

5

Estimação Bayesiana recursiva para radiolocalização em ambientes com NLOS

5.1

Introdução

Este capítulo apresenta uma nova abordagem para a estimativa da posição de um terminal móvel. A estratégia considerada emprega técnicas de estimação Bayesiana recursiva (EBR), aplicadas a um problema com equação de medida *não-linear* e espaço de estados aumentado para incluir o efeito do erro de NLOS.

São consideradas duas técnicas de EBR para o problema: Filtro de Kalman estendido (do inglês: *Extended Kalman Filter* (EKF)) e Filtro de partículas (do inglês: *Particle Filter* (PF)). Na primeira, a equação de medida é linearizada localmente por série de Taylor e utiliza-se a formulação do filtro de Kalman¹ para gerar a estimativa. Na segunda, calcula-se, a cada instante de tempo, a fdp a posteriori do vetor de estados por um conjunto de *partículas*, i.e, por funções de ponto de massa (do inglês: *point mass functions*), geradas segundo a técnica de *amostragem por importância* [68][69], e ponderadas com base no critério de Bayes. Trata-se, na realidade, de um método de Monte-Carlo para a estimação de mínimo erro médio quadrático (MEMQ), que apresenta destacados resultados em certos problemas não-lineares e com ruído não-gaussiano [70][71][72]. No Apêndice B apresenta-se um breve resumo sobre a abordagem EBR, bem como os principais aspectos envolvidos na formulação das técnicas EKF e PF.

A diferença básica da proposta apresentada neste capítulo em relação às anteriores (*NEMPS* e *OnOff*) é que os algoritmos de EBR empregados conseguem estimar diretamente a posição do terminal a partir de medidas de ToA, e o fazem de forma recursiva. O ruído de medida é filtrado

¹O filtro de Kalman é um algoritmo ótimo de EBR, no sentido de MEMQ, quando as equações de medida e de estado são lineares e o ruído é gaussiano.

naturalmente neste processo e o valor da polarização das medidas devido à ocorrência de NLOS é incluído no vetor de estados para que possa ser eliminado.

5.2

Formulação do problema

A Figura 5.1 apresenta o esquema proposto para a estimativa de posição de um terminal celular em movimento, empregando um algoritmo EBR cujas entradas são as medidas de ToA obtidas na interface-rádio.

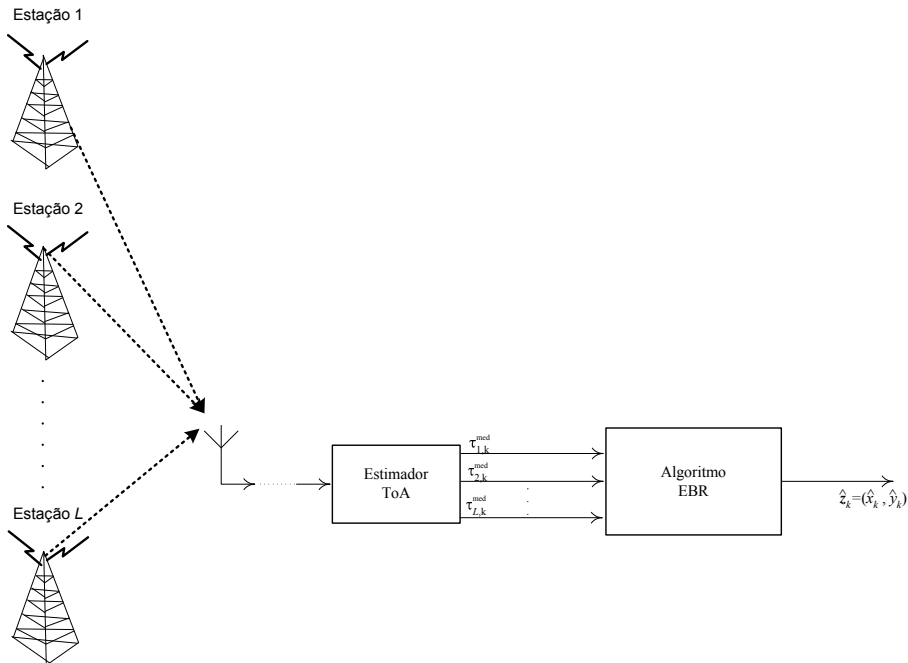


Figura 5.1: Estimativa Bayesiana recursiva da posição com medidas de ToA no enlace direto.

O problema de interesse pode ser definido matematicamente pelo conjunto de equações a seguir, admitindo-se na formulação que L bases estão envolvidas na estimativa da posição:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{F}\mathbf{z}_{k-1} + \mathbf{v}_k \quad (5-1)$$

$$\boldsymbol{\tau}_k = \mathbf{h}(\mathbf{z}_k) + \text{diag}(\boldsymbol{\alpha}_k)(\boldsymbol{\delta}_k + \boldsymbol{\Delta}_k) + \mathbf{n}_k \quad (5-2)$$

$$\boldsymbol{\delta}_k = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}_{k-1} + \boldsymbol{\nu}_k \quad (5-3)$$

$$\boldsymbol{\Delta}_k = \boldsymbol{\Delta}_{k-1} \quad , \quad (5-4)$$

onde:

$-\mathbf{z}_k = [x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k]^T$ é o vetor de estados a ser estimado recursivamente. As

coordenadas x_k e y_k representam a posição do terminal no instante t_k , e \dot{x}_k e \dot{y}_k a variação destas com o tempo. A matriz \mathbf{F} é definida por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta_t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta_t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e representa a matriz de transição de estados considerada para o problema, sendo Δ_t o intervalo entre amostras. Cabe ressaltar que a equação (5-1), com a matriz \mathbf{F} definida acima, não reflete a dinâmica *real* do móvel em trajetórias com alteração do vetor-velocidade, tendo sido escolhida por questões de simplicidade. Os algoritmos devem ser suficientemente robustos para suportar esta imprecisão na modelagem do processo.

$-\boldsymbol{\tau}_k = [\tau_{1,k}^{med}, \dots, \tau_{L,k}^{med}]^T$ é o vetor de ToA's medidos no instante t_k . Admite-se que as componentes são independentes entre si, e dadas segundo a eq. (4-12)

-A função vetorial $\mathbf{h}(\cdot)$ é definida por

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}_k) = c^{-1} \times \left[\sqrt{(X_1 - x_k)^2 + (Y_1 - y_k)^2}, \dots, \sqrt{(X_L - x_k)^2 + (Y_L - y_k)^2} \right]^T,$$

sendo (X_i, Y_i) as coordenadas da i -ésima base e c a velocidade da luz.

-Seguindo a eq. (4-12), inclui-se na eq. (5-2) o termo $\text{diag}(\boldsymbol{\alpha}_k)(\boldsymbol{\delta}_k + \boldsymbol{\Delta}_k)$, que representa o erro de NLOS nas medidas de ToA. O vetor $\boldsymbol{\alpha}_k = [\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{L,k}]^T$ tem componentes que assumem o valor 0 ou 1, e indica o estado do canal (LOS/NLOS) entre o terminal e as L bases no instante t_k . Por sua vez, os vetores $\boldsymbol{\delta}_k = [\delta_{1,k}, \dots, \delta_{L,k}]^T$ e $\boldsymbol{\Delta}_k = [\Delta_{1,k}, \dots, \Delta_{L,k}]^T$ são definidos conforme conforme mostrado nas equações (5-3) e (5-4), admitindo-se que o erro de NLOS pode ser modelado segundo a eq. (4-60). As componentes de $\boldsymbol{\delta}_k$ são processos AR de ordem 1 com média nula, cujos coeficientes são dados pela matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_L \end{bmatrix},$$

e $\boldsymbol{\Delta}_k$ tem valor constante (> 0) durante o período de NLOS, representando a média do erro.

$-\mathbf{v}_k$, \mathbf{n}_k e $\boldsymbol{\nu}_k$ nas equações (5-1) a (5-3) são processos brancos, gaussianos, de média nula e com matrizes covariância dadas por

$$\mathbf{Q}_z = \begin{bmatrix} \sigma_{xy}^2 \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_v^2 \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5-5a)$$

$$\mathbf{Q}_\tau = E[\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T] = \sigma_0^2 \mathbf{I}_L \quad (5-5b)$$

$$\mathbf{Q}_\delta = E[\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T] = \sigma_\nu^2 \mathbf{I}_L \quad (5-5c)$$

onde $\mathbf{0}$ é uma matriz nula² e \mathbf{I}_L é uma matriz identidade de dimensão $L \times L$.

Para a aplicação dos algoritmos de EBR é necessário, em princípio, que o ruído definido nas equações de estado (eq. (5-1)) e de medida (eq. (5-2)) seja branco e de média nula. Na eq. (5-2) isto não ocorre devido à presença do erro de NLOS, que inclui termos aleatórios com média diferente de zero e amostras correlacionadas entre si.

Uma possível abordagem para o problema é considerar um novo modelo em que o vetor de estados original é *aumentado* [73], dando origem a um vetor $\tilde{\mathbf{z}}_k$ no qual são incluídas como variáveis de estado as componentes dos vetores $\boldsymbol{\delta}_k$ e $\boldsymbol{\Delta}_k$. Desta forma, obtém-se uma nova equação de medida e que atende ao requisito mencionado para aplicação dos algoritmos EKF ou PF.

A partir das equações (5-1) a (5-4), define-se então para o problema de radiolocalização as novas equações de processo e de medida:

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{z}}_{k-1} + \tilde{\mathbf{v}}_k \quad (5-6)$$

$$\boldsymbol{\tau}_k = \tilde{\mathbf{h}}(\tilde{\mathbf{z}}_k) + \mathbf{n}_k, \quad (5-7)$$

$$(5-8)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\Delta}_k \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_L \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

²Para simplificar a notação, as dimensões das matrizes nulas não foram explicitadas.

$$\tilde{\mathbf{v}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \boldsymbol{\nu}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{z}}} = \text{E}[\tilde{\mathbf{v}}_k \tilde{\mathbf{v}}_k^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(\tilde{\mathbf{z}}_k) = \mathbf{h}(\mathbf{z}_k) + \text{diag}(\boldsymbol{\alpha}_k)(\boldsymbol{\delta}_k + \boldsymbol{\Delta}_k) \quad (5-12)$$

5.3

Estimação por EKF

Dadas as eqs. (5-6) a (5-12), e admitindo-se que são conhecidas (ou podem ser estimadas) as matrizes $\tilde{\mathbf{F}}$, $\mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{z}}}$, e o vetor $\boldsymbol{\alpha}_k$, pode-se aplicar diretamente o filtro de Kalman estendido para estimar recursivamente o vetor $\tilde{\mathbf{z}}_k$. A cada instante de tempo, portanto, a estimativa $\hat{\tilde{\mathbf{z}}}_k$ é obtida segundo as eqs. (5-13) a (5-18) mostradas a seguir:

$$\hat{\tilde{\mathbf{z}}}_{k,k-1} = \tilde{\mathbf{F}} \hat{\tilde{\mathbf{z}}}_{k-1} \quad (5-13)$$

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{d\mathbf{h}(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\hat{\tilde{\mathbf{z}}}_{k,k-1}} \quad (5-14)$$

$$\mathbf{P}_{k,k-1} = \mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{z}}} + \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{P}_{k-1,k-1} \tilde{\mathbf{F}}^T \quad (5-15)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{Q}_\tau)^{-1} \quad (5-16)$$

$$\hat{\tilde{\mathbf{z}}}_k = \hat{\tilde{\mathbf{z}}}_{k,k-1} + \mathbf{K}_k (\boldsymbol{\tau}_k - \tilde{\mathbf{h}}(\hat{\tilde{\mathbf{z}}}_{k,k-1})) \quad (5-17)$$

$$\mathbf{P}_{k,k} = (\mathbf{I}_{4+2L} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k,k-1} \quad (5-18)$$

Para a inicialização do algoritmo, pode-se calcular a estimativa inicial das coordenadas pela equação [24]:

$$[\hat{x}_0, \hat{y}_0]^T = (\boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\xi}, \quad (5-19)$$

onde a matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ e o vetor $\boldsymbol{\xi}$ são dados respectivamente pelas equações (4-2) e (4-3)³. Para os demais elementos do vetor $\hat{\mathbf{z}}_0$, arbitra-se $(\hat{x}_0, \hat{y}_0) = (10, 10)$ e $(\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\Delta}_0) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. A matriz covariância inicial do erro, $\mathbf{P}_{0,0}$, é determinada por [58]

$$\mathbf{P}_{0,0} = (\boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{Q}_\xi^{-1} ((\boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^T)^T, \quad (5-20)$$

onde \mathbf{Q}_ξ é a matriz covariância de $\boldsymbol{\xi}$. Pode-se mostrar que os elementos da

³Na eq. (5-19) o vetor $\boldsymbol{\xi}$ é determinado considerando a eq. (4-3) com $\hat{\tau}_{i,k}$ igual a $\tau_{i,0}^{med}$.

diagonal de \mathbf{Q}_ξ podem ser dados aproximadamente por

$$[\mathbf{Q}_\xi]_{11} = \frac{1}{2}([\mathbf{Q}_\tau]_{11} + [\mathbf{Q}_\tau]_{22} + 2\tau_{1,0}^{med} + 2\tau_{2,0}^{med}) \quad (5-21a)$$

$$[\mathbf{Q}_\xi]_{22} = \frac{1}{2}([\mathbf{Q}_\tau]_{22} + [\mathbf{Q}_\tau]_{33} + 2\tau_{2,0}^{med} + 2\tau_{3,0}^{med}). \quad (5-21b)$$

5.4

Estimação por PF

A definição do problema pelas eqs (5-6) a (5-12) permite considerar, em princípio, a aplicação direta do algoritmo de filtragem por partículas para a estimação de $\tilde{\mathbf{z}}_k$ recursivamente. No entanto, o vetor $\mathbf{\Delta}_k$ é constituído de elementos *estáticos*, isto é, variáveis que assumem valores constantes ao longo do tempo. Esta característica na dinâmica do processo compromete seriamente o desempenho do algoritmo de estimação por Monte-Carlo [74]. Após um pequeno número de iterações, a fdp marginal associada ao parâmetro estático degenera para uma única função ponto de massa com peso unitário⁴ [71].

Na literatura são propostas algumas soluções para que a filtragem por partículas consiga lidar com processos (parcialmente) estáticos [71][74][75][76]. Uma alternativa é introduzir uma dinâmica artificial nas variáveis, por meio da adição de termos aleatórios (ruído branco) às partículas geradas *por importância*. A dificuldade associada a este procedimento é como definir apropriadamente o “grau de aleatoriedade” a ser adicionado, sem comprometer a precisão da estimativa. Além disso, afirma-se que com esta solução as estimativas ficam extremamente dependentes das observações mais recentes [71]. Outra solução possível, e aparentemente bem mais eficiente, é implementar uma filtragem híbrida, na qual algumas variáveis do vetor de estado seriam estimadas por Monte-Carlo, e as demais estimadas *analiticamente*. Esta abordagem é considerada também em outras classes de problemas, como por exemplo, equalização cega [72] e modelos com processos de Dirichlet [77], para aumentar a precisão da estimativa e reduzir o número de partículas na simulação.

A solução desenvolvida aqui segue a vertente da filtragem híbrida. As variáveis de interesse, x_k e y_k , são estimadas por Monte-Carlo, bem como \dot{x}_k , \dot{y}_k e o vetor $\mathbf{\delta}_k$. A estimativa do vetor $\mathbf{\Delta}_k$ é feita analiticamente, por filtragem de Kalman.

⁴*Fenômeno de degenerescência*, vide Apêndice B.

A Figura 5.2 apresenta o esquema de filtragem proposto, no qual se observa que o vetor de estados $\tilde{\mathbf{z}}_k$, definido em (5-9), é particionado em dois *sub*-vetores: $\mathbf{z}_k^1 = [\mathbf{z}_k^T \ \boldsymbol{\delta}_k^T]^T$ e $\mathbf{z}_k^2 = \boldsymbol{\Delta}_k$. O primeiro vetor é estimado pelo filtro de partículas, enquanto que o segundo é determinado pelo filtro de Kalman. O esquema híbrido é composto portanto por dois algoritmos distintos de estimação, que interagem entre si para a propagação da estimativa de $\tilde{\mathbf{z}}_k$ ao longo do tempo. Este esquema retira as variáveis estáticas do vetor de estados definido para o filtro de partículas, viabilizando desta maneira o seu emprego no procedimento de estimação.

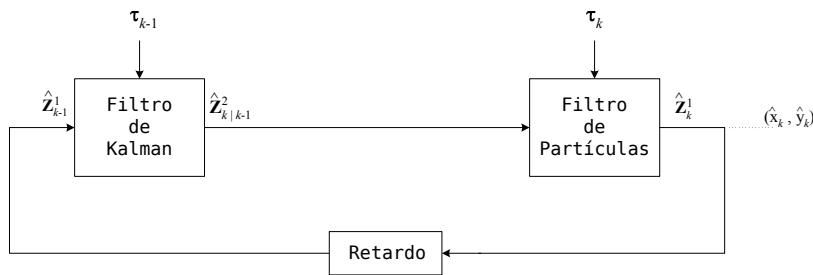


Figura 5.2: Esquema de estimação híbrido.

Filtro de Partículas

A partir das equações (5-1) e (5-2), pode-se construir as seguintes equações de estado e de medida para a estimativa de \mathbf{z}_k^1 :

$$\mathbf{z}_k^1 = \mathbf{F}^1 \mathbf{z}_{k-1}^1 + \mathbf{v}_k^1 \quad (5-22)$$

$$\boldsymbol{\tau}_k^* \triangleq \boldsymbol{\tau}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^2 = \mathbf{h}^1(\mathbf{z}_k^1) + \mathbf{n}_k + \boldsymbol{\epsilon}_k^K, \quad (5-23)$$

ou seja, o vetor-observação para a estimativa pelo filtro de partículas é dado por $\boldsymbol{\tau}_k^* = \boldsymbol{\tau}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^2$, onde $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^2$ representa a *predição* por filtro de Kalman para \mathbf{z}_k^2 . Sem perda de generalidade, e com o objetivo de simplificar as expressões, admitiu-se acima que $\text{diag}(\boldsymbol{\alpha}_k) = \mathbf{I}_L$, ou seja, os enlaces entre o terminal e as bases estão na condição de NLOS no instante t_k . As demais quantidades nas equações (5-22) e (5-23) são definidas como se segue

$$\mathbf{F}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (5-24)$$

$$\mathbf{v}_k^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \boldsymbol{\nu}_k \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{z}_k^1) = \mathbf{h}(\mathbf{z}_k) + \boldsymbol{\delta}_k \quad (5-26)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_k^K = \mathbf{z}_k^2 - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^2, \quad (5-27)$$

sendo $\boldsymbol{\epsilon}_k^K$ o erro na predição de Kalman do vetor \mathbf{z}_k^2 .

Na implementação do filtro de partículas, utiliza-se uma densidade por importância correspondente à fdp *a priori*:

$$q(\mathbf{z}_k^1 | \mathbf{z}_{k-1}^1, \boldsymbol{\tau}_k) \equiv p(\mathbf{z}_k^1 | \mathbf{z}_{k-1}^1) = \mathbf{N}(\mathbf{z}_k^1; \mathbf{F}^1 \mathbf{z}_{k-1}^1, \mathbf{Q}_z^1), \quad (5-28)$$

onde

$$\mathbf{Q}_z^1 = \mathbb{E}[\mathbf{v}_k^1 (\mathbf{v}_k^1)^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_\delta \end{bmatrix}. \quad (5-29)$$

Neste caso, seguindo o desenvolvimento apresentado no Apêndice B, que apresenta o cálculo recursivo do peso associado a i -ésima partícula no instante t_k (eq. (B.35)), resulta

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\boldsymbol{\tau}_k | \mathbf{z}_k^{1(i)}), \quad (5-30)$$

onde $\mathbf{z}_k^{1(i)}$ é a i -ésima partícula gerada para a estimativa de \mathbf{z}_k^1 . Da eq. (5-23) vem portanto que

$$\tilde{w}_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^2 - \mathbf{h}^1(\mathbf{z}_{k-1}^{1(i)}))^T (\mathbf{Q}_\tau + \boldsymbol{\Sigma}_k)^{-1} (\boldsymbol{\tau}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^2 - \mathbf{h}^1(\mathbf{z}_{k-1}^{1(i)}))\right\}, \quad \text{e} \quad (5-31a)$$

$$w_k^{(i)} = \frac{\tilde{w}_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N_s} \tilde{w}_k^{(j)}}, \quad (5-31b)$$

onde \mathbf{Q}_τ é a matriz covariância da medida de ToA (eq. (5-5b)), $\boldsymbol{\Sigma}_k$ é a matriz covariância de $\boldsymbol{\epsilon}_k^K$, que é determinada pelo filtro de Kalman, e N_s é a quantidade total de partículas considerada na simulação. Na expressão (5-31a) observa-se que foi admitido que \mathbf{n}_k e $\boldsymbol{\epsilon}_k^K$ são independentes, e de fato isto ocorre porque $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^2$ depende das amostras de ruído até o instante t_{k-1} . Cabe ainda ressaltar que em muitos cenários é razoável supor que $\mathbf{Q}_\tau + \boldsymbol{\Sigma}_k \approx \mathbf{Q}_\tau$, dado que o filtro de Kalman converge para o valor verdadeiro de \mathbf{z}_k^2 .

Finalmente a estimativa de \mathbf{z}_k^1 é dada por

$$\hat{\mathbf{z}}_k^1 = \sum_{i=1}^{N_s} w_k^{(i)} \mathbf{z}_k^{1(i)}, \quad (5-32)$$

onde as partículas $\mathbf{z}_k^{1(i)}$ são geradas segundo a distribuição a priori $\mathcal{N}(\mathbf{F}^1 \mathbf{z}_{k-1}^1, \mathbf{Q}_z^1)$.

A operação do filtro de partículas no esquema da Figura 5.2 é descrito pelo algoritmo mostrado a seguir. A inclusão do bloco “Se” no pseudocódigo é devido à necessidade de se combater o *fenômeno de degenerescência* das partículas geradas na simulação. O parâmetro \hat{N}_s corresponde a uma estimativa do número efetivo de partículas no instante t_k , e é comparado ao limiar estabelecido aqui⁵ de $N_s/7$ para decidir pela reamostragem. Conforme comentado no Apêndice B, a reamostragem se constitui em uma alternativa eficiente para combater a degenerescência das partículas, porém inclui uma carga adicional de computação.

Algoritmo para Filtragem por Partículas

– Inicialização do algoritmo

- $\mathbf{z}_0^1 = (\hat{x}_0, \hat{y}_0, 5, 5, 20 \times \boldsymbol{\alpha}_0)^T$; \hat{x}_0 e \hat{y}_0 obtidos de (5-19).
- Geração de amostras: $\mathbf{z}_0^{1(i)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{F}^1 \mathbf{z}_0^1, \mathbf{Q}_z^1)$, $i = 1, \dots, N_s$
- Geração dos pesos: $w_0^{(i)} = \frac{1}{N_s}$, $i = 1, \dots, N_s$

– Para o instante t_k

- Geração de amostras: $\mathbf{z}_k^{1(i)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{F}^1 \mathbf{z}_{k-1}^1, \mathbf{Q}_z^1)$, $i = 1, \dots, N_s$
- Geração dos pesos: De acordo com (5-31)
- Cálculo de $\hat{N}_{eff} = \left[\sum_{i=1}^{N_s} (w_k^{(i)})^2 \right]^{-1}$
- Se $\hat{N}_{eff} < N_s/7$
 - * Reamostragem: $\mathbf{z}_k^{1(i)} \sim \mathcal{Z}_k$, $i = 1, \dots, N_s$, onde \mathcal{Z}_k é a fdp $\mathcal{Z}_k(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{N_s} w_k^{(i)} \delta(\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}_k^{1(i)})$, sendo $\tilde{\mathbf{z}}_k^{1(i)}$ a i -ésima partícula antes da reamostragem.
 - * Geração dos pesos: $w_k^{(i)} = \frac{1}{N_s}$, $i = 1, \dots, N_s$

– Fim Se

- Estimativa: $\hat{\mathbf{z}}_k^1 = \sum_{i=1}^{N_s} w_k^{(i)} \mathbf{z}_k^{1(i)}$
-

⁵Escolhido empiricamente.

Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é implementado levando-se em conta as seguintes equações de processo e de medida:

$$\mathbf{z}_k^2 = \mathbf{z}_{k-1}^2 \quad (5-33)$$

$$\boldsymbol{\tau}_k^{**} \triangleq \boldsymbol{\tau}_k - \mathbf{h}^1(\hat{\mathbf{z}}_k^1) = \mathbf{z}_k^2 + \mathbf{n}_k + \boldsymbol{\epsilon}_k^{PF} . \quad (5-34)$$

Nota-se na eq. (5-34) que o vetor-observação para a estimativa por Kalman é $\boldsymbol{\tau}_k^{**}$, que depende do valor estimado para \mathbf{z}^1 (por PF) no instante t_k . O vetor $\boldsymbol{\epsilon}_k^{PF}$ é incluído na equação (5-34) devido ao erro na estimativa de \mathbf{z}_k^1 , e é dado por

$$\boldsymbol{\epsilon}_k^{PF} = \mathbf{h}^1(\mathbf{z}_k^1) - \mathbf{h}^1(\hat{\mathbf{z}}_k^1) . \quad (5-35)$$

Aplicando a formulação de Kalman às eqs. (5-33) e (5-34), resulta na expressão para o cálculo recursivo de $\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^2$:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^2 = \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^2 + \mathbf{K}_k(\boldsymbol{\tau}_k^{**} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^2) , \quad (5-36)$$

onde \mathbf{K}_k é o ganho de Kalman dado por

$$\mathbf{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}(\boldsymbol{\Sigma}_{k-1} + \mathbf{Q}_\tau)^{-1} , \quad (5-37)$$

e $\boldsymbol{\Sigma}_k$ é calculado recursivamente pela expressão

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \boldsymbol{\Sigma}_{k-1} - \mathbf{K}_k \boldsymbol{\Sigma}_{k-1} . \quad (5-38)$$

A rigor, na expressão (5-37), a matriz covariância de $\boldsymbol{\epsilon}_k^{PF}$ deveria ser incluída. No entanto, admitindo-se que a estimativa produzida pelo filtro de partículas converge para \mathbf{z}_k^1 , é possível desprezar esta matriz no cálculo do ganho de Kalman.

5.5

Verificação de Desempenho

5.5.1

Cenário de simulação

Os algoritmos propostos nas Seções 5.3 e 5.4 foram implementados a fim de verificar os seus desempenhos na estimativa da posição de um terminal em movimento. Utiliza-se o mesmo cenário definido no item 4.5.1

(trajetórias, velocidade do terminal, período de amostragem, estatística do ruído de medida, erro de NLOS etc), bem como os parâmetros para avaliação de desempenho do algoritmo, ou seja, a média e desvio padrão do erro médio de localização (*EML*) definido em (4-55). Os resultados obtidos com a estimação por EKF e por PF são comparados entre si, e também com os resultados apresentados no Capítulo 4, referentes às técnicas *NEMPS* e *OnOff*.

Nas simulações realizadas admite-se que são conhecidas a matriz \mathbf{Q}_τ e o vetor $\boldsymbol{\alpha}_k$. Cabe ressaltar que o conhecimento *perfeito* do estado LOS/NLOS do canal não é possível na maioria dos casos, sendo necessário, de fato, aplicar um teste para a detecção das hipóteses LOS/NLOS, tal como foi feito no Capítulo 4. Para aproveitar o teste desenvolvido na Seção 4.4, seria necessário incluir, além dos algoritmos de estimação da posição propriamente ditos (EKF ou PF), filtros de Kalman para filtrar a medida de ToA recebida. Isto acarretaria em um aumento da complexidade computacional, e portanto não parece ser a solução ideal. Como trabalho futuro, pretende-se desenvolver um teste de hipóteses adaptado aos esquemas de estimação apresentados neste capítulo.

O filtro de partículas foi implementado com $N_s = 10000$ partículas. Testes preliminares indicaram que este número era apropriado para a obtenção de um desempenho satisfatório, considerando o cenário utilizado nas simulações e a quantidade de estados a serem estimados (sete). As matrizes \mathbf{Q}_z e \mathbf{Q}_δ , correspondentes às matrizes covariância do ruído de estado e do erro de NLOS (eqs (5-5a) e (5-5c)), foram escolhidas (empiricamente) para os algoritmos PF e EKF como sendo iguais a

$$\mathbf{Q}_z = \text{diag}([20\Delta_t^2 \text{ (m}^2\text{)}, 20\Delta_t^2 \text{ (m}^2\text{)}, 100\Delta_t^2 \text{ (m}^2\text{/s}^2\text{)}, 100\Delta_t^2 \text{ (m}^2\text{/s}^2\text{)}]) \quad (5-39)$$

$$\mathbf{Q}_\delta = \hat{\sigma}_\nu^2 \mathbf{I}_3, \quad (5-40)$$

onde Δ_t é o intervalo de tempo entre medidas consecutivas de ToA⁶, e $\hat{\sigma}_\nu^2$ é uma estimativa para a variância do ruído $\boldsymbol{\nu}_k$. Por sua vez, a matriz de coeficientes dos processos AR que modelam o erro de NLOS foi considerada igual a

$$\mathbf{A} = \hat{a} \mathbf{I}_3. \quad (5-41)$$

Para avaliar a robustez de ambos os algoritmos a erros de modelagem, foram simuladas as situações em que $(\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) = (1, 0,5\sigma_\nu^2, 0, 95a)$ e $(\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) =$

⁶ $\Delta_t = 9,4$ mseg .

$(1, 1\sigma_\nu^2, 0, 9a)$, onde σ_ν^2 e a representam os valores efetivamente usados na geração de δ_k pela eq. (5-3) (processo AR de 1ª ordem). Os resultados obtidos foram comparados ao caso ideal em que $(\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) = (\sigma_\nu^2, a)$.

5.5.2 Resultados

As Figuras 5.3 a 5.34 mostram os resultados obtidos nas simulações. Tal como no Capítulo 4, os gráficos contidos nestas figuras relacionam μ_{EML} e σ_{EML} com o desvio-padrão (σ_0) do ruído de medida.

Verificou-se que o tempo necessário para completar cada realização usando filtro de partículas era extremamente alto. A título de exemplo, para completar o rastreamento do terminal percorrendo a trajetória 2, era necessário gerar, no total, aproximadamente 100 milhões de partículas⁷, o que resultava em uma simulação cerca de 200 vezes mais lenta do que a execução com EKF, para o mesmo cenário. Portanto, para completar o conjunto de simulações em um tempo razoável, obteve-se os resultados de μ_{EML} e σ_{EML} para o método com PF com apenas 10 execuções, e para dois valores de σ_0 : $50/c$ e $100/c$. Uma quantidade menor de realizações reduz a confiabilidade dos resultados, porém verificou-se que 10 realizações foi uma opção razoável levando-se em conta o pequeno desvio-padrão de EML apresentado pela técnica com PF. Por sua vez, para o EKF, os valores de μ_{EML} e σ_{EML} foram determinados com 50 realizações, para $\sigma_0 = 25/c, 50/c, 75/c$ e $100/c$.

Nas Figuras 5.3 a 5.10 são mostrados os resultados de desempenho da técnica de localização com EKF, para uma implementação em que são conhecidos *perfeitamente* os parâmetros do modelo AR de evolução do erro de NLOS (curva “EKF”), e para os casos em que o modelo utilizado é impreciso: $(\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) = (1, 05\sigma_\nu^2, 0, 95a)$ e $(\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) = (1, 1\sigma_\nu^2, 0, 9a)$, correspondendo às curvas “EKF_{5%}” e “EKF_{10%}”, respectivamente. Dos gráficos pode ser observado o seguinte:

- O EKF teve excelente desempenho quando foi implementado com o modelo correto para o erro de NLOS, ainda que tenha apresentado alguma sensibilidade ao tipo de trajetória e à duração média do estado de NLOS. A média μ_{EML} foi de apenas 20 metros para a trajetória 1, com $\bar{L} = 100$ ou 300 m. Para a trajetória 2 e $\bar{L} = 100$ m esta média foi elevada para valores em torno de 40 metros, podendo ainda

⁷Considerando: trajetória 2 (2700 m), $v=15$ m/s, $\Delta_t = 9,4$ mseg e $N_s = 10^4$ partículas.

ser considerado um bom resultado. Porém, na condição de $\bar{L} = 300$ e trajetória 2, o desempenho foi degradado sensivelmente.

- Com relação a σ_{EML} , em ambas as trajetórias e $\bar{L} = 100$ este parâmetro ficou em torno de 10 metros, o que revela uma boa uniformidade dos resultados para este cenário. Para $\bar{L} = 300$, os “picos” das curvas indicam a presença de valores elevados de EML no conjunto das 50 realizações, levando a crer que o algoritmo “perdeu” o rastreamento em algumas execuções.
- As curvas “EKF_{5%}” e “EKF_{10%}”, em todos os cenários considerados, mostram que o método é extremamente sensível à correta caracterização estatística do erro de NLOS. Discrepâncias pequenas de 5% e 10% foram suficientes para que o desempenho em termos de μ_{EML} atingisse valores da ordem de 100 metros, ou seja, cerca de 4 vezes o resultado obtido quando foi considerado o modelo correto. O desvio-padrão σ_{EML} nesta condição também foi aumentado consideravelmente.

Nas Figuras 5.11 a 5.18 os resultados de μ_{EML} e σ_{EML} referem-se às simulações com o filtro de partículas. As curvas “PF_{5%}” e “PF_{10%}” correspondem à situação em que a equação de processo considerada para o erro de NLOS apresenta erros de 5 e 10 %, respectivamente, em relação ao modelo verdadeiro. Nestas figuras pôde ser observado o seguinte:

- A estimativa da posição com filtro de partículas apresentou grande precisão para as condições simuladas. Nota-se ainda que a diferença de valores entre a curva “PF” e as curvas “PF_{5%}”, “PF_{10%}” é bem menor do que a verificada para técnica com EKF. Ou seja, o método apresenta menos suscetibilidade a uma caracterização imprecisa da estatística do erro de NLOS.
- Comparando-se as curvas para $\bar{L}=100$ e $\bar{L} =300$, nota-se que a precisão da estimativa não é significativamente alterada. Isto pode ser verificado para ambas as trajetórias e curvas (“PF”, “PF_{5%}”, “PF_{10%}”), tanto na média como no desvio-padrão de EML .
- A média μ_{EML} é ligeiramente maior para a trajetória 2, o que de certa forma é esperado devido à imprecisão do modelo utilizado para a dinâmica de movimento do terminal. Porém, a diferença é menor do que a observada para a simulação com EKF.
- Nota-se que, de maneira geral, os resultados estão consistentes, apesar do pequeno número de simulações executadas para o levantamento

das curvas. A exceção é a redução de μ_{EML} com o aumento de σ_0 , na curva “PF” da Fig. 5.12. Na realidade este resultado deve-se a uma particular simulação em $\sigma_0=50$, que apresentou um valor excessivamente alto para o erro de localização ($EML = 114,34$), devido provavelmente à perda de rastreamento em uma parte da trajetória. Este resultado refletiu também sobre o desvio-padrão, mostrado na Fig. 5.14.

Finalmente, as Figuras 5.19 a 5.34 reúnem os resultados obtidos neste capítulo com os resultados do Capítulo 4, referentes às técnicas *OnOff* e *NEMPS*. O objetivo é obter uma visão geral, comparativa, acerca dos desempenhos de todas as técnicas de localização abordadas nesta tese. Todas as curvas são levantadas na situação em que o estado LOS/NLOS do canal é conhecido perfeitamente a cada instante de tempo. Da Figura 5.19 a 5.26, os resultados para EKF e PF referem-se às simulações com o modelo correto para o erro de NLOS (curvas “EKF” e “PF”), e a partir da Fig. 5.27 as comparações são feitas para as curvas “EKF_{10%}” e “PF_{10%}”. Lista-se a seguir as principais observações tiradas deste conjunto de figuras.

- Quando se conhece perfeitamente a estatística do erro de NLOS, e a trajetória é retilínea, a localização com EKF e PF consegue desempenho bem superior às demais (Figs. 5.19 e 5.23). Constata-se uma diferença em μ_{EML} de aproximadamente 40 m. Na trajetória 2, a diferença cai devido à imprecisão do modelo de movimento usado para as técnicas PF e EKF. Observa-se na Fig. 5.20 que para alguns valores de σ_0 a técnica *OnOff* chega a igualar ou superar o método de localização com EKF, que se mostrou mais suscetível à mudança de trajetória.
- Dentre todas as curvas mostradas, o melhor resultado em termos de μ_{EML} e σ_{EML} foi conseguido pelo método com EKF, mostrado nas Figs. 5.19 e 5.21. A estimativa com PF nas mesmas condições produziu resultados ligeiramente inferiores.
- Nas Figuras 5.21,5.22 e 5.25,5.26 nota-se que a estimativa obtida com a técnica *NEMPS* apresenta desvio-padrão *comparável* ao observado para as técnicas EKF e PF em $\bar{L} = 100$, e *superior* quando $\bar{L} = 300$, para ambas as trajetórias.
- As Figuras 5.27,5.28 e 5.31,5.32 mostram que a técnica *NEMPS* passa a apresentar um desempenho melhor do que o método de estimação com EKF, quando este é implementado sem a equação correta para

a evolução do erro de NLOS. Na realidade, nesta condição, o método EKF passa a ser a pior alternativa para a localização do terminal.

- A estimativa com PF, por sua vez, mesmo implementada com o modelo errado para o vetor δ_k , continua apresentando desempenho superior em relação às técnicas *OnOff* e *NEMPS*, na maior parte dos cenários considerados.

5.6

Resumo do capítulo

Neste capítulo propõe-se o emprego de técnicas de estimação bayesianas recursivas para a determinação da posição de um terminal em movimento. Os algoritmos *Filtro de Kalman Estendido* e *Filtro de Partículas* foram implementados para a estimação do vetor de estados aumentado $\tilde{\mathbf{z}}_k = [\mathbf{z}_k^T \ \delta_k^T \ \Delta_k^T]^T$, onde \mathbf{z}_k é o vetor de interesse, e $[\delta_k, \Delta_k]$ representam o erro de NLOS, o qual é caracterizado por um processo AR de primeira ordem com média dada por Δ_k .

As expressões 5-6 e 5-7 constituem as equações de processo e de medida para o vetor $\tilde{\mathbf{z}}_k$, e com base nestas, a formulação do EKF é desenvolvida para estimar recursivamente a localização do terminal. Por sua vez, o filtro de partículas representa um método de Monte-Carlo para estimativa do vetor de estados, e portanto não pode ser diretamente aplicado para estimar Δ_k , que contém componentes *estáticas* (constantes) ao longo do período de duração do estado de NLOS. A solução aqui adotada foi particionar o vetor $\tilde{\mathbf{z}}_k$ em dois *sub-vetores*, sendo um deles o vetor Δ_k , cuja estimação é realizada por um filtro de Kalman, e o outro *sub-vetor* formado pelo par $[\mathbf{z}_k^T \ \delta_k^T]^T$, estimado pelo filtro de partículas. Os algoritmos interagem da forma ilustrada pela Figura 5.2, e conseguem propagar recursivamente as estimativas dos estados que compõem o vetor $\tilde{\mathbf{z}}_k$.

Os métodos propostos são implementados e os seus desempenhos avaliados considerando-se os mesmos cenários de simulação do Capítulo 4. Admite-se que o estado LOS/NLOS do canal ao longo do tempo é conhecido perfeitamente, mas a equação AR que caracteriza a evolução do vetor δ_k pode ser definida incorretamente na implementação dos algoritmos. Esta situação é simulada para avaliar a robustez dos métodos à imprecisão do modelo definido para o erro de NLOS.

Das curvas obtidas, observa-se que os esquemas de localização com EKF e PF são notavelmente eficientes quando as equações de processo definidas para os algoritmos refletem a *real* dinâmica das variáveis (x_k, y_k)

e δ_k . Quando isto não ocorre, o desempenho é degradado. O desempenho do EKF é bem mais suscetível, apresentando uma diferença de cerca de 80 m no valor de μ_{EML} entre o cenário ideal (Fig. 5.3, curva “EKF”) e o menos favorável (Fig. 5.4, curva “EKF_{10%}”). Em uma comparação similar, verifica-se que a implementação com PF mostrou ser bem mais robusta à imprecisão do modelo. Por outro lado, é uma alternativa que demanda uma carga computacional mais elevada para executar o rastreamento.

Da comparação realizada entre os métodos *OnOff* e *NEMPS* com os métodos desenvolvidos neste capítulo, observa-se que a técnica EKF e PF são as melhores alternativas se os algoritmos forem implementados com modelos precisos para as equações de estado. Caso contrário, a técnica *NEMPS* passa a ter, em termos de μ_{EML} , um desempenho melhor do que a EKF e um pouco inferior ao obtido com PF. Sob o aspecto de uniformidade dos resultados, quantificado por σ_{EML} , o método *NEMPS*, de maneira geral, apresentou melhor desempenho.

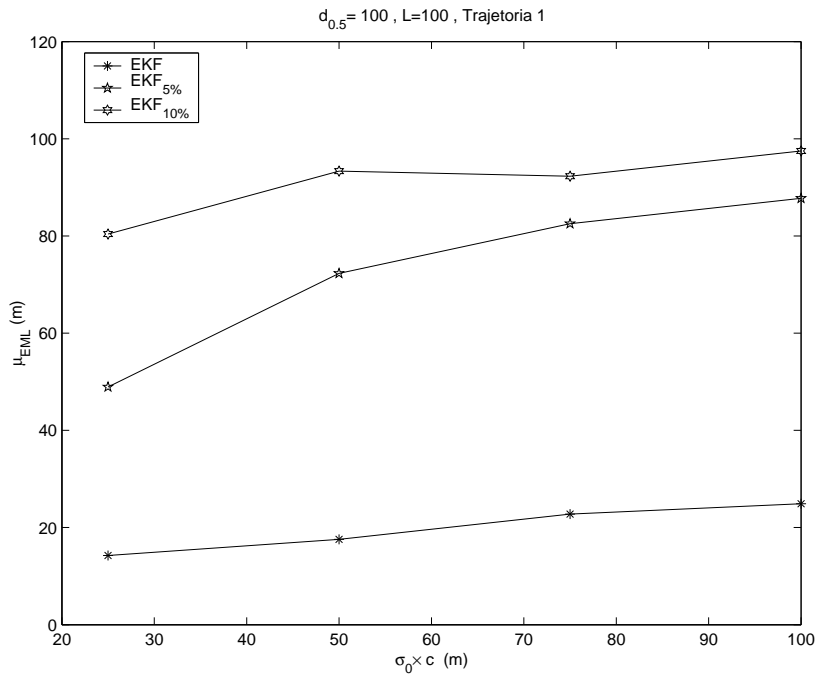


Figura 5.3: Média de EML para estimação por EKF em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 1.

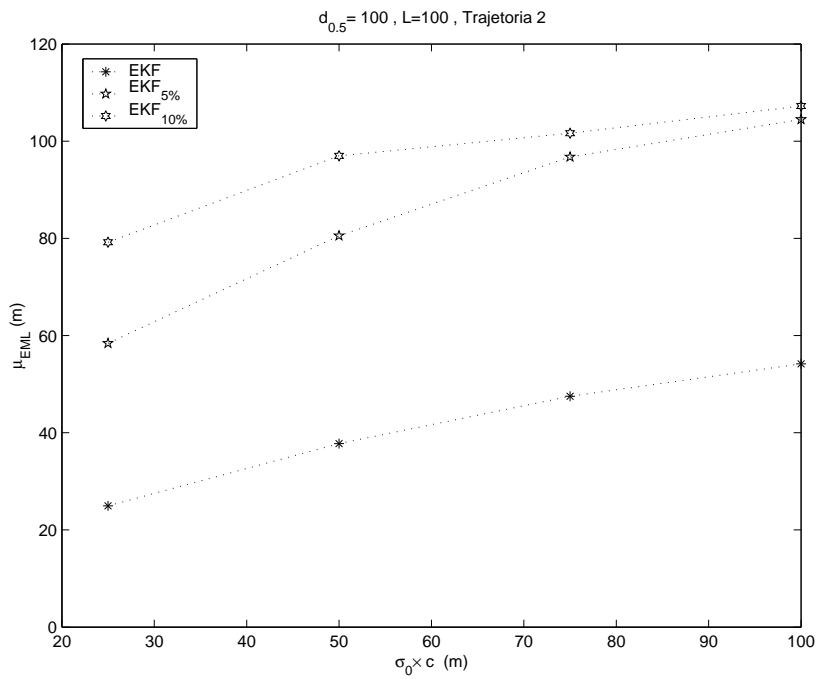


Figura 5.4: Média de EML para estimação por EKF em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 2.

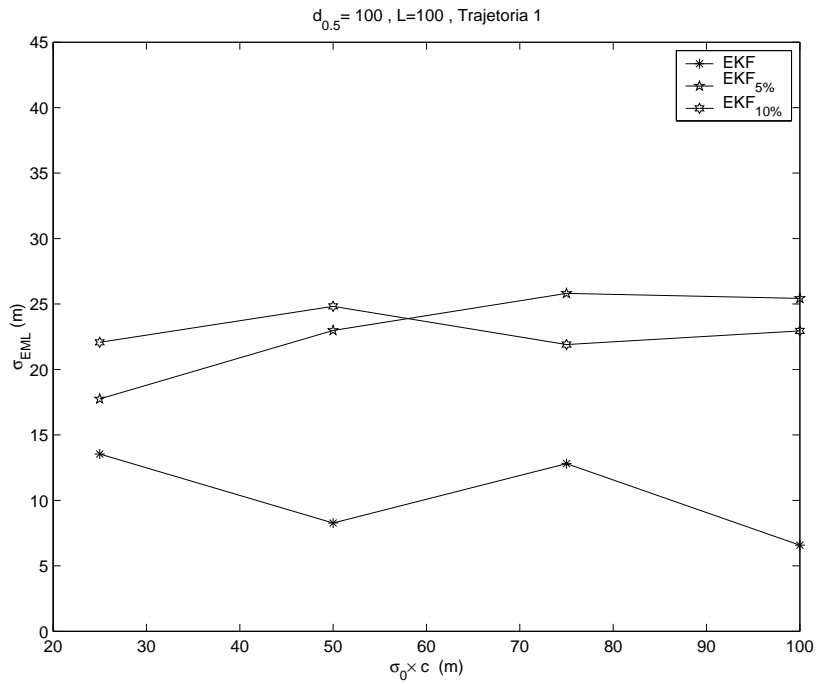


Figura 5.5: Desvio-padrão de *EML* para estimação por EKF em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 1.

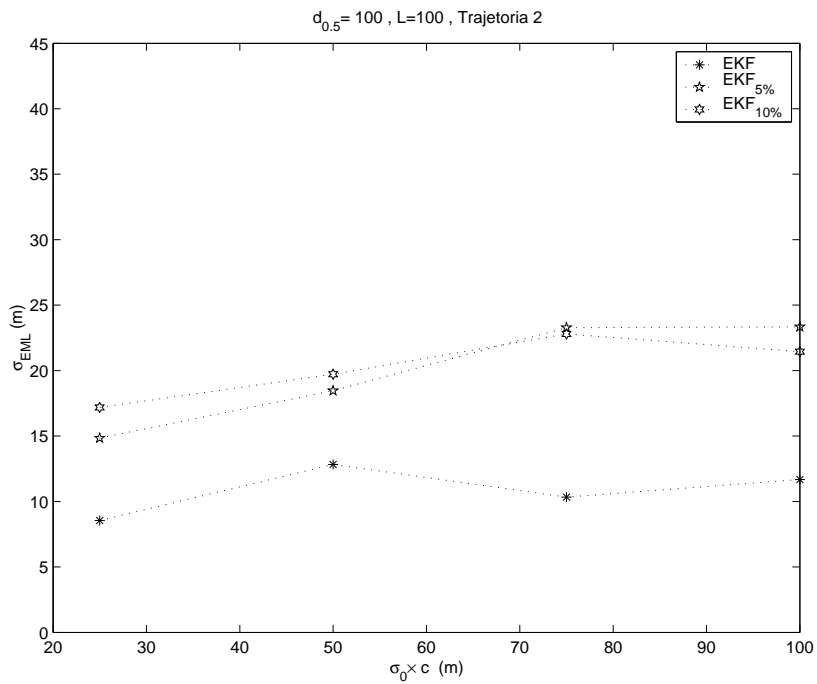


Figura 5.6: Desvio-padrão de *EML* para estimação por EKF em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 2.

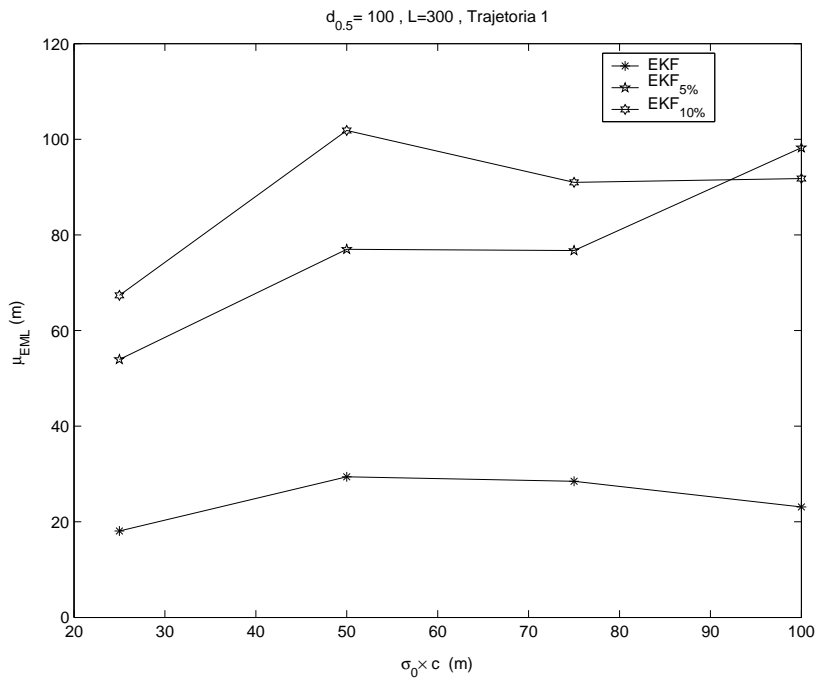


Figura 5.7: Média de EML para estimação por EKF em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 1.

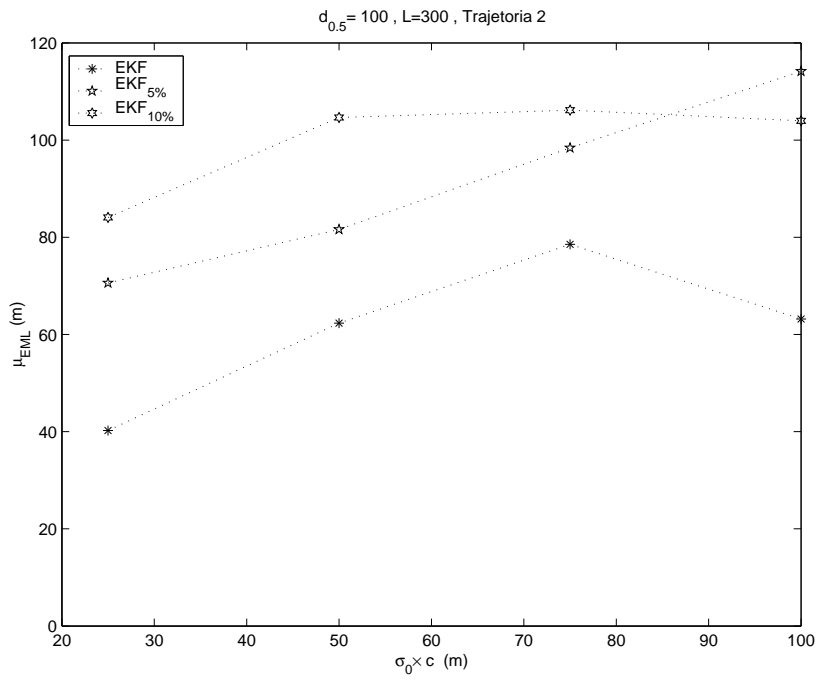


Figura 5.8: Média de EML para estimação por EKF em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 2.

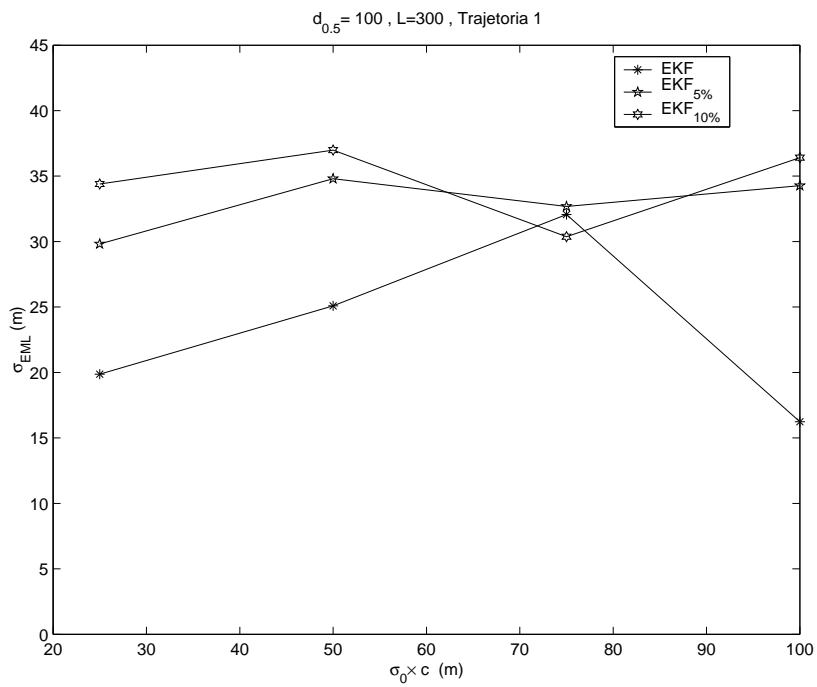


Figura 5.9: Desvio-padrão de EML para estimação por EKF em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 1.

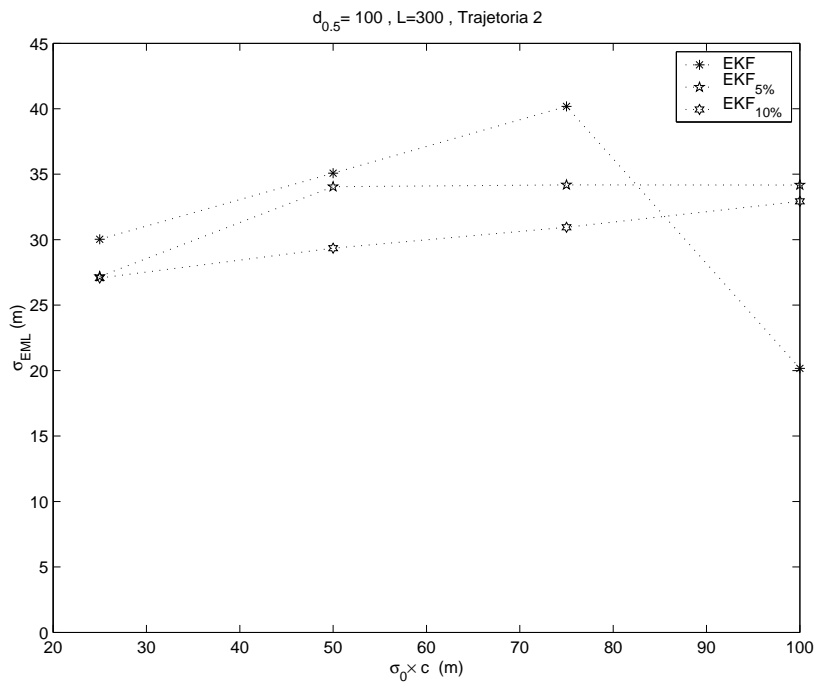


Figura 5.10: Desvio-padrão de EML para estimação por EKF em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 2.

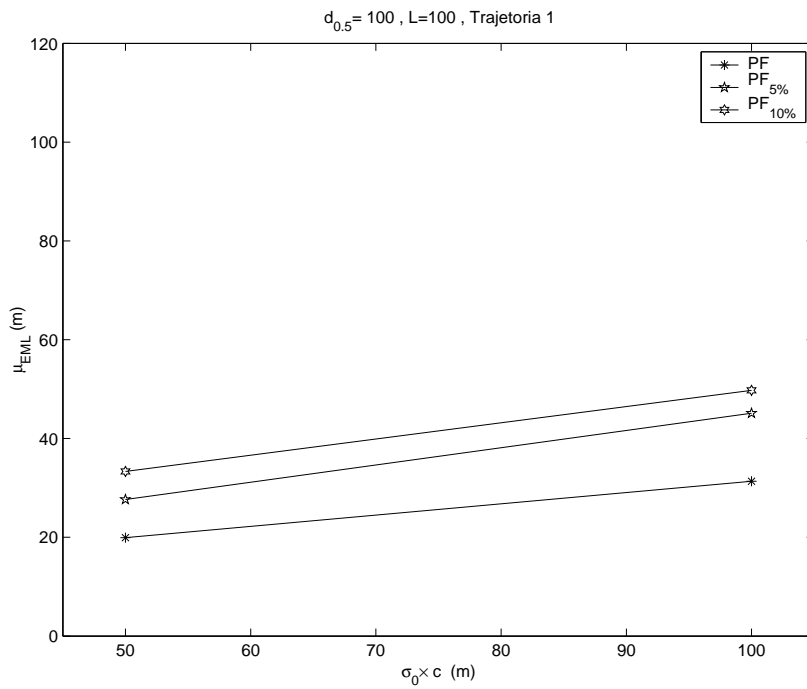


Figura 5.11: Média de *EML* para estimação por PF em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 1.

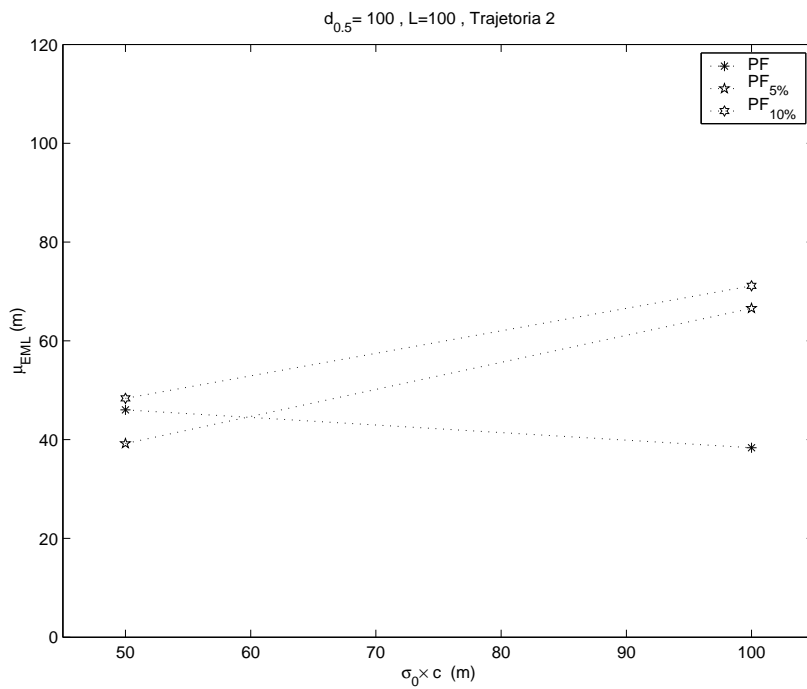


Figura 5.12: Média de *EML* para estimação por PF em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 2.

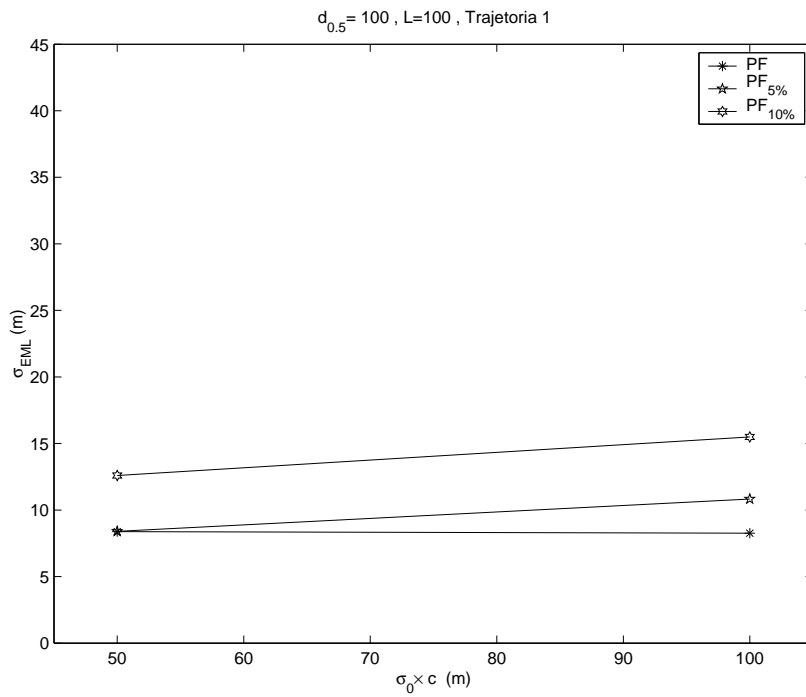


Figura 5.13: Desvio-padrão de EML para estimação por PF em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 1.

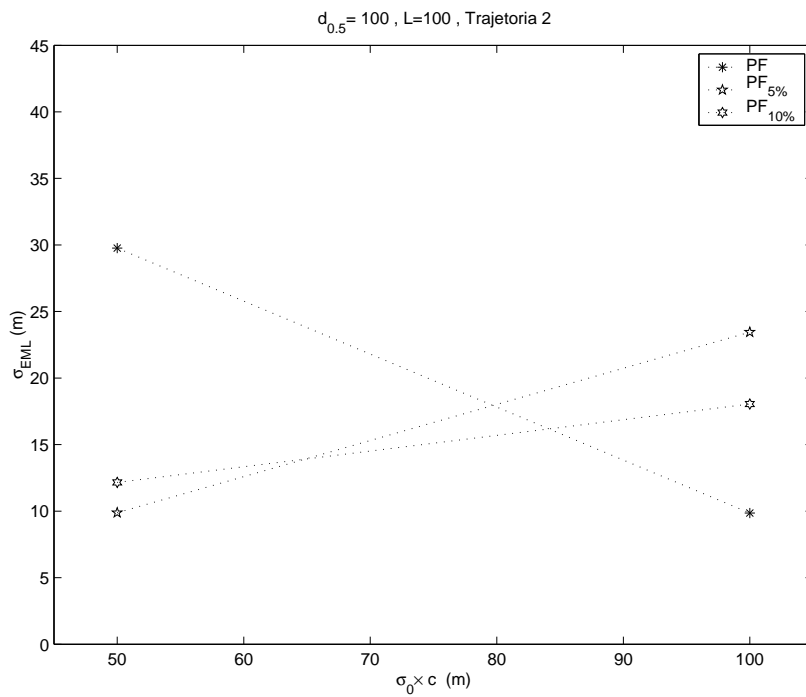


Figura 5.14: Desvio-padrão de EML para estimação por PF em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 2.

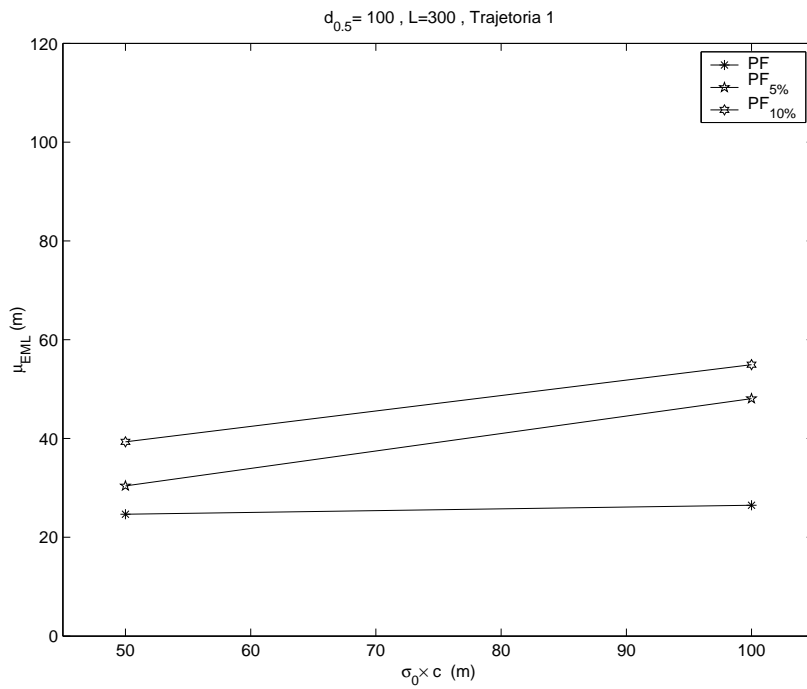


Figura 5.15: Média de *EML* para estimação por PF em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 1.

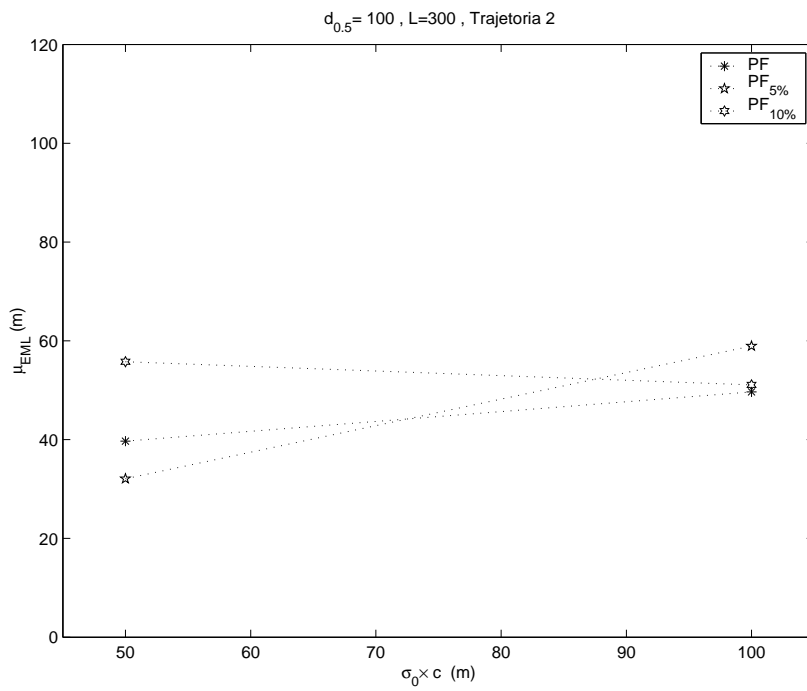


Figura 5.16: Média de *EML* para estimação por PF em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 2.

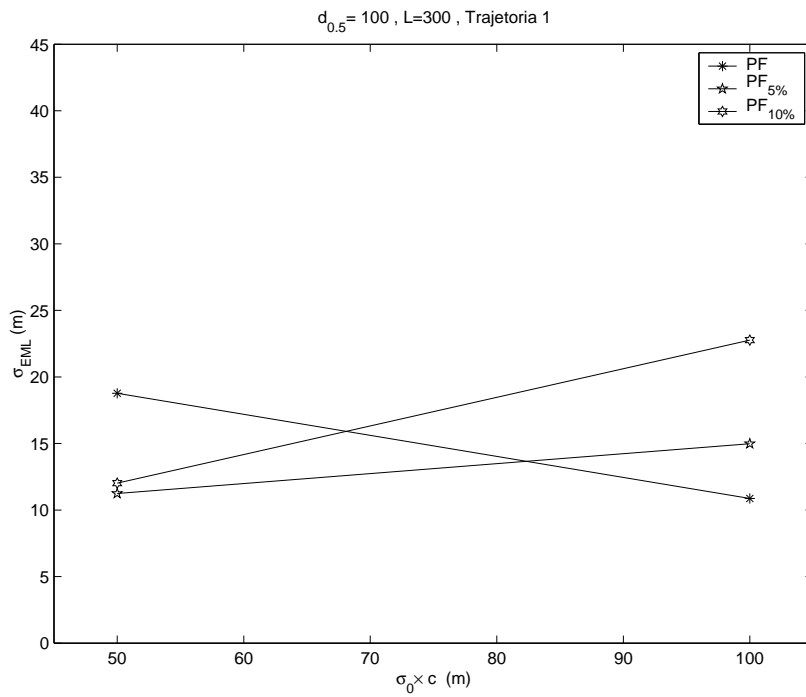


Figura 5.17: Desvio-padrão de EML para estimação por PF em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 1.

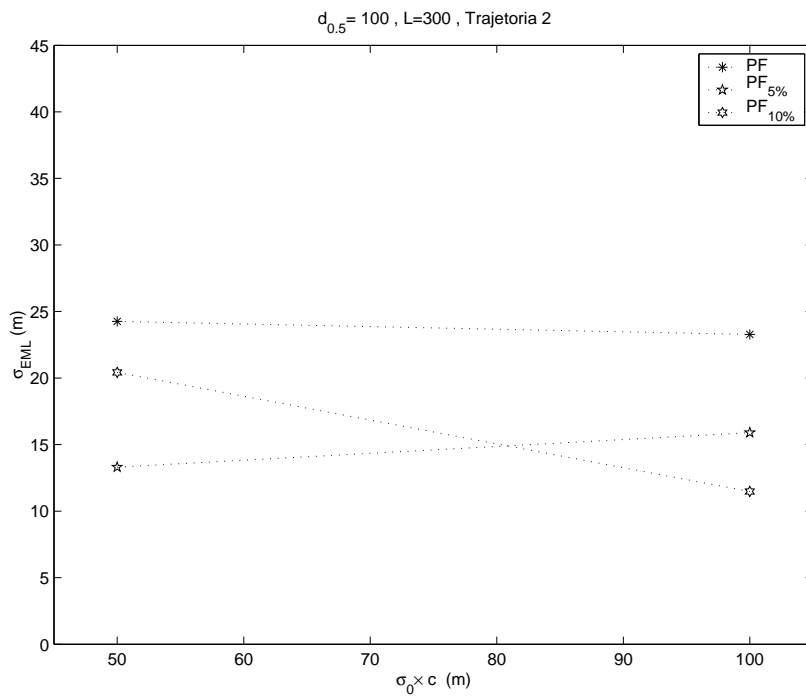


Figura 5.18: Desvio-padrão de EML para estimação por PF em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 2.

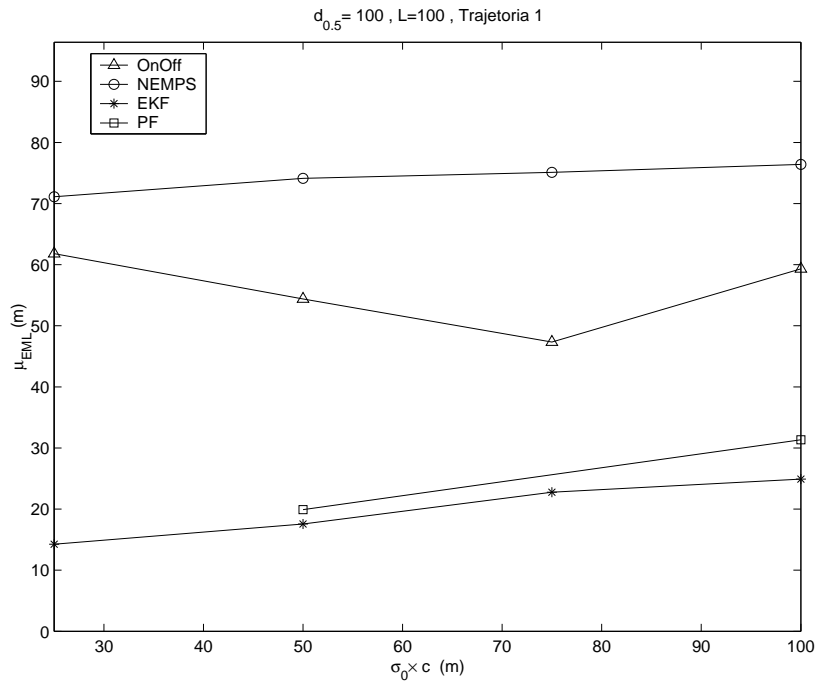


Figura 5.19: Média de *EML* obtida para as técnicas *NEMPS*, *OnOff*, PF e EKF, no caso em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 1.

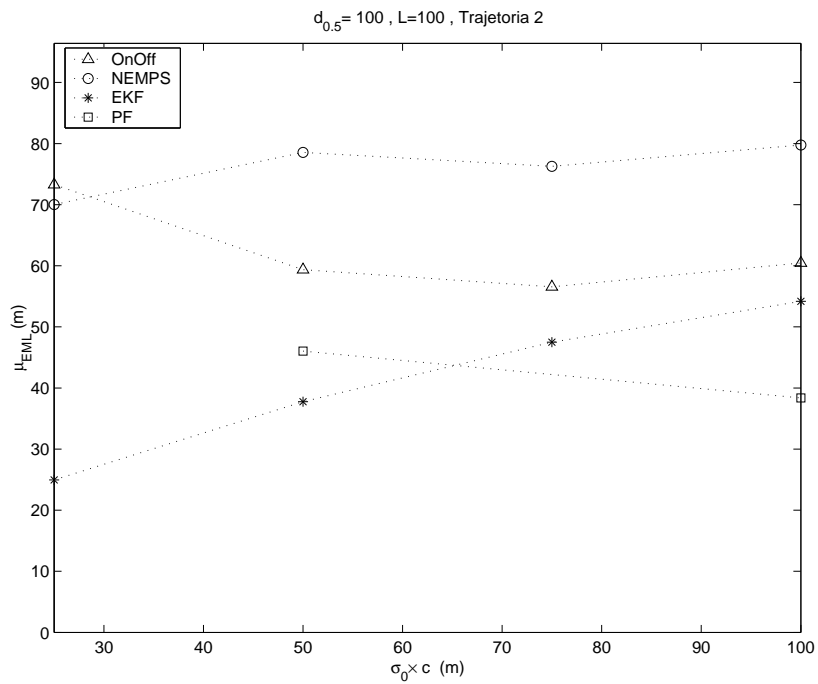


Figura 5.20: Média de *EML* obtida para as técnicas *NEMPS*, *OnOff*, PF e EKF, no caso em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 2.

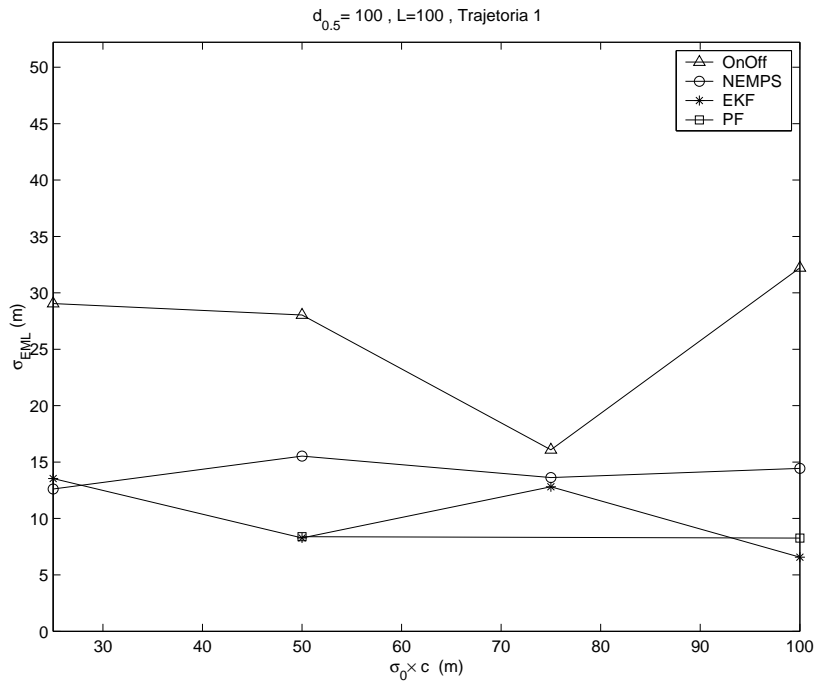


Figura 5.21: Desvio-padrão de EML obtido para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EFK, no caso em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 1.

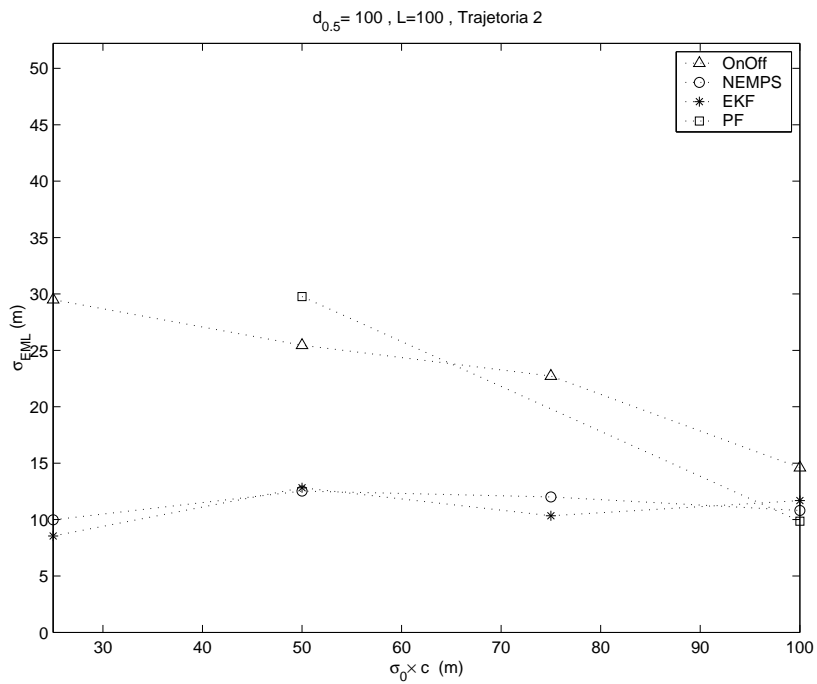


Figura 5.22: Desvio-padrão de EML obtido para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EFK, no caso em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 2.

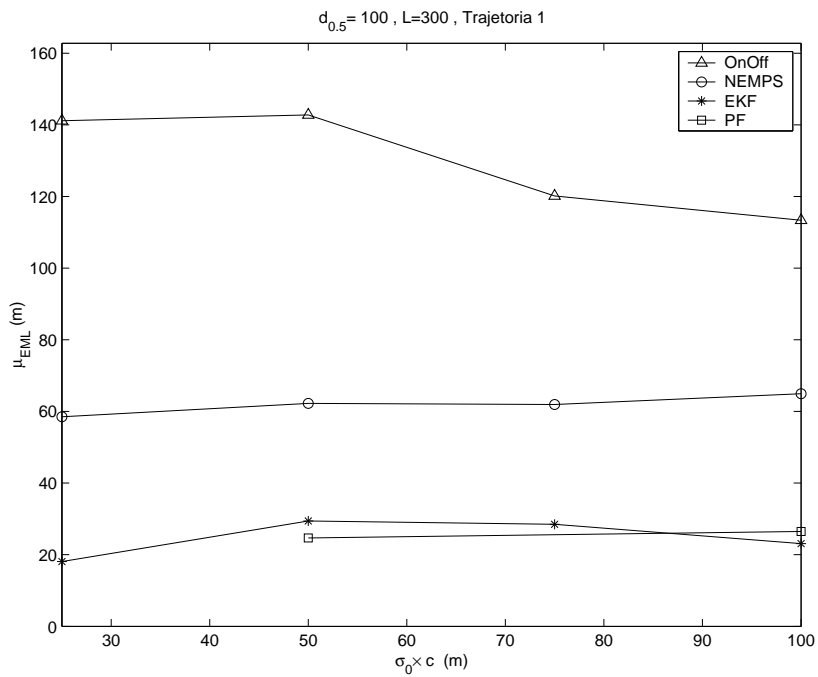


Figura 5.23: Média de EML obtida para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EKF , no caso em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 1.

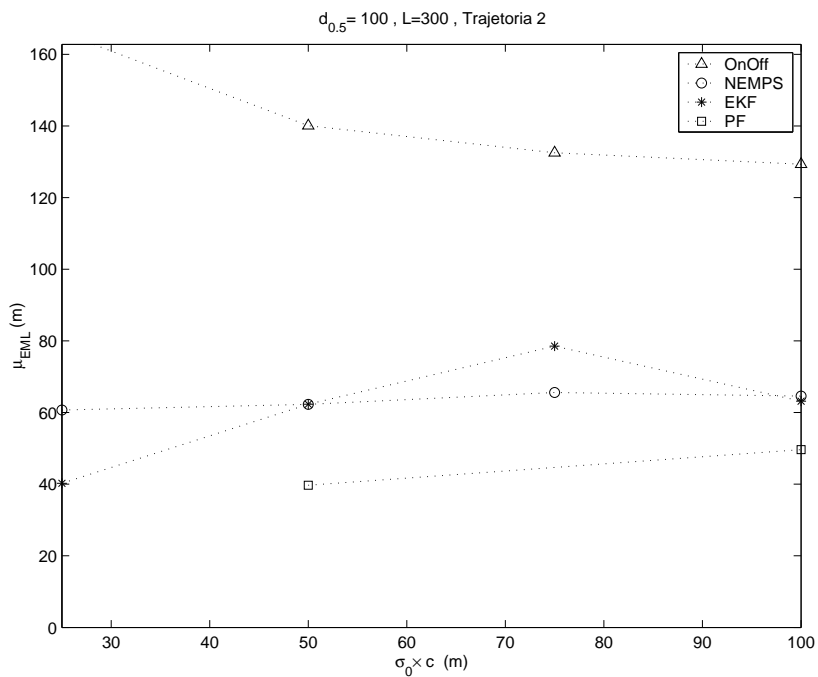


Figura 5.24: Média de EML obtida para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EKF , no caso em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 2.

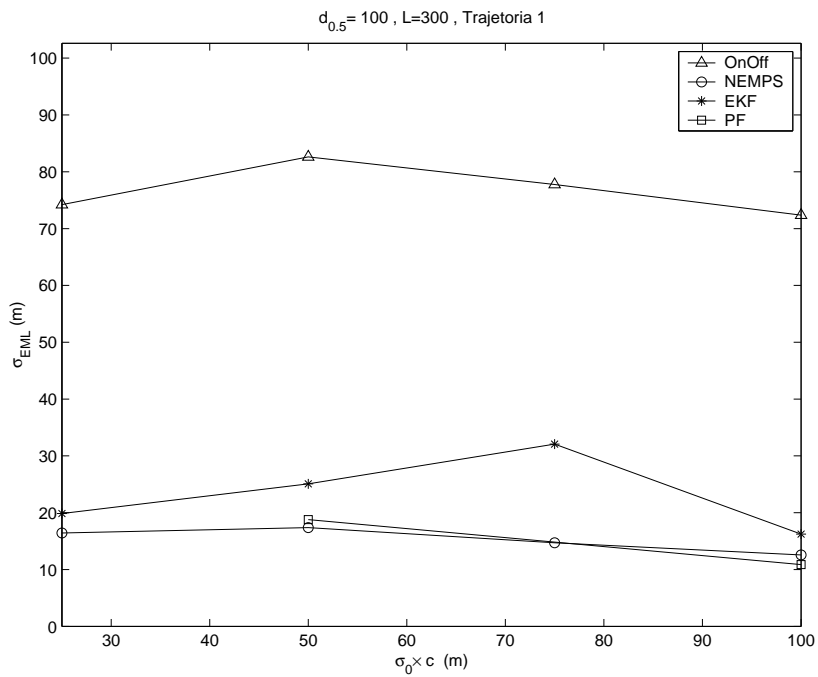


Figura 5.25: Desvio-padrão de EML obtido para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EFK, no caso em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 1.

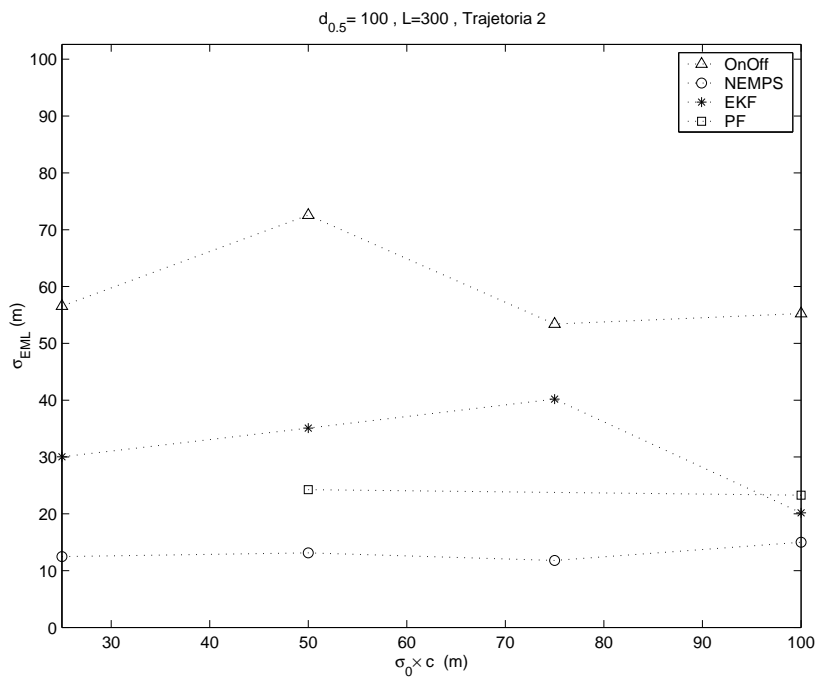


Figura 5.26: Desvio-padrão de EML obtido para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EFK, no caso em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 2.

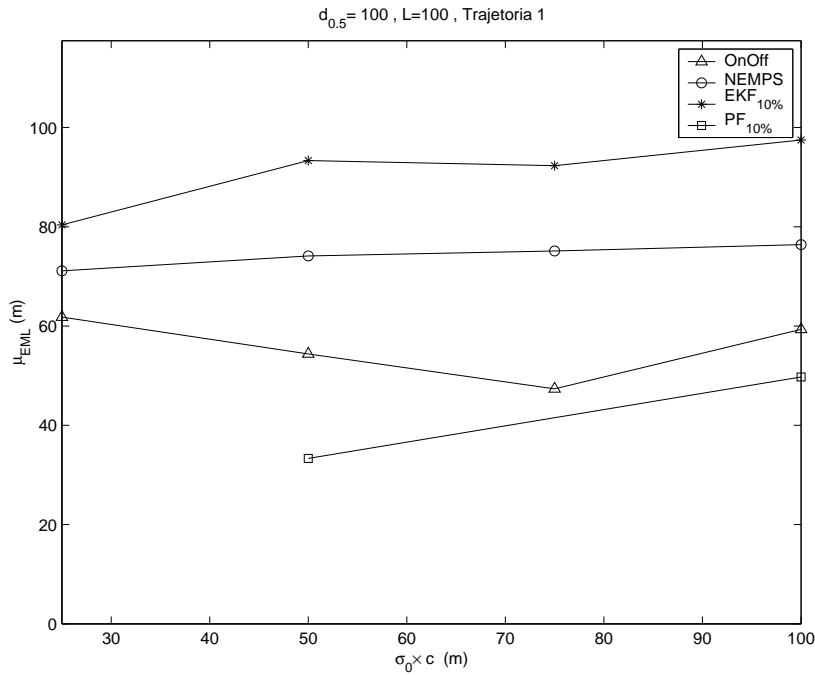


Figura 5.27: Média de EML obtida para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EKF , sendo as duas últimas implementadas com erro na definição da equação de processo para o erro de NLOS $((\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) = (1, 1\sigma_\nu^2, 0, 9a))$, no caso em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 1.

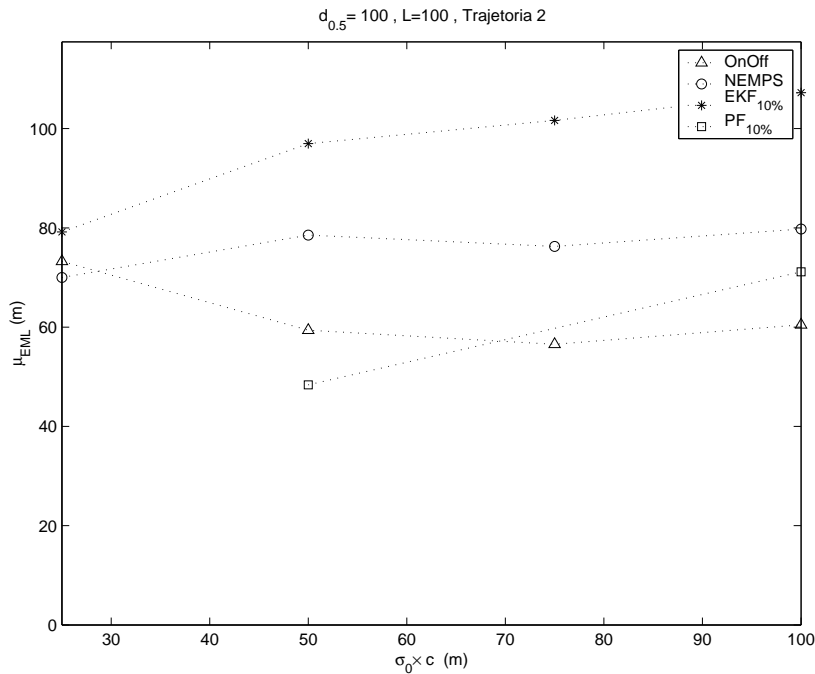


Figura 5.28: Média de EML obtida para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EKF , sendo as duas últimas implementadas com erro na definição da equação de processo para o erro de NLOS $((\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) = (1, 1\sigma_\nu^2, 0, 9a))$, no caso em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 2.

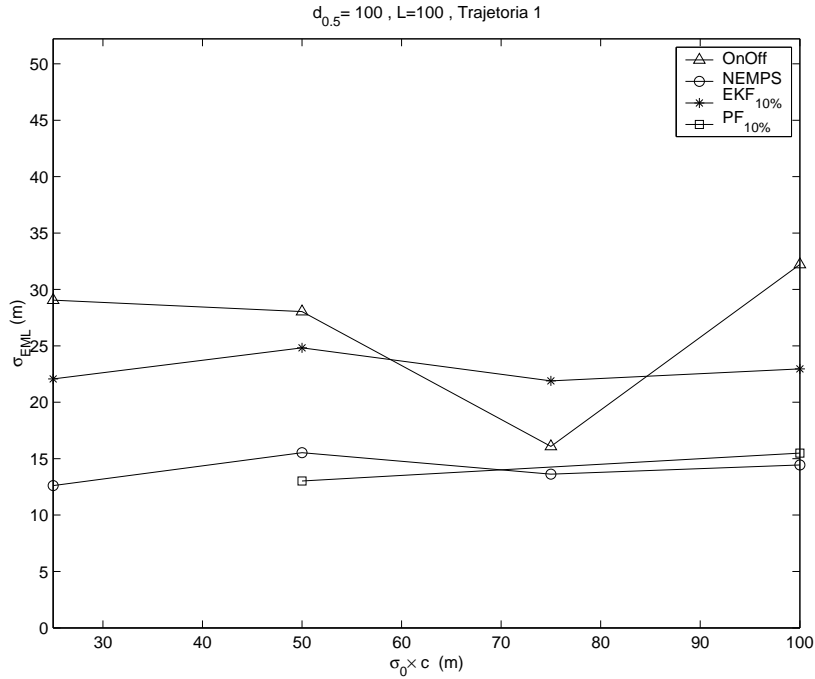


Figura 5.29: Desvio-padrão de EML obtido para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EFK, sendo as duas últimas implementadas com erro na definição da equação de processo para o erro de NLOS $((\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) = (1, 1\sigma_\nu^2, 0, 9a))$, no caso em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 1.

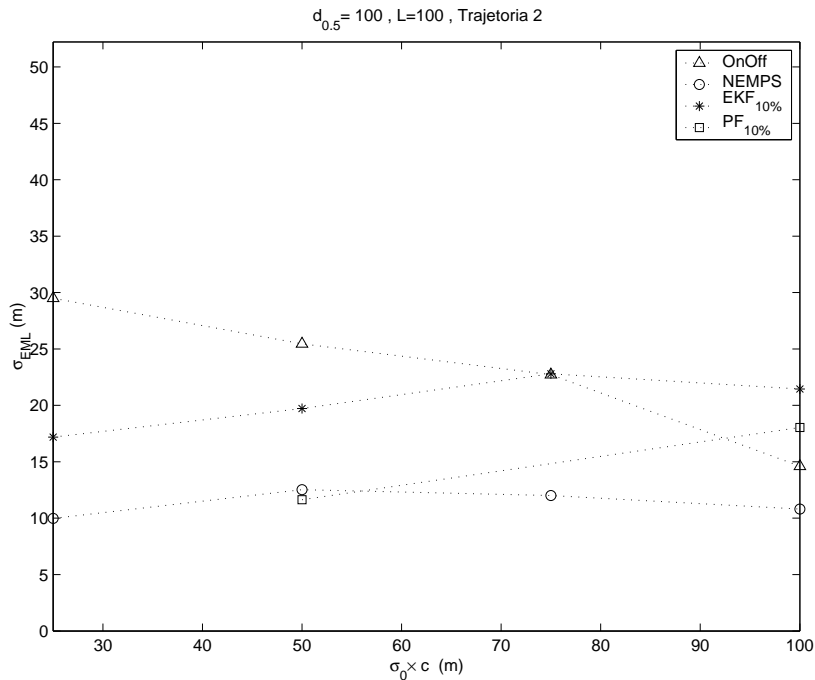


Figura 5.30: Desvio-padrão de EML obtido para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EFK, sendo as duas últimas implementadas com erro na definição da equação de processo para o erro de NLOS $((\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) = (1, 1\sigma_\nu^2, 0, 9a))$, no caso em que $\bar{L} = 100$ na Trajetória 2.

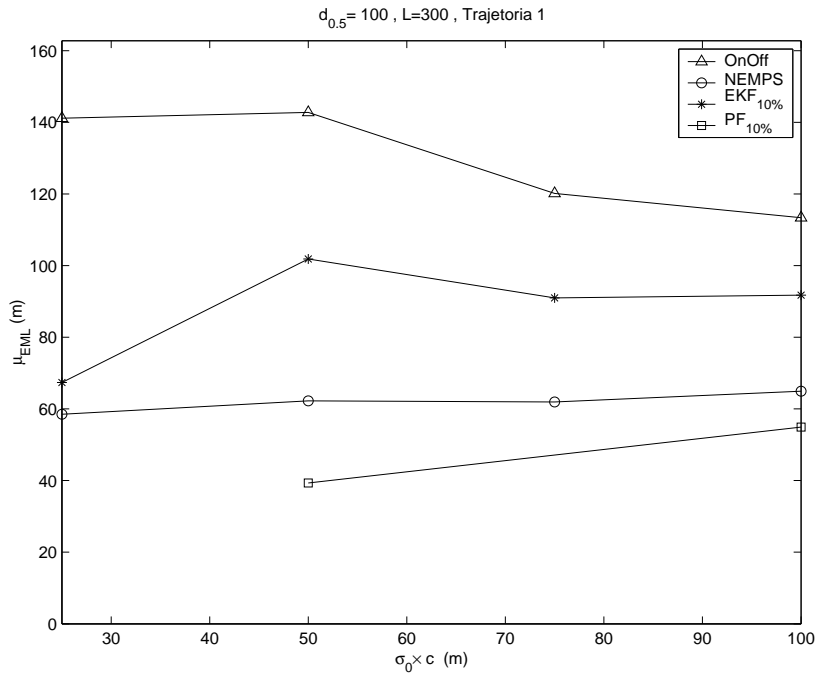


Figura 5.31: Média de EML obtida para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EKF , sendo as duas últimas implementadas com erro na definição da equação de processo para o erro de NLOS $((\hat{\sigma}_v^2, \hat{a}) = (1, 1\sigma_v^2, 0, 9a))$, no caso em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 1.

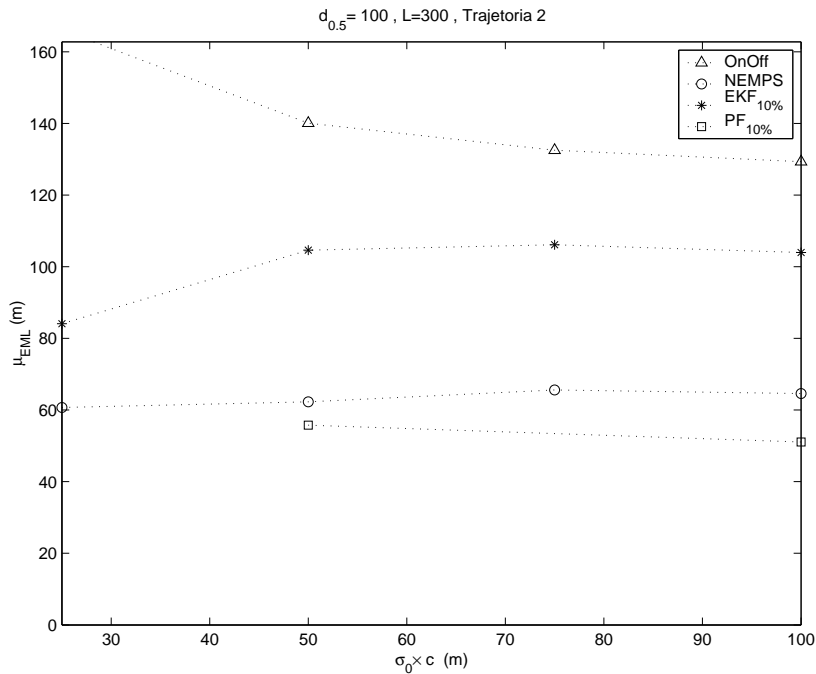


Figura 5.32: Média de EML obtida para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EKF , sendo as duas últimas implementadas com erro na definição da equação de processo para o erro de NLOS $((\hat{\sigma}_v^2, \hat{a}) = (1, 1\sigma_v^2, 0, 9a))$, no caso em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 2.

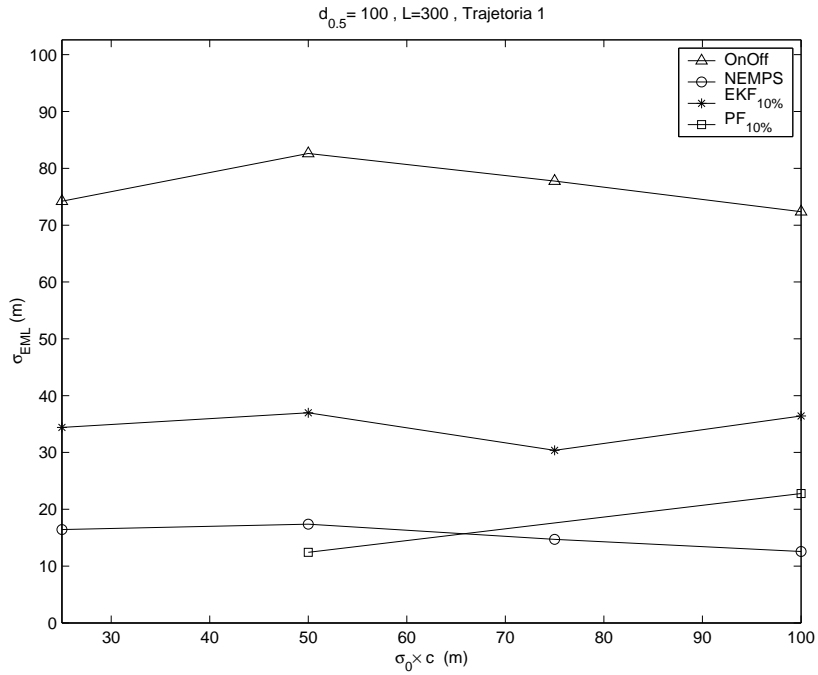


Figura 5.33: Desvio-padrão de EML obtido para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EKF , sendo as duas últimas implementadas com erro na definição da equação de processo para o erro de NLOS $((\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) = (1, 1\sigma_\nu^2, 0, 9a))$, no caso em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 1.

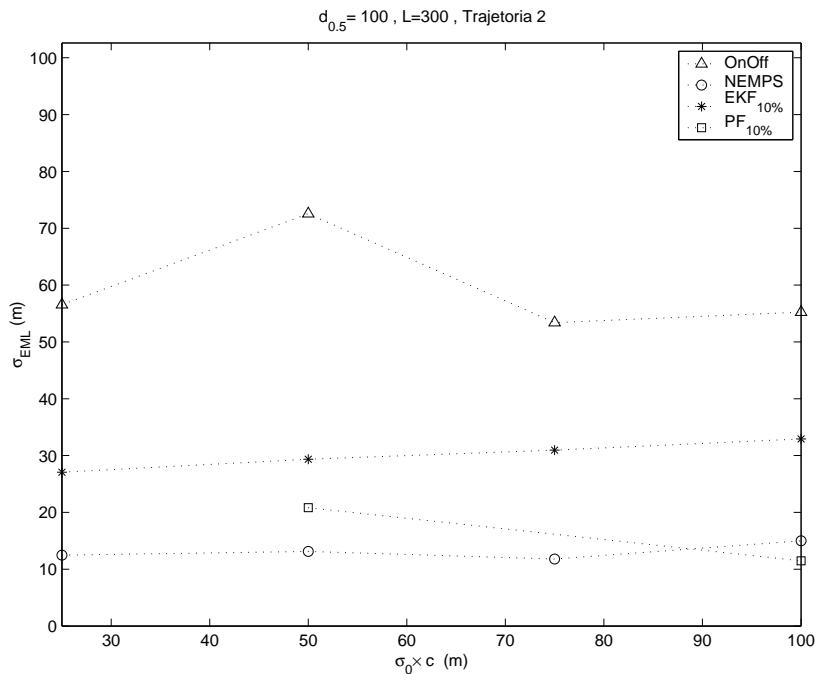


Figura 5.34: Desvio-padrão de EML obtido para as técnicas $NEMPS$, $OnOff$, PF e EKF , sendo as duas últimas implementadas com erro na definição da equação de processo para o erro de NLOS $((\hat{\sigma}_\nu^2, \hat{a}) = (1, 1\sigma_\nu^2, 0, 9a))$, no caso em que $\bar{L} = 300$ na Trajetória 2.