviço útil e a área da célula deve ser de 95%[3]. Portanto, com base na Figura 6.7, que apresenta o gráfico de μ (com valores de σ_ω e α definidos acima), observa-se que $\bar{\omega}_R - \omega_T \approx 15$ dB é o valor necessário da margem de potência para que se atinja $\mu = 95\%$.

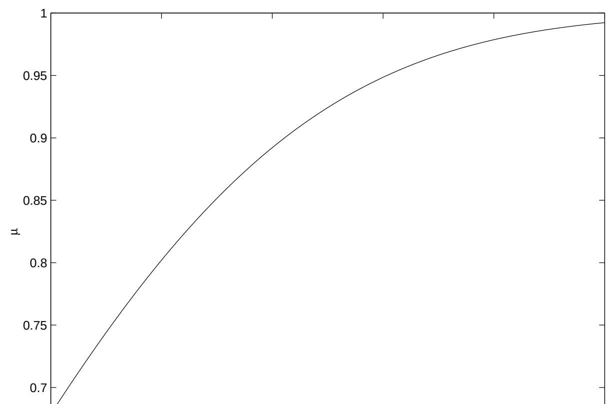

Figura 6.7: Gráfico de μ em função de $\bar{\omega}_R - \omega_T$, para $\alpha = 3$ e $\sigma_\omega = 12$ dB.

Uma vez desenvolvida a análise acima, é possível determinar finalmente a região de triangulação (Φ). Considera-se aqui que nesta região os

[3]Este valor elevado para μ garante, em termos práticos, que o terminal consegue sempre "ouvir" pelo menos uma base (a mais próxima).

sinais recebidos simultaneamente de 3 bases têm potência acima de ω_T para η% da área total (de triangulação). Com esta caracterização, é razoável admitir que Φ seja determinada pela intersecção de três círculos com centros nas bases, cujos raios podem ser calculados observando inicialmente que

$$\eta \leq \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} \tag{6-36}$$

onde μ_i é dado por (6-35) considerando o sinal recebido da i-ésima base. Para a definição de Φ considera-se $\eta = 70\%$ e admite-se que $\eta = \mu_i, (\forall i)$. Com base na Figura 6.8, que mostra o gráfico de μ em função de r/R, observa-se que a região circular em torno de cada base que apresenta $\mu = 70\%$ tem raio igual a $3R$. Considerando que a distância entre as bases é igual a $2R$, a Figura 6.9 mostra a área de triangulação resultante.

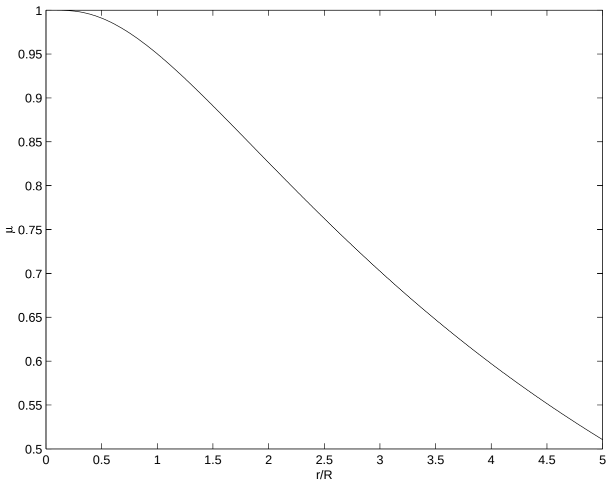

Figura 6.8: Gráfico de μ em função de r/R, para $\alpha = 3$, $\bar{\omega}_R - \omega_T = 15$ dB e $\sigma_\omega = 12$ dB.

6.3.2
Resultados

A seguir apresenta-se os resultados obtidos para a área da região de ambigüidade comparada à região de triangulação. Especificamente, calcula-se a razão (Λ) entre a área de ambigüidade restrita à área de triangulação e a área total de triangulação. Na Figura 6.9, em particular, a razão Λ é dada pela soma das áreas de ψ_1, ψ_2 e ψ_3 dividida pela área de Φ.

Considera-se que as bases BS1 e BS2 estão posicionadas nos pontos de coordenadas $(-a/2, 0)$ e $(a/2, 0)$, e BS3 está em um ponto do 2^o quadrante $\{(X, Y) : X \leq 0\ ,\ Y > 0\}$, como mostra a Figura 6.10. É possível verificar

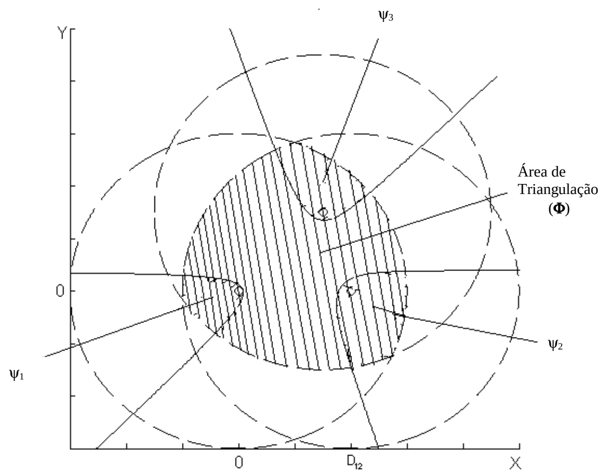

Figura 6.9: Região de triangulação (área hachurada) e regiões de ambigüidade.

que o problema é simétrico em relação aos eixos X e Y, portanto mostra-se desnecessário obter resultados para BS3 localizada nos demais quadrantes.

A configuração inicialmente considerada para avaliação é o arranjo hexagonal de células mostrado na Figura 6.11. Admitindo-se que a área de triangulação é formada pela intersecção dos círculos com centros nas bases e raios $3a/2$, conclui-se que os pontos **M** $(0, \sqrt{3}a/2)$ e **N** $(-a, \sqrt{3}a/2)$ representam as únicas posições para BS3 em que a triangulação com BS1, BS2 e BS3 é possível[4].

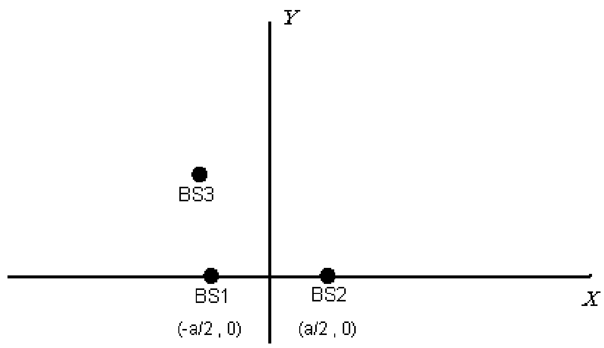

Figura 6.10: Posição das bases para o cálculo da área de ambigüidade comparada à área de triangulação. A terceira base encontra-se no 2^o quadrante.

Quando BS3 está em **M**, a razão Λ calculada é aproximadamente igual a 0,3. Ou seja, 30 % da área útil para triangulação hiperbólica está sujeita a soluções ambíguas. Por outro lado, admitindo-se que a terceira base localiza-

[4]Quando BS3 está em **P** há intersecção entre os 3 círculos, porém não é possível realizar o cálculo de posição a partir de TDOA's [78].

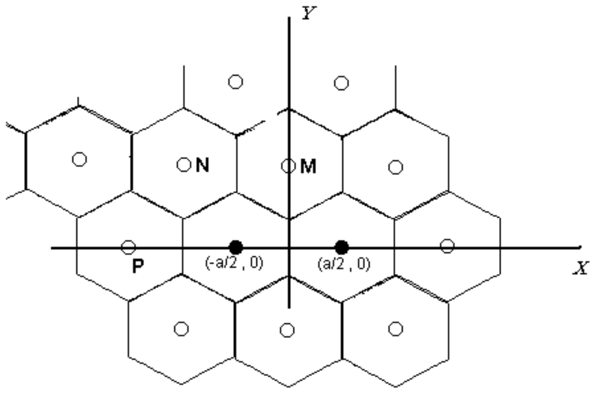

Figura 6.11: Arranjo hexagonal de células para o cálculo de Λ.

se em **N**, a razão Λ aumenta para 0,4 , representando uma situação pior do que a anterior.

Considerando agora o caso em que as posições da terceira base não estão restritas ao arranjo hexagonal, a Tabela 6.1 apresenta os resultados obtidos para várias posições de BS3 no 2^o quadrante.

Tabela 6.1: Razão Λ em função da posição da terceira base.

X

Y	$-3a/2$	$-5a/4$	$-a$	$-3a/4$	$-a/2$	$-a/4$	0
a	0.59	0.48	0.37	0.27	0.22	0.25	0.26
$6a/7$	0.66	0.53	0.40	0.30	0.26	0.29	0.31
$5a/7$	0.76	0.58	0.43	0.32	0.28	0.33	0.33
$4a/7$	0.84	0.66	0.48	0.36	0.31	0.34	0.35
$3a/7$	0.90	0.77	0.54	0.39	0.33	0.36	0.37
$2a/7$	1.00	0.94	0.66	0.46	0.32	0.38	0.43
$2a/7$	1.00	1.00	0.83	0.59	0.31	0.46	0.49

Os resultados mostram que quando BS3 encontra-se praticamente alinhada com as outras bases, é altamente provável obter-se uma solução ambígua. Na realidade, pode ser observado que há posições extremas em que o cálculo da posição é sempre ambíguo, independentemente da posição do terminal. Por outro lado, quando BS3 está localizado na reta $X = -a/2$, a razão Λ assume valores mínimos. Ou seja, quando as posições das bases formam um triângulo retângulo minimiza-se a probabilidade de se obter soluções ambíguas. Todavia, mesmo nesta condição, o valor de Λ ($> 20\%$) não é desprezível.

6.4
Resumo do capítulo

Neste capítulo foram determinadas as condições em que o método de de localização hiperbólico fornece soluções ambíguas. Dadas as posições de três bases envolvidas na estimação da posição do terminal, consegue-se identificar as regiões no plano XY onde a triangulação hiperbólica não produz uma única solução. Observou-se que a posição relativa entre as bases tem grande influência no tamanho da região de ambigüidade. Mesmo considerando um arranjo geométrico favorável entre as bases, os resultados mostram que a área de ambigüidade representa uma fração significativa da região possível para triangulação.