Anexo E
Cálculo dos Momentos e Curvaturas das Vigas

E.1.
Viga de Referência – VR

- **<u>Fissuração</u>**

$P_{CR} = 15{,}39 \ kN$

$\delta_{CR} = 0{,}80 \ mm$

O momento de fissuração é calculado por meio da seguinte expressão:

$$M_{CR} = 0{,}625\, P_{CR} \qquad \text{(E.1)}$$

logo tem-se

$$M_{CR} = 9{,}62\, kN.m$$

A rigidez de fissuração é obtida por:

$$\delta_{CR} = 2{,}175 \frac{P_{CR}}{(EJ)_{CR}} \qquad \text{(E.2)}$$

$$(EJ)_{CR} = 2{,}175 \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} \qquad \text{(E.3)}$$

logo tem-se

$$(EJ)_{CR} = 41815\, kN.m^2$$

A curvatura de fissuração é obtida por meio da seguinte expressão:

$$\kappa_{CR} = \frac{1}{r} = \frac{M_{CR}}{(EJ)_{CR}} \tag{E.4}$$

Logo tem-se

$$\kappa_{CR} = 0{,}0002\ m^{-1}$$

- **Escoamento**

$P_y = 96{,}05\ kN$

$\delta_y = 14{,}14\ mm$

O momento de escoamento é calculado por:

$$M_y = 0{,}625\, P_y \tag{E.5}$$

logo tem-se

$$M_y = 60{,}03\, kN.m$$

A rigidez de escoamento é obtida por:

$$\delta_y = 2{,}175 \frac{P_y}{(EJ)_y} \tag{E.6}$$

$$(EJ)_y = 2{,}175 \frac{P_y}{\delta_y} \tag{E.7}$$

logo:

$$(EJ)_y = 14774\, kN.m^2$$

A curvatura de escoamento é obtida por meio da seguinte expressão:

$$\kappa_y = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} \tag{E.8}$$

então

$$\kappa_y = 0{,}0041\ m^{-1}$$

- **Ruptura**

$P_u = 143{,}55\ kN$

$\delta_u = 42{,}74\ mm$

O momento de ruptura é calculado por meio da seguinte expressão:

$$M_u = 0{,}625\, P_u \qquad \text{(E.9)}$$

logo tem-se

$$M_u = 89{,}72\, kN.m$$

A rigidez de ruptura é obtida por:

$$\delta_u = 2{,}175 \frac{P_u}{(EJ)_u} \qquad \text{(E.10)}$$

$$(EJ)_u = 2{,}175 \frac{P_u}{\delta_u} \qquad \text{(E.11)}$$

logo tem-se

$$(EJ)_u = 7305\, kN.m^2$$

A curvatura de ruptura é obtida por meio da seguinte expressão

$$\kappa_u = \frac{1}{r} = \frac{M_u}{(EJ)_u} \qquad \text{(E.12)}$$

Logo tem-se

$$\kappa_u = 0{,}0123\ m^{-1}$$

E.2.
Viga AI

- **Fissuração**

$P_{CR} = 21{,}88\,kN$

$\delta_{CR} = 1{,}81\ mm$

$$M_{CR} = 0{,}625\,P_{CR} = 13{,}68\,kN.m$$

$$(EJ)_{CR} = 2{,}175\frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 26292\,kN.m^2$$

$$\kappa_{CR} = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} = 0{,}0005\ m^{-1}$$

- **Escoamento**

$P_y = 80{,}70\ kN$

$\delta_y = 11{,}98\,mm$

$$M_y = 0{,}625\,P_y = 50{,}44\,kN.m$$

$$(EJ)_y = 2{,}175\frac{P_y}{\delta_y} = 14651\,kN.m^2$$

$$\kappa_y = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} = 0{,}0034\ m^{-1}$$

- **Ruptura**

$P_u = 187{,}34\ kN$

$\delta_u = 52{,}61\,mm$

$$M_u = 0{,}625\,P_u = 117{,}09\,kN.m$$

$$(EJ)_u = 2{,}175\frac{P_u}{\delta_u} = 7745\,kN.m^2$$

$$\kappa_u = \frac{1}{r} = \frac{M_u}{(EJ)_u} = 0{,}015\ m^{-1}$$

E.3.
Viga AII

➢ **Fissuração**

$P_{CR} = 15{,}35\,kN$

$\delta_{CR} = 0{,}77\ mm$

$$M_{CR} = 0{,}625\,P_{CR} = 9{,}59\,kN.m$$

$$(EJ)_{CR} = 2{,}175\frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 43358kN.m^2$$

$$\kappa_{CR} = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} = 0{,}0002\ m^{-1}$$

➢ **Escoamento**

$P_y = 89{,}88\ kN$

$\delta_y = 12{,}53\ mm$

$$M_y = 0{,}625\,P_y = 56{,}17\,kN.m$$

$$(EJ)_y = 2{,}175\frac{P_y}{\delta_y} = 15602\,kN.m^2$$

$$\kappa_y = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} = 0{,}0036\ m^{-1}$$

➢ **Ruptura**

$P_u = 191{,}09\ kN$

$\delta_u = 36{,}63\ mm$

$$M_u = 0{,}625\,P_u = 119{,}43\,kN.m$$

$$(EJ)_u = 2{,}175\frac{P_u}{\delta_u} = 11346\,kN.m^2$$

$$\kappa_u = \frac{1}{r} = \frac{M_u}{(EJ)_u} = 0{,}0105\ m^{-1}$$

E.4.
Viga BI-1

- **Fissuração**

$P_{CR} = 20,59\ kN$

$\delta_{CR} = 1,43\ mm$

$$M_{CR} = 0,625\, P_{CR} = 12,87\, kN.m$$

$$(EJ)_{CR} = 2,175\frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 31317 kN.m^2$$

$$\kappa_{CR} = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} = 0,0004\ m^{-1}$$

- **Escoamento**

$P_y = 74,25\ kN$

$\delta_y = 11,27\ mm$

$$M_y = 0,625\, P_y = 46,41\, kN.m$$

$$(EJ)_y = 2,175\frac{P_y}{\delta_y} = 14329\, kN.m^2$$

$$\kappa_y = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} = 0,0032\ m^{-1}$$

- **Ruptura**

$P_u = 199,13\ kN$

$\delta_u = 77,50\ mm$

$$M_u = 0,625\, P_u = 124,46\, kN.m$$

$$(EJ)_u = 2,175\frac{P_u}{\delta_u} = 5588\, kN.m^2$$

$$\kappa_u = \frac{1}{r} = \frac{M_u}{(EJ)_u} = 0,022\ m^{-1}$$

E.5.
Viga BI-2

➢ **Fissuração**

$P_{CR} = 16{,}67\ kN$

$\delta_{CR} = 1{,}15\ mm$

$$M_{CR} = 0{,}625\, P_{CR} = 10{,}42\, kN.m$$

$$\left(EJ\right)_{CR} = 2{,}175 \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 31528 kN.m^2$$

$$\kappa_{CR} = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{\left(EJ\right)_y} = 0{,}0003\ m^{-1}$$

➢ **Escoamento**

$P_y = 75{,}47\ kN$

$\delta_y = 13{,}12\ mm$

$$M_y = 0{,}625\, P_y = 47{,}17\, kN.m$$

$$\left(EJ\right)_y = 2{,}175 \frac{P_y}{\delta_y} = 12511\, kN.m^2$$

$$\kappa_y = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{\left(EJ\right)_y} = 0{,}0038\ m^{-1}$$

➢ **Ruptura**

$P_u = 145{,}33\ kN$

$\delta_u = 68{,}78\ mm$

$$M_u = 0{,}625\, P_u = 90{,}83\, kN.m$$

$$\left(EJ\right)_u = 2{,}175 \frac{P_u}{\delta_u} = 4596\, kN.m^2$$

$$\kappa_u = \frac{1}{r} = \frac{M_u}{\left(EJ\right)_u} = 0{,}0198\ m^{-1}$$

E.6.
Viga BII-1

- **Fissuração**

$P_{CR} = 15{,}86 \ kN$

$\delta_{CR} = 0{,}805 \ mm$

$$M_{CR} = 0{,}625\, P_{CR} = 9{,}9125\, kN.m$$

$$(EJ)_{CR} = 2{,}175 \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 42851 kN.m^2$$

$$\kappa_{CR} = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} = 0{,}0002 \ m^{-1}$$

- **Escoamento**

$P_y = 75{,}38 \ kN$

$\delta_y = 12{,}27 \ mm$

$$M_y = 0{,}625\, P_y = 47{,}11\, kN.m$$

$$(EJ)_y = 2{,}175 \frac{P_y}{\delta_y} = 13362\, kN.m^2$$

$$\kappa_y = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} = 0{,}0035 \ m^{-1}$$

- **Ruptura**

$P_u = 165{,}86 \ kN$

$\delta_u = 66{,}87 \ mm$

$$M_u = 0{,}625\, P_u = 103{,}66 kN.m$$

$$(EJ)_u = 2{,}175 \frac{P_u}{\delta_u} = 5395 kN.m^2$$

$$\kappa_u = \frac{1}{r} = \frac{M_u}{(EJ)_u} = 0{,}02 \ m^{-1}$$

E.7.
Viga BII-2

- **Fissuração**

$P_{CR} = 20{,}16\,kN$

$\delta_{CR} = 0{,}943\,mm$

$M_{CR} = 0{,}625\,P_{CR} = 12{,}60\,kN.m$

$$(EJ)_{CR} = 2{,}175\frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 46498 kN.m^2$$

$$\kappa_{CR} = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} = 0{,}0003\ m^{-1}$$

- **Escoamento**

$P_y = 60{,}23\ kN$

$\delta_y = 12{,}25\ mm$

$M_y = 0{,}625\,P_y = 37{,}64\,kN.m$

$$(EJ)_y = 2{,}175\frac{P_y}{\delta_y} = 10694 kN.m^2$$

$$\kappa_y = \frac{1}{r} = \frac{M_y}{(EJ)_y} = 0{,}0035\ m^{-1}$$

- **Ruptura**

$P_u = 152{,}16\ kN$

$\delta_u = 67{,}53\ mm$

$M_u = 0{,}625\,P_u = 95{,}10 kN.m$

$$(EJ)_u = 2{,}175\frac{P_u}{\delta_u} = 4901 kN.m^2$$

$$\kappa_u = \frac{1}{r} = \frac{M_u}{(EJ)_u} = 0{,}02\ m^{-1}$$

ANEXO F
Determinação das Energias Elástica e Total

F.1.
Energia Elástica

F.1.1.
Carga x Flecha

A energia elástica, analisando-se as cargas e as flechas, é obtida por meio da seguinte expressão:

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} P_u \left(\delta_u - \overline{\delta}\right) \qquad \text{(F.1)}$$

onde:

P_u – carga de ruptura;

δ_u – flecha de ruptura;

$\overline{\delta}$ – flecha que delimita a área do triangulo que fornece a energia elástica.

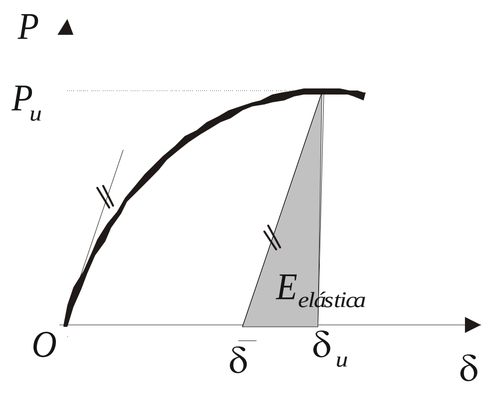

Figura F.1 – Diagrama teórico $P \times \delta$.

Sendo:

$$\overline{\delta} = \delta_u - \delta \qquad \text{(F.2)}$$

e sabendo-se que

$$\tan\alpha = \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} \tag{F.3}$$

onde:

P_{CR} – carga de fissuração;

δ_{CR} – flecha de fissuração.

tem-se o valor de $\tan\alpha$ dado por

$$\tan\alpha = \frac{P_u}{\delta} \tag{F.4}$$

encontra-se o valor de δ.

- **Viga de Referência –VR**

$P_{CR} = 15{,}39\ kN$ $\quad P_y = 96{,}05\ kN$ $\quad P_u = 143{,}55\ kN$

$\delta_{CR} = 0{,}80\ mm$ $\quad \delta_y = 14{,}14\ mm$ $\quad \delta_u = 42{,}74\ mm$

$$\tan\alpha = \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 19{,}24$$

$$\tan\alpha = \frac{P_u}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{P_u}{\tan\alpha} = \frac{143{,}55}{19{,}24} = 7{,}46\ mm$$

$$\delta = \delta_u - \bar{\delta} = 7{,}46\ mm$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} P_u \left(\delta_u - \bar{\delta}\right) = 535{,}58\ kNmm$$

- **Viga AI**

$P_{CR} = 21{,}88\ kN$ $\quad P_y = 80{,}70\ kN$ $\quad P_u = 187{,}34\ kN$

$\delta_{CR} = 1{,}81\ mm$ $\quad \delta_y = 11{,}98\ mm$ $\quad \delta_u = 52{,}61\ mm$

$$\tan\alpha = \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 12{,}09$$

$$\tan\alpha = \frac{P_u}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{P_u}{\tan\alpha} = \frac{187{,}34}{12{,}09} = 15{,}49\,mm$$

$$\delta = \delta_u - \overline{\delta} = 15{,}49\,mm$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2}P_u\left(\delta_u - \overline{\delta}\right) = 1451{,}65\ kNmm$$

- **<u>Viga AII</u>**

$P_{CR} = 15{,}35\ kN$ $P_y = 89{,}88\ kN$ $P_u = 191{,}09\ kN$

$\delta_{CR} = 0{,}77\ mm$ $\delta_y = 12{,}53\ mm$ $\delta_u = 36{,}63\ mm$

$$\tan\alpha = \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 19{,}94$$

$$\tan\alpha = \frac{P_u}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{P_u}{\tan\alpha} = \frac{191{,}09}{19{,}94} = 9{,}59$$

$$\delta = \delta_u - \overline{\delta} = 9{,}59\ mm$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2}P_u\left(\delta_u - \overline{\delta}\right) = 915{,}86\ kNmm$$

- **<u>Viga BI-1</u>**

$P_{CR} = 20{,}59\ kN$ $P_y = 74{,}25\ kN$ $P_u = 199{,}13\,kN$

$\delta_{CR} = 1{,}43\,mm$ $\delta_y = 11{,}27\ mm$ $\delta_u = 77{,}50\ mm$

$$\tan\alpha = \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 14{,}39$$

$$\tan\alpha = \frac{P_u}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{P_u}{\tan\alpha} = \frac{199{,}13}{14{,}39} = 13{,}83$$

$$\delta = \delta_u - \overline{\delta} = 13{,}83\ mm$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} P_u \left(\delta_u - \overline{\delta}\right) = 1376{,}96\ kNmm$$

- **<u>Viga BI-2</u>**

$P_{CR} = 16{,}67\ kN$ $P_y = 75{,}47\ kN$ $P_u = 145{,}33\ kN$

$\delta_{CR} = 1{,}15\ mm$ $\delta_y = 13{,}12\ mm$ $\delta_u = 68{,}78\ mm$

$$\tan\alpha = \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 14{,}49$$

$$\tan\alpha = \frac{P_u}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{P_u}{\tan\alpha} = \frac{145{,}33}{14{,}49} = 10{,}03$$

$$\delta = \delta_u - \overline{\delta} = 10{,}03\,mm$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} P_u \left(\delta_u - \overline{\delta}\right) = 728{,}52\ kNmm$$

- **<u>Viga BII-1</u>**

$P_{CR} = 15{,}86\ kN$ $P_y = 75{,}38\ kN$ $P_u = 165{,}86\ kN$

$\delta_{CR} = 0{,}81\,mm$ $\delta_y = 12{,}27\ mm$ $\delta_u = 66{,}87\ mm$

$$\tan\alpha = \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 19{,}70$$

$$\tan\alpha = \frac{P_u}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{P_u}{\tan\alpha} = \frac{165{,}86}{19{,}70} = 8{,}42$$

$$\delta = \delta_u - \overline{\delta} = 8{,}42\,mm$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} P_u \left(\delta_u - \overline{\delta}\right) = 698{,}15\ kNmm$$

- **Viga BII-2**

$P_{CR} = 20{,}16\ kN$ $P_y = 60{,}23\, kN$ $P_u = 152{,}16\ kN$

$\delta_{CR} = 0{,}94\ mm$ $\delta_y = 12{,}25\ mm$ $\delta_u = 67{,}53\, mm$

$$\tan\alpha = \frac{P_{CR}}{\delta_{CR}} = 21{,}38$$

$$\tan\alpha = \frac{P_u}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{P_u}{\tan\alpha} = \frac{152{,}16}{21{,}38} = 7{,}12\, mm$$

$$\delta = \delta_u - \overline{\delta} = 7{,}12\ mm$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} P_u \left(\delta_u - \overline{\delta}\right) = 541{,}28\ \ kNmm$$

F.1.2. Momento x Curvatura

A energia elástica, analisando-se os momentos e as curvaturas, é obtida por meio da seguinte expressão:

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} M_u \left(k_u - \overline{k}\right) \qquad \text{(F.5)}$$

onde:

M_u – momento de ruptura;

k_u – curvatura de ruptura;

$\overline{k}$ – curvatura que delimita a área do triangulo que fornece a energia elástica.

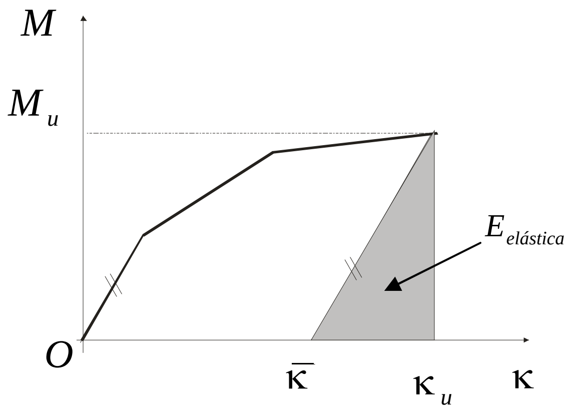

Figura F.2 – Diagrama teórico $M \times k$.

Sendo

$$\bar{k} = k_u - k \tag{F.6}$$

e sabendo-se que

$$\tan\alpha = \frac{M_{CR}}{k_{CR}} \tag{F.7}$$

onde:

$M_{CR} \rightarrow$ momento de fissuração;

$k_{CR} \rightarrow$ curvatura de fissuração.

tem-se o valor de $\tan\alpha$ dado por

$$\tan\alpha = \frac{M_u}{k} \tag{F.8}$$

encontra-se o valor de k .

- **<u>Viga de Referência –VR</u>**

$M_{CR} = 9{,}56\ kNm$	$M_y = 60{,}03\ kNm$	$M_u = 89{,}72\ kNm$
$k_{CR} = 0{,}0002\ m^{-1}$	$k_y = 0{,}004\ m^{-1}$	$k_u = 0{,}0123\ m^{-1}$

$$\tan\alpha = \frac{M_{CR}}{k_{CR}} = 48100$$

$$\tan\alpha = \frac{M_u}{k} \Rightarrow k = \frac{M_u}{\tan\alpha} = \frac{89{,}72}{48100} = 0{,}00186\, m^{-1}$$

$$k = k_u - \bar{k} = 0{,}{,}00186 m^{-1}$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} M_u \left(k_u - \bar{k}\right) = 0{,}0837 \; kNm/m$$

- **Viga AI**

$M_{CR} = 13{,}68\, kNm$ $M_y = 50{,}44 \; kNm$ $M_u = 117{,}09 \; kNm$

$k_{CR} = 0{,}0005 \; m^{-1}$ $k_y = 0{,}0041\, m^{-1}$ $k_u = 0{,}015 \; m^{-1}$

$$\tan\alpha = \frac{M_{CR}}{k_{CR}} = 27360$$

$$\tan\alpha = \frac{M_u}{k} \Rightarrow k = \frac{M_u}{\tan\alpha} = \frac{117{,}09}{27360} = 0{,}0043\, m^{-1}$$

$$k = k_u - \bar{k} = 0{,}0043 m^{-1}$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} M_u \left(k_u - \bar{k}\right) = 0{,}251\, kNm/m$$

- **Viga AII**

$M_{CR} = 9{,}59 \; kNm$ $M_y = 56{,}18 \; kNm$ $M_u = 119{,}43 \; kNm$

$k_{CR} = 0{,}0002 \; m^{-1}$ $k_y = 0{,}0036 \; m^{-1}$ $k_u = 0{,}0105 \; m^{-1}$

$$\tan\alpha = \frac{M_{CR}}{k_{CR}} = 47950$$

$$\tan\alpha = \frac{M_u}{k} \Rightarrow k = \frac{M_u}{\tan\alpha} = \frac{119{,}43}{47950} = 0{,}0025 \; m^{-1}$$

$$k = k_u - \bar{k} = 0{,}0025 m^{-1}$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} M_u \left(k_u - \bar{k}\right) = 0{,}149 \ kNm/m$$

- **Viga BI-1**

$M_{CR} = 12{,}87 \ kNm$ $M_y = 46{,}41 \ kNm$ $M_u = 124{,}46 \ kNm$

$k_{CR} = 0{,}0004 \, m^{-1}$ $k_y = 0{,}0032 \ m^{-1}$ $k_u = 0{,}022 \ m^{-1}$

$$\tan\alpha = \frac{M_{CR}}{k_{CR}} = 32175$$

$$\tan\alpha = \frac{M_u}{k} \ \Rightarrow k = \frac{M_u}{\tan\alpha} = \frac{124{,}46}{32175} = 0{,}0039 \, m^{-1}$$

$$k = k_u - \bar{k} = \ 0{,}0039 \, m^{-1}$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} M_u \left(k_u - \bar{k}\right) = 0{,}241 \ kNm/m$$

- **Viga BI-2**

$M_{CR} = 10{,}42 \ kNm$ $M_y = 47{,}17 \ kNm$ $M_u = 90{,}83 \ kNm$

$k_{CR} = 0{,}0003 \ m^{-1}$ $k_y = 0{,}0038 \ m^{-1}$ $k_u = 0{,}0198 \ m^{-1}$

$$\tan\alpha = \frac{M_{CR}}{k_{CR}} = 34733$$

$$\tan\alpha = \frac{M_u}{k} \ \Rightarrow k = \frac{M_u}{\tan\alpha} = \frac{90{,}83}{34733} = 0{,}0026 \, m^{-1}$$

$$k = k_u - \bar{k} = \ 0{,}0026 \ m^{-1}$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} M_u \left(k_u - \bar{k}\right) = 0{,}119 \ kNm/m$$

- **Viga BII-1**

$M_{CR} = 9{,}91\ kNm$ $M_y = 47{,}11\ kNm$ $M_u = 103{,}66\ kNm$

$k_{CR} = 0{,}0002\ m^{-1}$ $k_y = 0{,}0035\ m^{-1}$ $k_u = 0{,}019\ m^{-1}$

$$\tan\alpha = \frac{M_{CR}}{k_{CR}} = 49550$$

$$\tan\alpha = \frac{M_u}{k} \Rightarrow k = \frac{M_u}{\tan\alpha} = \frac{103{,}66}{49550} = 0{,}0021\,m^{-1}$$

$$k = k_u - \bar{k} = 0{,}0021 m^{-1}$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} M_u \left(k_u - \bar{k}\right) = 0{,}108\ kNm/m$$

- **VBII-2**

$M_{CR} = 12{,}60\ kNm$ $M_y = 37{,}64\ kNm$ $M_u = 95{,}10\ kNm$

$k_{CR} = 0{,}0003\ m^{-1}$ $k_y = 0{,}0035\ m^{-1}$ $k_u = 0{,}0194\ m^{-1}$

$$\tan\alpha = \frac{M_{CR}}{k_{CR}} = 42000$$

$$\tan\alpha = \frac{M_u}{k} \Rightarrow k = \frac{M_u}{\tan\alpha} = \frac{95{,}10}{42000} = 0{,}0023\,m^{-1}$$

$$k = k_u - \bar{k} = 0{,}0023 m^{-1}$$

$$E_{elástica} = \frac{1}{2} M_u \left(k_u - \bar{k}\right) = 0{,}108\ kNm/m$$

F.2. Energia Total

F.2.1. Carga x Flecha

A energia total é calculada por:

$$E_{TOTAL} = \int_{O}^{\delta_u} P d\delta \tag{F.9}$$

que representa a área sob a curva formada pelo diagrama de carga x flecha para todas as vigas. Dessa forma, a energia total para a determinação do índice de ductilidade energética de flecha das vigas foi obtida por meio do cálculo da área do diagrama $P \times \delta$. O programa GRAFHER calcula diretamente a área sob a curva de interesse. Portanto, todos os diagramas de $P \times \delta$ foram analisados por este para a obtenção direta da área que representa a energia total.

- **<u>Viga de Referência –VR</u>**

O gráfico de $P \times \delta$ da viga de referência fornece diretamente o valor da energia total. Calculando-se a área sob a curva $P \times \delta$, determina-se então a energia total.

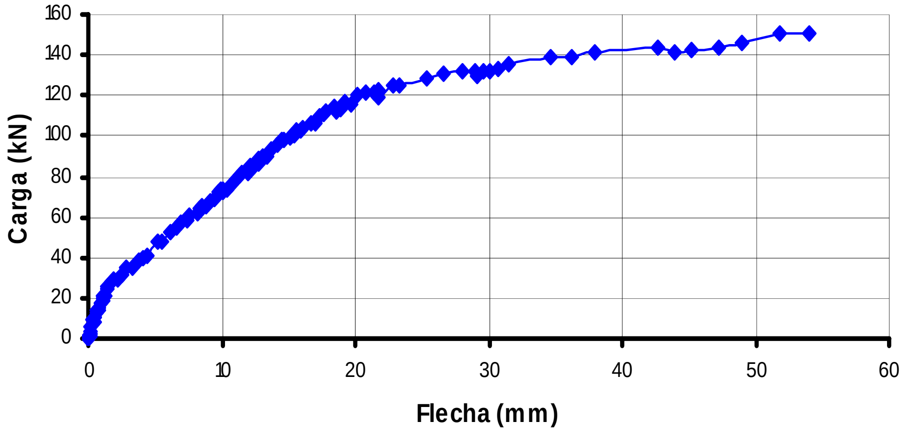

Figura F.3 – Diagrama $P \times \delta$ dos dados obtidos no ensaio da viga VR.

A energia total é o cálculo da área delimitada por meio do programa Grafher, com o qual obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 4466{,}16\ kNmm$$

➢ **Viga AI**

O gráfico de $P \times \delta$ da viga AI fornece diretamente o valor da energia total. Calculando-se a área sob a curva $P \times \delta$, determina-se então a energia total.

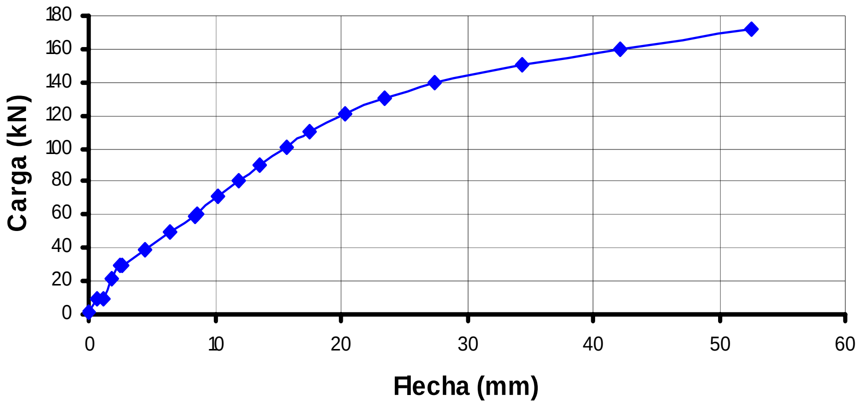

Figura F.4 – Diagrama $P \times \delta$ dos dados obtidos da viga AI

A energia total é o cálculo da área delimitada por meio do programa Grafher, com o qual obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 6278{,}73\ kNmm$$

➢ **Viga AII**

O gráfico de $P \times \delta$ da viga AII fornece diretamente o valor da energia total. Calculando-se a área sob a curva $P \times \delta$, determina-se então a energia total.

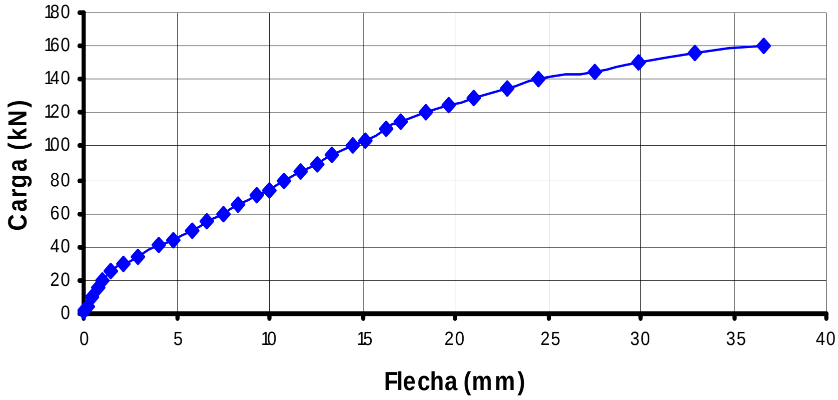

Figura F.5 – Diagrama $P \times \delta$ dos dados obtidos no ensaio da viga AII

A energia total é o cálculo da área delimitada por meio do programa Grafher, com o qual obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 3897{,}72\,kNmm$$

- **<u>Viga BI-1</u>**

O gráfico de $P \times \delta$ da viga BI-1 fornece diretamente o valor da energia total. Calculando-se a área sob a curva $P \times \delta$, determina-se então a energia total.

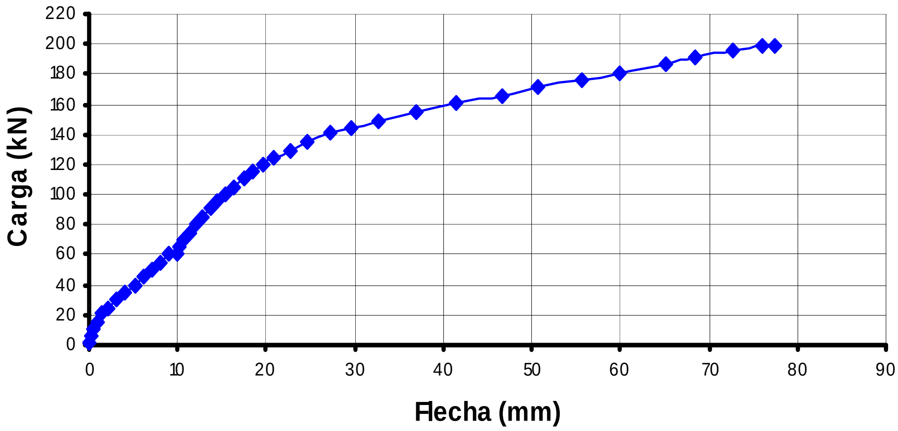

Figura F.6 – Diagrama $P \times \delta$ dos dados obtidos no ensaio da viga BI-1.

A energia total é o cálculo da área delimitada por meio do programa Grafher, com o qual obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 10958{,}40\ kNmm$$

➢ **Viga BI-2**

O gráfico de $P \times \delta$ da viga BI-1 fornece diretamente o valor da energia total. Calculando-se a área sob a curva $P \times \delta$, determina-se então a energia total.

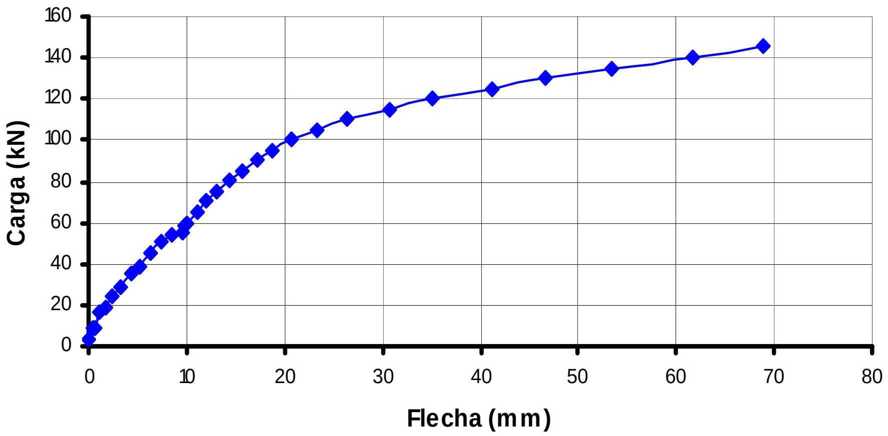

Figura F.7– Diagrama $P \times \delta$ dos dados obtidos no ensaio da viga BI-2

A energia total é o cálculo da área delimitada por meio do programa Grafher, com o qual obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 7337{,}15\, kNmm$$

➢ **Viga BII-1**

O gráfico de $P \times \delta$ da viga BI-1 fornece diretamente o valor da energia total. Calculando-se a área sob a curva $P \times \delta$, determina-se então a energia total.

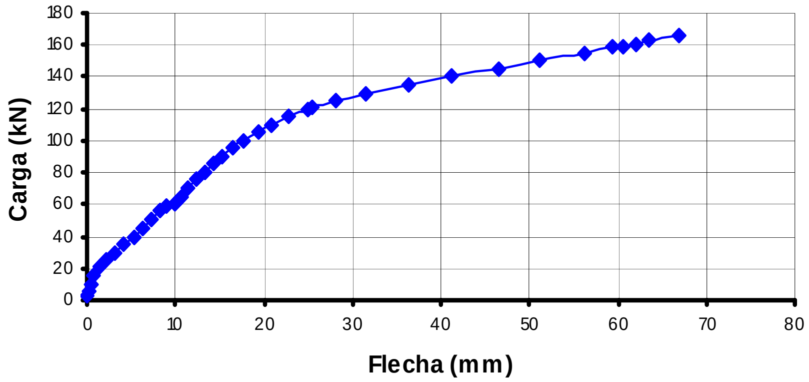

Figura F.8 – Diagrama $P \times \delta$ dos dados obtidos no ensaio da viga BII -1.

A energia total é o cálculo da área delimitada por meio do programa Grafher, com o qual obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 7883{,}33\,kNmm$$

- **Viga BII-2**

O gráfico de $P \times \delta$ da viga BII-2 fornece diretamente o valor da energia total. Calculando-se a área sob a curva $P \times \delta$, determina-se então a energia total.

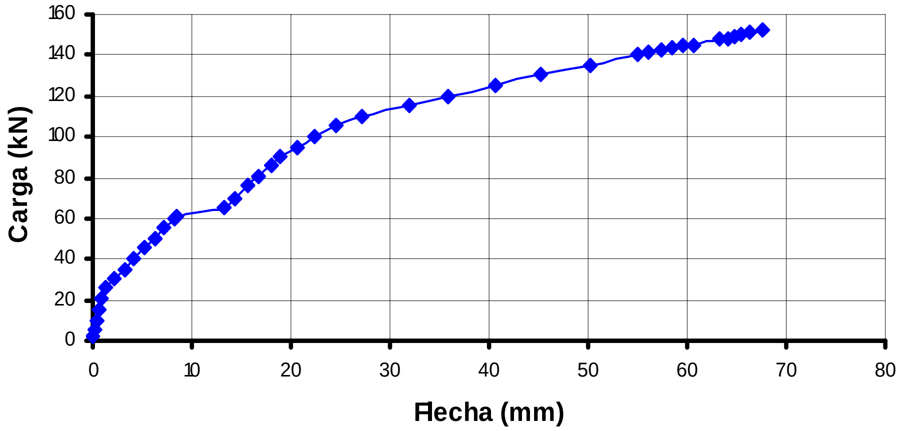

Figura F.9 – Diagrama $P \times \delta$ dos dados obtidos no ensaio da viga BII-2.

A energia total é o cálculo da área delimitada por meio do programa Grafher, com o qual obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$E_{TOTAL} = 7232{,}27\ kNmm$

F.2.2. Momento x Curvatura

A energia total é calculada por meio da seguinte expressão:

$$E_{TOTAL} = \int_{O}^{k_u} M\,dk \qquad \text{(F.10)}$$

que representa a área sob a curva formada pelo diagrama de momento x curvatura para todas as vigas. Dessa forma a energia total para a determinação do índice de ductilidade energética de curvatura das vigas foi obtida por meio do cálculo da área do diagrama $M \times k$. O programa GRAFHER calcula diretamente a área sob a curva de interesse. Portanto, todos os diagramas de $M \times k$ foram analisados por este programa para a obtenção direta da área que representa a energia total.

- **Viga de Referência –VR**

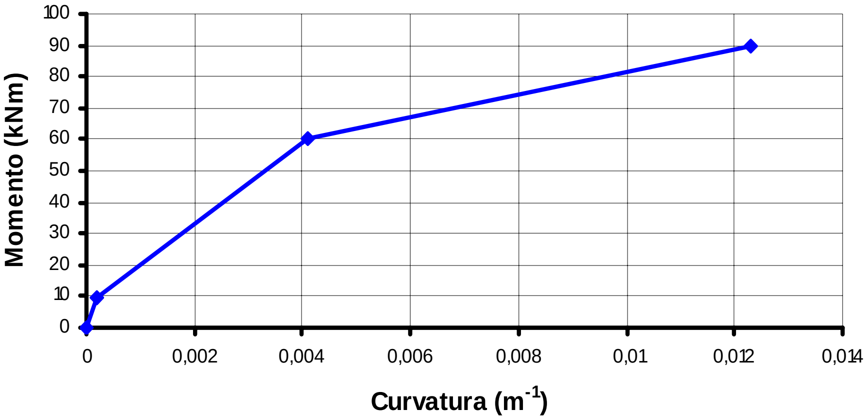

Figura F.10 – Diagrama $M \times k$ da viga VR.

A energia total é o cálculo da área delimitada. Através do programa Grafher obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 0,751\ kNm/m$$

- **Viga AI**

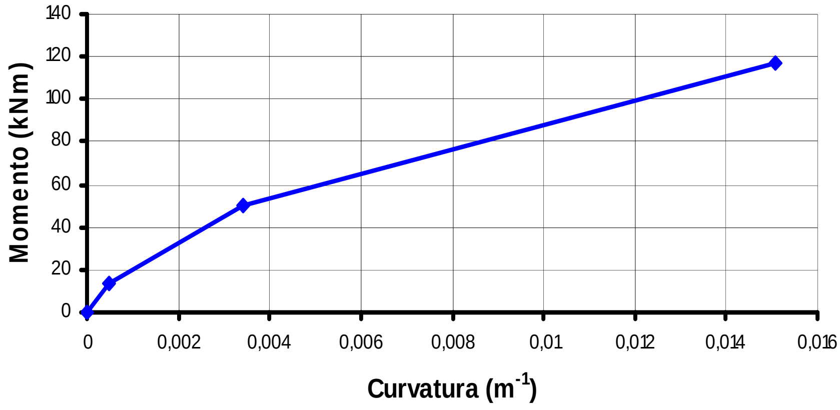

Figura F.11 – Diagrama $M \times k$ da viga AI.

A energia total é o cálculo da área delimitada. Através do programa Grafher obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 1,076\ kNm/m$$

- **Viga VAII**

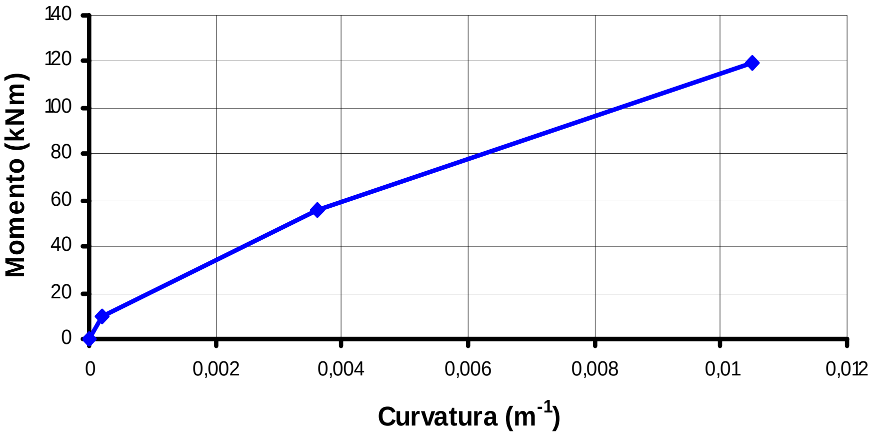

Figura F.12 – Diagrama $M \times k$ da viga AII.

A energia total é o cálculo da área delimitada. Através do programa Grafher obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 0{,}719\ kNm/m$$

➢ **Viga BI-1**

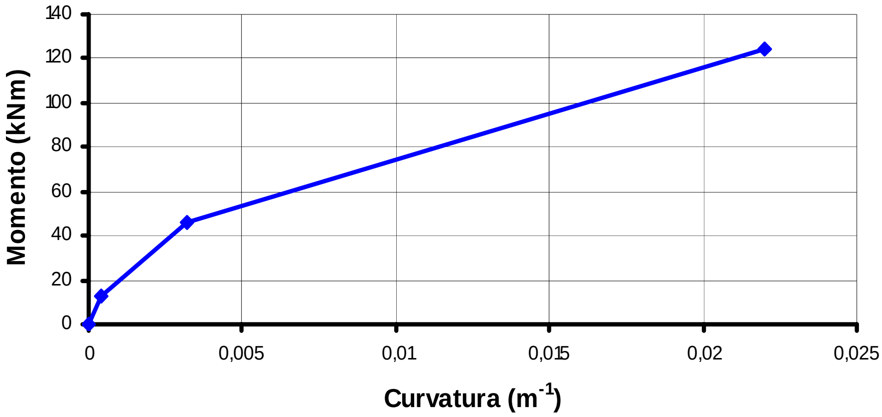

Figura F.13 – Diagrama $M \times k$ dos dados obtidos no ensaio da viga BI-1.

A energia total é o cálculo da área delimitada. Através do programa Grafher obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 1{,}692\ kNm/m$$

➢ **Viga BI-2**

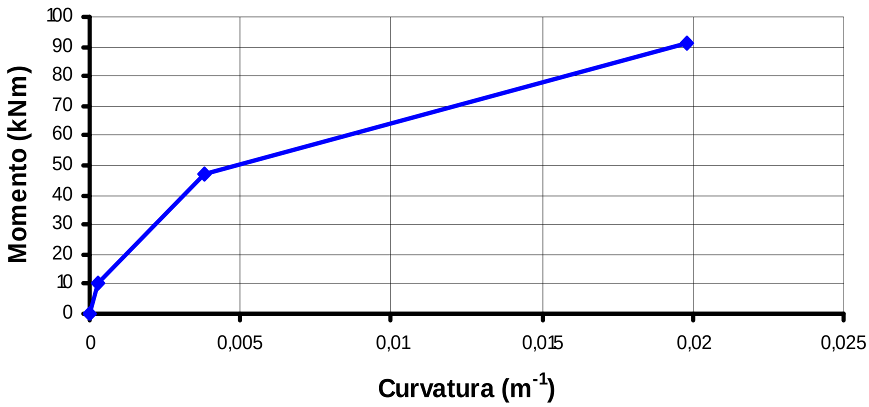

Figura F.14 – Diagrama $M \times k$ da viga BI-2.

A energia total é o cálculo da área delimitada. Através do programa Grafher obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 1{,}206 \ kNm/m$$

- **Viga BII-1**

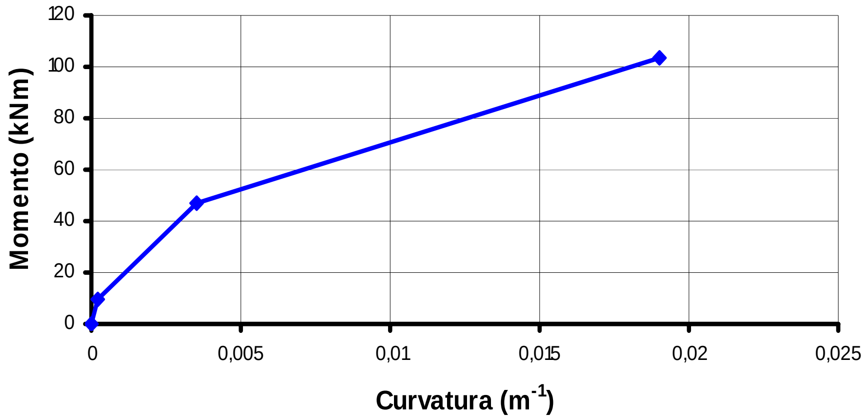

Figura F.15 – Diagrama $M \times k$ da viga BII-1.

A energia total é o cálculo da área delimitada. Através do programa Grafher obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 1{,}339 \ kNm/m$$

- **Viga BII-2**

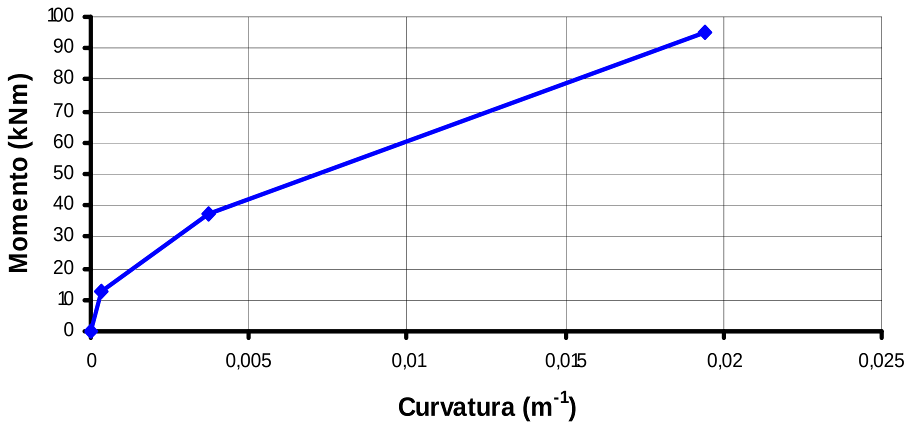

Figura F.16 – Diagrama $M \times k$ dos dados obtidos no ensaio da viga BII-2.

A energia total é o cálculo da área delimitada. Através do programa Grafher obtém-se diretamente o valor da área sob a curva. Portanto, tem-se:

$$E_{TOTAL} = 1{,}129 \ kNm/m$$

ANEXO G
Determinação dos Índices de Ductilidade Energética

G.1.
Índice de Ductilidade Energética de Flecha

O índice de ductilidade energética de flecha é determinado por meio da seguinte expressão:

$$\mu_\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) \qquad \text{(G.1)}$$

A determinação dos valores das energias está descrita no Anexo F. Portanto, conhecendo-se os valores das energias elástica e total, e utilizando-se a expressão G.1, obtêm-se todos os valores dos índices de ductilidade energética de flecha.

A seguir é apresentado o cálculo do índice de ductilidade energética de flecha para cada uma das sete vigas.

- **<u>Viga de Referencia – VR</u>**

$E_{TOTAL} = 4466{,}16\ kNmm$

$E_{ELÁSTICA} = 538{,}58\ kNmm$

$$\mu_\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4466{,}16}{538{,}58} + 1\right)$$

$\mu_\delta = 4{,}67$

- **<u>Viga VAI</u>**

$E_{TOTAL} = 6278{,}73\ kNmm$

$E_{ELÁSTICA} = 1451{,}65\ kNmm$

$$\mu_\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6278{,}73}{1451{,}65} + 1\right)$$

$\mu_\delta = 2{,}66$

- **<u>Viga VAII</u>**

$E_{TOTAL} = 3897{,}72\ kNmm$

$E_{ELÁSTICA} = 915{,}86\ kNmm$

$$\mu_\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3897{,}72}{915{,}86} + 1\right)$$

$\mu_\delta = 2{,}63$

- **<u>Viga VBI-1</u>**

$E_{TOTAL} = 10958{,}4\ kNmm$

$E_{ELÁSTICA} = 1376{,}96\ kNmm$

$$\mu_\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10958{,}4}{1376{,}96} + 1\right)$$

$\mu_\delta = 4{,}48$

- **<u>Viga VBI-2</u>**

$E_{TOTAL} = 7337{,}15\ kNmm$

$E_{ELÁSTICA} = 728{,}52\ kNmm$

$$\mu_\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7337{,}15}{728{,}52} + 1\right)$$

$\mu_{\delta} = 5{,}53$

- **Viga VBII-1**

$E_{TOTAL} = 7883{,}33\ kNmm$

$E_{ELÁSTICA} = 698{,}15\ kNmm$

$$\mu_{\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7883{,}33}{698{,}15} + 1\right)$$

$\mu_{\delta} = 6{,}17$

- **Viga VBII-2**

$E_{TOTAL} = 7232{,}27\ kNmm$

$E_{ELÁSTICA} = 541{,}28\ kNmm$

$$\mu_{\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7232{,}27}{541{,}28} + 1\right)$$

$\mu_{\delta} = 7{,}18$

G.2. Índice de Ductilidade de Energética de Curvatura

O índice de ductilidade energética de curvatura é determinado por meio da seguinte expressão:

$$\mu_{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) \qquad (G.2)$$

A determinação dos valores das energias está descrita no Anexo F. Portanto, conhecendo-se os valores das energias elástica e total, e utilizando-se a expressão G.2, obtêm-se todos os valores dos índices de ductilidade energética de curvatura.

A seguir, é apresentado o cálculo do índice de ductilidade energética de curvatura para cada uma das sete vigas.

- **<u>Viga de Referencia – VR</u>**

$E_{TOTAL} = 0{,}751\ kNm/m$

$E_{ELÁSTICA} = 0{,}0837\ kNm/m$

$$\mu_k = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}751}{0{,}0837} + 1\right)$$

$\mu_k = 4{,}98$

- **<u>Viga VAI</u>**

$E_{TOTAL} = 1{,}076\ kNm/m$

$E_{ELÁSTICA} = 0{,}251\ kNm/m$

$$\mu_k = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1{,}076}{0{,}251} + 1\right)$$

$\mu_\kappa = 2{,}65$

- **<u>Viga VAII</u>**

$E_{TOTAL} = 0{,}7186\ kNm/m$

$E_{ELÁSTICA} = 0{,}149\ kNm/m$

$$\mu_k = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}7186}{0{,}149} + 1\right)$$

$\mu_k = 2{,}91$

- **<u>Viga VBI-1</u>**

$$E_{TOTAL} = 1{,}692\ kNm/m$$

$$E_{ELÁSTICA} = 0{,}241\ kNm/m$$

$$\mu_k = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1{,}692}{0{,}241} + 1\right)$$

$$\mu_k = 4{,}02$$

- **Viga VBI-2**

$$E_{TOTAL} = 1{,}206\ kNm/m$$

$$E_{ELÁSTICA} = 0{,}119\ kNm/m$$

$$\mu_k = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1{,}206}{0{,}119} + 1\right)$$

$$\mu_k = 5{,}57$$

- **Viga VBII-1**

$$E_{TOTAL} = 1{,}339\ kNm/m$$

$$E_{ELÁSTICA} = 0{,}108\ kNm/m$$

$$\mu_k = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1{,}339}{0{,}108} + 1\right)$$

$$\mu_k = 6{,}67$$

- **Viga VBII-2**

$$E_{TOTAL} = 1{,}129\ kNm/m$$

$$E_{ELÁSTICA} = 0{,}108\ kNm/m$$

$$\mu_k = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{TOTAL}}{E_{ELASTICA}} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1{,}129}{0{,}108} + 1\right)$$

$$\mu_k = 5{,}74$$

Anexo H
Determinação da Rotação Plástica

A determinação da rotação plástica segue a os passos descritos no item 3.5.4. A seguir, são apresentados, detalhadamente, estes passos para cada uma das vigas analisadas neste estudo.

- **<u>Viga de Referência - VR</u>**

$$k_{CR} = 0{,}0002\ m^{-1}$$

$$k_y = 0{,}004\ m^{-1}$$

$$k_u = 0{,}0123\ m^{-1}$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$$

$$\Delta = (k_u - k_y)\left(\frac{4{,}00 + 1{,}50}{2}\right) = 2{,}75(k_u - k_y)$$

$$\Delta = 2{,}75(0{,}0123 - 0{,}004)$$

$$\Delta = 0{,}0228$$

$$A_3 = \frac{(k_{CR})^2}{2a}\left(\frac{k_u - k_y}{k_u k_y}\right)$$

$$A_3 = \frac{(0{,}0002)^2}{2 \times 1{,}25}\left(\frac{0{,}0123 - 0{,}004}{0{,}0123 \times 0{,}004}\right)$$

$$A_3 = 2{,}69 \times 10^{-6}$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 0{,}0228 - 2{,}69 \times 10^{-6}$$

$\varphi_{PLÁSTICA} = 2{,}279 \times 10^{-2}\ \ rad$

$\varphi_{PLÁSTICA} = 1{,}27^{0}$

- **Viga AI**

$k_{CR} = 0{,}0005\ m^{-1}$

$k_y = 0{,}0034\ m^{-1}$

$k_u = 0{,}0151\ m^{-1}$

$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$

$$\Delta = \left(k_u - k_y\right)\left(\frac{4{,}00 + 1{,}50}{2}\right) = 2{,}75\left(k_u - k_y\right)$$

$\Delta = 2{,}75\left(0{,}0151 - 0{,}0034\right)$

$\Delta = 0{,}0321$

$$A_3 = \frac{\left(k_{CR}\right)^2}{2a}\left(\frac{k_u - k_y}{k_u k_y}\right)$$

$$A_3 = \frac{\left(0{,}0005\right)^2}{2 \times 1{,}25}\left(\frac{0{,}0151 - 0{,}0034}{0{,}0151 \times 0{,}0034}\right)$$

$A_3 = 2{,}278 \times 10^{-5}\ \ rad$

$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$

$\varphi_{PLÁSTICA} = 0{,}0321 - 2{,}278 \times 10^{-5}$

$\varphi_{PLÁSTICA} = 3{,}21 \times 10^{-2}\ \ rad$

$\varphi_{PLÁSTICA} = 1{,}78^{0}$

- **Viga AII**

$k_{CR} = 0{,}0002\ m^{-1}$

$k_y = 0{,}0036\ m^{-1}$

$k_u = 0{,}0105\ m^{-1}$

$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$

$$\Delta = (k_u - k_y)\left(\frac{4{,}00 + 1{,}50}{2}\right) = 2{,}75(k_u - k_y)$$

$$\Delta = 2{,}75(0{,}0105 - 0{,}0036)$$

$$\Delta = 0{,}0189$$

$$A_3 = \frac{(k_{CR})^2}{2a}\left(\frac{k_u - k_y}{k_u k_y}\right)$$

$$A_3 = \frac{(0{,}0002)^2}{2 \times 1{,}25}\left(\frac{0{,}0105 - 0{,}0036}{0{,}0105 \times 0{,}0036}\right)$$

$$A_3 = 2{,}92 \times 10^{-6} \quad rad$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 0{,}0189 - 2{,}92 \times 10^{-6}$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 1{,}89 \times 10^{-2} \quad rad$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 1{,}083^0$$

- **Viga BI-1**

$k_{CR} = 0{,}0004\ m^{-1}$

$k_y = 0{,}0032\ m^{-1}$

$k_u = 0{,}022\ m^{-1}$

$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$

$$\Delta = (k_u - k_y)\left(\frac{4{,}00 + 1{,}50}{2}\right) = 2{,}75(k_u - k_y)$$

$$\Delta = 2{,}75(0{,}022 - 0{,}0032)$$

$$\Delta = 0{,}0517$$

$$A_3 = \frac{(k_{CR})^2}{2a}\left(\frac{k_u - k_y}{k_u k_y}\right)$$

$$A_3 = \frac{(0{,}0004)^2}{2 \times 1{,}25}\left(\frac{0{,}022 - 0{,}0032}{0{,}022 \times 0{,}0032}\right)$$

$$A_3 = 1{,}709 \times 10^{-5} \quad rad$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 0{,}0517 - 1{,}709 \times 10^{-5}$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 5{,}17 \times 10^{-2} \quad rad$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 2{,}87^{0}$$

- **Viga BI-2**

$$k_{CR} = 0{,}0003 \ m^{-1}$$

$$k_y = 0{,}0038 \ m^{-1}$$

$$k_u = 0{,}0198 \ m^{-1}$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$$

$$\Delta = (k_u - k_y)\left(\frac{4{,}00 + 1{,}50}{2}\right) = 2{,}75(k_u - k_y)$$

$$\Delta = 2{,}75(0{,}0198 - 0{,}0038)$$

$$\Delta = 0{,}044$$

$$A_3 = \frac{(k_{CR})^2}{2a}\left(\frac{k_u - k_y}{k_u k_y}\right)$$

$$A_3 = \frac{(0{,}0003)^2}{2\times 1{,}25}\left(\frac{0{,}0198 - 0{,}0038}{0{,}0198\times 0{,}0038}\right)$$

$$A_3 = 7{,}65\times 10^{-6} \quad rad$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 0{,}044 - 7{,}65\times 10^{-6}$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 4{,}39\times 10^{-2} \ \ rad$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 2{,}44^0$$

- **Viga BII-1**

$$k_{CR} = 0{,}0002 \ m^{-1}$$

$$k_y = 0{,}0035 \ m^{-1}$$

$$k_u = 0{,}019 \ m^{-1}$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$$

$$\Delta = (k_u - k_y)\left(\frac{4{,}00 + 1{,}50}{2}\right) = 2{,}75(k_u - k_y)$$

$$\Delta = 2{,}75(0{,}019 - 0{,}0035)$$

$$\Delta = 0{,}0453$$

$$A_3 = \frac{(k_{CR})^2}{2a}\left(\frac{k_u - k_y}{k_u k_y}\right)$$

$$A_3 = \frac{(0{,}0002)^2}{2\times 1{,}25}\left(\frac{0{,}019 - 0{,}0035}{0{,}019\times 0{,}0035}\right)$$

$$A_3 = 3{,}729\times 10^{-6} \quad rad$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 0{,}0453 - 3{,}729 \times 10^{-6}$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 4{,}528 \times 10^{-2} \ \ rad$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 2{,}59^{0}$$

- **<u>Viga BII-2</u>**

$$k_{CR} = 0{,}0003 \ m^{-1}$$

$$k_y = 0{,}0035 \ m^{-1}$$

$$k_u = 0{,}0194 \ m^{-1}$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$$

$$\Delta = (k_u - k_y)\left(\frac{4{,}00 + 1{,}50}{2}\right) = 2{,}75(k_u - k_y)$$

$$\Delta = 2{,}75(0{,}0194 - 0{,}0035)$$

$$\Delta = 0{,}0437$$

$$A_3 = \frac{(k_{CR})^2}{2a}\left(\frac{k_u - k_y}{k_u k_y}\right)$$

$$A_3 = \frac{(0{,}0003)^2}{2 \times 1{,}25}\left(\frac{0{,}0194 - 0{,}0035}{0{,}0194 \times 0{,}0035}\right)$$

$$A_3 = 8{,}46 \times 10^{-6} \ \ rad$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = \Delta - A_3$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 0{,}0437 - 8{,}46 \times 10^{-6}$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 4{,}37 \times 10^{-2} \ \ rad$$

$$\varphi_{PLÁSTICA} = 2{,}43^{0}$$