

### 3 Conceitos Clássicos de Ductilidade

#### 3.1. Introdução

As vigas de concreto armado reforçadas externamente com compósitos de fibra de carbono (CFC) apresentam um comportamento diferenciado em relação às vigas de concreto armado.

Dentre os vários parâmetros que interferem no comportamento de um elemento reforçado pode-se enfatizar a ductilidade. A ductilidade é definida como a capacidade do material, seção, elemento estrutural ou sistema estrutural, de experimentar deformações inelásticas sem a perda de sua capacidade resistente, atingindo a ruptura após um considerável acúmulo de energia inelástica de deformação. A ductilidade é uma medida da capacidade do elemento estrutural se deformar antes que a ruptura ocorra.

A ductilidade tem influência significativa no comportamento de um elemento reforçado com CFC, sendo um parâmetro atualmente muito pesquisado, com resultados experimentais ainda pouco conclusivos. Portanto, faz-se necessário a realização de pesquisas mais detalhadas sobre a avaliação da ductilidade, buscando-se analisar o desempenho das estruturas reforçadas com CFC, pois se o dimensionamento do reforço for inadequado, ou se armadura do reforço adotada for muito superior à necessária, o elemento estrutural poderá apresentar um comportamento não dúctil.

Os procedimentos convencionais para a determinação da ductilidade em elementos estruturais são, geralmente, expressos por meio de uma relação chamada índice de ductilidade ou fator de ductilidade. Entretanto, as definições tradicionais são consideradas pouco apropriadas para determinar a ductilidade de vigas de concreto armado reforçadas com compósitos, daí propor-se uma nova definição de índice de ductilidade. Esse novo índice de ductilidade é baseado nas considerações da energia elástica e da energia inelástica. Dessa forma, a ductilidade passa a ser determinada por meio de um índice energético, que se

caracteriza como uma forma mais eficiente para a determinação e análise da ductilidade em elementos estruturais.

### 3.2. Índices de Ductilidade

A ductilidade dos elementos de concreto estrutural é representada por meio de índices, com valores numéricos adimensionais que visam expressar a capacidade de deformação desses elementos antes que a ruptura ocorra, de modo a se controlar os parâmetros que possam garantir uma ruptura dúctil.

A ductilidade é analisada quanto à flecha, à curvatura e à rotação, por meio de valores retirados, respectivamente, dos diagramas de carga x flecha, momento x curvatura e momento x rotação do elemento estrutural.

Em geral, definem-se os três índices de ductilidade por meio das seguintes equações:

- índice de ductilidade de flecha

$$\mu_{\delta} = \frac{\delta_u}{\delta_y} \quad (3.1)$$

- índice de ductilidade de curvatura

$$\mu_k = \frac{k_u}{k_y} \quad (3.2)$$

- índice de ductilidade de rotação

$$\mu_{\varphi} = \frac{\theta_u}{\theta_y} \quad (3.3)$$

onde:

$\delta_u$  – a flecha na carga de ruptura;

$\delta_y$  – a flecha quando da tensão de escoamento do aço da armadura longitudinal;

$k_u$  – a curvatura devido ao momento proveniente da carga de ruptura;

$k_y$  – a curvatura devido ao momento quando do escoamento da armadura longitudinal;

$\theta_u$  – a rotação devido ao momento proveniente da carga de ruptura;

$\theta_y$  – a rotação devido ao momento quando do escoamento da armadura longitudinal.

### 3.3. Energia de Deformação

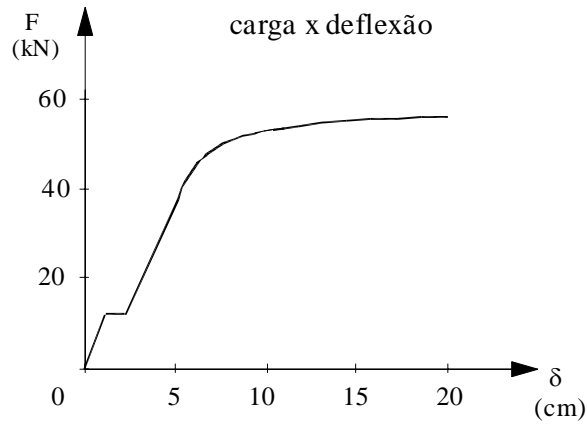
O concreto é um material frágil, mas as estruturas de concreto armado e protendido são projetadas para terem um comportamento dúctil. Nesse comportamento, a ductilidade é proveniente da deformação inelástica da armadura convencional, permitindo a capacidade total de deformação do concreto e, portanto, consumindo uma quantidade substancial de energia antes da ruptura.

Em estruturas reforçadas, a ruptura pode surgir da ruptura do compósito e a deformação inelástica necessária pode não ser atingida. Geralmente as fissuras são induzidas pela enorme energia de deformação elástica liberada na ruptura pelo polímero reforçado com fibra (PRF), ou seja, a energia elástica liberada é absorvida em parte pelo concreto, acarretando o aumento das fissuras e danos no concreto.

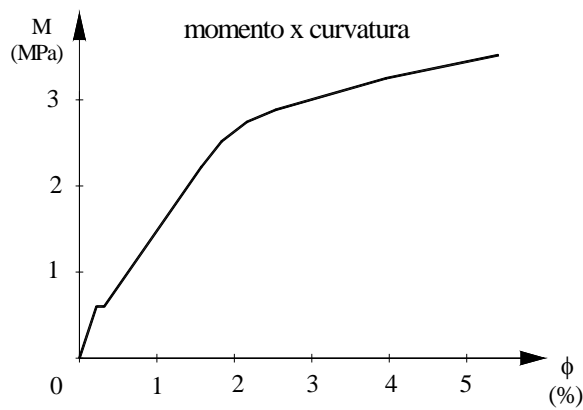
As grandes deformações que ocorrem antes da ruptura não, necessariamente, representam uma ductilidade aceitável. A parte inelástica da deformação é uma componente essencial de ductilidade. Entretanto, as definições convencionais não levam em conta, diretamente, a energia inelástica absorvida durante a deformação inelástica. Diversos pesquisadores assumem que desde que grandes flechas sejam alcançadas, tem-se uma adequada ductilidade. Porém, grandes flechas podem ser provenientes do baixo módulo de elasticidade do sistema de reforço, o que leva a uma grande quantidade de energia elástica do sistema.

Os diagramas mencionados no item 3.2 são mostrados na Figura 3.1 e permitem determinar a energia potencial do elemento analisado por meio do cálculo das áreas definidas sob as curvas obtidas em ensaios, sabendo-se que a energia potencial total é a soma da energia inelástica e da energia elástica.

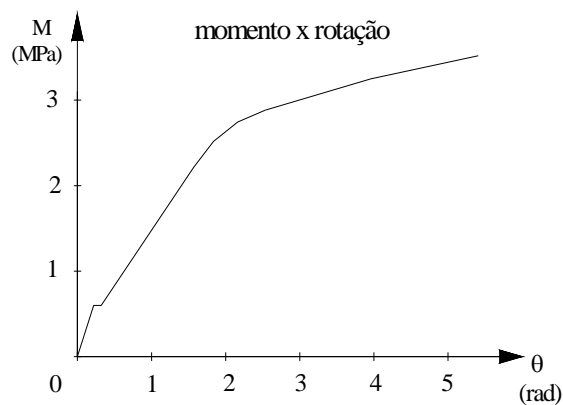
$$E_{tot} = E_{inel} + E_{el} \tag{3.4}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 3.1 – Diagramas tipo que permitem analisar a energia potencial de deformação de elementos de concreto armado: a) carga x flecha; b) momento x curvatura; c) momento x rotação; adaptados de NAAMAN e JEONG (2001).

Neste trabalho será adotada a metodologia proposta por NAAMAN e JEONG (2001), estudada por ARAÚJO (2002), onde a ductilidade é avaliada por meio de um índice de ductilidade energético, o qual será comparado com os índices de ductilidade clássicos. Serão analisados os índices clássicos de ductilidade de flecha, de curvatura, e os índices de ductilidade energética de flecha e de curvatura.

### 3.4. Índice de Ductilidade Energética

O índice de ductilidade energética representa a contínua interação entre a ação aplicada e a deformação correspondente, de forma a se obter o comportamento real da estrutura, elemento ou seção, até a ruptura, avaliando-se as parcelas de energia de deformação armazenadas nos mesmos. Observa-se que não é a deformação por si só que contribui para a ductilidade, mas sim a energia absorvida durante a deformação elástica e inelástica dos elementos estruturais.

Admitindo-se a carga última como sendo 75% da carga total, define-se a relação entre as energias por

$$\mu_E = \frac{E_{Tot}}{E_{0,75P_u}} \quad (3.5)$$

A  $E_{Tot}$  corresponde à energia total obtida no diagrama em análise para a carga de ruptura, e  $E_{0,75P_u}$  representa a energia elástica obtida no diagrama analisado para uma carga correspondente a 75% da carga de ruptura.

O cálculo da ductilidade por meio da energia, adotando-se para a energia elástica o valor que corresponde no gráfico a uma carga limite de até 75% da carga última, tem o objetivo de eliminar os problemas que possam ocorrer com os dados de ensaio obtidos com a carga última,  $P_u$ . Dessa forma determina-se a ductilidade energética de flecha, de curvatura e de rotação utilizando-se as áreas dos respectivos diagramas, ou seja,  $P \times \delta$ ,  $M \times k$  e  $M \times \theta$ , apresentados na Figura 3.1.

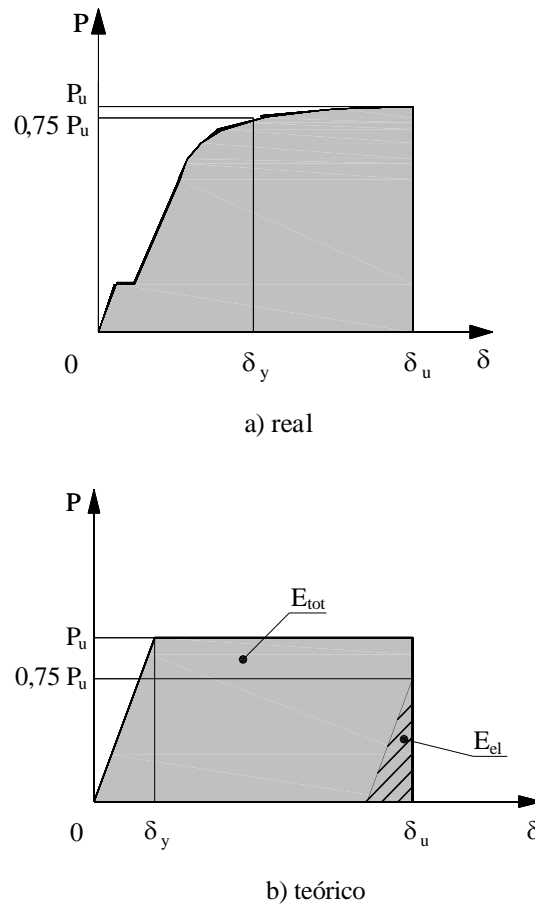


Figura 3.2 – Diagrama carga x flecha ( $P \times \delta$ ) real e teórico para obtenção das parcelas de energia; adaptada de ARAÚJO (2002).

As definições de NAAMAN e JEONG (2001) foram feitas para estruturas de concreto armado sem qualquer tipo de reforço, a não ser o das barras de armaduras internas de material compósito. Nesse caso sabe-se que a armadura consegue alcançar sua deformação inelástica antes da ruptura, permitindo que o concreto atinja a sua total capacidade de deformação, o que acarreta o consumo de uma quantidade bastante significativa de energia inelástica.

Se um sistema de reforço externo for adicionando às estruturas, essas passam a ter um conjunto capaz de absorver uma maior quantidade de carga, mas a sua capacidade de deformação não permanece a mesma, havendo uma tendência para a estrutura atingir a ruptura sem que esta tenha alcançado uma determinada deformação.

As flechas em estruturas sem reforço e em estruturas reforçadas podem ser da mesma ordem de grandeza, mas as estruturas reforçadas possuirão uma energia elástica acumulada muito maior que a das estruturas sem reforço, e uma energia

inelástica acumulada inferior à mesma, como está mostrado na Figura 3.3. Dessa forma, pode-se dizer que a ductilidade em estruturas reforçadas será, em geral, menor do que em estruturas convencionais.

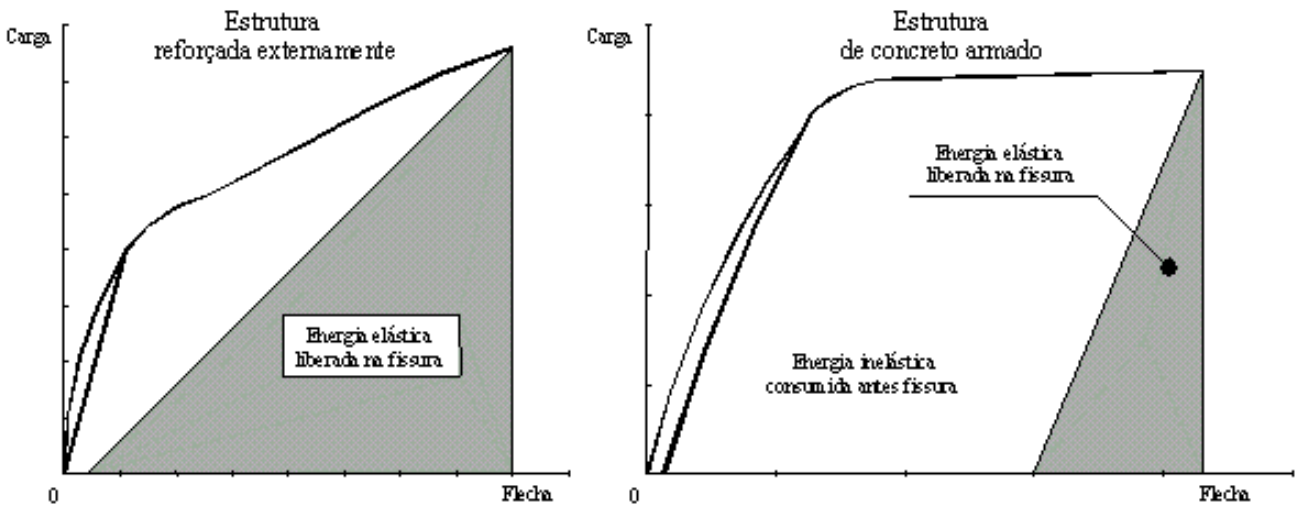


Figura 3.3 – Comparação das parcelas da energia elástica e energia inelástica; adaptada de NAAMAN e JEONG (2001)

Em geral, quando um elemento reforçado com compósito de fibra de carbono apresenta grandes deformações, tem-se uma ductilidade energética bastante satisfatória. Uma nova definição de índice de ductilidade, considerando-se a energia elástica e inelástica, foi estudada por ARAÚJO (2002) para a aplicação em estruturas com um sistema de reforço com compósitos de fibras de carbono.

A Figura 3.4a ilustra um gráfico teórico carga x flecha ( $P \times \delta$ ), onde se observam as parcelas de energia elástica e da energia total, dadas por:

$$\frac{E_{tot}}{E_{el}} = 2 \frac{\delta_u}{\delta_y} - 1 \tag{3.6}$$

$$\frac{\delta_u}{\delta_y} = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{tot}}{E_{el}} + 1 \right) \tag{3.7}$$

sendo os termos de energia obtidos por meio das áreas sob o diagrama  $P \times \delta$ , seguindo-se

$$\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{tot}}{E_{el}} + 1 \right) \quad (3.8)$$

onde:

$\mu$  – índice de ductilidade energética;

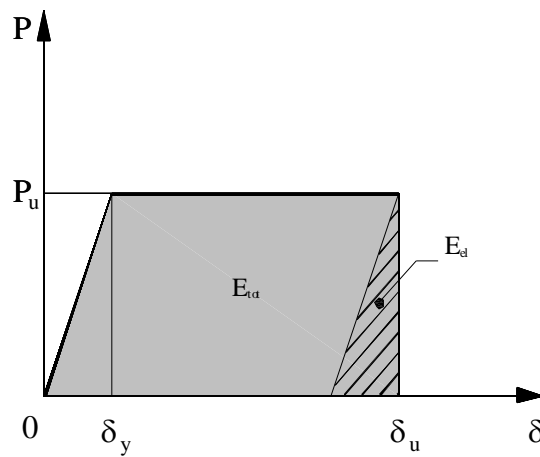
$E_{tot}$  – energia total;

$E_{el}$  – energia elástica.

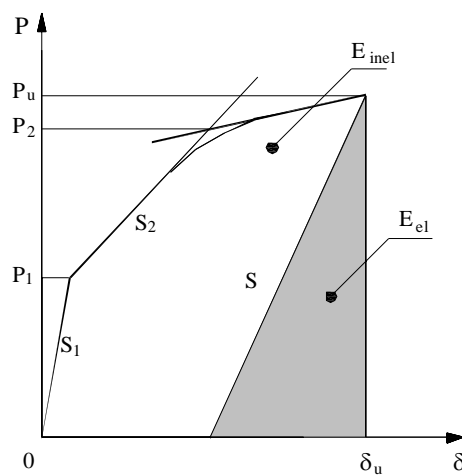
A energia total  $E_{tot}$  é calculada como sendo a área sob o diagrama carga x flecha para a carga última. Esta carga última pode ser definida como sendo a carga de ruptura, ou então, como sendo a carga que corresponde a uma parcela da carga máxima.

A energia elástica  $E_{el}$  corresponde a uma parte da energia total (Figura 3.4a) e é obtida após uma descarga do elemento estrutural, o que pode ser obtido por meio de um teste de carga-descarga, e caso esse teste não possa ser realizado, esta pode ser calculada como sendo a área de um triângulo mostrado na Figura 3.4b, formado pela linha vertical que passa pela carga última, e pela linha que tem como inclinação o valor médio das duas primeiras linhas formadas pelas deformações iniciais do diagrama carga x flecha (Figura 3.4b).





(a)



(b)

Figura 3.4 – Esquema para a obtenção do índice de ductilidade energética: (a) curva teórica  $P \times \delta$ ; (b) determinação da inclinação da linha de fechamento do triângulo que define a área da energia elástica; adaptada de ARAÚJO (2002).

A sistemática adotada segue em linhas gerais o estudo de ARAÚJO (2002), que considera:

$$E_{tot} = E_{inel} + E_{el} \tag{3.9}$$

sendo que a energia elástica é calculada por meio da área do triângulo (Figura 3.4b) dada por:

$$S = \frac{P_1 S_1 + (P_2 - P_1) S_2}{P_2} \quad (3.10)$$

onde  $S$ ,  $S_1$  e  $S_2$  correspondem às linhas de inclinação formadas pelas deformações iniciais do diagrama de  $P \times \delta$ .

Desta forma tem-se que as mesmas definições aplicáveis ao cálculo da ductilidade energética de flecha podem ser utilizadas para os diagramas de momento-curvatura e momento-rotação, que permitem calcular, respectivamente, os índices de ductilidade energética para curvatura e para rotação.

As expressões para a ductilidade energética de flecha, curvatura e rotação são:

- Ductilidade energética de flecha:

$$\mu_\delta = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{tot}}{E_{el}} + 1 \right) \quad (3.11)$$

- Ductilidade energética de curvatura:

$$\mu_k = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{tot}}{E_{el}} + 1 \right) \quad (3.12)$$

- Ductilidade energética de rotação:

$$\mu_\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{tot}}{E_{el}} + 1 \right) \quad (3.13)$$

sendo as energias total e elástica obtidas nos respectivos gráficos.

### 3.5. Ductilidade de Vigas Reforçadas

Apresenta-se o estudo teórico da ductilidade de vigas reforçadas por meio da relação momento x curvatura, fundamentando-se uma análise baseada na homogeneização da seção e na seção fissurada. São mostrados também os procedimentos de cálculo utilizado na determinação dos índices de ductilidade energética de flecha e curvatura. Efetua-se a determinação da rotação plástica no

meio do vão da viga a partir dos valores de curvaturas obtidas por meio do estudo da ductilidade.

### 3.5.1. Relação Momento Fletor x Curvatura

A relação momento x curvatura,  $M \times k$  é fundamental para a análise da ductilidade dos elementos estruturais solicitados à flexão. A Figura 3.5 ilustra os parâmetros básicos para o estudo dessa relação.

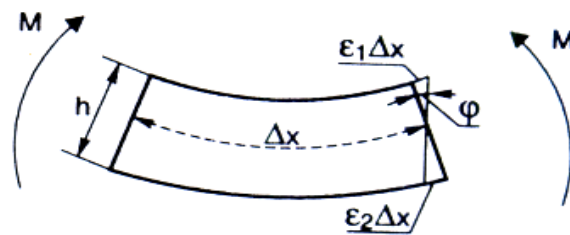


Figura 3.5 - Parâmetros básicos de uma viga solicitada à flexão.

Para um elemento com comprimento Δx submetido ao momento fletor M, tem-se a deformação específica na fibra superior:

$$\varepsilon_s = -\frac{M \frac{h}{2}}{EJ} \tag{3.14}$$

e para a deformação específica na fibra inferior tem-se

$$\varepsilon_i = +\frac{M \frac{h}{2}}{EJ} \tag{3.15}$$

logo a rotação da seção é dada por

$$\Delta\varphi = \frac{(|\varepsilon_s| + \varepsilon_i)\Delta x}{h} \tag{3.16}$$

Definindo-se a curvatura como o inverso do raio de curvatura, tem-se:

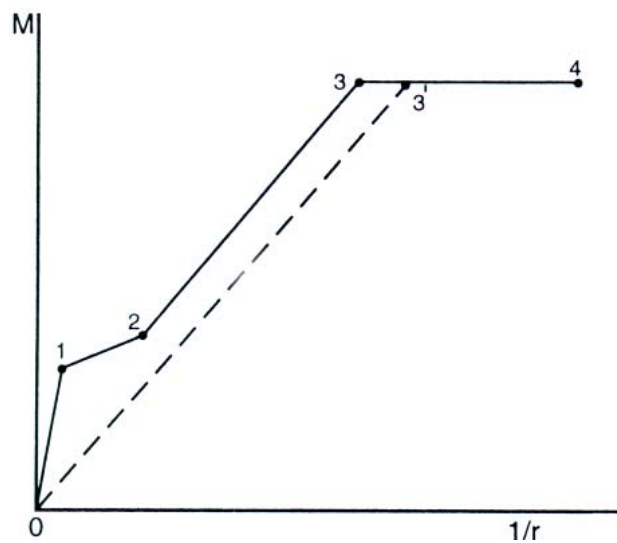
$$k = \frac{1}{r} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{|\varepsilon_s| + \varepsilon_i}{h} \tag{3.17}$$

e substituindo-se as expressões de  $\varepsilon_s$  e  $\varepsilon_l$  nessa equação resulta

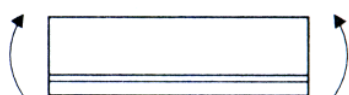
$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ} \tag{3.18}$$

onde J é dado pela eq. (3.32)

A Figura 3.6 ilustra os estágios da relação  $M \times k$  relativos ao comportamento de uma viga de concreto armado, desde a fase não fissurada até a fase de ruptura.



Estágio 0 – 1 Seção não fissurada



Estágio 1-2 Formação de fissuras



Estágio 2 – 3 Estabilização das fissuras



Estágio 3 – 4 Escoamento do aço



Figura 3.6 – Estágios básicos da relação momento x curvatura.

Os estágios ilustrados na Figura 3.6 são:

➤ **Estágio 0 – 1: Seção Não-Fissurada**

A seção não apresenta fissuras, donde a armadura de aço não contribui para a resistência da seção, que pode ser considerada composta de um material homogêneo;

➤ **Estágio 1 – 2: Formação de Fissuras**

As primeiras fissuras começam a surgir, aumentam e alcançam a zona de compressão da seção. As fissuras subseqüentes possuem comprimentos menores (devido a influência das primeiras fissuras), pois a seção transversal não é plenamente tracionada. Novas fissuras poderão surgir junto à armadura de flexão;

➤ **Estágio 2 – 3: Estabilização das Fissuras**

Nessa fase tem-se uma estabilização das fissuras, e não aparecem novas fissuras. As fissuras existentes têm sua abertura aumentada;

➤ **Estágio 3 – 4: Escoamento do Aço**

Após o crescimento paulatino das fissuras tem-se o escoamento da armadura de flexão. A curvatura aumenta acentuadamente, enquanto o aumento do momento fletor é praticamente constante. Os acréscimos finais da curvatura ocorrem em virtude do pequeno aumento do braço de alavanca interna, e o concreto na área de compressão atinge a ruptura, o que corresponde ao ponto 4 da Figura 3.6.

### **3.5.2. Vigas Reforçadas com Tecido de Fibra de Carbono**

Neste item será descrita uma sistemática encontrada na literatura, para se obter o diagrama  $M \times k$ , por meio da homogeneização da seção fissurada.

### 3.5.2.1. Homogeneização da Seção

A análise da ductilidade da seção reforçada é realizada admitindo-se a seção homogeneizada. Os parâmetros dessa análise são mostrados na Figura 3.7.

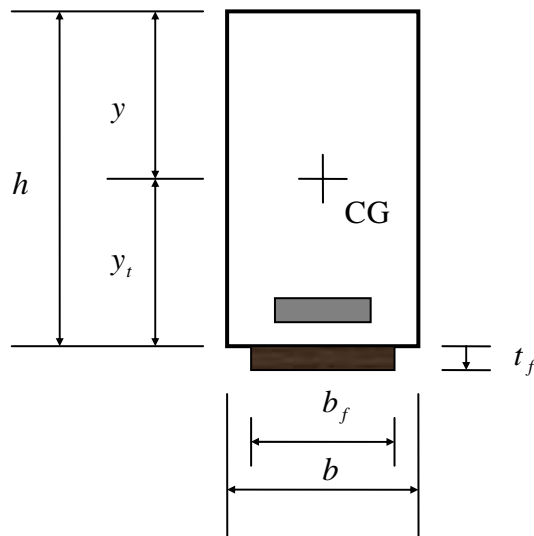


Figura 3.7 – Parâmetros geométricos da seção reforçada com CFC.

As características dos materiais são:

➤ **Compósito de Fibra de Carbono (CFC)**

$E_f$  – módulo de elasticidade da fibra;

$t_f$  – espessura da fibra;

$b_f$  – largura da fibra;

$A_f$  – área de reforço.

sendo que:

$$A_f = b_f t_f \quad (3.19)$$

➤ **Aço**

$E_s$  – módulo de elasticidade do aço;

$A_s$  – área de armadura.

➤ **Concreto**

$E_c$  – módulo de elasticidade do concreto;

$b$  – largura da seção transversal;

$h$  – altura da seção transversal;

$A_c$  – a área da seção de concreto.

A relação entre os módulos de elasticidade do compósito de fibra de carbono e do concreto é dada por:

$$n_f = \frac{E_f}{E_c} \quad (3.20)$$

A relação entre o módulo de elasticidade do aço e módulo de elasticidade do concreto é dada por:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.21)$$

sendo que  $E_s = 200 \text{ GPa}$ ,  $E_f$  depende do tipo de produto, e  $E_c$  é dado pela NB-1 /2003 por meio da seguinte expressão:

$$E_c = 5600\sqrt{f_c} \quad (3.22)$$

onde  $f_c$  é a resistência à compressão do concreto ( $\text{MPa}$ ).

A área da seção transversal homogeneizada é dada por:

$$A_t = A_c + (n-1)A_s + n_f A_f \quad (3.23)$$

Adotando-se os seguintes parâmetros geométricos:

$$h + \frac{t_f}{2} = d_f \quad (3.24)$$

onde  $d_f$  é a altura útil do reforço, tem-se

$$y = \frac{A_c \frac{h}{2} + A_s d + A_f d_f}{A_t} \quad (3.25)$$

onde  $y$  é a distância do centro de gravidade da seção de concreto até a fibra superior mais comprimida, com

$$y + y_t = h \quad (3.26)$$

sendo  $y_t$  a distância do centro de gravidade até a fibra inferior mais tracionada.

O momento de inércia da seção homogeneizada é dado por:

$$J = \frac{bh^3}{12} + A_c \left( y - \frac{h}{2} \right)^2 + (n-1)A_s (d-y)^2 + n_f A_f (h-d_f)^2 \quad (3.27)$$

### 3.5.2.2. Seção Fissurada

A análise da relação  $M \times k$  em vigas reforçadas com compósitos de fibra de carbono segue a sistemática análoga à descrita no item 3.5.1. A Figura 3.5 ilustra a compatibilidade cinemática da seção transversal.

As deformações específicas dos materiais são dadas por:

- deformação específica do concreto:

$$\varepsilon_c = \frac{-M x}{EJ} \quad (3.28)$$

- deformação específica do aço:

$$\varepsilon_s = \frac{M(d-x)}{EJ} \quad (3.29)$$

- deformação específica da fibra:

$$\varepsilon_f = \frac{M(d_f-x)}{EJ} \quad (3.30)$$



A curvatura da seção é dada por:

$$k = \frac{1}{r} = \frac{M}{EJ} \quad (3.31)$$

A análise da relação  $M \times k$  é admitida como uma relação tri-linear, tal como mostra a Figura 3.8.

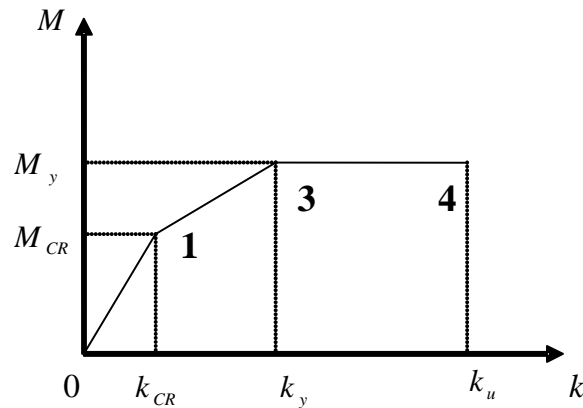


Figura 3.8 - Relação tri-linear  $M \times k$ .

Os estágios da relação  $M \times k$  tri-linear (Figura 3.9) são:

- **Estágio 0 – 1:** o momento solicitante não fatura a viga, ou seja,  $M < M_{CR}$ ;
- **Estágio 1 – 3:** representa o estágio de pós-fissuração, mas sem a armadura longitudinal atingir o escoamento, ou seja,  $M_{CR} \leq M \leq M_y$ ;
- **Estágio 3 – 4:** o momento solicitante é superior ao momento de escoamento da seção, sendo admitido como cerca de 10 % inferior ao momento último, ou seja,  $M_y \leq M \leq 0,9M_u$ .

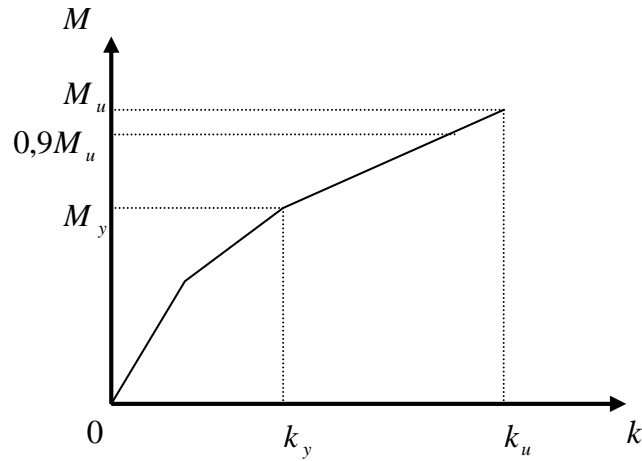


Figura 3.9 - Consideração do momento no estágio de ruptura da seção.

Uma análise simplificada admite a relação bi-linear (Figura 3.10), onde não se tem um dos trechos da relação tri-linear (Figura 3.9).

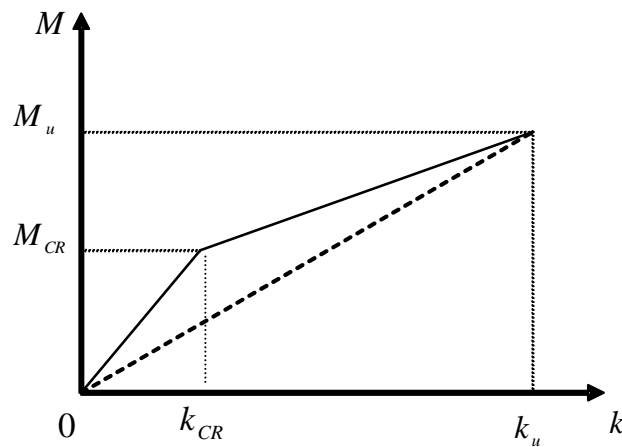


Figura 3.10 - Relação bi-linear  $M \times k$ .

Nesse modelo tem-se o momento de inércia de fissuração dado pela seguinte equação:

$$J_{CR} = \frac{bx^3}{3} + nA_s(d-x)^2 + n_f A_f (d_f - x)^2 \tag{3.32}$$

sendo o momento de fissuração dado por

$$M_{CR} = \frac{f_{ct} J_{CR}}{y} \quad (3.33)$$

onde  $f_{ct} = f_{ct,flexão}$  é a tensão de tração na flexão dada por MIHILMY e TEDESCO (2000)

$$f_{ct} = f_r = 0,62\sqrt{f_c} \quad (3.34)$$

Da Figura 3.7 tem-se:

$$\bar{y} = y_t + \frac{t_f}{2} \quad (3.35)$$

A determinação da linha neutra é dada por:

$$\sum M_{ESTÁTICO} = 0 \quad (3.36)$$

$$(bx)\frac{x}{2} - nA_s(d-x) - n_f A_f(d_f - x) = 0 \quad (3.37)$$

$$x^2 + \frac{2}{b}(nA_s + n_f A_f)x - \frac{2}{b}(nA_s d + n_f A_f d_f) = 0 \quad (3.38)$$

sendo que as raízes dessa equação do segundo grau fornecem a posição da linha neutra.

A compatibilidade cinemática fornece:

$$\frac{\varepsilon_C}{x} = \frac{\varepsilon_y}{d-x} \Rightarrow \varepsilon_C = \left(\frac{x}{d-x}\right)\varepsilon_y \quad (3.39)$$

seguinte-se para o momento de escoamento

$$M_y = \frac{f_y J_{CR}}{n(d-x)} = E_C J_{CR} k_y \quad (3.40)$$

A curvatura da seção no estágio 1 - 2 (Figura 3.10) é dada por:

$$k = k_y + \frac{\left(\frac{M}{M_y} - 1\right)}{\left(\frac{M_u}{M_y} - 1\right)} (k_u - k_y) \quad (3.41)$$

A curvatura última é dada por:

$$k_u = \frac{\varepsilon_c}{x_u} = \frac{0,35\%}{x_u} \quad (3.42)$$

com

$$k_u = \frac{M_u}{J_{eq} E_C} \quad (3.43)$$

tem-se

$$\bar{J}_{eq} = \frac{M_u}{k_u E_C} \quad (3.44)$$

### 3.5.3. Determinação dos Índices de Ductilidade Energéticos

O procedimento para a determinação dos índices de ductilidade desenvolvido neste estudo fundamenta-se na curva experimental  $P \times \delta$ . Tem como objetivo obter todos os índices de ductilidade energéticos por meio dos valores de carga e flecha para os estágios de fissuração, escoamento e ruptura. Com o diagrama  $P \times \delta$  da viga é possível determinar-se as energias total e elásticas, e obter o índice de ductilidade energético de flecha, bem como determinar os valores dos momentos e das curvaturas. A Figura 3.11 apresenta o diagrama  $P \times \delta$  fundamental para a determinação da ductilidade por meio desta análise.

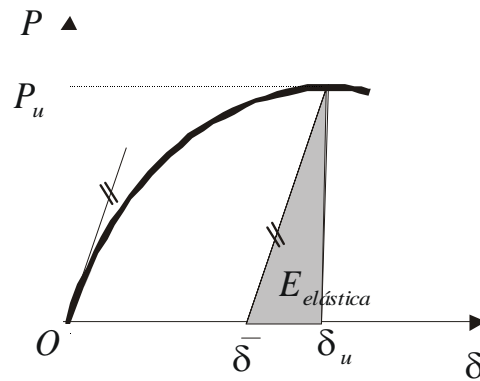


Figura 3.11 – Gráfico carga x flecha teórico.

A energia total corresponde à área sob a curva  $P \times \delta$ , que pode ser determinada de várias formas, seja pela integração da equação da linha de tendência que mais se aproxima do gráfico real, ou por meio de programas que fornecem a área sob a curva.

A determinação da energia elástica, que corresponde a uma parte da energia total (Figura 3.11), é obtida após um descarregamento do elemento estrutural. Portanto, o cálculo da energia elástica pode ser expresso por:

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} P_u (\delta_u - \bar{\delta}) \tag{3.45}$$

onde:

$P_u$  – carga de ruptura;

$\delta_u$  – flecha de ruptura;

$\bar{\delta}$  – flecha que delimita a área do triângulo que fornece a energia elástica.

Sendo:

$$\bar{\delta} = \delta_u - \delta \tag{3.46}$$

e sabendo-se que

$$tg \alpha = \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} \tag{3.47}$$

onde:

$P_{CR}$  – carga de fissuração;

$\delta_{CR}$  – flecha de fissuração.

com

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_u}{\delta} \quad (3.48)$$

encontra-se o valor de  $\delta$ .

As energias total e elástica permitem a determinação do índice de ductilidade energético de flecha por meio da seguinte expressão:

$$\mu_{\delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{tot}}{E_{el}} + 1 \right) \quad (3.49)$$

De posse desses valores é possível determinar os respectivos valores de momento e curvatura de cada elemento estrutural, para cada um dos estágios em estudo. Com os valores de carga obtém-se os respectivos valores de momento, e com os valores das flechas e das cargas obtém-se as rigidezes dos elementos. Para a determinação da curvatura, conhecendo-se os momentos e as rigidezes tem-se:

$$k_{CR} = \frac{1}{r} = \frac{M_{CR}}{(EJ)_{CR}} \quad (3.50)$$

A determinação do índice de ductilidade energético de curvatura é análogo ao índice de ductilidade energético de flechas, ou seja, é necessário a determinação das energias total e elástica seguindo-se os mesmos conceitos, porém analisando-se os diagramas de  $M \times k$ .

A energia total, analisando-se os momentos e as curvaturas, é obtida por meio da área total sob a curva, e a energia elástica é determinada pela seguinte expressão:

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} M_u (k_u - \bar{k}) \quad (3.51)$$

onde:

$M_u$  – momento de ruptura;

$k_u$  – curvatura de ruptura;

$\bar{k}$  – curvatura que delimita a área do triângulo que fornece a energia elástica.

Com:

$$\bar{k} = k_u - k \quad (3.52)$$

e sabendo-se que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_{CR}}{k_{CR}} \quad (3.53)$$

onde

$M_{CR}$  – momento de fissuração;

$k_{CR}$  – curvatura de fissuração.

com

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_u}{k} \quad (3.54)$$

encontra-se o valor de  $k$ .

As energias total e elástica permitem determinar o índice de ductilidade energético de curvatura por meio da seguinte expressão:

$$\mu_k = \frac{1}{2} \left( \frac{E_{tot}}{E_{el}} + 1 \right) \quad (3.55)$$

Dessa forma é possível visualizar a grande importância dos diagramas  $P \times \delta$ , e dos diagramas dos  $M \times k$  para a determinação de índices de ductilidade energéticos. Todos os passos realizados para a determinação dos índices utilizando-se este procedimento são mostrados nos Anexos E, F e G.

### 3.5.4. Rotação Plástica

A rotação plástica é obtida por meio da análise das curvaturas nos estágios de fissuração, de escoamento e de ruptura.

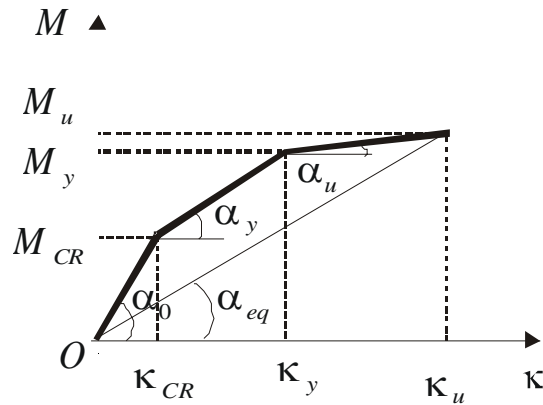


Figura 3.12– Gráfico teórico da relação momento x curvatura.

Para a determinação da rotação plástica é necessário analisar as curvaturas das vigas. O esquema das curvaturas ao longo da viga está ilustrado na Figura 3.13. Esse esquema admite uma função linear para a variação das curvaturas.

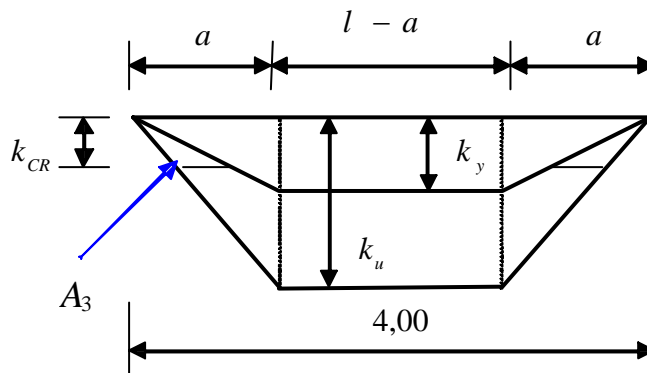


Figura 3.13 – Esquema das curvaturas das vigas.

A rotação plástica é determinada por:

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3 \tag{3.58}$$

onde  $\Delta$  é a diferença das áreas do trapézio da Figura 3.13, e  $A_3$  é a área delimitada pela curvatura de fissuração (Figura 3.15).



Para se determinar  $\Delta$  é necessário obter-se as áreas dos trapézios mostrados Figura 3.14.

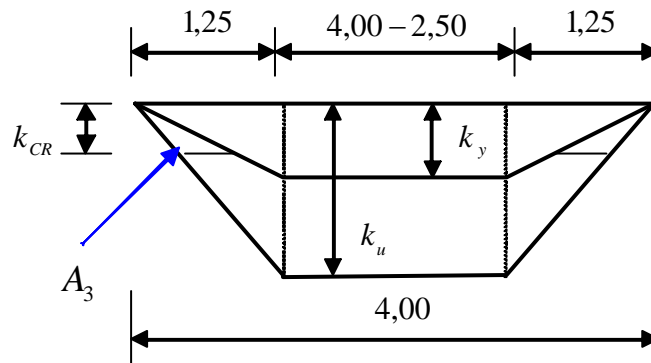


Figura 3.14 – Esquema das curvaturas com as dimensões das vigas.

Dessa forma tem-se:

- $A_1 =$  Trapézio maior
- $= \left( \frac{4,00 + 1,50}{2} \right) k_u = 2,75 k_u$
- $A_2 =$  Trapézio menor :  $\left( \frac{4,00 + 1,50}{2} \right) k_y = 2,75 k_y$

Portanto:

$$\Delta = A_1 - A_2 \tag{3.56}$$

Substituindo-se os valores das áreas na expressão 3.56 resulta:

$$\Delta = (k_u - k_y) \left( \frac{4,00 + 1,50}{2} \right) = 2,75(k_u - k_y) \tag{3.57}$$

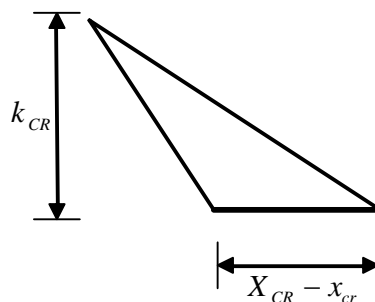


Figura 3.15 – Área delimitada pela curvatura de fissuração.

Analisando-se o triângulo formado pela área delimitada pela curvatura de fissuração  $A_3$  (Figura 3.15), tem-se a expressão para o cálculo da área:

$$A_3 = \frac{1}{2} k_{CR} (X_{CR} - x_{cr}) \quad (3.59)$$

Por meio da Figura 3.16 obtém-se a expressão de  $x_{CR}$  para a determinação de  $A_3$ .

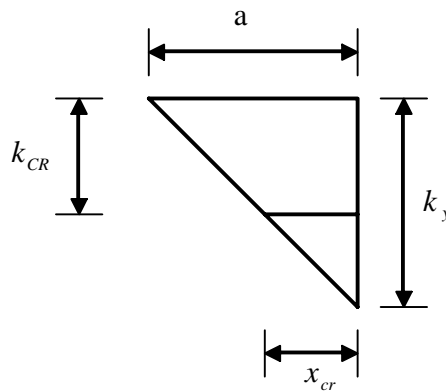


Figura 3.16 – Esquema para obtenção de triângulos analisando-se a curvatura relativa ao escoamento.

Com:

$$\text{tg } \alpha_y = \frac{k_y}{a} \quad (3.60)$$

e por meio da relação de triângulos

$$\frac{k_y}{a} = \frac{k_y - k_{CR}}{x_{cr}} \quad (3.61)$$

resulta

$$x_{CR} = a \left( \frac{k_y - k_{cr}}{k_y} \right) \quad (3.62)$$

Por meio da Figura 3.17 obtém-se a expressão de  $X_{CR}$  para a determinação de  $A_3$ .

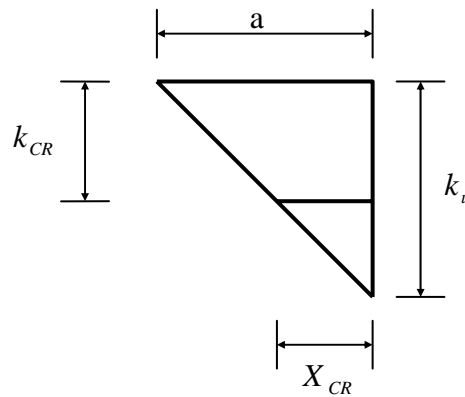


Figura 3.17 – Esquema para obtenção da relação de triângulos analisando-se a curvatura relativa à ruptura.

Com

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{k_u}{a} \tag{3.63}$$

e por meio da relação de triângulos

$$\frac{k_u}{a} = \frac{k_u - k_{CR}}{X_{CR}} \tag{3.64}$$

resulta

$$X_{CR} = a \left( \frac{k_u - k_{CR}}{k_u} \right) \tag{3.65}$$

Como definido anteriormente, a área  $A_3$  é dada por:

$$A_3 = \frac{1}{2} k_{CR} (X_{CR} - x_{cr}) \tag{3.66}$$

Substituindo-se as equações 3.62 e 3.65 na equação 3.66 tem-se:

$$A_3 = \frac{(k_{CR})^2}{2a} \left( \frac{k_u - k_y}{k_u k_y} \right) \quad (3.67)$$

A rotação plástica, como definida em 3.58, é dada por

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3 \quad (3.68)$$

É possível determinar o valor da rotação plástica das vigas a partir dos valores das curvaturas de fissuração, de escoamento e de ruptura, por meio da análise dessas curvaturas, e admitindo-se a existência de uma função linear para a variação das curvaturas. Todos os passos realizados para a determinação da rotação utilizando-se este procedimento são mostrados nos Anexos H.