



Hugo Hoffmann Borges

Construindo Tableaux para Lógica Linear Intuicionista

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Lógica e Filosofia da Linguagem, do Departamento de Filosofia da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Luiz Carlos P. D. Pereira

Rio de Janeiro
Março de 2022



Hugo Hoffmann Borges

Construindo Tableaux para Lógica Linear Intuicionista

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Lógica e Filosofia da Linguagem da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Luiz Carlos P. D. Pereira

Orientador

Departamento de Filosofia – PUC-Rio

Prof. Jean-Baptiste Joinet

Lyon III

Prof. Edward Hermann Haeuler

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

Prof. Jefferson Santos

FGV

Rio de Janeiro, 11 de Março de 2022

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Hugo Hoffmann Borges

Graduado em Filosofia pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Hoffmann Borges, Hugo

Construindo Tableaux para Lógica Linear Intuicionista / Hugo Hoffmann Borges; orientador: Luiz Carlos P. D. Pereira. – 2022.

120 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Filosofia, 2022.

Inclui bibliografia

1. Filosofia – Teses. 2. Lógica e Filosofia da Linguagem – Teses. 3. Lógica Linear. 4. Lógica Relevante. 5. Teoria da Prova. 6. Tableaux.
I. P. D. Pereira, Luiz Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Filosofia. III. Título.

CDD: 620.11

Agradecimentos

Gostaria de primeiramente agradecer ao professor Luiz Carlos, sem o qual esta dissertação não seria possível.

Agradeço ao Capes/CNPq pelo financiamento desta pesquisa. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço o companherismo e incentivo dos meus amigos Allan, Chico, German, Guilherme, Joaquim e Victor.

Resumo

Hoffmann Borges, Hugo; P. D. Pereira, Luiz Carlos. **Construindo Tableaux para Lógica Linear Intuicionista**. Rio de Janeiro, 2022. 120p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo desta dissertação é construir um tableaux linear intuicionista a partir de um cálculo de seqüentes relevante clássico. Os passos principais dessa construção são: i) tradução das regras do cálculo dos seqüentes relevante clássico para regras de tableaux (capítulo 3), usando a estratégia apresentada por D'Agostino et al. em *Tableau Methods for Substructural Logic*. ii) construção de um tableaux linear clássico através da "linearização" do tableaux clássico relevante (capítulo 4). iii) apresentar um tableau intuicionista ao estilo Fitting, em que são adicionados rótulos 'T's e 'F's às fórmulas (capítulo 5).

Palavras-chave

Lógica Linear; Lógica Relevante; Teoria da Prova; Tableaux;.

Abstract

Hoffmann Borges, Hugo; P. D. Pereira, Luiz Carlos (Advisor).
Building Tableaux for Intuitionistic Linear Logic. Rio de Janeiro, 2022. 120p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main goal of this master thesis is intuitionistic linear tableaux from a relevant sequent calculus. The central steps are: i) Apply D'Agostino et al. strategy to translate classical relevant sequent calculus rules to tableaux rules for classical relevant logic (Chapter 3). ii) Use Meyer et al. strategy to "linearize" the classical relevant tableaux (Chapter 4). iii) Build a new intuitionistic linear tableaux with Fitting labels.

Keywords

Linear Logic; Proof Theory; Relevant Logic; Tableau.

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Proposições como Recursos	15
1.2	Sintaxe e Sistemas Dedutivos	16
1.3	Semântica	19
1.3.1	Menu de Lafont	20
1.4	Natureza Construtiva	21
1.5	Fragmentos da Lógica Linear e Decidibilidade	23
2	Lógica Relevante	24
2.1	A Relação entre Lógica Relevante e Lógica Linear	24
2.2	Um pouco de História Relevante	25
2.3	Linguagem e Sistemas Dedutivos	26
2.3.1	Dedução Natural Relevante	26
2.3.2	Cálculo de Sequentes Relevante	28
3	Construindo Tableaux Relevante	29
3.1	Tradução de Regras	30
3.2	Observação sobre as Regras dos Operadores	39
3.3	Corretude e Completude	41
3.3.1	Exemplos de Tradução	66
4	Linearizando o Tableaux Relevante	68
4.1	Tableaux Linear Livre de Exponenciais	68
4.2	Adicionando as Regras para Operadores Exponenciais	69
4.3	Corretude e Completude	74
5	Tableaux Linear Intuicionista	88
5.1	Tableaux Linear Intuicionista à la Fitting	88
5.2	Corretude e Completude para o Tableaux Sintático à la Fitting	94
5.3	Tradução de Derivações	96
6	Conclusão e Trabalhos Futuros	118
7	Referências	119

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de Abreviaturas

Cs: Cálculo de Sequentes

Tx: Tableaux

Dn: Dedução Natural

L_C : Lógica Clássica

L_I : Lógica Intuicionista

L_M : Lógica Minimal

L_R : Lógica Relevante

L_{Rc} : Lógica Relevante Clássica

L_L : Lógica Linear

L_{Lc} : Lógica Linear Clássica

L_{Li} : Lógica Linear Intuicionista

*Sem a matemática não podemos penetrar no
fundo da filosofia.*

*Sem filosofia não podemos penetrar no fundo
da matemática.*

*Sem as duas não penetramos no fundo de
nada.*

Leibniz, .

1

Introdução

A lógica linear, com sua breve história de quase 35 anos, mostrou-se um terreno fértil para exploração intelectual, seja no campo teórico da lógica e da matemática, seja no campo da prática da teoria da computação e da física. O objetivo desta breve introdução não é fazer um levantamento do grande número de artigos e livros já escritos sobre o assunto, muito menos apresentar um "guia definitivo". Nosso objetivo aqui é apresentar um *road map* dos principais aspectos da lógica linear, ou seja, mostrar ao leitor quais são os principais caminhos que um lógico pode tomar para se instruir sobre o tema.

A lógica linear surge em 1987 com o artigo seminal “Linear Logic” de J. Y. Girard. Tal lógica surge a partir de uma análise semântica sobre *type-theoretical models* no sistema F. De um ponto de vista mais geral, o desenvolvimento da lógica linear, tendo em vista seu sistema dedutivo em cálculo de seqüentes, propõe um refinamento, em um único sistema, tanto de sistemas clássicos quanto intuicionistas. O sistema proposto busca conciliar tanto propriedades clássicas, como simetria dos seqüentes, funcionamento involutivo da negação e a interdefinibilidade dos operadores ao mesmo tempo em que exige propriedades intuicionistas, como o caráter construtivo das provas e o silogismo disjuntivo.

A lógica linear pertence a uma família de lógicas chamadas *lógicas sub-estruturais*. Esse grupo de lógicas não-clássicas se caracteriza pelo descarte de regras estruturais presentes no cálculo de seqüentes para a lógica clássica. A lógica linear, em particular, abre mão do uso irrestrito das regras de contração e atenuação (*weakening*).

Uma das novidades da lógica linear é a divisão dos seus operadores em aditivos [$\&$, $\oplus$], multiplicativos [$\otimes$, $\wp$, $\multimap$] e exponenciais [$!$, $?$]. A separação entre operadores aditivos e multiplicativos se origina na necessidade de diferenciar os contextos em que uma fórmula pode ocorrer na derivação de um seqüente. Enquanto as regras para os operadores aditivos exigem *context-sharing*, gerando uma versão aditiva da conjunção ou avec ($\&$), da disjunção ou plus ($\oplus$) e da implicação¹, as regras dos operadores multiplicativos permitem *context-free*, gerando uma versão multiplicativa da conjunção ou tensor ($\otimes$), da disjun-

¹A adição da implicação aditiva em sistemas para lógica linear não é uma unanimidade entre os lógicos. O próprio Girard formula seu sistema original sem a implicação aditiva, enquanto Troelstra, por exemplo, construiu seu sistema com a versão aditiva da implicação.

ção ou par ($\wp$) e implicação ($\multimap$), ou seja, no caso de regras aditivas de duas premissas, ambos os sequentes, a menos das formulas relevantes para introdução do operador, devem possuir as mesmas formulas. No caso dos operadores multiplicativos, tal restrição é relaxada.

A negação linear ou dual, por sua vez, possui propriedades particulares que a diferenciam tanto da negação clássica quanto da negação intuicionista, uma vez que é construtiva e involutiva ². Podemos entender as proposições da forma $A^\perp$ como marcadores de *ausência de recursos* ³, ou seja, a proposição $A^\perp$ indica que não existe um recurso disponível para produzir A.

A separação dos operadores em aditivos e multiplicativos nos permite entender mais claramente o conflito entre clássicos e intuicionistas a respeito da leitura da disjunção e do terceiro excluído. A versão aditiva da disjunção corresponde à leitura intuicionista da disjunção, desta forma o terceiro excluído aditivo $A \oplus A^\perp$ não é um teorema da lógica linear. A versão aditiva da disjunção preserva a propriedade disjuntiva, ou seja, caso a disjunção aditiva seja um teorema $\vdash A \oplus B$, então ou A é um teorema ou B é um teorema. O terceiro excluído formulado com a disjunção multiplicativa $A \wp A^\perp$, por sua vez, é um teorema da lógica linear e pode ser reduzida à tautologia linear $A \multimap A$, o que é perfeitamente aceito pelo lógico intuicionista ⁴.

A grande novidade da lógica linear é, entretanto, a adição dos operadores exponenciais bang (!) e why not (?). A inclusão destes operadores permite recuperar as regras estruturais que foram descartadas pela restrição sobre o uso das fórmulas. A força dos operadores exponenciais se encontra porém no fato de podermos reconstruir (traduzir) tanto a lógica clássica quanto a lógica intuicionista dentro de um único sistema que possui tanto propriedades construtivas quanto propriedades clássicas. Em outros termos, os teoremas da forma $A \rightarrow B$ da lógica clássica/intuicionista que seriam perdidos por causa da restrição sobre a implicação podem ser recuperados se definirmos um função de tradução **Tr**() que converte a implicação clássica/intuicionista em:

$$Tr(A \rightarrow B) := !Tr(A) \multimap Tr(B) \quad ^5$$

²GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic, Theoretical Computer Science, 50:1, 1987. pp. 1-102.

³MANTEL, Heiko. & OTTEN, Jens. "linTAP: A Tableau Prover for Linear Logic"

⁴Desde que o intuicionista aceita a existência do operador par, o que nem sempre é o caso.

⁵SCHELLINX, Harold. "Some Syntactical Observations in Linear Logic". Journal of Logic and Computation 1 (4) 1991. 537 - 559 pp.

1.1

Proposições como Recursos

A lógica linear, diferentemente da lógica clássica e da lógica intuicionista que enfatizam, respectivamente, a noção de verdade e de prova, se distingue por tratar as formulas como recursos a serem “gastos”. Tal leitura obriga uma mudança sobre a forma como são usadas as hipóteses na demonstração de um teorema. Cada hipótese deve ser usada apenas uma única vez, a menos que esteja acompanhada de determinados operadores modais, os operadores exponenciais ! e ?. Podemos visualizar esta ideia de *recurso* com o seguinte exemplo.⁶ Tradicionalmente, a seguinte inferência é aceita tanto pelo lógico clássico quanto pelo lógico intuicionista:

$$\frac{A \rightarrow B \quad A \rightarrow C}{A \rightarrow (B \wedge C)}$$

Esta inferência diz que se consigo obter B a partir de A e consigo obter C a partir de A, então consigo obter B e C a partir de A. Porém, se considerarmos as proposições como recursos, veremos que o mesmo não se segue. Suponha que A corresponda a seguinte proposição: "Eu tenho um bitcoin", enquanto as proposições B e C correspondem a, respectivamente, "comprar uma pizza" e "comprar uma gravata".

$$\frac{\text{Eu tenho um btc} \rightarrow \text{eu compro uma pizza} \quad \text{Eu tenho um btc} \rightarrow \text{eu compro uma gravata}}{\text{Eu tenho um btc} \rightarrow (\text{eu compro uma pizza e eu compro uma gravata})}$$

Fica claro que, assumindo a posição de que proposições são recursos, a inferência acima não é válida, uma vez que não posso usar o **mesmo** dinheiro para comprar duas coisas distintas (assumindo que tanto a pizza quanto a gravata custem um bitcoin).

Esta mudança de perspectiva sobre a natureza da proposição está fundamentada em uma mudança de interpretação sobre o que as proposições correspondem no mundo. Enquanto, do ponto de vista clássico/intuicionista, as proposições correspondem a uma determinada imagem/ fotografia do mundo, a lógica linear permite interpretar as sentenças como tarefas ou ações⁷ a serem realizadas.

Podemos recuperar a inferência clássica $A \rightarrow B, A \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \wedge C)$ na lógica linear de duas maneiras distintas. A primeira forma é substituir a

⁶Adaptado de OKADA, Mitsuhiro. "An Introduction to Linear Logic: Expressiveness and Phase Semantics". In: DEZANI-CIANCAGLINI, Mariangiola. OKADA, Mitsuhiro. & TAKAHASHI, Masako (ORG.) Mathematical Society of Japan Memoirs vol.2. 1998. pp. 255 - 295.

⁷GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic, its syntax and semantics, Advances in Linear Logic, London Mathematical Society Lecture Notes Series 222, Cambridge University Press 1995.

conjunção tradicional ($\wedge$) pela conjunção aditiva, obtendo a seguinte inferência:

$$\frac{A \multimap B \quad A \multimap C}{A \multimap (B \& C)}$$

Pela leitura linear da conjunção aditiva, sabemos que temos duas opções, B e C, para gastarmos o recurso A, porém, podemos escolher apenas uma das opções, ou B ou C. Do ponto de vista computacional, essa leitura da conjunção aditiva é efetiva em formalizar expressões do tipo "if X, then Y, else Z".

Outra forma de recuperarmos a inferência é pela adição do operador modal *bang* (!) à proposição A e pela substituição da conjunção tradicional pela conjunção multiplicativa. Assim obtemos a seguinte inferência válida na lógica linear:

$$\frac{!A \multimap B \quad !A \multimap C}{!A \multimap (B \otimes C)}$$

Com o operador ! podemos "contornar" a restrição de que a fórmula pode ser utilizada apenas uma vez. Dentro do exemplo com bitcoins, a adição do bang faria com que pudessemos gastar o mesmo bitcoin com coisas diferentes, enquanto a conjunção multiplicativa nos garante que podemos comprar a pizza e a gravata ao mesmo tempo. Do ponto de vista computacional, a adição do operador bang possui um papel bastante relevante, pois permite formalizar a noção de "cópia" dentro da própria linguagem lógica.

1.2

Sintaxe e Sistemas Dedutivos

Nesta seção iremos fazer uma breve apresentação dos principais sistemas dedutivos construídos para a lógica linear. Um sistema dedutivo é um método de construção de provas para uma fórmula ϕ a partir de um conjunto de premissas Γ por meio da aplicação de regras previamente estabelecidas.

Antes de tratarmos dos diferentes sistemas de prova para lógica linear, devemos estabelecer a sintaxe que coordena a construção das fórmulas da linguagem que pretendemos trabalhar. A sintaxe, tanto na linguagem natural quanto nas linguagens formais, é um conjunto de regras que regem a construção de sentenças, determinando quais sequências de símbolos são sentenças bem formadas dotadas de sentido e quais não são. No caso das linguagens formais podemos definir, indutivamente, o conjunto das sentenças bem formadas da nossa linguagem para lógica linear:

1. p é uma sentença bem formada, sendo p atômico.

2. Se A é uma sentença bem formada, então $!A$, $?A$ e $A^\perp$ são sentenças bem formadas.
3. Se A e B são sentenças bem formadas, então $A \& B$, $A \otimes B$, $A \oplus B$, $A \wp B$ e $A \multimap B$ são sentenças bem formadas.
4. Estas são as únicas regras de formação de sentenças.

Agora que sabemos exatamente quais são as sentenças da nossa linguagem, podemos analisar quais são as regras lógicas que podem operar sobre cada uma destas sentenças. O primeiro sistema dedutivo formulado para a lógica linear foi o cálculo de seqüentes construído por Girard ⁸. Os componentes de um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ podem ser definidos de várias formas. Aqui, assim como ao longo da dissertação, iremos considerar que Γ e Δ são *multisets*, ou seja, são conjuntos de fórmulas que permitem repetição.⁹ O seqüente deve ser visto como uma relação de derivação da forma $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n \vdash B_1 \wp B_2 \wp \dots \wp B_m$, ou seja, da conjunção multiplicativa de cada uma das hipóteses $A_1 \dots A_n$, devo ser capaz de derivar ao menos uma das fórmulas $B_1 \dots B_m$.

O cálculo de seqüentes original de Girard foi construído apenas para as regras do lado direito. Para fins de melhor visualização das regras, irei apresentar aqui o sistema de Okada¹⁰, que possui regras para ambos os lados do seqüente.

Axioma:

$$\frac{}{A \Rightarrow A}$$

Regra do Corte:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Sigma \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Regras Lógicas:

Conjunção Aditiva:

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \& B}$$

Conjunção Multiplicativa:

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Sigma \Rightarrow \Lambda, B}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda, A \otimes B}$$

⁸GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic, Theoretical Computer Science, 50:1, 1987. pp. 1-102.

⁹A definição do seqüente por *multisets* é preferível a definição por listas, pois permite o descarte da regra estrutural de permutação.

¹⁰OKADA, Mitsuhiro. "An Introduction to Linear Logic: Expressiveness and Phase Semantics". In: DEZANI-CIANCAGLINI, Mariangiola. OKADA, Mitsuhiro. & TAKAHASHI, Masako (ORG.) Mathematical Society of Japan Memoirs vol.2. 1998. pp. 255 - 295.

Disjunção Aditiva:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B}$$

Disjunção Multiplicativa:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Sigma, B \Rightarrow \Lambda}{A \wp B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wp B}$$

Implicação Multiplicativa:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Sigma \Rightarrow \Lambda}{A \multimap B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda} \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \multimap B}$$

Negação Linear:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, A^\perp \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A^\perp}$$

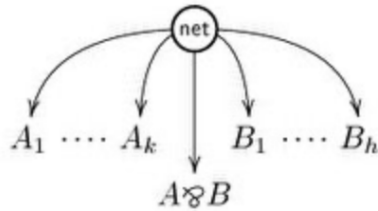
Bang:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \quad \frac{! \Gamma \Rightarrow ? \Delta, A}{! \Gamma \Rightarrow ? \Delta, !A}$$

Why not:

$$\frac{\Gamma, \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta ? A, ? A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ? A} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ? A} \quad \frac{! \Gamma, A \Rightarrow ? \Delta}{! \Gamma, ? A \Rightarrow ? \Delta}$$

Além da formulação em cálculo de seqüentes, Girard¹¹ propôs um novo sistema dedutivo para lógica linear chamado *proof nets*. As *proof nets* consistem em um sistema de representações gráficas, análogo à dedução natural, com múltiplas conclusões que, em comparação ao cálculo de seqüentes, permitem desviar de certas “burocracias”, a saber, o fato das *proof nets* permitirem aplicações de regras em um único passo. Por exemplo a seguinte *proof nets* corresponde, em cálculo de seqüentes, as duas derivações distintas:



¹¹GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic, Theoretical Computer Science, 50:1, 1987. pp. 1-102.

$$\frac{\Rightarrow A_1, B_1, A_2, B_2}{\Rightarrow A_1 \wp B_1, A_2, B_2} \Leftrightarrow \frac{\Rightarrow A_1, B_1, A_2, B_2}{\Rightarrow A_1, B_1, A_2 \wp B_2} \\ \frac{\Rightarrow A_1 \wp B_1, A_2, B_2}{\Rightarrow A \wp B, A_2 \wp B_2} \Leftrightarrow \frac{\Rightarrow A_1, B_1, A_2 \wp B_2}{\Rightarrow A_1 \wp B_1, A_2 \wp B_2}$$

Embora as *proof nets* ainda sejam um tópico de grande interesse - por exemplo, (Hughes and Heijltjes 2016) e (Heijltjes et al. 2018) - e possuam certas vantagens, principalmente em relação ao fragmento MLL(fragmento apenas com operadores multiplicativos), ainda hoje não existe nenhum tratamento satisfatório para lógica linear completa.

Além dos sistemas propostos originalmente, existem vários tableaux para lógica linear, como por exemplo Meyer et al.¹² e Mantel Otten¹³. Uma explicação sobre o funcionamento dos tableaux, tanto no caso geral quanto no caso de L_L será feita nos capítulos 3, 4 e 5.

1.3

Semântica

Enquanto a sintaxe tem por objetivo estudar provas e definir a formação das sentenças de uma lógica, a semântica busca estabelecer noções como significado e valores de verdade das sentenças. Grosso modo, podemos dividir as semânticas em dois tipos, semânticas tarskiana e semânticas denotacionais. As semânticas tarskianas definem o significado dos operadores de uma lógica, indutivamente, pela especificação das condições de verdade de uma sentença.

As semânticas denotacionais, por sua vez, estabelecem o significado dos operadores por uma correspondência entre as sentenças da linguagem e determinadas estruturas matemáticas. Inicialmente utilizadas para formalização do significado de linguagens de programação, uma semântica denotacional relaciona, por meio de funções parciais, determinados objetos algébricos às atividades realizadas por um programa.

A origem da lógica linear se deu no campo semântico com os trabalhos de Girard sobre espaços de coerência¹⁴ (uma variação da semântica de Scott). Posteriormente, o próprio Girard apresentou um versão de semântica tarskiana chamada espaço de fases¹⁵. Outras formas de definir o significado dos operadores foram apresentados ao longo dos anos 90, seja ao estilo tarskiano

¹²MEYER, Robert. McROBBIE, Michael. & BELNAP, Nuel. "Linear Analytic Tableaux" In: BAUMGARTNER, Peter. HÄHNLE, Reiner. & POSEGGA, Joachim. (org.) Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods. St. Goar. Springer. 1995. pp. 278 - 293.

¹³MANTEL, Heiko. & OTTEN, Jens. "linTAP: A Tableau Prover for Linear Logic"

¹⁴GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic, Theoretical Computer Science, 50:1, 1987.

¹⁵GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic, Theoretical Computer Science, 50:1, 1987.

como a semântica de Kripke apresentada por Hodas Miller¹⁶¹⁷, seja ao estilo denotacional, como a semântica categórica apresentada por De Paiva¹⁸, a semântica de diálogos apresentada por Rahman¹⁹ e a semântica de jogos de Abramsky Jagadeesan.

Além das semânticas formais citadas, existem algumas maneiras de explicar informalmente o significado dos operadores. Um exemplo clássico de semântica informal é o Menu de Lafont, que será explicado a seguir.

1.3.1

Menu de Lafont

O menu de Lafont, originalmente formulado nas *lectures* do próprio Lafont²⁰, surge como uma tentativa de explicar de forma mais intuitiva o funcionamento dos operadores lineares. No menu, os operadores são explicados a partir de uma experiência bem comum, a ida a um restaurante. Imagine que você vá a um restaurante e encontre o seguinte menu:

Menu : 50 mil Satoshi²¹

Entrada:

Salada

Quiche de Queijo

Prato Principal:

Risotto

Steak au poivre

Entrecôte

Sobremesa:

Frutas da Estação (Abacaxi, Cereja e Amora)

Sorvete

(Água e Vinho à vontade)

¹⁶Hodas, J., and Miller, D., 1994, "Logic programming in a fragment of intuitionistic linear logic", *Information and Computation*, 110(2)

¹⁷Mais precisamente, os autores apresentam uma semântica de Kripke para uma linguagem de programação que contem, além de outros operadores, operadores lineares.

¹⁸PAIVA, Valeria Correa Vaz de. *The dialectica categories* (PhD thesis). 1988. University of Cambridge.

¹⁹RAHMAN.S, "UN DESAFÍO PARA LAS TEORÍAS COGNITIVAS DE LA COMPETENCIA LÓGICA: LOS FUNDAMENTOS PRAGMÁTICOS DE LA SEMÁNTICA DE LA LÓGICA LINEAR", *Manuscrito* (25.2), 2002, 381-432p.

²⁰An introduction to Linear Logic: Expressiveness and Phase Semantics - Mitsuhiro Okada

²¹Satoshi é a unidade de divisão máxima do Bitcoin (1 satoshi = 0,00000001 Bitcoin). Pela cotação atual, 50 mil satoshi valem aproximadamente 25 dólares.

Pode-se traduzir o menu para seguinte proposição linear:

$$(50ks)^{\perp} \wp((S \& Q) \otimes (R \& Sp \& Ef) \otimes ((A \oplus C \oplus Am) \& Svt) \otimes (!Ag \otimes !V)) \quad (1-1)$$

É possível explicar o funcionamento dos operadores lineares com o auxílio do menu tendo em vista a expressão formalizada. A disjunção multiplicativa ($\wp$) funciona como uma troca. Dado que possuo 50 mil satoshi, posso escolher trocar meu dinheiro pela refeição, porém não posso ter os dois ao mesmo tempo. A conjunção multiplicativa ($\otimes$) corresponde à composição das categorias menu. Ao trocar meu dinheiro pela refeição, sei que receberei um prato de cada categoria do menu: uma entrada, um prato principal, uma sobremesa e bebida. A conjunção aditiva ($\&$) pode ser entendida como um lista de opções disponíveis em que se pode escolher qual das opções será consumida. As opções para prato principal são Risotto, Steak au poivre e Entrecôte, estou permitido à escolher apenas uma dessas opções. A disjunção aditiva ($\oplus$) funciona de maneira análoga à conjunção aditiva, porém não é possível escolher qual dos componentes da disjunção será consumido. Ao escolher as frutas da estação, sei que receberei ou um abacaxi ou cerejas ou amoras, entretanto não posso escolher qual dessas frutas irei receber, uma vez que a disponibilidade destas depende da estação do ano. A disjunção aditiva lista apenas quais são as opções possíveis. O exponencial bang (!) pode ser entendido como um recurso que pode ser consumido um número arbitrário de vezes. Ao comprar o menu, posso beber água ou vinho quantas vezes quiser, inclusive não beber nenhuma das duas opções.

É importante notar que o menu de Lafont não funciona precisamente como uma semântica formal para L_L . Sua vantagem repousa em seu caráter pedagógico, ou seja, o menu é mais eficiente, comparado à outras semânticas, em esclarecer o significado dos operadores lineares para um aluno que está iniciando seus estudos.

1.4

Natureza Construtiva

A partir do final do século XIX iniciou-se um movimento, dentro da matemática e da lógica, uma agenda que buscava definir teorias e técnicas de provas com conteúdo *construtivo*. A noção sobre o que venha a ser *construtividade* varia, de um ponto de vista conceitual, entre as difentes escolas de pensamento matemático e filosófico. Existem, porém, algumas características técnicas que são desejáveis para que uma teoria/ prova seja construtiva, como,

por exemplo, a ausência de definições impredicativas, a não-validade das Leis de DeMorgan, a exigência de que provas de sentenças existenciais apresentem um termo que satisfaça a sentença e a recusa de provas que utilizam a redução ao absurdo clássica. Nessa seção iremos apresentar algumas aspectos que tornam a lógica linear uma lógica construtiva.

Girard argumenta²² que os aspectos construtivos de uma determinada lógica repousam na restrição sobre o uso das regras estruturais em **Cs**. Usualmente, o sinal do sequente $\Rightarrow$ é explicado como um "separador" de fórmulas, afirmações do lado esquerdo e negações do lado direito. Apesar de tal explicação ser útil e informativa, ela não nos fornece uma justificativa imediata para o fato de que a restrição na cardinalidade no conjunto de fórmulas do lado direito gere sistemas para lógicas mais construtivas como L_I e L_M ²³.

Segundo Girard, o sinal do sequente $\Rightarrow$, em L_I e L_M , marca a separação de um espaço em que as regras estruturais de contração e weakening não são permitidas. O que torna a lógica linear mais construtiva, que L_I por exemplo, é a generalização do controle sobre o uso de regras estruturais em ambos os lados do sequente.

Recentemente, Schulman²⁴ apresentou uma série de vantagens da utilização da lógica linear na formalização construtiva de conceitos matemáticos. Segundo a semântica de provas e refutações apresentada por Schulman, uma prova de $(\forall x : A(x))^\perp$, por exemplo, nos permite extrair uma prova de $\exists x(A(x))^\perp$, ou seja, a refutação para um quantificador universal sobre um predicado A garante uma prova de um existencial que refute a quantificação universal. Tal refutação em L_L é mais construtiva do que uma prova de $\neg(\forall x : A(x))$ em L_I , pois, no caso intuicionista, não conseguimos extrair a prova do existencial.

O construtivismo de L_L não se restringe apenas à área da lógica. Podemos encontrar na literatura versões lineares para aritmética e para análise. Girard, por exemplo, utiliza uma versão da lógica linear²⁵, aliada a teoria dos tipos, para definir uma teoria dos conjuntos linear capaz de formalizar a teoria dos números naturais tanto em primeira quanto em segunda ordem. Já Schulman apresenta várias vantagens na utilização de operadores de L_L para formalização de conceitos construtivos da teoria dos números reais e de outras áreas da matemática.

²²GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic, Theoretical Computer Science, 50:1, 1987. pp. 4.

²³Na lógica clássica, um sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ pode possuir m fórmulas do lado esquerdo e n fórmulas do lado direito. Já na lógica intuicionista, o número de fórmulas é restringido a $n \leq 1$, enquanto na lógica minimal, n deve ser necessariamente igual a 1.

²⁴SCHULMAN.M, LINEAR LOGIC FOR CONSTRUCTIVE MATHEMATICS, 2018, Preprint.

²⁵GIRARD. Jean-Y. "Light Linear Logic". 1998. Information and Computation 143.

1.5

Fragmentos da Lógica Linear e Decidibilidade

É bastante comum encontrarmos na literatura diferentes sistemas dedutivos e semânticas para fragmentos da lógica linear. Os fragmentos mais usuais são MALL, que contém apenas operadores aditivos e multiplicativos, MLL, que possui apenas operadores multiplicativos e MELL, com operadores multiplicativos e exponenciais. Em termos de complexidade e decidibilidade, sabemos que um sistema linear completo (operadores aditivos, multiplicativos e exponenciais) é indecidível²⁶, enquanto, ao que diz respeito aos fragmentos, sabemos que MALL é P-SPACE²⁷ completo²⁸ e MLL²⁹ é NP-completo³⁰. O fragmento MELL, por sua vez, deve ser ao menos EXPSPACE³¹, entretanto, não existe nenhuma prova de sua decidibilidade.³²

O fragmento multiplicativo (MLL), em especial, possui propriedades relevantes do ponto de vista da teoria da computação, uma vez que é capaz de expressar e resolver problemas de paralelismo no nível lógico³³, ou seja, permite a execução de diferentes cálculos (operações) ao mesmo tempo.

²⁶Lincoln, P., Mitchell, J., Scedrov, A., and Shankar, N., “Decision problems for propositional linear logic”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 56. 1992. 239p. –311p.

²⁷Lincoln, P., Mitchell, J., Scedrov, A., and Shankar, N., “Decision problems for propositional linear logic”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 56. 1992. 239p. –311p.

²⁸Um conjunto de problemas de decisão é P-SPACE quando o processo de decisão é resolvido em espaço polinomial. Dizemos que uma teoria T é P-SPACE completo se os problemas da teoria são resolvidos em espaço polinomial e se qualquer outra teoria T' P-SPACE pode ser reduzida à T.

²⁹Kanovich, M.I., “Horn Programming in Linear Logic is NP-Complete”, in *Proceedings of the Seventh Annual Symposium on Logic in Computer Science*, Santa Cruz, IEEE Computer Society Press, 1992 . 200–210p.

³⁰NP-SPACE é um conjunto de problemas que podem ser resolvidos em espaço polinomial por uma máquina de Turing não-determinística. Uma teoria T é NP-SPACE completa se qualquer teoria NP-SPACE T' pode ser reduzida a T.

³¹Um conjunto de problemas de decisão é EXPSPACE se cada um dos problemas pode ser resolvido em espaço $2^{p(n)}$, sendo $p(n)$ uma função polinomial.

³²Recentemente, Bimbó e Katalin apresentaram uma prova para a decidibilidade de MELL, entanto provou-se posteriormente que a prova apresentada estava errada.

³³GIRARD, Jean-Yves. *Linear Logic*, *Theoretical Computer Science*, 50:1, 1987. pp. 1-102.

2

Lógica Relevante

2.1

A Relação entre Lógica Relevante e Lógica Linear

Uma das primeiras perguntas que o leitor pode-se fazer é sobre a relação entre a lógica da relevância e a lógica linear. Tal pergunta não é somente perfeitamente cabível como é imperativo que a respondamos antes de partir para os aspectos técnicos.

A característica individualizadora da lógica da relevância L_R , assim como no caso da lógica linear L_L , está relacionada a uma compreensão mais forte da implicação. Enquanto a leitura relevante está preocupada em corrigir certos paradoxos oriundos de certos princípios lógicos, nominalmente o *ex falso* e a introdução vácuca da implicação, a leitura linear está preocupada em controlar o uso de hipóteses, uma vez que L_L enxerga as fórmulas como recursos a serem gastos.

Podemos diferenciar L_R de L_L mesmo no fragmento aditivo, pois a distribuição da conjunção aditiva sobre a disjunção aditiva, ou seja, $(A \& (B \oplus C)) \multimap ((A \& B) \oplus (A \& C))$ é um teorema de L_R , mas não é um teorema de L_L .

Embora as duas lógicas tenham motivações diferentes, ambas compartilham uma solução bastante parecida, em cálculo de seqüentes, para "controlar" a implicação. Tanto L_R quanto L_L são lógicas sub-estruturais, ou seja, são sistemas lógicos que abrem mão de algumas regras estruturais. No caso de L_R abre-se mão da regra de weakening, enquanto a L_L é mais radical e descarta a regra de weakening e da contração; entretanto, L_L permite a recuperação das regras estruturais por meio dos operadores exponenciais. As soluções estruturais apresentadas para os sistemas de tableaux também são bastante parecidas. Como veremos ao longo dos próximos capítulos, o controle sobre a utilização das fórmulas permite que construamos método de tableaux para L_R e L_L . Ambas as soluções são perfeitamente capazes de refletir as restrições demandadas pelo descarte das regras estruturais.

2.2

Um pouco de História Relevante

Qualquer um que já tenha lecionado/assistido um curso de introdução à lógica conhece a dificuldade de explicar/entender a implicação material. Nosso uso cotidiano de "se ... então ..." parece não corresponder adequadamente ao significado da implicação estabelecido pela tabela de verdade da implicação.

Princípios lógicos pouco intuitivos justificados pela tabela de verdade da implicação, como o *ex falso* por exemplo, são perfeitamente aceitos, inclusive do ponto de vista construtivo, por lógicos e matemáticos. Entretanto, para um leigo, importar esse tipo de regra para linguagem pode causar grande confusão. Um indivíduo que, em uma conversa cotidiana, se depara com afirmações do tipo "se está chovendo e não está chovendo, então Zappa ganhou as eleições americanas em 1992" provavelmente entenderá que está sendo vítima de algum tipo estranho de ironia e não que está recebendo um argumento que contém o *ex falso*.

De um ponto de vista mais técnico, os problemas da implicação material estão relacionados a dois teoremas. O primeiro teorema, $(\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q))$, informalmente nos diz que qualquer coisa se segue de uma contradição. O segundo teorema, $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$, informalmente diz que se uma sentença é verdadeira, então ela pode ser implicada de qualquer outra sentença, seja ela verdadeira ou falsa. Tais teoremas, quando aceitos em uma teoria que busca corresponder a linguagem natural, podem gerar toda uma sorte de problemas e confusões, conforme o exemplo do parágrafo anterior.

Interpretações mais fortes da implicação foram propostas ao longo do século XX ¹, dentre elas a lógica da relevância, inicialmente formulada por Moh Shaw-Kwei ², Church ³ e Ackermann ⁴. A leitura relevante da implicação busca estabelecer um sentido de $A \rightarrow B$ em que o antecedente seja usado relevantemente na derivação de B. Um possível sentido de relevância pode ser entendido pela seguinte reformulação do *teorema da dedução*:

Teorema da Dedução: Seja uma dedução Π de B a partir de $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Dizemos que se A_n é relevantemente utilizada na dedução de B, então $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \vdash A_n \rightarrow B$. Caso contrário $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} \vdash B$.

¹ Além da lógica relevante, existe, por exemplo, a leitura modal de Lewis que define a implicação material o operador box $A \rightarrow B := \Box A \rightarrow B$.

² SHAW-KWEI, Moh, "The Deduction Theorems and Two New Logical Systems," 1950 *Methodos*, 2: 56–75.

³ CHURCH, Alonzo. "The Weak Theory of Implication" Munich 1951. *Kontrolliertes Denken Festgabe zum 60. Geburtstag von Prof. W. Britzelmayr*. pp. 22 - 37.

⁴ ACKERMANN, Wilhelm, "Begründung Einer Strengen Implikation," 1956, *Journal of Symbolic Logic*, 21: 113–128.

2.3

Linguagem e Sistemas Dedutivos

Até agora nos referimos à lógica relevante como uma lógica única. Entretanto existem várias possíveis leituras para noção de relevância. A partir de agora iremos descrever uma lógica relevante clássica (L_{Rc}) de acordo com a leitura de Villalonga⁵. Consideremos agora alguns aspectos formais de uma lógica da relevância clássica. Antes de mais nada, devemos apresentar indutivamente a linguagem de L_{Rc} . Um exemplo de gramática relevante pode ser definido conforme segue:

1. p é uma sentença bem formada, sendo p atômico.
2. Se A é uma sentença bem formada, então $\neg A$ é uma sentença bem formada.
3. Se A e B são sentenças bem formadas, então $A \& B$, $A \otimes B$, $A \oplus B$, $A \wp B$, $A \rightarrow B$ e $A \multimap B$ são sentenças bem formadas.
4. Estas são as únicas regras de formação de sentenças.

Uma vez estabelecidas as regras que definem quais sentenças da linguagem, podemos apresentar os diferentes sistemas de regras que permitem combinar e manipular as sentenças relevantes. Atualmente existem vários sistemas dedutivos para formalizar as diferentes noções de relevância, seja em cálculo de sequentes, dedução natural, sistemas de Hilbert e tableaux; em especial temos o sistema de cálculo de sequentes relevante apresentado por Villalonga^{6 7}. Iremos apresentar dois dos sistemas mencionados, a dedução natural de Prawitz e o cálculo de sequentes de Villalonga.

2.3.1

Dedução Natural Relevante

Podemos encontrar dois sistemas distintos para L_R em *Natural Deduction*⁸. O primeiro sistema é construído apenas para o fragmento implicacional. Para obtermos uma regra para introdução da implicação relevante, precisamos fazer algumas alterações na regra de introdução original.

⁵VILLALONGA, Pilar. "From Natural to Formal Language: A Case for Logical Pluralism" Topoi ed.38. 2019. pp. 333 - 345.

⁶Outros exemplos de sistemas são o sistema de dedução natural de Prawitz, o sistema Axiomático de Church e o Cálculo de Sequentes de Restall

⁷VILLALONGA, Pilar. "From Natural to Formal Language: A Case for Logical Pluralism" Topoi ed.38. 2019. pp. 333 - 345.

⁸PRAWITZ, Dag, "Natural Deduction" 1965, Dover: 81p.

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \pi \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

A regra acima corresponde a introdução da implicação clássica/ intuicionista, em que a hipótese A pode ser introduzida vacuamente. A regra para introdução da implicação relevante, devemos exigir que a fórmula A esteja contida no conjunto de hipóteses Γ que foram utilizadas na derivação de B . Após a aplicação da regra, devemos obter um novo conjunto de hipóteses Δ tal que $\Delta = \{\Gamma - A\}$. A regra para eliminação da implicação relevante é a mesma do caso clássico. No caso do fragmento implicacional, o sistema de Prawitz corresponde ao sistema axiomático inicialmente formulado por Church.

Para recuperarmos o Teorema de Normalização também precisamos alterar a definição de derivação. Uma derivação Π é uma árvore de fórmulas tal que, se B é uma ocorrência em Π e $A_1, A_2, \dots, A_n$ são todas as fórmulas que ocorrem imediatamente acima de B em Π , então $(A_1, A_2, \dots, A_n / B)$ é uma aplicação de uma regra de inferência S . No caso relevante, uma derivação passa a ser um par (Π, Φ) em que Φ é uma função de descarte que permite rastrear quando uma fórmula A é utilizada.

O segundo sistema proposto por Prawitz inclui a conjunção e a disjunção à linguagem. Diferentemente de outros sistemas relevantes, a **Dn** relevante de Prawitz possui apenas uma conjunção ($\wedge$) e uma disjunção ($\vee$). A inclusão irrestrita das regras dos novos operadores permite que recuperemos os paradoxos da implicação. Devemos então incluir restrições estruturais globais às derivações. Suponha a seguinte derivação:

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \pi_1 \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

Caso haja uma ocorrência de aplicação da regra de introdução da conjunção em π_1 que introduz $C \wedge D$, devemos exigir que A seja usado tanto na derivação de C quanto na derivação de D . Visualizemos a restrição na seguinte derivação:

$$\frac{\begin{array}{cc} [A] & [A] \\ \pi_1 & \pi_2 \\ C & D \\ \hline C \wedge D \\ \pi_3 \\ B \\ \hline A \rightarrow B \end{array}}$$

Na derivação acima, para que A seja relevantemente utilizado na derivação de B , a hipótese A deve ser utilizada tanto na derivação de C quanto

na derivação de D. O mesmo tipo de restrição deve ser aplicado no caso da eliminação da disjunção.

2.3.2

Cálculo de Sequentes Relevante

O cálculo de sequentes que iremos apresentar como exemplo é o sistema proposto por Villalonga, construído para estudar algumas noções de pragmática utilizadas em filosofia da linguagem. O Cs de Villalonga será utilizado como base para construção dos tableaux relevantes no próximo capítulo.

Axioma:

$$\overline{A \Rightarrow A}$$

Regras Estruturais:

Contração:

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Regra do Corte:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Sigma \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Regras Lógicas:

Conjunção Aditiva:

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \& B}$$

Conjunção Multiplicativa:

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Sigma \Rightarrow \Lambda, B}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda, A \otimes B}$$

Disjunção Aditiva:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \oplus B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B}$$

Disjunção Multiplicativa:

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Sigma \Rightarrow \Lambda}{A \wp B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wp B}$$

Implicação Aditiva:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

Implicação Multiplicativa:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Sigma \Rightarrow \Lambda}{A \multimap B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda} \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \multimap B}$$

O processo de construção do sistema de tableaux relevante, a partir de um sistema de cálculo de sequentes, consiste em duas etapas. Primeiro deve-se apresentar uma tradução das regras lógicas de **Cs** para **Tx**. A estratégia que irei utilizar para traduzir as regras é a mesma apresentada por D'Agostino et al.¹ Em segundo lugar, deve-se também estabelecer algumas restrições sobre as árvores de um tableau com o fim de internalizar as regras estruturais de cálculo dos sequentes e refletir as restrições que a lógica da relevância impõe à implicação.

Antes de definir quais são as restrições estruturais que devem ser impostas aos tableaux relevante, devemos definir alguns conceitos básicos e traduzir as regras de **Cs**, com o intuito de facilitar a visualização, por meio de exemplos, das limitações que serão impostas às derivações.

Definição 1: Uma *árvore* de derivação é um grafo conexo, acíclico e não-direcionado $\langle V, E \rangle$ cujo conjunto dos vértices V é parcialmente ordenado e a relação de ordem está bem-fundamentada, ou seja, existe um único elemento máximo x_0 , tal que para qualquer elemento x_n , existe uma única sequência finita de elementos $x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_0$ que liga x_n ao elemento máximo.

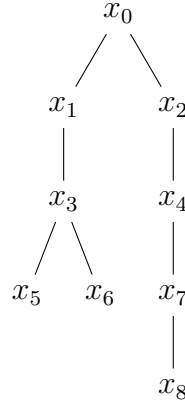
Definição 2: Um nodo é um vértice rotulado com uma fórmula.

Definição 3: Um *ramo* ρ é uma sequência finita ordenada de nodos $x_0 \dots x_n$ tal que $x_n < x_{n-1} < \dots < x_0$.

Intuitivamente, podemos entender a arquitetura de uma árvore de dedução por analogia com as árvores biológicas. Assim como as árvores biológicas possuem um "início", a semente, a árvore de dedução começa a partir de um único ponto, o nodo x_0 . Da mesma forma que as árvores biológicas potencialmente bifurcam em diferentes ramos para maximizar a absorção de raios solares, as árvores de dedução se ramificam, por meio da aplicação de regras,

¹D'AGOSTINO, Marcello, GABBAY, Dov. & BRODA, Krysia. "Tableau Methods for Substructural Logic" In: D'AGOSTINO, Marcello. GABBAY, Dov. HÄHNLE, Reiner & POSEGGA, Joachim (org.) Handbook of Tableau Methods. Springer, 1999. pp. 397 - 468.

para verificar a validade de uma determina fórmula ou conjunto de fórmulas. Para tornar as coisas ainda mais claras, vejamos o seguinte exemplo:



No grafo acima, podemos encontrar, por exemplo, três ramos, $\rho_1: x_5 < x_3 < x_1 < x_0$, $\rho_2: x_6 < x_3 < x_1 < x_0$ e $\rho_3: x_8 < x_7 < x_4 < x_2 < x_0$. Agora fica fácil ver a formação da árvore como um conjunto de ramos, todos ligados a um mesmo nodo raiz x_0 .

Antes de continuarmos com as definições básicas e de apresentarmos as regras estruturais das árvores, devemos apresentar as regras para os operadores lógicos. Conforme já anunciado, as regras do sistema de tableaux serão obtidas por meio de uma função de tradução de **Cs** em **Tx**. Na tradução que se segue, assim como em D'Agostino et al., reformularei as regras à direita passando todas as fórmulas do consequente para o antecedente adicionando a negação, conforme o seguinte exemplo:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Sigma \Rightarrow \Pi, B}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda, A \otimes B} \Rightarrow \frac{\Gamma, \neg[\Delta], \neg A \Rightarrow \quad \Sigma, \neg[\Pi], \neg B \Rightarrow}{\Gamma, \Sigma, \neg[\Delta], \neg[\Lambda], \neg(A \otimes B) \Rightarrow}$$

Os colchetes em $\neg[\Delta]$ indicam que todas as fórmulas de Δ estão negadas. A mudança na formulação das regras facilita a visualização da correspondência entre as regras à direita de **Cs** e as regras para as fórmulas negadas de **Tx**.

3.1

Tradução de Regras

Iniciemos pela tradução das regras para a conjunção aditiva. Temos aqui dois fatos merecedores de destaque. No caso da fórmula afirmada, podemos ver que a conjunção aditiva tem a propriedade da projeção, ou seja, se afirmamos/demonstramos $A \& B$ podemos afirmar/demonstrar cada um dos componentes separadamente. Já no caso da fórmula negada, devemos notar

que a repetição das fórmulas não utilizadas (ver **Definição 7**) corresponde a exigência de contexto compartilhado das regras aditivas.

Conjunção Aditiva à esquerda:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], A \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], A \& B \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} (A \& B) \\ | \\ A \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], B \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], A \& B \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} (A \& B) \\ | \\ B \end{array}$$

Conjunção Aditiva à direita:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], \neg A \Rightarrow \quad \Gamma, \neg[\Delta], \neg B \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], \neg(A \& B) \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{cc} \neg(A \& B) & \\ / \quad \backslash & \\ \neg A & \neg B \\ | & | \\ \Gamma & \Gamma \end{array}$$

Em que Γ são fórmulas que não foram usadas acima do nodo no qual a regra foi aplicada.²

O caso da conjunção multiplicativa é bem mais simples. Na regra para fórmula afirmada, temos uma situação de multiplas conclusões, ou seja, uma derivação de $A \otimes B$ nos permite obter simultaneamente uma derivação de A e uma derivação de B . É interessante notar que a imposição de multiplas conclusões aproxima a conjunção multiplicativa à leitura clássica da conjunção. A regra para a fórmula negada é bem mais simples do que no caso aditivo, uma vez que não é preciso que todas as fórmulas sejam utilizadas em ambos os ramos, pois não há exigência de contexto compartilhado. Devemos, entretanto, adicionar uma restrição global a regra da negação do tensor. As fórmulas não utilizadas que ocorrem acima da aplicação devem ser divididas em Γ_1, Γ_2 , por meio de uma função de escolha arbitrária, o que corresponde ao contexto compartilhado da regra multiplicativa em **Cs**.

²A duplicação das fórmulas ainda não utilizadas em cada um dos ramos corresponde à aplicação implícita da regra de contração presente nas derivações com contexto compartilhado.

Conjunção Multiplicativa à esquerda:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], A, B \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], A \otimes B \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} (A \otimes B) \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array}$$

Conjunção Multiplicativa à direita:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], \neg A \Rightarrow \quad \Sigma, \neg[\Lambda], \neg B \Rightarrow}{\Gamma, \Sigma, \neg[\Delta], \neg[\Lambda] \neg(A \otimes B) \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} \neg(A \otimes B) \\ / \quad \backslash \\ \neg A \quad \neg B \\ | \quad | \\ \Gamma \quad \Sigma \end{array}$$

O caso da disjunção aditiva é simétrico à conjunção aditiva. A regra para fórmula afirmada possui a restrição que simula o contexto compartilhado, enquanto a regra para fórmula negada possui algo análogo à projeção, diferindo apenas no fato de que as fórmulas projetadas são acompanhadas da negação.

Disjunção Aditiva à esquerda:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], A \Rightarrow \quad \Gamma, \neg[\Delta], B \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], A \oplus B \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} (A \oplus B) \\ / \quad \backslash \\ A \quad B \\ | \quad | \\ \Gamma \quad \Gamma \end{array}$$

Em que Γ são fórmulas que não foram usadas acima do nodo no qual a regra foi aplicada.

Disjunção Aditiva à direita:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], \neg A \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], \neg(A \oplus B) \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} \neg(A \oplus B) \\ | \\ \neg A \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], \neg B \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], \neg(A \oplus B) \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} \neg(A \oplus B) \\ | \\ \neg B \end{array}$$

O caso da disjunção multiplicativa também é simétrico ao caso da conjunção multiplicativa. A regra para fórmula afirmada, assim como no caso do tensor, deve possuir restrições globais as fórmulas que foram utilizadas acima da aplicação da regra.

Disjunção Multiplicativa à esquerda:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], A \Rightarrow \quad \Sigma, \neg[\Lambda], B \Rightarrow}{\Gamma, \Sigma, \neg[\Delta], \neg[\Lambda], A \wp B \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} (A \wp B) \\ / \quad \backslash \\ A \quad B \\ | \quad | \\ \Gamma \quad \Sigma \end{array}$$

Disjunção Multiplicativa à direita:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], \neg A, \neg B \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta] \neg(A \wp B) \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} \neg(A \wp B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

O caso da implicação aditiva é bastante particular³. A única coisa que podemos destacar é o fato de, assim como nas outras regras aditivas, temos a exigência de contexto compartilhado na regra positiva e uma propriedade análoga à projeção na regra negativa.

Implicação Aditiva à esquerda:

³Tanto no caso relevante quanto no caso linear existe uma divergência, ao menos na bibliografia levantada, se deve haver ou não uma separação entre implicação aditiva e multiplicativa.

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], \neg A \Rightarrow \quad \Gamma, \neg[\Delta], B \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], A \rightarrow B \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} (A \rightarrow B) \\ / \quad \backslash \\ \neg A \quad B \\ | \quad | \\ \Gamma \quad \Gamma \end{array}$$

Em que Γ são fórmulas que não foram usadas acima do nodo no qual a regra foi aplicada.

Implicação Aditiva à direita:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], A \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], \neg(A \rightarrow B) \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B) \\ | \\ A \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], \neg B \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], \neg(A \rightarrow B) \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B) \\ | \\ \neg B \end{array}$$

As regras para o caso da implicação multiplicativa são idênticas às regras para implicação clássica. As propriedades desejadas na implicação relevante serão obtidas pelas restrições sobre o uso das fórmulas que veremos logo em seguida.

Implicação Multiplicativa à esquerda:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], \neg A \Rightarrow \quad \Sigma, \neg[\Lambda], B \Rightarrow}{\Gamma, \Sigma, \neg[\Delta], \neg[\Lambda], A \multimap B \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} (A \multimap B) \\ / \quad \backslash \\ \neg A \quad B \\ | \quad | \\ \Gamma \quad \Sigma \end{array}$$

Implicação Multiplicativa à direita:

$$\frac{\Gamma, \neg[\Delta], A, \neg B, \Rightarrow}{\Gamma, \neg[\Delta], \neg(A \multimap B) \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} \neg(A \multimap B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

Contração:

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow}{\Gamma, A \Rightarrow} \Rightarrow \begin{array}{c} A \\ | \\ \tau \\ | \\ A \\ | \\ A \end{array}$$

A regra acima diz que de uma fórmula A pode gerar duas cópias de A descartando a fórmula original.

Agora que estamos munidos das regras do nosso tableaux relevante, continuemos apresentando algumas definições básicas.

Definição 4: Um ramo é dito *fechado* quando, dado uma fórmula x_n , tanto x_n quanto sua negação $\neg x_n$ estão contidos no mesmo ramo. O fechamento do ramo será sinalizado com $\perp$. Caso contrário, o ramo é dito *aberto*.

Definição 5: Uma árvore de dedução é dita *fechada* se todos os seus ramos são fechados.

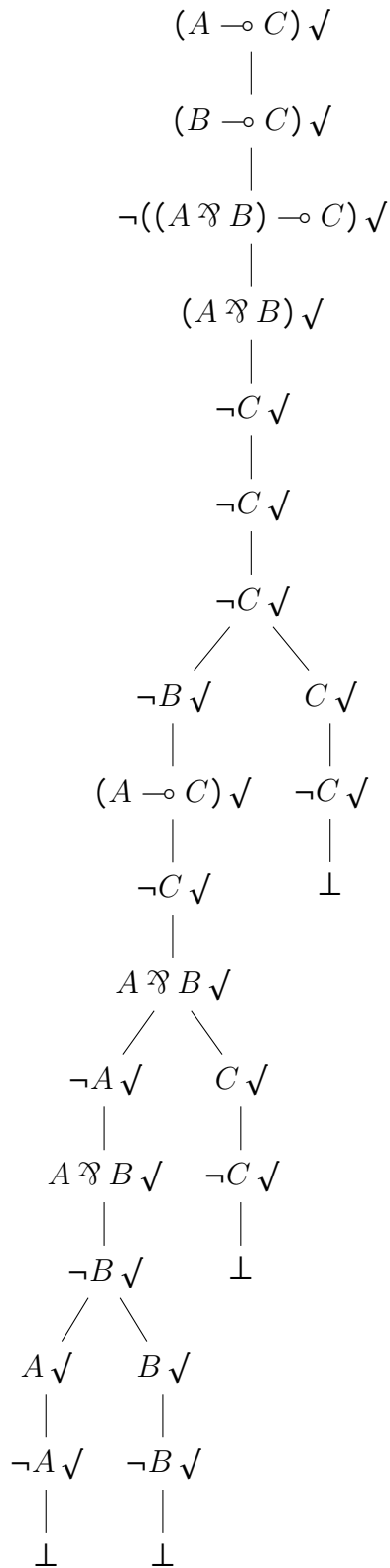
Definição 6: Dizemos que uma fórmula foi *utilizada* se uma regra lógica foi aplicada a ela ou se ao menos uma vez ela fecha um ramo. A fórmula que for utilizada será sinalizada com $\checkmark$.

Definição 7: Dizemos que B é derivável a partir $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ se existe uma árvore fechada construída com os nodos iniciais $A_1, A_2, \dots, A_n$ e $\neg B$ em que todas as fórmulas foram utilizadas.

Definição 8: Uma fórmula A é um teorema se existe uma árvore fechada construída a partir de $\neg A$ em que todas as fórmulas foram utilizadas.

Podemos visualizar as definições 5 e 7 com o seguinte exemplo. Tome a seguinte derivação:

$$\{A \multimap C, B \multimap C\} \vdash (A \wp B) \multimap C$$



A árvore acima mostra que $(A \succ B) \rightarrow C$ é derivável a partir de $\{A \rightarrow C, B \rightarrow C\}$, pois todos os ramos estão fechados, ou seja, cada ramo possui uma contradição. Por exemplo, o ramo $(\neg C < C < \neg C < \neg C < \neg C < (A \succ B) < (A \succ B) \rightarrow C < (B \rightarrow C) < (A \rightarrow C))$ é fechado, pois contém tanto $\neg C$

quanto C. Também é possível ver que cada um dos nodos da árvore é utilizado ao menos uma vez.

Apesar de já estarmos munidos de regras lógicas e definições, o sistema de tableaux construído até aqui não consiste em um tableaux para a lógica da relevância. Para obtermos um tableaux relevante, devemos ainda estabelecer duas restrições estruturais para as árvores de derivação. A primeira restrição diz respeito a utilização das fórmulas. Em uma derivação $\Gamma \vdash A$, todas as fórmulas contidas em Γ devem ser utilizadas ao menos uma vez para que tenhamos uma derivação. Em segundo lugar, quando um ramo bifurcar pela aplicação de uma regra multiplicativa, cada ocorrência de fórmula (ainda não utilizada) que está contida no ramo acima do nó em que a regra foi aplicada deve ser utilizada em ao menos um dos ramos gerados – simulando o contexto livre. No caso das regras aditivas, cada ocorrência de fórmula deve ser usada em ambos ramos gerados – simulando o contexto compartilhado.

Para ilustrar que o tableaux definido corresponde a um tableaux legitimamente relevante, mostremos que um dos paradoxos da implicação não é um teorema e que, por sua vez, a fórmula correspondente à regra de contração é um teorema.

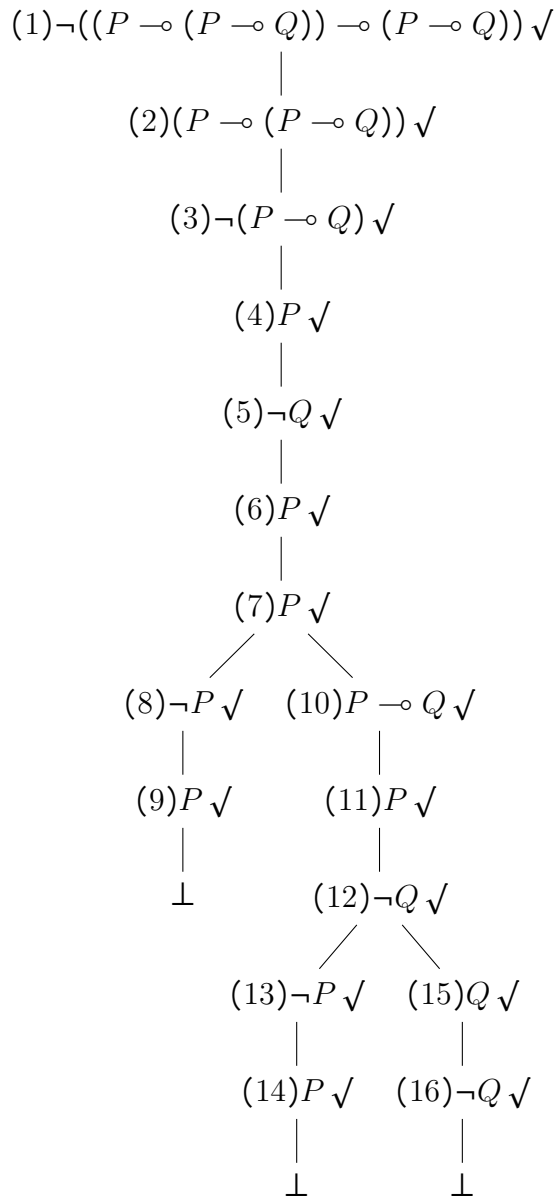
Analisemos o caso do paradoxo $P \multimap (Q \multimap P)$, que corresponde à regra de weakening:

$$\begin{array}{c}
 (1) \neg(P \multimap (Q \multimap P)) \checkmark \\
 | \\
 (2) P \checkmark \\
 | \\
 (3) \neg(Q \multimap P) \checkmark \\
 | \\
 (4) Q \\
 | \\
 (5) \neg P \checkmark \\
 | \\
 (6) P \checkmark
 \end{array}$$

Na árvore acima queremos testar se $(P \multimap (Q \multimap P))$ é um teorema. Pela definição 6, devemos começar a árvore com a fórmula $\neg(P \multimap (Q \multimap P))$. Aplicamos a regra para negação da implicação, utilizado (1), obtendo (2) e (3). Aplicamos novamente a regra da negação da implicação em (3), obtendo (4), (5) e repetindo a fórmula (2) que ainda não havia sido utilizada. A fórmula (6) fecha o ramo, pois entra em contradição com (5). A fórmula (4) não é utilizada

em nenhum momento. O paradoxo não é, portanto, um teorema relevante, pois, embora o ramo contenha uma contradição, a fórmula (4) não é utilizada nenhuma vez, o que viola a restrição relevante.

O teorema equivalente à regra da contração, por outro lado, é um teorema dentro do tableau relevante conforme a derivação abaixo, pois todos os seus ramos estão fechados e todas as fórmulas foram utilizadas. Na derivação, começamos negando o teorema da contração. Em seguida aplicamos a regra da negação da implicação, utilizando (1) e obtendo (2) e (3). Continuamos a derivação aplicando a regra $\neg - \rightarrow$ em (3) e obtendo (4) e (5). Em seguida aplicamos a regra de contração, obtendo duas cópias de P em (6) e (7). Então aplicamos a regra para implicação em (2), bifurcando a árvore em (8) e (10). A fórmula P é copiada no ramo esquerdo, pois a fórmula (6) não havia sido utilizada, enquanto P e $\neg Q$ são copiados no ramo do lado direito, pois (5) e (7) não haviam sido utilizadas. O ramo da esquerda se fecha, pois (8) e (9) se contradizem. Aplicamos a regra da implicação em (10), gerando uma nova bifurcação em (13) e (15). A fórmula P é copiada ao lado esquerdo e $\neg Q$ é copiada no ramo direito, pois nem P nem $\neg Q$ haviam sido utilizadas acima da aplicação da regra. Ambos os ramos são fechados com os (13)-(14) e (15)-(16) se contradizendo.



3.2

Observação sobre as Regras dos Operadores

Um leitor atento pode perceber que, dada a natureza das regras aditivas, não existe uma canonicidade para as derivações que envolvem a conjunção aditiva e a negação da disjunção aditiva, ou seja, desconsiderando permutações na ordem de aplicação das regras, podemos obter diferentes árvores dependendo das escolhas tomadas na aplicação das regras aditivas. Podemos observar esse fenômeno com as árvores geradas para o teorema $(A \& B) \multimap (A \oplus B)$, em que existem 4 árvores distintas.

$$\mathbf{I}(1) \neg((A \& B) \multimap (A \oplus B)) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(2)(A \& B) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(3) \neg(A \oplus B) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(4) A \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(5) \neg A \checkmark$$

$$\quad |$$

$$\perp$$

$$\mathbf{II}(1) \neg((A \& B) \multimap (A \oplus B)) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(2)(A \& B) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(3) \neg(A \oplus B) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(4) A$$

$$\quad |$$

$$(5) \neg B$$

$$\mathbf{IV}(1) \neg((A \& B) \multimap (A \oplus B)) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(2)(A \& B) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(3) \neg(A \oplus B) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(4) B \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(5) \neg B \checkmark$$

$$\quad |$$

$$\perp$$

$$\mathbf{III}(1) \neg((A \& B) \multimap (A \oplus B)) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(2)(A \& B) \checkmark$$

$$\quad |$$

$$(3) \neg(A \oplus B) \checkmark$$

$$\quad |$$

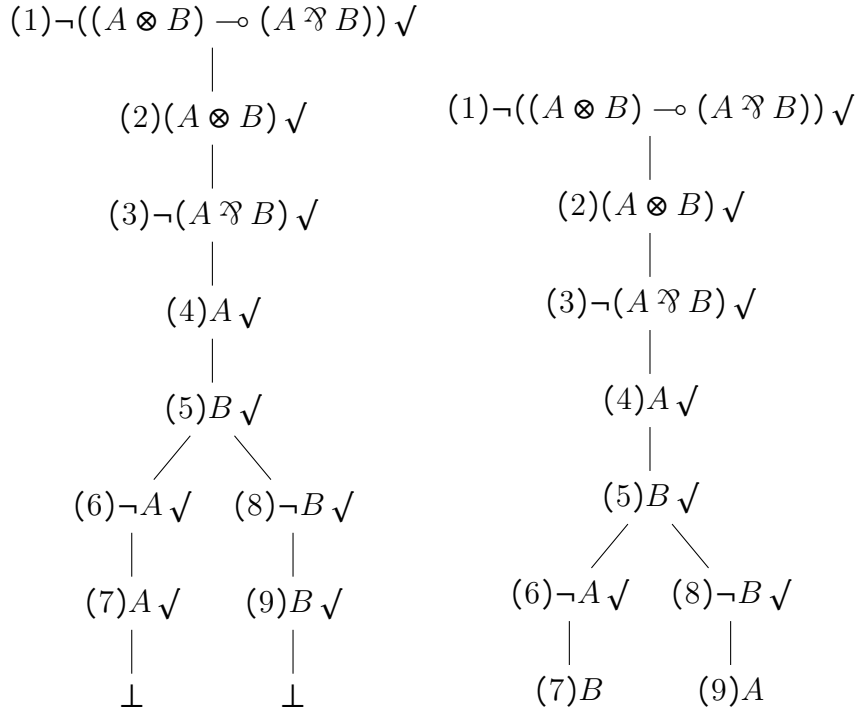
$$(4) B$$

$$\quad |$$

$$(5) \neg A$$

Como podemos observar, as árvores I e IV fecham, pois a fórmula "escolhida" na aplicação da regra para conjunção aditiva foi a mesma da aplicação da regra para disjunção. Já as árvores II e III não fecham, pois a fórmula obtida pela aplicação da regra da conjunção é diferente da fórmula obtida pela regra da disjunção.

Um problema análogo acontece com os operadores multiplicativos. Considerarmos, por exemplo, as árvores que podem ser construídas para o teorema $\neg((A \otimes B) \multimap (A \wp B))$:



Como podemos notar, devido ao processo de escolha presente nas regras multiplicativas, apenas a árvore da esquerda é fechada, pois os nodos (4) e (5) foram copiados adequadamente em (6) e (9). É importante notar que as observações apresentadas sobre os operadores aditivos e multiplicativos nos obriga a mudar a definição de não-teorema. Assim como a definição de teorema foi alterada - para que uma fórmula seja um teorema, deve existir ao menos uma árvore com todos os ramos fechados - devemos definir que uma fórmula não é um teorema se não existe nenhuma árvore com todos os ramos fechados.

É importante notar que tais fatos não consistem em um problema em si⁴, uma vez que a definição de teorema nos diz que deve existir ao menos uma árvore fechada para fórmula. Os teoremas de corretude e completude, como veremos nas próximas seções, também não serão afetados por essa questão, pois a hipótese indutiva nos garante que a árvore é fechada.

3.3

Corretude e Completude

Para mostrarmos que o tableaux definido na seção 3.1 corresponde de fato ao sistema de cálculo de sequentes apresentado por Villalonga, devemos apresentar uma forma sistemática de traduzir as derivações de **Tx** em **Cs** e vice versa. A tradução também nos garante que o tableaux definido é correto e completo relativamente ao sistema de Villalonga, ou seja, nosso tableaux para

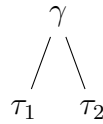
⁴A menos que estejamos preocupados em implementar o sistema de tableaux em algum provador automático.

lógica relevante será correto e completo se e somente se o cálculo de seqüentes de Villalonga for correto e completo. A tradução das derivações é realizada por meio de dois teoremas, conforme seguem abaixo. A prova de ambos se dá por indução no comprimento das derivações e por uma longa análise de casos.

Para provar o teorema de completude, precisaremos do auxílio do seguinte lema:

Lemma 1: Sejam duas árvores fechadas τ_1 , com n fórmulas, e τ_2 , com m fórmulas, de **Tx** relevante. Então podemos gerar uma única árvore τ_3 fechada, com $n + m + 1$ fórmulas, que possui uma fórmula topo que bifurca em τ_1 e τ_2 .

Prova: Sejam $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ fórmulas de τ_1 , $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]$ fórmulas de τ_2 e $[\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]$ fórmulas de τ_3 tal que γ possui uma regra que bifurca em α_i e β_j . A árvore τ_3 possui a seguinte forma:



Caso a árvore τ_3 não fosse fechada, ou existiria algum ramo aberto em τ_3 ou a fórmula γ não teria sido utilizada. Caso houvesse um ramo aberto, este ramo estaria contido em τ_1 ou τ_2 , o que viola a hipótese de que τ_1 e τ_2 são fechadas, logo não pode ser o caso de existir um ramo aberto em τ_3 . Também não pode ser o caso de γ não ter sido utilizada, pois a aplicação da regra de γ gerou algum $\alpha_i \in \tau_1$ e $\beta_j \in \tau_2$. Logo, τ_3 é fechada.

Lemma 2: Se uma árvore τ_1 com n fórmulas é fechada, então a árvore $\tau_1!$ com $n + 1$ fórmulas é fechada.

Sejam $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ fórmulas de τ_1 e $[\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ fórmulas de $\tau_1!$. A árvore $\tau_1!$ possui a seguinte forma:



Caso a árvore $\tau_1!$ não fosse fechada, ou existiria algum ramo aberto em $\tau_1!$ ou a fórmula γ não teria sido utilizada. Caso houvesse um ramo aberto, este ramo estaria contido em τ_1 , o que viola a hipótese de que τ_1 é fechada, logo não pode ser o caso de existir um ramo aberto em $\tau_1!$. Também não pode ser

o caso de γ não ter sido utilizada, pois a aplicação da regra de γ gerou algum $\alpha_i \in \tau_1$. Logo, τ_1 é fechada.

Teorema 1 (Completeness): Se existe uma prova para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, então existe pelo menos uma árvore de dedução para Γ e $\neg[\Delta]$ que é fechada.

Prova por indução no comprimento da derivação. Devemos definir uma função de tradução $f_1[\pi]$ capaz de transformar as derivações de **Cs** em árvores de **Tx**. A função é definida pela análise de cada operador conforme segue abaixo:

Caso base:

Tome o seguinte sequente de **Cs**:

$$A \Rightarrow A$$

Podemos, trivialmente, construir a seguinte árvore fechada:

$$\begin{array}{c} A \\ | \\ \neg A \\ | \\ \perp \end{array}$$

Caso I: Conjunção Aditiva à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \& B}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \Gamma \\ | \\ \neg \Delta \\ | \\ \neg A \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array} & \begin{array}{c} \Gamma \\ | \\ \neg \Delta \\ | \\ \neg B \\ | \\ f_1(\pi_2) \\ | \\ \perp \end{array} \end{array}$$

Pelo **Lemma 1**, obtemos a seguinte árvore adicionando um novo nodo $\neg(A \& B)$ ao topo da derivação e obtendo a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
 \neg(A \& B) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \neg A \quad \quad \neg B \\
 | \quad \quad | \\
 \Gamma \quad \quad \Gamma \\
 | \quad \quad | \\
 \neg \Delta \quad \quad \neg \Delta \\
 | \quad \quad | \\
 f_1(\pi_1) \quad f_1(\pi_2) \\
 | \quad \quad | \\
 \perp \quad \quad \perp
 \end{array}$$

Em que Γ e $\neg \Delta$ são fórmulas que não foram utilizadas antes da aplicação da regra.

Caso II: Conjunção Aditiva à esquerda

Tome as seguintes derivações em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A \& B \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\frac{\pi_2}{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A \& B \Rightarrow \Delta}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \\
 | \\
 \neg \Delta \\
 | \\
 A \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \Gamma \\
 | \\
 \neg \Delta \\
 | \\
 B \\
 | \\
 f_1(\pi_2) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pelo **Lemma 2**, podemos adicionar um novo nodo $(A \& B)$ ao topo das derivações e obtemos as seguintes derivações correspondentes às derivações em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
 (A \& B) \\
 | \\
 \Gamma \\
 | \\
 \neg \Delta \\
 | \\
 A \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 (A \& B) \\
 | \\
 \Gamma \\
 | \\
 \neg \Delta \\
 | \\
 B \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Caso III: Conjunção multiplicativa à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \frac{\pi_2}{\Sigma \Rightarrow \Lambda, B}}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda, A \otimes B}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \\
 | \\
 \neg \Delta \\
 | \\
 \neg A \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \Sigma \\
 | \\
 \neg \Lambda \\
 | \\
 \neg B \\
 | \\
 f_1(\pi_2) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pelo **Lemma 1** podemos adicionar um novo nodo $\neg(A \otimes B)$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
\neg(A \otimes B) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\Gamma \qquad \Sigma \\
| \qquad | \\
\neg\Delta \quad \neg\Lambda \\
| \qquad | \\
\neg A \quad \neg B \\
| \qquad | \\
f_1(\pi_1) \quad f_1(\pi_2) \\
| \qquad | \\
\perp \qquad \perp
\end{array}$$

Caso IV: Conjunção multiplicativa à esquerda

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \\
| \\
\neg\Delta \\
| \\
A \\
| \\
B \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pelo **Lemma 2**, podemos adicionar um novo nodo $(A \otimes B)$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
(A \otimes B) \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\neg \Delta \\
| \\
A \\
| \\
B \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso V: Disjunção Aditiva à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B} \quad \frac{\frac{\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\Gamma \\
| \\
\neg \Delta \\
| \\
\neg A \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\Gamma \\
| \\
\neg \Delta \\
| \\
\neg B \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}
\end{array}$$

Pelo **Lemma 2**, podemos adicionar um novo nodo $\neg(A \oplus B)$ ao topo das derivações e obtemos as seguintes derivações correspondentes às derivações em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
 \neg(A \oplus B) \\
 | \\
 \Gamma \\
 | \\
 \neg\Delta \\
 | \\
 \neg A \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \neg(A \oplus B) \\
 | \\
 \Gamma \\
 | \\
 \neg\Delta \\
 | \\
 \neg B \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Caso VI: Disjunção Aditiva à esquerda

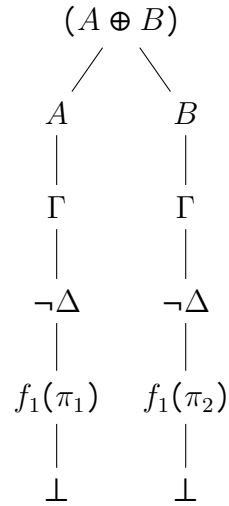
Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\pi_2}{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \\
 | \\
 \neg\Delta \\
 | \\
 A \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \Gamma \\
 | \\
 \neg\Delta \\
 | \\
 B \\
 | \\
 f_1(\pi_2) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pelo **Lemma 1** podemos adicionar um novo nodo $(A \oplus B)$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

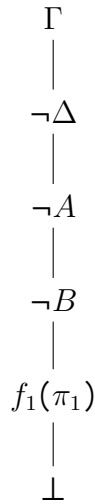


Caso VII: Disjunção multiplicativa à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wp B}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:



Pelo **Lemma 2**, podemos adicionar um novo nodo $\neg(A \wp B)$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
(A \wp B) \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\neg \Delta \\
| \\
\neg A \\
| \\
\neg B \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso VIII: Disjunção multiplicativa à esquerda

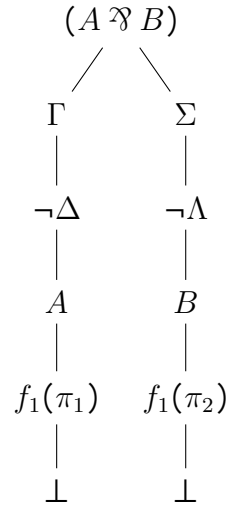
Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\pi_2}{\Sigma, B \Rightarrow \Lambda}}{\Gamma, \Sigma, A \wp B \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\Gamma \\
| \\
\neg \Delta \\
| \\
A \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\Sigma \\
| \\
\neg \Lambda \\
| \\
B \\
| \\
f_1(\pi_2) \\
| \\
\perp
\end{array}
\end{array}$$

Pelo **Lemma 1** podemos adicionar um novo nodo $(A \wp B)$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em Cs:

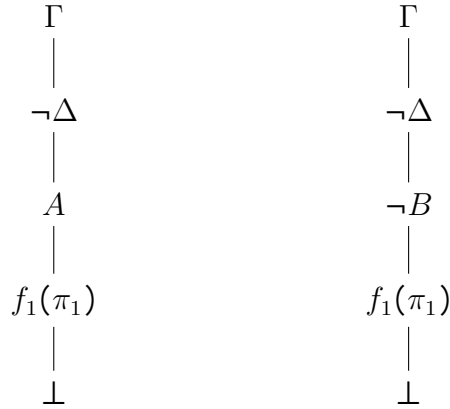


Caso IX: Implicação aditiva à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} \quad \frac{\frac{\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:



Pelo **Lemma 2**, podemos adicionar um novo nodo $\neg(A \rightarrow B)$ ao topo das derivações e obtemos as seguintes derivações correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
\neg(A \rightarrow B) \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\neg\Delta \\
| \\
A \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\neg(A \rightarrow B) \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\neg\Delta \\
| \\
\neg B \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso X: Implicação aditiva à esquerda

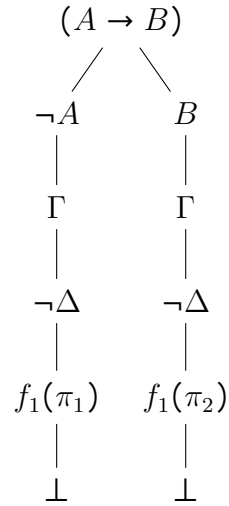
Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \frac{\pi_2}{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \\
| \\
\neg\Delta \\
| \\
\neg A \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\Gamma \\
| \\
\neg\Delta \\
| \\
B \\
| \\
f_1(\pi_2) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pelo **Lemma 1** podemos adicionar um novo nodo $(A \rightarrow B)$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

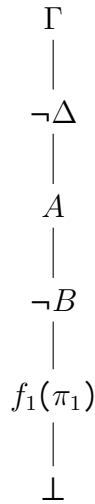


Caso XI: Implicação multiplicativa à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \multimap B}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:



Pelo **Lemma 2**, podemos adicionar um novo nodo $\neg(A \multimap B)$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondentes à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
\neg(A \multimap B) \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\neg\Delta \\
| \\
A \\
| \\
\neg B \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso XII: Implicação multiplicativa à esquerda

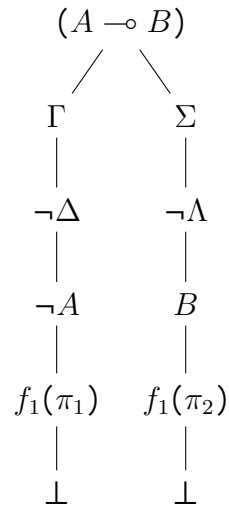
Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \frac{\pi_2}{B, \Sigma \Rightarrow \Lambda}}{A \multimap B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\Gamma \\
| \\
\neg\Delta \\
| \\
\neg A \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\Sigma \\
| \\
\neg\Lambda \\
| \\
B \\
| \\
f_1(\pi_2) \\
| \\
\perp
\end{array}
\end{array}$$

Pelo **Lemma 1** podemos adicionar um novo nodo $(A \multimap B)$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondentes à derivação em **Cs**:



Caso XIII: Contração

Assuma a seguinte prova em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi}{\Gamma, A, A \Rightarrow}}{\Gamma, A \Rightarrow}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \\
 | \\
 A \\
 | \\
 A \\
 | \\
 f_1(\pi) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pelo **Lemma 2**, basta adicionar um novo nodo de A e obtemos:

$$\begin{array}{c}
A \\
| \\
\Gamma \\
| \\
A \\
| \\
A \\
| \\
f_1(\pi) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Logo, Se existe uma prova para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, então existe pelo menos uma árvore de dedução para Γ e $\neg[\Delta]$ que é fechada.

Teorema 2 (Corretude) : Se temos uma árvore de dedução fechada para Γ e $\neg[\Delta]$, então existe uma prova para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em **Cs**.

Prova por indução no comprimento da derivação. Devemos definir uma função de tradução $f_2[\pi]$ capaz de transformar as árvores de **Tx** em derivações de **Cs**. A função é definida pela análise de cada operador conforme segue abaixo.

Demonstraremos esse teorema aplicando a seguinte estratégia geral. O objetivo da prova é obter uma derivação em **Cs** a partir de uma derivação em **Tx** adicionando as fórmulas negadas no consequente e o restante das fórmulas ao antecedente. No caso dos operadores aditivos, as fórmulas utilizadas em uma árvore devem ser adicionados em ambos os sequentes. No caso dos operadores multiplicativos, as fórmulas utilizadas em um ramo devem ser adicionadas apenas ao respectivo sequente.

É importante notar que não sabemos, em princípio, qual será o sequente inicial da derivação. Porém, uma vez que sabemos que, pela hipótese indutiva, as árvores utilizadas no teorema sempre são fechadas por algum par de fórmulas α e $\neg\alpha$, sabemos que a função de tradução retornará o sequente inicial $\alpha \Rightarrow \alpha$.

Caso base:

Tome a seguinte árvore fechada de **Tx**:

$$\begin{array}{c}
A \\
| \\
\neg A \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Podemos, trivialmente, construir a seguinte derivação de **Cs**:

$$A \Rightarrow A$$

Caso I: Conjunção Aditiva à esquerda

Suponha as seguintes árvores fechadas:

$$\begin{array}{cc}
(A \& B) & (A \& B) \\
| & | \\
\Gamma & \Gamma \\
| & | \\
\neg \Delta & \neg \Delta \\
| & | \\
A & B \\
| & | \\
\pi_1 & \pi_1 \\
| & | \\
\perp & \perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva, obtemos as seguintes derivações:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}$$

Devemos notar que a árvore correspondente à prova obtida pela hipótese indutiva é fechada, pois a *top-fórmula* não foi utilizada para fechar nenhum ramo e a fórmula obtida pela aplicação da regra na *top-fórmula* é adicionada como uma nova hipótese. Aplicamos então a regra para conjunção aditiva à esquerda e obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A \& B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A \& B \Rightarrow \Delta}$$

Caso II: Conjunção Aditiva à direita

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
\neg(A \& B) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg A \quad \neg B \\
| \quad | \\
\Gamma \quad \Gamma \\
| \quad | \\
\neg \Delta \quad \neg \Delta \\
| \quad | \\
\pi_1 \quad \pi_2 \\
| \quad | \\
\perp \quad \perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}$$

Aplicando a regra para conjunção aditiva à direita obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \& B}$$

Caso III: Conjunção Multiplicativa à esquerda

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
(A \otimes B) \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\neg \Delta \\
| \\
A \\
| \\
B \\
| \\
\pi_1 \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}$$

Aplicamos agora regra para conjunção multiplicativa à esquerda e obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A \otimes B \Rightarrow \Delta}$$

Caso IV: Conjunção Multiplicativa à direita

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c} \neg(A \otimes B) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \Gamma \quad \quad \Sigma \\ | \quad \quad | \\ \neg\Delta \quad \neg\Lambda \\ | \quad \quad | \\ \neg A \quad \neg B \\ | \quad \quad | \\ \pi_1 \quad \pi_2 \\ | \quad \quad | \\ \perp \quad \perp \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Sigma \Rightarrow \Lambda, B}$$

Em que Γ são fórmulas usadas no ramo esquerdo e Σ são fórmulas usadas no ramo direito.

Aplicando a regra para o tensor à direita obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Sigma \Rightarrow \Lambda, B}}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Lambda, A \otimes B}$$

Caso V: Disjunção Aditiva à esquerda

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
 (A \oplus B) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 A \qquad B \\
 | \qquad | \\
 \Gamma \qquad \Gamma \\
 | \qquad | \\
 \neg \Delta \quad \neg \Delta \\
 | \qquad | \\
 \pi_1 \quad \pi_2 \\
 | \qquad | \\
 \perp \qquad \perp
 \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}$$

Aplicando a regra para a disjunção aditiva à esquerda obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Caso VI: Disjunção Aditiva à direita

Suponha as seguintes árvores fechadas em **Tx**:

$$\begin{array}{cc}
 \neg(A \oplus B) & \neg(A \oplus B) \\
 | & | \\
 \Gamma & \Gamma \\
 | & | \\
 \neg \Delta & \neg \Delta \\
 | & | \\
 \neg A & \neg B \\
 | & | \\
 \pi_1 & \pi_1 \\
 | & | \\
 \perp & \perp
 \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \qquad \frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}$$

Aplicando a regra da disjunção aditiva à direita obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B} \qquad \frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B}$$

Caso VII: Disjunção multiplicativa à esquerda

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c} (A \wp B) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \Gamma \qquad \Sigma \\ | \qquad | \\ \neg\Delta \quad \neg\Lambda \\ | \qquad | \\ A \qquad B \\ | \qquad | \\ \pi_1 \quad \pi_2 \\ | \qquad | \\ \perp \quad \perp \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{f_2(\pi_2)}{\Sigma, B \Rightarrow \Lambda}$$

Em que Γ e $\neg\Delta$ são fórmulas usadas no ramo esquerdo e Σ e $\neg\Lambda$ são fórmulas usadas no ramo direito.

Aplicando a regra para o par à esquerda obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Sigma, B \Rightarrow \Lambda}}{\Gamma, \Sigma, A \wp B \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Caso IX: Disjunção multiplicativa à direita

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
 \neg(A \wp B) \\
 | \\
 \Gamma \\
 | \\
 \neg\Delta \\
 | \\
 \neg A \\
 | \\
 \neg B \\
 | \\
 \pi_1 \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

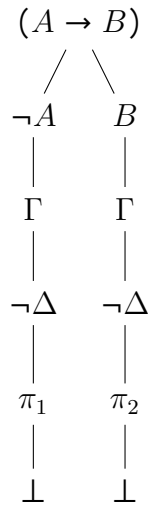
$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}$$

Aplicamos agora regra para disjunção multiplicativa à direita e obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wp B}$$

Caso X: Implicação aditiva à esquerda

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:



Pela hipótese indutiva obtemos:

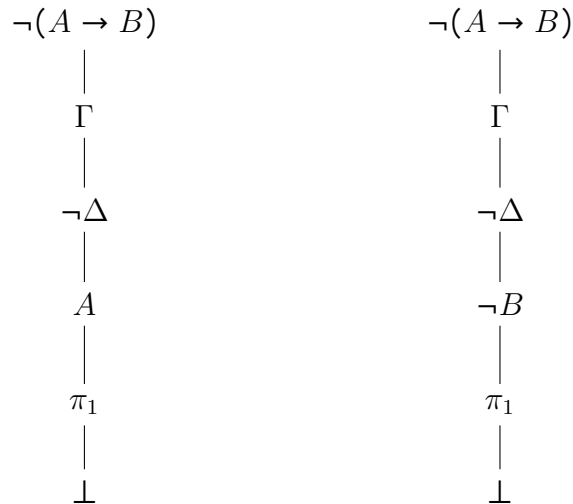
$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}$$

Aplicando a regra para a implicação aditiva à esquerda obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Caso XI: Implicação aditiva à direita

Suponha as seguintes árvores fechadas em **Tx**:



Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \quad \frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}$$

Aplicando a regra da implicação aditiva à direita obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} \qquad \frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

Caso XII: Implicação multiplicativa à esquerda

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c} (A \multimap B) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \Gamma \qquad \Sigma \\ | \qquad | \\ \neg \Delta \quad \neg \Lambda \\ | \qquad | \\ \neg A \quad B \\ | \qquad | \\ \pi_1 \quad \pi_2 \\ | \qquad | \\ \perp \quad \perp \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \qquad \frac{f_2(\pi_2)}{B, \Sigma \Rightarrow \Lambda}$$

Aplicando a regra para implicação multiplicativa obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{B, \Sigma \Rightarrow \Lambda}}{\Gamma, \Sigma, A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Caso XII: Implicação multiplicativa à direita

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
\neg(A \multimap B) \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\neg\Delta \\
| \\
A \\
| \\
\neg B \\
| \\
\pi_1 \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}$$

Aplicando a regra para implicação multiplicativa à direita obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \multimap B}$$

Caso XIII: Contração

Suponha a seguinte árvore fechada:

$$\begin{array}{c}
A \\
| \\
\Gamma \\
| \\
A \\
| \\
A \\
| \\
\pi \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi)}{\Gamma, A, A \Rightarrow}$$

Basta aplicar a regra da contração e obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi)}{\Gamma, A, A \Rightarrow}}{\Gamma, A \Rightarrow}$$

Logo, Se temos uma árvore de dedução fechada para Γ e $\neg[\Delta]$, então existe uma prova para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em **Cs**.

3.3.1

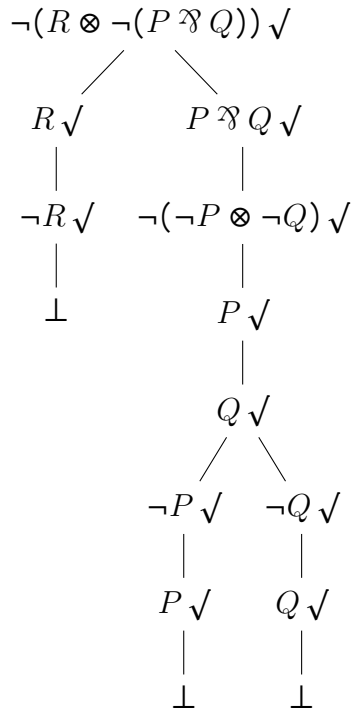
Exemplos de Tradução

Tradução deCs para Tx:

Suponha a seguinte derivação em **Cs**:

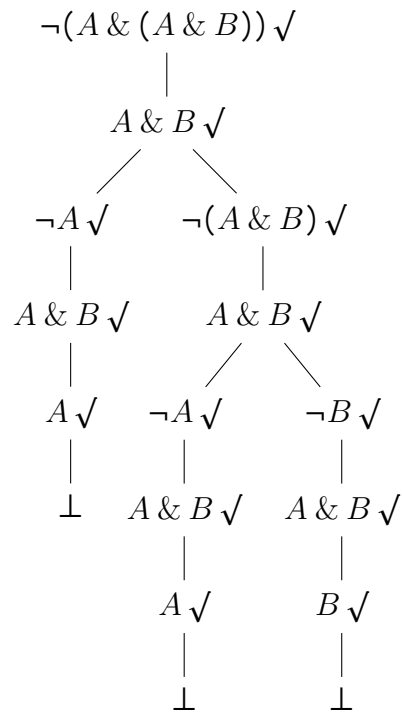
$$\frac{\frac{\frac{P, \neg P \Rightarrow \quad Q, \neg Q \Rightarrow}{P, Q, \neg(\neg P \otimes \neg Q) \Rightarrow}}{\neg(P \wp Q), \neg(\neg P \otimes \neg Q) \Rightarrow} \quad R, \neg R \Rightarrow}{\neg(R \otimes \neg(P \wp Q)), \neg R, \neg(\neg P \otimes \neg Q) \Rightarrow}$$

A árvore obtida pela tradução é a seguinte:



Tradução de Tx para Cs:

Suponha a seguinte árvore:



Pela tradução obtemos a seguinte prova em **Cs**:

$$\frac{A, \neg A \Rightarrow}{A \& B, \neg A \Rightarrow} \quad \frac{\frac{A, \neg A \Rightarrow}{A \& B, \neg A \Rightarrow} \quad \frac{B, \neg B \Rightarrow}{A \& B, \neg B \Rightarrow}}{A \& B, \neg(A \& B) \Rightarrow} \\
 \hline
 A \& B, \neg(A \& B) \Rightarrow$$

4

Linearizando o Tableaux Relevante

4.1

Tableaux Linear Livre de Exponenciais

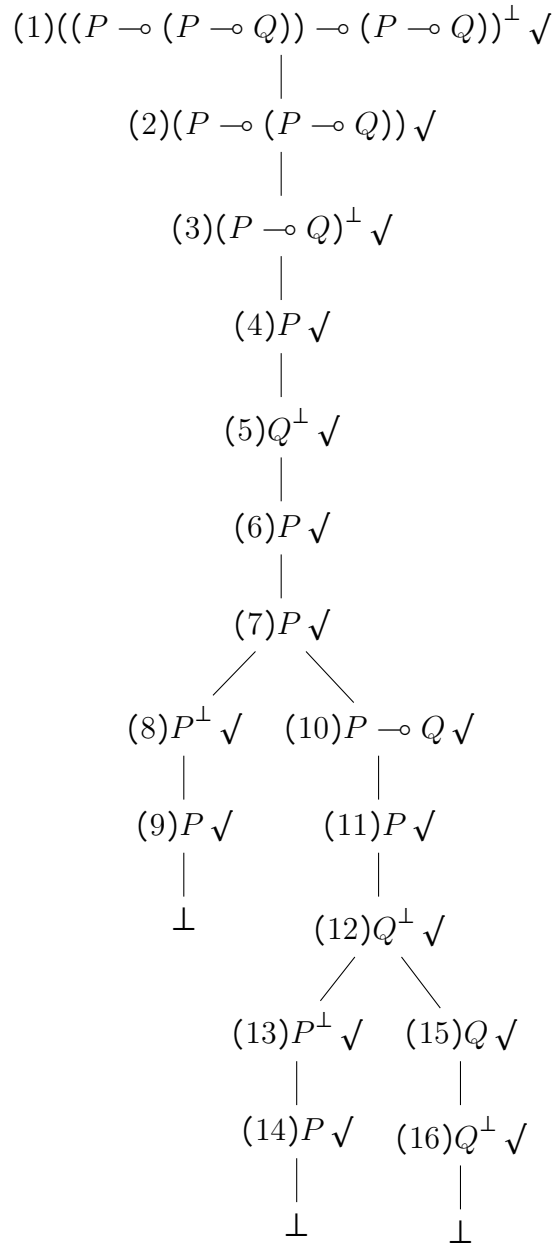
Neste capítulo iremos apresentar uma forma de construir um tableaux para lógica linear, a partir do tableaux relevante definido no capítulo anterior, utilizando as técnicas apresentadas por D'Agostino et al.¹ e por Meyer et al.². Em primeiro lugar, devemos remover a implicação aditiva³. Em seguida, devemos adicionar os operadores exponenciais e suas regras lógicas correspondentes e substituir a negação relevante ($\neg$) pela negação linear ($\neg^\perp$). Por último, devemos aumentar o controle sobre o uso das fórmulas, reformulando a regra de contração para que ela possa ser usada apenas com exponenciais. Agora, cada fórmula deve ser usada *no máximo* uma vez, a menos que a fórmula esteja acompanhada de algum operador exponencial⁴. Devemos notar que o mero reforço da restrição sobre a utilização das fórmulas sobre o tableaux relevante produz um tableaux correto e completo para o fragmento MALL. Também é importante notar que ao reforçarmos a restrição sobre o uso das fórmulas para obter um tableaux linear, o teorema da contração, como era de se esperar, deixa de ser um teorema.

¹D'AGOSTINO, Marcello, GABBAY, Dov. & BRODA, Krysia. "Tableau Methods for Substructural Logic" In: D'AGOSTINO, Marcello. GABBAY, Dov. HÄHNLE, Reiner & POSEGGA, Joachim (org.) Handbook of Tableau Methods. Springer, 1999.

²MEYER, Robert. McROBBIE, Michael. & BELNAP, Nuel. "Linear Analytic Tableaux" In: BAUMGARTNER, Peter. HÄHNLE, Reiner. & POSEGGA, Joachim. (org.) Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods. St. Goar. Springer. 1995. pp. 278 - 293.

³A implicação aditiva é removida, pois, usualmente os sistemas lineares são formulados apenas com a implicação multiplicativa, embora autores, como por exemplo Troelstra em suas *Lectures on Linear Logic*, falem em duas implicações.

⁴MEYER, Robert. McROBBIE, Michael. & BELNAP, Nuel. "Linear Analytic Tableaux" In: BAUMGARTNER, Peter. HÄHNLE, Reiner. & POSEGGA, Joachim. (org.) Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods. St. Goar. Springer. 1995. pp. 278 - 293.



Fica bem fácil ver na árvore acima o motivo do teorema da contração não ser um teorema no tableaux linear. Embora todos os ramos da árvore estejam fechados, a árvore contém uma aplicação da regra de contração na fórmula P no nodo (4). Ao longo do capítulo veremos como recuperar não só o teorema da contração como também o teorema de weakening com o auxílio dos operadores exponenciais.

4.2

Adicionando as Regras para Operadores Exponenciais

Começemos pela regra do operador *Bang*. A ideia central associada ao operador modal é permitir que uma fórmula seja usada mais de uma vez,

contornando a restrição imposta sobre o uso das fórmulas dentro da árvore de derivação. Na regra que iremos apresentar abaixo, a fórmula que estiver acompanhada com o operador *bang* poderá ser "copiada" quantas vezes for necessário, inclusive nenhuma vez em alguns casos. A regra para para o *bang* é a seguinte:

$$\frac{!A}{A}$$

em que A pode ser "copiada" um número arbitrário de vezes ramo abaixo.

A regra construída para o **Tx** linear corresponde a duas regras de **Cs**. Caso a fórmula A não seja usada nenhuma vez na árvore de derivação, a regra do tableaux corresponde a seguinte regra:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma, !A \Rightarrow}$$

Caso a fórmula seja usada uma ou mais vezes, a regra do tableaux corresponde a seguinte regra de **Cs**:

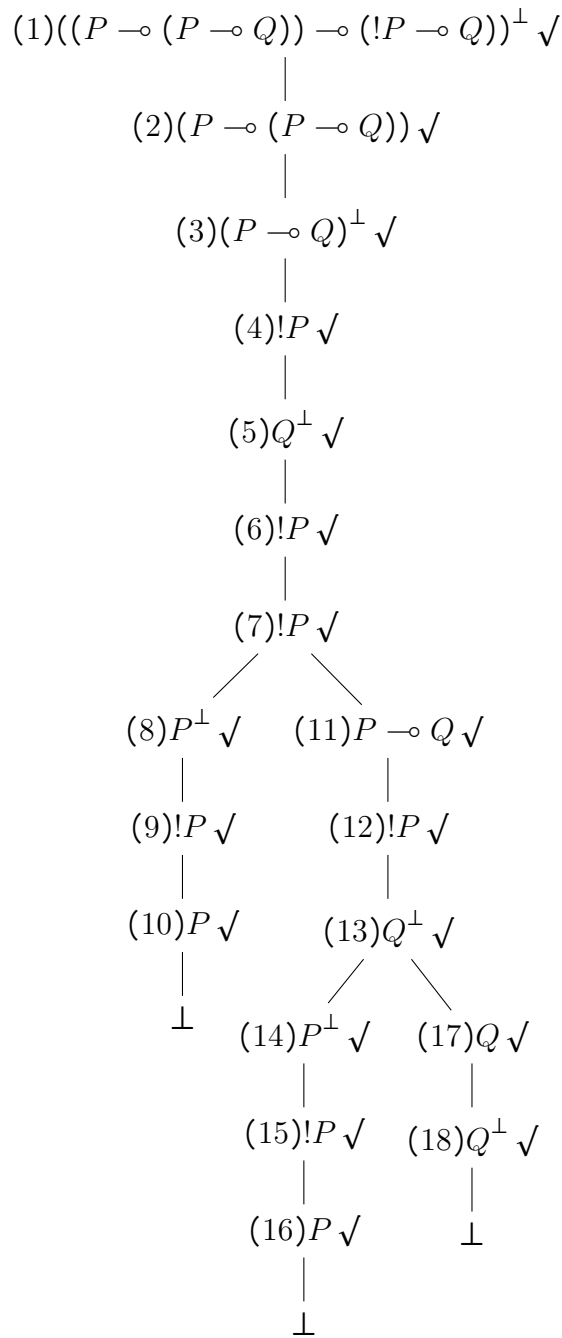
$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow}{\Gamma, !A \Rightarrow}$$

No caso da contração, devemos adicionar uma regra análoga a regra de contração apresentada no capítulo anterior. A seguinte regra de **Tx** corresponde a regra da contração com o *Bang*:

$$\frac{\begin{array}{c} !A \\ | \\ \tau \\ | \\ !A \\ | \\ !A \end{array} \Rightarrow}{\Gamma, !A, !A \Rightarrow} \Rightarrow \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow}{\Gamma, !A \Rightarrow}$$

Com as regras propostas para o *Bang* podemos recuperar os teoremas de contração e weakening. As novas derivações são as seguintes:

Contração:



Como podemos observar na árvore acima, o *bang* permite que repliquemos a fórmula P para fechar dois ramos distintos, garantindo o teorema da contração no tableaux linear.

Weakening:

$$\begin{array}{c}
(P \multimap (!Q \multimap P))^{\perp} \checkmark \\
| \\
P \checkmark \\
| \\
(!Q \multimap P)^{\perp} \checkmark \\
| \\
!Q \checkmark \\
| \\
P^{\perp} \checkmark \\
| \\
\perp
\end{array}$$

O caso da derivação do teorema de weakening é um pouco diferente. Nesta derivação a fórmula Q não é usada em nenhuma aplicação de regra nem fecha nenhuma ramo, porém a regra para o *Bang* garante que a fórmula $!Q$ foi utilizada, o que garante que a versão de weekning com o *Bang* é um teorema.

Consideremos agora o operador *why not*. A ideia central deste operador é parecida com a do operador *bang*, recuperar contração e weakening. A diferença principal entre os dois operadores pode ser mais facilmente percebida se levarmos em consideração as regras de **Cs**. Enquanto o operador *bang* é utilizado para recuperar as regras estruturais do lado esquerdo, o operador *why not* é usado para recuperar as regras do lado direito do sequente. A regra para o operador *why not* é a seguinte:⁵

$$\frac{?A}{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}$$

A

em que a linha pontilhada representa uma "barreira" que só pode ser transposta por fórmulas que contenham o operador *bang*, seja ele afirmado ou negado. Ao atravessar a barreira, o operador *bang* é eliminado. Assim como o *bang*, o operador $?$ permite aplicações vácuas. Do ponto de vista de um teorista da prova, a "barreira" corresponde a restrição, em **Cs**, de que o conjunto de hipóteses deve estar acompanhada de operadores modais.

A regra acima corresponde a seguinte regra em **Cs**:

⁵MEYER, Robert. McROBBIE, Michael. & BELNAP, Nuel. "Linear Analytic Tableaux" In: BAUMGARTNER, Peter. HÄHNLE, Reiner. & POSEGGA, Joachim. (org.) Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods. St. Goar. Springer. 1995. pp. 278 - 293.

$$\frac{![\Gamma], A \Rightarrow}{![\Gamma], ?A \Rightarrow}$$

Consideremos agora as regras para a negação dos operadores modais. A regra em tableaux para a negação do *bang* pode ser obtida pela tradução da seguinte regra de **Cs**:

$$\frac{![\Gamma], ?[\Delta]^\perp, A^\perp \Rightarrow}{![\Gamma], ?[\Delta]^\perp, !A^\perp \Rightarrow} \Rightarrow \frac{!A^\perp}{A^\perp}$$

Assim como na regra para afirmação de $?$, a negação do *bang* cria uma barreira que só pode ser ultrapassada por outras fórmulas modais.

A regra para a negação do operador *why not* é a seguinte:

$$\frac{?A^\perp}{A^\perp}$$

Em que podemos obter $A^\perp$ um número arbitrário de vezes.

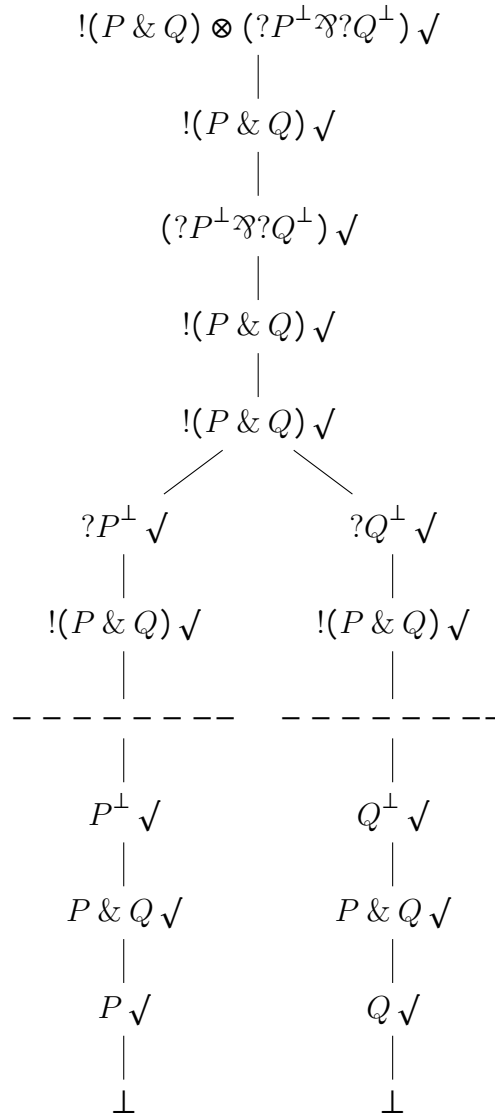
A regra corresponde as seguintes regras de **Cs**:

$$\frac{\Gamma, \Delta^\perp, A^\perp \Rightarrow}{\Gamma, \Delta^\perp, ?A^\perp \Rightarrow} \quad \frac{\Gamma, \Delta^\perp \Rightarrow}{\Gamma, \Delta^\perp, ?A^\perp \Rightarrow}$$

Assim como no caso do *bang*, devemos adicionar uma regra para contração do *why not*. A seguinte regra corresponde a regra de contração em **Cs**:

$$\frac{\frac{\Gamma, \Delta^\perp, ?A^\perp, ?A^\perp \Rightarrow}{\Gamma, \Delta^\perp, ?A^\perp \Rightarrow}}{\Gamma, \Delta^\perp, ?A^\perp \Rightarrow} \Rightarrow \frac{?A^\perp}{\tau} \frac{?A^\perp}{?A^\perp}$$

Visualizemos o funcionamento da barreira com o seguinte exemplo:



A eliminação do operador $\wp$ gerou uma barreira que só pode ser trasposta pela fórmula $(P \& Q)$ devido ao operador *bang*. Qualquer outra fórmula R que ocorresse acima da barreira e que não estivesse acompanhada de operadores modais não poderia ser utilizada a baixo da barreira.

4.3

Corretude e Completude

Provaremos agora os teoremas de corretude e completude para o novo tableaux linear. Em ambos os teoremas, iremos apresentar a tradução entre derivações apenas para os operadores exponenciais. Os casos dos operadores binários são idênticos aos apresentados no capítulo anterior. Usaremos o cálculo de sequentes de Okada⁶, que é correto e completo com relação à semântica de

⁶OKADA, Mitsuhiro. "An Introduction to Linear Logic: Expressiveness and Phase Semantics". In: DEZANI-CIANCAGLINI, Mariangiola. OKADA, Mitsuhiro. & TAKAHASHI,

fases, como garantia de que nosso sistema de tableaux será correto e completo.

Teorema 3 (Completeness): Se existe uma prova para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, então existe pelo menos uma árvore de dedução para Γ e $[\Delta]^\perp$ que é fechada.

Prova por indução no comprimento da derivação.

Caso I: *Bang* vácuo (weakning)

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, \Delta^\perp \Rightarrow}}{\Gamma, \Delta^\perp, !A \Rightarrow}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ | \\ \Delta^\perp \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $!A$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação que corresponde à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c} !A \\ | \\ \Gamma \\ | \\ \Delta^\perp \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Caso II: *Bang* à esquerda

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

Masako (ORG.) Mathematical Society of Japan Memoirs vol.2. 1998. pp. 255 - 295.

$$\frac{\pi_1}{\frac{\Gamma, \Delta^\perp, A \Rightarrow}{\Gamma, \Delta^\perp, !A \Rightarrow}}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ | \\ \Delta^\perp \\ | \\ A \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $!A$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação corresponde à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c} !A \\ | \\ \Gamma \\ | \\ \Delta^\perp \\ | \\ A \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Caso III: Contração com *Bang*

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\pi_1}{\frac{\Gamma, \Delta^\perp, !A, !A \Rightarrow}{\Gamma, \Delta^\perp, !A \Rightarrow}}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \\
| \\
\Delta^\perp \\
| \\
!A \\
| \\
!A \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $!A$ ao topo da árvore. Obtemos a seguinte derivação corresponde à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
!A \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\Delta^\perp \\
| \\
!A \\
| \\
!A \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso IV: Negação do *bang*

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\pi_1}{\frac{! \Gamma, ? \Delta^\perp, A^\perp \Rightarrow}{! \Gamma, ? \Delta^\perp, ! A^\perp \Rightarrow}}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
! \Gamma \\
| \\
? \Delta^\perp \\
| \\
A^\perp \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $!A^\perp$ ao topo da derivação. Também devemos incluir uma "barreira" acima da fórmula negada, correspondendo a aplicação da regra para negação do *bang*. Obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
!A^\perp \\
| \\
! \Gamma \\
| \\
? \Delta^\perp \\
| \\
\hline
| \\
A^\perp \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso V: *Why not* à esquerda

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\pi_1}{\frac{! \Gamma, ? \Delta^\perp, A \Rightarrow}{! \Gamma, ? \Delta^\perp, ? A \Rightarrow}}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
! \Gamma \\
| \\
? \Delta^\perp \\
| \\
A \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $?A$ ao topo da derivação e, assim como no caso da negação do *bang*, devemos incluir a "barreira" acima da fórmula que acompanha o $?$, conforme a regra do *why not*. Obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
?A \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\Delta^\perp \\
| \\
\hline
A \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso VI: Negação *why not* vácuo (weakning)

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, \Delta^\perp \Rightarrow}}{\Gamma, \Delta^\perp, ?A^\perp \Rightarrow}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \\
| \\
\Delta^\perp \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $?A^\perp$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
?A^\perp \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\Delta^\perp \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso VII: Negação *why not*

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\pi_1}{\frac{\Gamma, \Delta^\perp, A^\perp \Rightarrow}{\Gamma, \Delta^\perp, ?A^\perp \Rightarrow}}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \\
| \\
\Delta^\perp \\
| \\
A^\perp \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $?A^\perp$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
 ?A^\perp \\
 | \\
 \Gamma \\
 | \\
 \Delta^\perp \\
 | \\
 A^\perp \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Caso VIII Contração **why not**

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\pi_1}{\Gamma, \Delta^\perp, ?A^\perp, ?A^\perp \Rightarrow} \Rightarrow \Gamma, \Delta^\perp, ?A^\perp \Rightarrow$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados :

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \\
 | \\
 \Delta^\perp \\
 | \\
 ?A^\perp \\
 | \\
 ?A^\perp \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $?A^\perp$ ao topo da derivação. Obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
?A^\perp \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\neg\Delta \\
| \\
?A^\perp \\
| \\
?A^\perp \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Logo, Se existe uma prova para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, então existe pelo menos uma árvore de dedução para Γ e $[\Delta]^\perp$ que é fechada.

Teorema 4 (Corretude) : Se temos uma árvore de dedução fechada para Γ e $[\Delta]^\perp$, então existe uma prova para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em **Cs**.

Prova por indução no comprimento da derivação.

Caso I: *Bang* vácuo (weakning)

Assuma a seguinte árvore em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
!A \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\Delta^\perp \\
| \\
\pi_1 \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Devemos notar que a árvore correspondente à prova obtida pela hipótese indutiva é fechada, pois a *top-fórmula* não foi utilizada para fechar nenhum ramo e a fórmula obtida pela aplicação da regra na *top-fórmula* é adicionada

como uma nova hipótese. Sabemos que a prova obtida pela hipótese indutiva corresponde a uma árvore fechada, pois a fórmula $!A$ foi usada vacuamente, ou seja, não foi utilizada para fechar um ramo e nenhuma regra foi aplicada. Basta aplicar a regra de **Cs** para o *bang* vácuo e obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}$$

Caso II: *Bang*

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c} !A \\ | \\ \Gamma \\ | \\ A \\ | \\ \Delta^\perp \\ | \\ \pi_1 \\ | \\ \perp \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}$$

Aplicando a regra para o *bang* obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}$$

Caso III: *Bang* contração

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
!A \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\Delta^\perp \\
| \\
!A \\
| \\
!A \\
| \\
\pi_1 \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}$$

Aplicando a regra para contração obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}$$

Caso IV: Negação do *bang*

Suponha a seguinte árvore fechada:

$$\begin{array}{c}
!A^\perp \\
| \\
! \Gamma \\
| \\
? \Delta^\perp \\
| \\
\hline
| \\
A^\perp \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{\pi_1}{!\Gamma, A^\perp \Rightarrow ?\Delta}$$

É importante notar que a hipótese indutiva corresponde a uma árvore sem a fórmula topo $\neg!A$ e sem a barreira que está representada na árvore acima. Basta aplicar a regra para negação do *bang* e obtemos:

$$\frac{\frac{\pi_1}{!\Gamma, A^\perp \Rightarrow ?\Delta}}{!\Gamma, !A^\perp \Rightarrow ?\Delta}$$

Caso V: *Why not*

Suponha a seguinte árvore fechada:

$$\begin{array}{c} ?A \\ | \\ !\Gamma \\ | \\ ?\Delta^\perp \\ | \\ \hline | \\ A \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{\pi_1}{!\Gamma, A \Rightarrow ?\Delta}$$

A mesma observação sobre a barreira feita no caso anterior também é válida aqui. Basta aplicar a regra para o *why not* e obtemos:

$$\frac{\frac{\pi_1}{!\Gamma, A \Rightarrow ?\Delta}}{!\Gamma, ?A \Rightarrow ?\Delta}$$

Caso VI: *Why not* vácuo

Assuma a seguinte árvore em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
?A^\perp \\
| \\
\Gamma \\
| \\
\Delta^\perp \\
| \\
\pi_1 \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Basta aplicar a regra para o *why not* vácuo e obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, ?A^\perp \Rightarrow \Delta}$$

Caso VII: Negação Why not

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
?A^\perp \\
| \\
\Gamma \\
| \\
A^\perp \\
| \\
\Delta^\perp \\
| \\
\pi_1 \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A^\perp \Rightarrow \Delta}$$

Aplicando a regra para negação do why not obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A^\perp \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, ?A^\perp \Rightarrow \Delta}$$

Caso VIII: Contração *why not*

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c} ?A^\perp \\ | \\ \Gamma \\ | \\ \Delta^\perp \\ | \\ ?A^\perp \\ | \\ ?A^\perp \\ | \\ \pi_1 \\ | \\ \perp \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, ?A^\perp, ?A^\perp \Rightarrow \Delta}$$

Aplicando a regra para contração obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, ?A^\perp, ?A^\perp \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, ?A^\perp \Rightarrow \Delta}$$

Logo, Se temos uma árvore de dedução fechada para Γ e $[\Delta]^\perp$, então existe uma prova para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em **Cs**.

5

Tableaux Linear Intuicionista

Grosso modo, existem duas maneiras de construir um tableau intuicionista. O primeiro estilo, o tableaux sintático ou tableaux à la Fitting¹, consiste na mera adição de rótulos Ts e Fs ao lado de cada fórmula para indicar os valores de verdade. Além disso, cada ramo deve possuir no máximo uma fórmula negada não utilizada². O segundo estilo, o tableaux semântico³, consiste na incorporação de uma semântica de Kripke dentro das árvores de derivação por meio da adição de rótulos para os mundos e pela adição, quando necessário, de nodos representando as relações de acessibilidade.

Ao longo deste capítulo iremos construir um tableaux ao estilo Fitting para Lógica Linear Intuicionista, utilizando como base o tableaux linear clássico apresentado no capítulo 4. Uma alteração necessária é a remoção dos operadores $\wp$ e $?$. A remoção da disjunção multiplicativa é justificada pelo fato de sua semântica ser considerada problemática do ponto de vista de alguns intuicionistas⁴. A remoção do operador 'why not', por sua vez, se dá, pois, no Cs intuicionista, a cardinalidade do consequente é restrita a no máximo uma formula, o que elimina a necessidade do operador exponencial no lado direito do sequente.

5.1

Tableaux Linear Intuicionista à la Fitting

Podemos obter a versão à la Fitting do tableaux linear intuicionista adicionando rótulos Ts e Fs às fórmulas de cada nodo. O rótulo T indica que a fórmula é intuicionisticamente demonstrável, enquanto o rótulo F indica que a fórmula é intuicionisticamente refutável. Mantendo a analogia com Cs,

¹FITTING, Melvin. "Genral Introduction" In: D'AGOSTINO, Marcello. GABBAY, Dov. HÄHNLE, Reiner & POSEGGA, Joachim (org.) Handbook of Tableau Methods. Springer, 1999. pp. 1 - 44.

²Essa restrição corresponde à restrição em Cálculo de Sequentes intuicionista que diz que deve haver no máximo uma fórmula no lado direito.

³Vários exemplos desse estilo de tableaux podem ser encontrados em PRIEST, Graham. "Introduction to Non-Classical Logic", Cambridge University Press, 2001.

⁴Embora já hoje existam algumas versões da lógica linear intuicionista com o par, decidi, ao menos no primeiro momento, adotar uma posição mais conservadora e apresentar o tableaux sem o par.

os rótulos nos permitem reconstruir um sequente, colocando as fórmulas T do lado esquerdo e as F do lado direito ⁵.

Assim como Fitting, irei usar uma semântica BHK para dar uma intuição sobre o funcionamento das regras que estão sendo apresentadas. É importante notar que, apesar de possuírem grande poder explicativo, as semânticas ao estilo BHK são semânticas incompletas, uma vez que não definem formalmente como tratar o caso das proposições atômicas. A semântica que usarei é a que se segue abaixo:

- π é uma prova de $A \& B$ sse π é capaz de produzir tanto uma prova de A quanto uma prova de B.
- π é uma prova de $A \otimes B$ sse π é um par (α, β) tal que α prova A e β prova B.
- π é uma prova de $A \oplus B$ sse π é um par (π_1, π_2) , tal que $\pi_1 \in \{0, 1\}$ e π_2 é uma prova de A, se $\pi_1 = 0$ e π_2 é uma prova de B, se $\pi_1 = 1$.
- π é uma prova de $A \multimap B$ sse π é um método que transforma uma prova de A em uma prova de B.
- π é uma prova de $\neg A$ sse π é um método que converte uma prova de A em uma prova de $\perp$.
- π é uma prova de $!A$ sse π é um método capaz de gerar um número arbitrário de provas para A.

Antes de apresentarmos as regras, devemos ajustar algumas definições, apresentadas na seção 3, afim de adequar as propriedades estruturais das árvores à adição dos rótulos. As novas definições são as que se seguem:

Definição 4’: Um ramo é dito *fechado* quando, dado uma fórmula A, tando A T quanto sua negação A F estão contidos no mesmo ramo. Caso contrário, o ramo é dito *aberto*.

Definição 7’: Dizemos que B é derivável a partir $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ se existe uma árvore fechada construída com os nodos iniciais $A_1T, A_2T, \dots, A_nT$ e BF .

Definição 8’: Uma fórmula A é um teorema se existe uma árvore fechada construída com A F.

⁵FITTING, Melvin. "Genral Introduction" In: D’AGOSTINO, Marcello. GABBAY, Dov. HÄHNLE, Reiner & POSEGGA, Joachim (org.) Handbook of Tableau Methods. Springer, 1999. pp. 1 - 44.

As regras para as conjunções aditiva e multiplicativa e para disjunção aditiva são essencialmente as mesmas do tableaux clássico, a menos pela adição dos rótulos e pela adição da função ν às regras aditivas.

Conjunção Aditiva

As regras para a conjunção aditiva funcionam da seguinte maneira. No caso da ocorrência de um nodo com $A \& B$ T, temos a propriedade da projeção da conjunção, ou seja, dado que $A \& B$ é demonstrável, então podemos apresentar uma prova de A e uma prova de B, porém sem apresentar ambas as provas simultaneamente. No caso de $A \& B$ F, temos que ao menos um dos conjuntos não é demonstrável.

$$\begin{array}{ccc}
 (A \& B) \ T & & (A \& B) \ T \\
 | & & | \\
 AT & & B \ T
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (A \& B) \ F & & \\
 / \quad \backslash & & \\
 A \ F & B \ F & \\
 | \quad | & & \\
 \Gamma \ T & \Gamma \ T &
 \end{array}$$

Em que Γ são fórmulas que não foram usadas acima do nodo no qual a regra foi aplicada.

Conjunção Multiplicativa

O caso da conjunção multiplicativa é bem simples. Se temos uma ocorrência de $A \otimes B$ T, então temos, simultaneamente, uma prova de A e uma prova de B. No caso de $\otimes$ -F, sabemos que não temos uma prova para pelo menos um dos conjuntos. As fórmulas que ocorrem acima de $A \otimes B$ F devem ser divididas arbitrariamente entre os dois ramos em Γ e Σ

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes B) \ T & & (A \otimes B) \ F \\
 | & & / \quad \backslash \\
 A \ T & & A \ F \quad B \ F \\
 | & & | \quad | \\
 B \ T & & \Gamma \ T \quad \Sigma \ T
 \end{array}$$

Disjunção Aditiva

O caso da disjunção aditiva é espelhado ao caso da conjunção aditiva. Vemos que a propriedade do silogismo disjuntivo é satisfeita no caso de $\oplus$ - T,

ou seja, caso $A \oplus B$ seja demonstrável, então ou A ou B são demonstráveis. Já no caso de $\oplus\text{-F}$, sabemos que não temos uma prova de A ou não temos uma prova de B, porém não simultaneamente.

$$\begin{array}{c}
 (A \oplus B) \ T \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 A \ T \quad B \ T \\
 | \quad \quad | \\
 \Gamma \ T \quad \Gamma \ T
 \end{array}$$

Em que Γ são fórmulas que não foram usadas acima do nodo no qual a regra foi aplicada.

$$\begin{array}{cc}
 (A \oplus B) \ F & (A \oplus B) \ F \\
 | & | \\
 A \ F & B \ F
 \end{array}$$

Implicação Linear

O caso da implicação demanda um pouco mais de atenção. A leitura da implicação do ponto de vista intuicionista ⁶ nos explica, intuitivamente, que estamos certos em afirmar $A \rightarrow B$ se e somente se possuímos um método de construção capaz de transformar uma prova (hipotética) de A em uma prova de B. Considerando essa definição da implicação, se uma implicação linear intuicionista $A \multimap B \ T$ ocorre em uma árvore, podemos tomar como certo que possuímos um método capaz de converter qualquer prova de A em uma prova de B. Entretanto, o fato de possuímos tal método não nos garante que exista, no momento atual, uma prova de A. A regra para a implicação linear intuicionista deve então refletir nosso momento epistêmico atual, ou não possuímos uma prova efetiva de A, ou possuímos uma prova de A e a convertemos em uma prova de B. Dessa forma, a regra para $A \multimap B \ T$ bifurca em A F e B T, assim como a regra clássica. ⁷

$$\begin{array}{c}
 (A \multimap B) \ T \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 A \ F \quad B \ T \\
 | \quad \quad | \\
 \Gamma \ T \quad \Sigma \ T
 \end{array}$$

⁶HEYTING, Arend. Intuitionism, an Introduction. North-Holland, Amsterdam, 1956. Revised Edition 1966.

⁷FITTING, Melvin. "Genral Introduction" In: D'AGOSTINO, Marcello. GABBAY, Dov. HÄHNLE, Reiner & POSEGGA, Joachim (org.) Handbook of Tableau Methods. Springer, 1999. pp. 1 - 44.

O caso da implicação negada é um pouco mais complicado. Suponha uma ocorrência de $(A \multimap B) F$ em uma árvore de derivação. Seguindo a definição de Heyting, sabemos que, uma vez que a fórmula é falsa, não possuímos um método para converter provas de A em provas de B, mas isso não diz nada sobre a existência ou não de uma prova para A. A falsidade da implicação nos diz apenas que existe um estado de coisas, não necessariamente atual, em que possuímos uma prova de A e não possuímos uma prova de B. Podemos perceber aqui a introdução de um aspecto temporal na implicação, podemos inferir, a partir da falsidade de $(A \multimap B)$, que no futuro haverá uma situação em que somos capazes de construir uma prova para A sem construir uma prova para B. Devemos nos perguntar agora o que acontece com as hipóteses que ocorrem acima de $(A \multimap B) F$ quando damos esse "salto" para o futuro. As hipóteses com rótulos T devem continuar disponíveis, pois uma vez que uma fórmula é demonstrada, ela continua demonstrada para sempre. As hipóteses F, por sua vez, devem ser descartadas (na terminologia que estamos empregando a fórmula deve ser utilizada e sinalizada com $\checkmark$), pois o fato de uma fórmula A não possuir uma prova no momento atual não garante que não teremos uma prova de A no futuro.

$$\begin{array}{c} (A \multimap B) F \\ | \\ A T \\ | \\ B F \end{array}$$

Negação

As regras para negação são um caso particular da implicação. Dado que $A^\perp$ é definido como $A \multimap \perp$, a regra $A^\perp T$ replica a regra de $\multimap$ -T, bifurcando em $A F$ e $\perp T$. Porém, o ramo gerado com $\perp T$ deve ser excluído, pois o $\perp$ sempre é falso. A regra para $\cdot^\perp$ -F, por sua vez, replica a regra para $\multimap$ -F. Obtemos A T e todas as fórmulas acima com rótulos F são descartadas (utilizadas).

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} A^\perp T \\ | \\ A F \end{array} & \begin{array}{c} A^\perp F \\ | \\ A T \end{array} \end{array}$$

Bang

As regras para operador bang também são bem simples. No caso de uma ocorrência de uma fórmula $!A$ T, podemos utilizar a fórmula A quantas vezes forem necessário, inclusive nenhuma vez como no caso do weakening com o bang, contornando a restrição linear sobre a utilização das fórmulas. No caso de $!A$ acompanhado do rótulo F, apenas eliminamos o operador modal e mantemos o rótulo e gerando uma barreira que só pode ser ultrapassada por fórmulas modais. O caso da regra para contração do Bang também é idêntico ao capítulo anterior em que podemos gerar duas fórmulas abaixo do ramo.

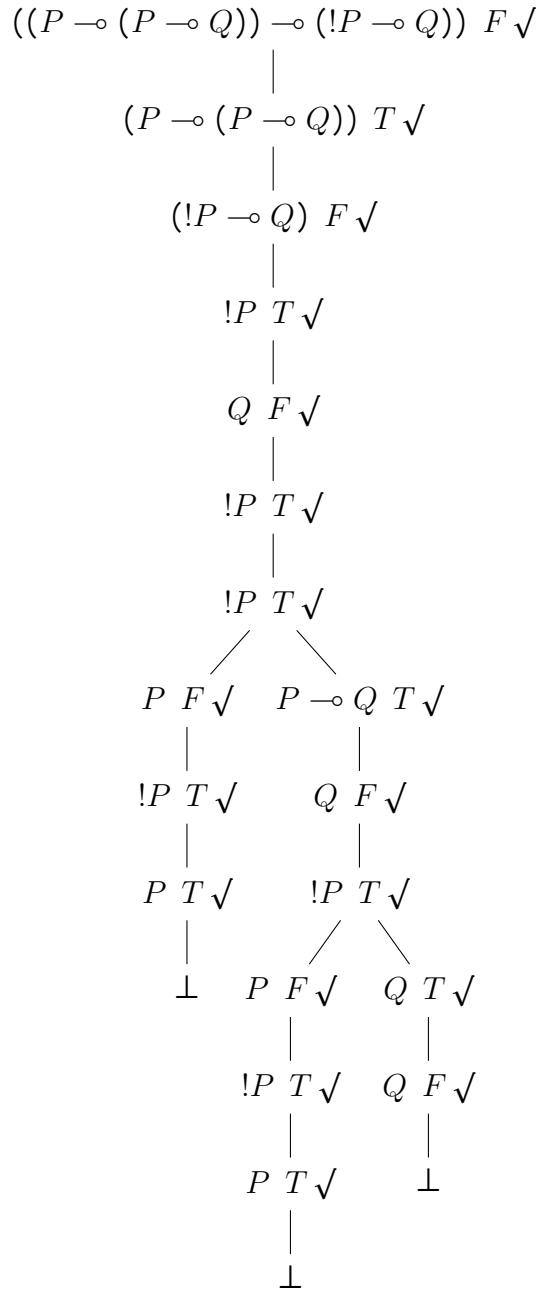
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} !A \text{ T} \\ A \text{ T} \end{array} & \begin{array}{c} !A \text{ F} \\ \hline A \text{ F} \end{array} & \begin{array}{c} !A \text{ T} \\ \tau \\ !A \text{ T} \\ !A \text{ T} \end{array}
 \end{array}$$

Agora que as regras foram apresentadas, vamos ver alguns exemplos de árvores rotuladas. Olhemos primeiro a derivação de weakening.

$$\begin{array}{c}
 (P \multimap (Q \multimap P)) \text{ F } \checkmark \\
 | \\
 P \text{ T } \checkmark \\
 | \\
 (Q \multimap P) \text{ F } \checkmark \\
 | \\
 Q \text{ T} \\
 | \\
 P \text{ F } \checkmark \\
 | \\
 P \text{ T } \checkmark
 \end{array}$$

Como podemos ver, weakening não é um teorema, pois apesar de haver uma contradição no ramo, a fórmula Q não foi utilizada.

O axioma de contração com o operador bang, por sua vez, é um teorema, conforme a seguinte árvore rotulada:



5.2

Corretude e Completude para o Tableaux Sintático à la Fitting

Os teoremas de corretude e completude funcionam como certificados de qualidade para os sistemas dedutivos. Enquanto o teorema de corretude garante que as derivações possuem um bom comportamento semântico ao demonstrar que o sistema dedutivo gera provas apenas para formulas válidas, o teorema de completude, por sua vez, garante que todas as formulas válidas - e apenas as fórmulas válidas - possuem uma prova dentro do sistema dedutivo.

Usualmente, o teorema de corretude ($\vdash A \Rightarrow \models A$) é demonstrado por indução no comprimento da derivação, enquanto o teorema de completude

($\models A \Rightarrow \vdash A$) é tipicamente ⁸ demonstrado pela estratégia de Henkin. Porém, irei adotar uma estratégia de prova indireta. Nesta estratégia, irei apresentar uma tradução entre derivações de tableau e cálculo de sequentes, aproveitando a prova apresentada por M. Okada ⁹ para um cálculo de sequentes para lógica linear, portanto, assim como nos teoremas 1 e 2, a corretude e completude do nosso sistema de tableaux é relativa a corretude e completude do cálculo de sequentes adaptado de Okada. Podemos reformular o sistema de Okada, sem perdermos suas propriedades, para obtermos um **Cs** linear intuicionista impondo as restrições usuais dos sistemas intuicionistas e removendo os operadores $\wp$ e $?$. No caso dos tableaux sintático à la Fitting, não é necessário a importação dos rótulos Ts e Fs para o cálculo de sequentes. O sistema obtido consiste nas seguintes regras:

Axioma:

$$\frac{}{A \Rightarrow A}$$

Regra do Corte:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Sigma \Rightarrow D}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow D}$$

Regras Lógicas:

Conjunção Aditiva:

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow D}{A \& B, \Gamma \Rightarrow D} \quad \frac{B, \Gamma \Rightarrow D}{A \& B, \Gamma \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B}$$

Conjunção Multiplicativa:

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow D}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow A \otimes B}$$

Disjunção Aditiva:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow D \quad \Gamma, B \Rightarrow D}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B}$$

Implicação Multiplicativa:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Sigma \Rightarrow D}{A \multimap B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D} \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B}$$

⁸Existem outras formas de provar diretamente a corretude, como a estratégia de Beth ou a de Kálmár.

⁹OKADA, Mitsuhiro. "An Introduction to Linear Logic: Expressiveness and Phase Semantics". In: DEZANI-CIANCAGLINI, Mariangiola. OKADA, Mitsuhiro. & TAKAHASHI, Masako (ORG.) Mathematical Society of Japan Memoirs vol.2. 1998. pp. 255 - 295.

Negação Linear:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, A^\perp \Rightarrow} \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A^\perp}$$

Bang:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow D}{\Gamma, !A \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow D}{\Gamma, !A \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow D}{\Gamma, !A \Rightarrow D} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow !A}$$

5.3

Tradução de Derivações

Teorema 5 (Completeness): Se existe uma prova para o sequente $\Gamma \Rightarrow D$, então existe pelo menos uma árvore de dedução para Γ T e D F que é fechada.

Prova por indução no comprimento da derivação. Devemos definir uma função de tradução $f_1[\pi]$ capaz de transformar as derivações de **Cs** em árvores de **Tx**. A função é definida pela análise de cada operador conforme segue abaixo:

Caso base:

Tome o seguinte sequente de **Cs**:

$$A \Rightarrow A$$

Podemos, trivialmente, construir a seguinte árvore fechada:

$$\begin{array}{c} AT \\ | \\ AF \\ | \\ \perp \end{array}$$

Caso I: Conjunção Aditiva à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma \Rightarrow B}}{\Gamma \Rightarrow A \& B}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \quad T \\
 | \\
 A \quad F \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \Gamma \quad T \\
 | \\
 B \quad F \\
 | \\
 f_1(\pi_2) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pelo **Lemma 1**, obtemos a seguinte árvore adicionando um novo nodo $(A \& B)F$ ao topo da derivação e obtendo a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
 (A \& B) \quad F \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{c} \Gamma \quad T \\ | \\ A \quad F \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c} \Gamma \quad T \\ | \\ B \quad F \\ | \\ f_1(\pi_2) \\ | \\ \perp \end{array}
 \end{array}$$

Caso II: Conjunção Aditiva à esquerda

Tome as seguintes derivações em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, A \Rightarrow D}}{\Gamma, A \& B \Rightarrow D} \qquad \frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, B \Rightarrow D}}{\Gamma, A \& B \Rightarrow D}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \quad T \\
 | \\
 A \quad T \\
 | \\
 D \quad F \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \Gamma \quad T \\
 | \\
 D \quad F \\
 | \\
 B \quad T \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $(A \& B)T$ ao topo das derivações e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
 (A \& B) T \\
 | \\
 \Gamma T \\
 | \\
 A T \\
 | \\
 D F \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 (A \& B) T \\
 | \\
 \Gamma T \\
 | \\
 D F \\
 | \\
 B T \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Caso III: Conjunção multiplicativa à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \frac{\pi_2}{\Sigma \Rightarrow B}}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow A \otimes B}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma T \\
 | \\
 A F \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \Sigma T \\
 | \\
 B F \\
 | \\
 f_1(\pi_2) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pelo **Lemma 1** podemos adicionar um novo nodo $(A \otimes B) F$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
 (A \otimes B) F \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{c}
 \Gamma T \\
 | \\
 A F \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \Sigma T \\
 | \\
 B F \\
 | \\
 f_1(\pi_2) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \end{array}$$

Caso IV: Conjunção multiplicativa à esquerda

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{A, B, \Gamma \Rightarrow D}}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow D}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c} \Gamma \quad T \\ | \\ D \quad F \\ | \\ A \quad T \\ | \\ B \quad T \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $(A \otimes B) \quad T$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c} (A \otimes B) \quad T \\ | \\ \Gamma \quad T \\ | \\ D \quad F \\ | \\ A \quad T \\ | \\ B \quad T \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Caso V: Disjunção Aditiva à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow A}}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \quad \frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow B}}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c} \Gamma \quad T \\ | \\ A \quad F \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma \quad T \\ | \\ B \quad F \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $(A \oplus B \quad F)$ ao topo das derivações e obtemos as seguintes derivações correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c} (A \oplus B) \quad F \\ | \\ \Gamma \quad T \\ | \\ A \quad F \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} (A \oplus B) \quad F \\ | \\ \Gamma \quad T \\ | \\ B \quad F \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Caso VI: Disjunção Aditiva à esquerda

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{A, \Gamma \Rightarrow D} \quad \frac{\pi_2}{B, \Gamma \Rightarrow D}}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow D}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \quad T \\
 | \\
 D \quad F \\
 | \\
 A \quad T \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \Gamma \quad T \\
 | \\
 D \quad F \\
 | \\
 B \quad T \\
 | \\
 f_1(\pi_2) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pelo **Lemma 1** podemos adicionar um novo nodo $(A \oplus B) \quad T$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
 (A \oplus B) \quad T \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{c}
 \Gamma \quad T \\
 | \\
 D \quad F \\
 | \\
 A \quad T \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \Gamma \quad T \\
 | \\
 D \quad F \\
 | \\
 B \quad T \\
 | \\
 f_1(\pi_2) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}
 \end{array}$$

Caso VII: Implicação multiplicativa à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{A, \Gamma \Rightarrow B}}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \quad T \\
| \\
A \quad T \\
| \\
B \quad F \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $(A \multimap B) \quad F$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
(A \multimap B) \quad F \\
| \\
\Gamma \quad T \\
| \\
A \quad T \\
| \\
B \quad F \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso VIII: Implicação multiplicativa à esquerda

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \frac{\pi_2}{B, \Sigma \Rightarrow D}}{A \multimap B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow D}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos as seguintes derivações em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\Gamma \quad T \\
| \\
A \quad F \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\Sigma T \\
| \\
D \quad F \\
| \\
B \quad T \\
| \\
f_1(\pi_2) \\
| \\
\perp
\end{array}
\end{array}$$

Pelo **Lemma 1** podemos adicionar um novo nodo $(A \multimap B) \ T$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
 (A \multimap B) \ T \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma \ T \quad \Sigma \ T \\
 | \quad \quad | \\
 A \ F \quad D \ F \\
 | \quad \quad | \\
 f_1(\pi_1) \quad B \ T \\
 | \quad \quad | \\
 \perp \quad f_1(\pi_2) \\
 \quad \quad | \\
 \quad \quad \perp
 \end{array}$$

Caso IX:Negação à direita

Suponha a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, A \Rightarrow}}{\Gamma \Rightarrow A^\perp}$$

Pela hipótese indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma T \\
 | \\
 AT \\
 | \\
 f_1(\pi_1) \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Basta adicionarmos um novo rótulo $A^\perp \ F$ e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
A^\perp F \\
| \\
\Gamma T \\
| \\
AT \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso X: Negação à esquerda

Suponha a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow A}}{\Gamma, A^\perp \Rightarrow}$$

Pela hipótese indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
\Gamma T \\
| \\
AF \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Basta adicionarmos um novo rótulo $A^\perp T$ e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
A^\perp T \\
| \\
\Gamma T \\
| \\
AF \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso XI: Bang vácuo

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow D}}{\Gamma, !A \Rightarrow D}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c} \Gamma \quad T \\ | \\ D \quad F \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $!A \quad T$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c} !A \quad T \\ | \\ \Gamma \quad T \\ | \\ D \quad F \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Caso XII: Bang

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, A \Rightarrow D}}{\Gamma, !A \Rightarrow D}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \quad T \\
| \\
D \quad F \\
| \\
A \quad T \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $!A \quad T$ ao topo da derivação e obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
!A \quad T \\
| \\
\Gamma \quad T \\
| \\
D \quad F \\
| \\
A \quad T \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso XIII: Bang-Contração

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\pi_1}{\frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow D}{\Gamma, !A \Rightarrow D}}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \quad T \\
| \\
D \quad F \\
| \\
!A \quad T \\
| \\
!A \quad T \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Basta agora adicionar um nodo $!A$. Obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
!A \quad T \quad \checkmark \\
| \\
\Gamma \quad T \\
| \\
D \quad F \\
| \\
!A \quad T \quad \checkmark \\
| \\
!A \quad T \quad \checkmark \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Caso XIV: *Bang* à direita

Tome a seguinte derivação em **Cs**:

$$\frac{\pi_1}{\frac{! \Gamma \Rightarrow A}{! \Gamma \Rightarrow !A}}$$

Pela Hipótese Indutiva obtemos a seguinte derivação em **Tx** com todos os ramos fechados:

$$\begin{array}{c}
! \Gamma \quad T \\
| \\
A \quad F \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Basta agora adicionar um novo nodo $!A^\perp$ ao topo da derivação e incluir a "barreira" acima da fórmula negada. Obtemos a seguinte derivação correspondente à derivação em **Cs**:

$$\begin{array}{c}
!A \quad F \\
| \\
! \Gamma \quad T \\
| \\
\hline
A \quad F \\
| \\
f_1(\pi_1) \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Logo, para cada derivação em cálculo de sequentes obtemos uma árvore fechada em tableaux.

Teorema 6: Se temos uma árvore fechada para $\Gamma \quad T$ e $D \quad F$, então existe uma prova para o sequente $\Gamma \Rightarrow D$ em **Cs**.

Prova por indução no comprimento da derivação. Devemos definir uma função de tradução $f_2[\pi]$ capaz de transformar as árvores de **Tx** em provas de **Cs**. A função é definida pela análise de cada operador conforme segue abaixo:

Caso base:

Tome a seguinte árvore fechada de **Tx**:

$$\begin{array}{c}
A \quad T \\
| \\
A \quad F \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Podemos, trivialmente, construir a seguinte derivação de **Cs**:

$$A \Rightarrow A$$

Caso I: Conjunção Aditiva à esquerda

Suponha as seguintes árvores fechadas:

$$\begin{array}{c} (A \& B) \ T \\ | \\ \Gamma \ T \\ | \\ D \ F \\ | \\ A \ T \\ | \\ \pi_1 \\ | \\ \perp \end{array} \qquad \begin{array}{c} (A \& B) \ T \\ | \\ \Gamma \ T \\ | \\ D \ F \\ | \\ B \ T \\ | \\ \pi_1 \\ | \\ \perp \end{array}$$

Pela hipótese indutiva, obtemos as seguintes derivações:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow D} \qquad \frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, B \Rightarrow D}$$

Devemos notar que a árvore correspondente à prova obtida pela hipótese indutiva é fechada, pois a *top-fórmula* não foi utilizada para fechar nenhum ramo e a fórmula obtida pela aplicação da regra na *top-fórmula* é adicionada como uma nova hipótese. Aplicamos então a regra para conjunção aditiva à esquerda e obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow D}}{\Gamma, A \& B \Rightarrow D} \qquad \frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, B \Rightarrow D}}{\Gamma, A \& B \Rightarrow D}$$

Caso II: Conjunção Aditiva à direita

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
(A \& B) \ F \\
\swarrow \quad \searrow \\
A \ F \quad B \ F \\
| \quad \quad | \\
\Gamma \ T \quad \Gamma \ T \\
| \quad \quad | \\
\pi_1 \quad \quad \pi_2 \\
| \quad \quad | \\
\perp \quad \quad \perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Gamma \Rightarrow B}$$

Aplicando a regra para conjunção aditiva à direita obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Gamma \Rightarrow B}}{\Gamma \Rightarrow A \& B}$$

Caso III: Conjunção Multiplicativa à esquerda

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
(A \otimes B) \ T \\
| \\
\Gamma \ T \\
| \\
D \ F \\
| \\
A \ T \\
| \\
B \ T \\
| \\
\pi_1 \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A, B \Rightarrow D}$$

Aplicamos agora regra para conjunção multiplicativa à esquerda e obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A, B \Rightarrow D}}{\Gamma, A \otimes B \Rightarrow D}$$

Caso IV: Conjunção Multiplicativa à direita

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c} (A \otimes B) \ F \\ | \\ \Gamma \ T \\ | \\ \Sigma \ T \\ / \quad \backslash \\ A \ F \quad B \ F \\ | \quad \quad | \\ \pi_1 \quad \quad \pi_2 \\ | \quad \quad | \\ \perp \quad \quad \perp \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Sigma \Rightarrow B}$$

Em que Γ são formulas usadas no ramo esquerdo e Σ são formulas usadas no ramo direito.

Aplicando a regra para o tensor à direita obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Sigma \Rightarrow B}}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow A \otimes B}$$

Caso V: Disjunção Aditiva à esquerda

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
(A \oplus B) \ T \\
\swarrow \quad \searrow \\
A \ T \quad B \ T \\
| \quad \quad | \\
\Gamma \ T \quad \Gamma \ T \\
| \quad \quad | \\
D \ F \quad D \ F \\
| \quad \quad | \\
\pi_1 \quad \pi_2 \\
| \quad \quad | \\
\perp \quad \perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow D} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Gamma, B \Rightarrow D}$$

Aplicando a regra para a disjunção aditiva à esquerda obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow D} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{\Gamma, B \Rightarrow D}}{A \oplus B, \Gamma \Rightarrow D}$$

Caso VI: Disjunção Aditiva à direita

Suponha as seguintes árvores fechadas em **Tx**:

$$\begin{array}{cc}
(A \oplus B) \ F & (A \oplus B) \ F \\
| & | \\
\Gamma \ F & \Gamma \ T \\
| & | \\
A \ F & B \ F \\
| & | \\
\pi_1 & \pi_1 \\
| & | \\
\perp & \perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow B}$$

Aplicando a regra da disjunção aditiva à direita obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow A}}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \qquad \frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow B}}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B}$$

Caso VII: Implicação multiplicativa à esquerda

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c} (A \multimap B) \ T \\ | \\ \Gamma \ T \\ | \\ \Sigma \ T \\ / \quad \backslash \\ A \ F \quad D \ F \\ | \quad \quad | \\ \pi_1 \quad B \ T \\ | \quad \quad | \\ \perp \quad \pi_2 \\ \quad \quad | \\ \quad \quad \perp \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{B, \Sigma \Rightarrow D}$$

Aplicando a regra para implicação multiplicativa obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \frac{f_2(\pi_2)}{B, \Sigma \Rightarrow D}}{\Gamma, \Sigma, A \multimap B \Rightarrow D}$$

Caso VIII: Implicação multiplicativa à direita

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
(A \multimap B) \ F \\
| \\
\Gamma \ T \\
| \\
A \ T \\
| \\
B \ F \\
| \\
\pi_1 \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{A, \Gamma \Rightarrow B}$$

Aplicando a regra para implicação multiplicativa à direita obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{A, \Gamma \Rightarrow B}}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B}$$

Caso IX:Negação à esquerda

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
A^\perp \ T \\
| \\
\Gamma \ T \\
| \\
A \ F \\
| \\
\pi_1 \\
| \\
\perp
\end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\Gamma \Rightarrow A$$

Aplicando a regra para negação à esquerda obtemos:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, A^\perp \Rightarrow}$$

Caso X: Negação à direita:

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
 A^\perp \quad F \\
 | \\
 \Gamma \quad T \\
 | \\
 A \quad T \\
 | \\
 \pi_1 \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\Gamma, A \Rightarrow$$

Aplicando a regra para negação à esquerda obtemos:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A^\perp}$$

Caso XI: Bang vácuo

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
 !A \quad T \\
 | \\
 \Gamma \quad T \\
 | \\
 D \quad F \\
 | \\
 \pi_1 \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow D}$$

Basta aplicar a regra para o bang vácuo e obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma \Rightarrow D}}{\Gamma, !A \Rightarrow D}$$

Caso XII: Bang

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
 !A \ T \\
 | \\
 \Gamma \ T \\
 | \\
 A \ T \\
 | \\
 D \ F \\
 | \\
 \pi_1 \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow D}$$

Aplicando a regra para o bang obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, A \Rightarrow D}}{\Gamma, !A \Rightarrow D}$$

Caso XIII: *Bang* contração

Assuma a seguinte derivação em **Tx**:

$$\begin{array}{c}
 !A \ T \\
 | \\
 \Gamma \ T \\
 | \\
 D \ F \\
 | \\
 !A \ T \checkmark \\
 | \\
 !A \ T \checkmark \\
 | \\
 \pi_1 \\
 | \\
 \perp
 \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, !A, !A \Rightarrow D}$$

Aplicando a regra para contração obtemos:

$$\frac{\frac{f_2(\pi_1)}{\Gamma, !A, !A \Rightarrow D}}{\Gamma, !A \Rightarrow D}$$

Caso XIV: Negação do bang

Suponha a seguinte árvore fechada:

$$\begin{array}{c} !A \quad F \\ | \\ !\Gamma \quad T \\ | \\ \hline | \\ A \quad F \\ | \\ f_1(\pi_1) \\ | \\ \perp \end{array}$$

Pela hipótese indutiva obtemos:

$$\frac{\pi_1}{!\Gamma \Rightarrow A}$$

Basta aplicar a regra para negação do bang e obtemos:

$$\frac{\frac{\pi_1}{!\Gamma \Rightarrow A}}{!\Gamma \Rightarrow !A}$$

Logo, para cada derivação em **Tx** podemos obter uma derivação em **Cs**.

Os principais passos desta dissertação foram: i) exposição geral dos conceitos da lógica linear e da lógica da relevância. ii) construção de um tableau para o cálculo de sequentes relevante clássico proposto por Villalonga. iii) construção de um tableaux linear para o fragmento MELL e para CLL. iv) construção de um tableaux para lógica linear intuicionista (ILL). As técnicas de tradução entre **Cs** e **Tx** empregadas ao longo da dissertação foram retiradas de D'Agostino, Gabbay e Broda e de Meyer, McRobbie e Belnap. Minhas contribuições foram a construção do sistema de tableaux relevante para o cálculo de sequentes de Villalonga e o tableaux linear intuicionista utilizando a estratégia de Fitting.

Uma das principais vantagens de se trabalhar com tableaux é a capacidade deste sistema de extrair contra-modelos para fórmulas e relações entre fórmulas, entretanto, não é claro como podemos obter contra-modelos, tanto no caso relevante como no caso linear, das árvores de derivação obtidas. Um possível trabalho futuro é investigar como extrair tais contra-modelos das árvores de derivação construídas pelos sistemas propostos.

Outros possíveis trabalhos futuros são a extensão do tableaux linear intuicionista do capítulo 5 para um tableaux para FILL com e sem quantificadores. Outro possível trabalho seria a comparação entre os tableaux apresentados e os tableaux existentes para L_R e L_L .

7

Referências

1. Allwein, G. and Dunn, J.M., 1993, "Kripke Models for Linear Logic", Journal of Symbolic Logic, 58(2).
2. D'AGOSTINO, Marcello, GABBAY, Dov. & BRODA, Krysia. "Tableau Methods for Substructural Logic" In: D'AGOSTINO, Marcello. GABBAY, Dov. HÄHNLE, Reiner & POSEGGA, Joachim (org.) Handbook of Tableau Methods. Springer, 1999.
3. FITTING, Melvin. "Genral Introduction" In: D'AGOSTINO, Marcello. GABBAY, Dov. HÄHNLE, Reiner & POSEGGA, Joachim (org.) Handbook of Tableau Methods. Springer, 1999.
4. GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic, Theoretical Computer Science, 50:1, 1987.
5. GIRARD, Jean-Yves. Linear Logic, its syntax and semantics, Advances in Linear Logic, London Mathematical Society Lecture Notes Series 222, Cambridge University Press 1995.
6. Hodas, J., and Miller, D., 1994, "Logic programming in a fragment of intuitionistic linear logic", Information and Computation, 110(2)
7. Lincoln, P., Mitchell, J., Scedrov, A., and Shankar, N., "Decision problems for propositional linear logic", Annals of Pure and Applied Logic, 56. 1992.
8. MANTEL, Heiko. & OTTEN, Jens. "linTAP: A Tableau Prover for Linear Logic".
9. MEYER, Robert. McROBBIE, Michael. & BELNAP, Nuel. "Linear Analytic Tableaux" In: BAUMGARTNER, Peter. HÄHNLE, Reiner. & POSEGGA, Joachim. (org.) Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods. St. Goar. Springer. 1995.
10. OKADA, Mitsuhiro. "An Introduction to Linear Logic: Expressiveness and Phase Semantics". In: DEZANI-CIANCAGLINI, Mariangiola.

- OKADA, Mitsuhiro. & TAKAHASHI, Masako (ORG.) Mathematical Society of Japan Memoirs vol.2. 1998.
11. PAIVA, Valeria Correa Vaz de. The dialectica categories (PhD thesis). 1988. University of Cambridge.
 12. PRAWITZ, Dag, "Natural Deduction"1965, Dover.
 13. RAHMAN.S, "UN DESAFÍO PARA LAS TEORÍAS COGNITIVAS DE LA COMPETENCIA LÓGICA: LOS FUNDAMENTOS PRAGMÁTICOS DE LA SEMÁNTICA DE LA LÓGICA LINEAR", Manuscrito (25.2), 2002, 381-432p.
 14. SCHULMAN, Michael. "Linear Logic for Constructive Mathematics".2018. Preprint.
 15. TROELSTRA, Anne, "Lectures on Linear Logic"1992, CSLI Publications.
 16. VILLALONGA,Pilar. "From Natural to Formal Language: A Case for Logical Pluralism "Topoi ed.38. 2019.