



Ilames Jordan Gama de Moraes

**Análise termomecânica do dano em materiais quase-
frágeis**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientadora: Prof^a. Deane de Mesquita Roehl
Coorientador: Dr. Eleazar Cristian Mejía Sanchez

Rio de Janeiro
Março de 2021



Ilames Jordan Gama de Moraes

**Análise termomecânica do dano em materiais quase-
frágeis**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof^a. Deane de Mesquita Roehl

Orientadora

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Dr. Eleazar Cristian Mejia Sanchez

Coorientador

Instituto Tecgraf – PUC-RIO

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-RIO

Prof. Adeildo Soares Ramos Júnior

Centro de Tecnologia – UFAL

Rio de Janeiro, Março de 2021.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e dos orientadores.

Ilames Jordan Gama de Moraes

Graduou-se em Engenharia Civil pelo Instituto Federal de Alagoas (IFAL) em 2017. Durante a graduação, foi aluno de iniciação científica nas áreas de materiais, solos e transferência de calor. Participou de projetos de extensão cujo objetivo foi a inserção de conhecimento teórico e prático em segurança do trabalho. Ingressou na pós-graduação em março de 2019, e em 2020 no Instituto Tecgraf, como pesquisador bolsista, participando do Grupo de Modelagem e Simulação Multifísica.

Ficha Catalográfica

Moraes, Ilames Jordan Gama de

Análise termomecânica do dano em materiais quase-frágeis / Ilames Jordan Gama de Moraes; orientadora: Deane de Mesquita Roehl; coorientador: Eleazar Crisitan Mejía Sanchez. – 2021.

97 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)—Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2021.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil e Ambiental - Teses. 2. Mecânica do Dano Contínuo. 3. Materiais Quase-Frágeis. 4. Dano Térmico. 5. Análise Não Lineares. 6. Análise por Elementos Finitos. I. Roehl, Deane de Mesquita. II. Sanchez, Eleazar Cristian Mejía. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. IV. Título.

CDD: 624

*À todos aqueles cuja vida lhes tirou a oportunidade de
realizar seus sonhos.*

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço à Deus por cada vitória que tive, pela minha vida, pelas oportunidades que Ele, em sua grandiosidade e infinidade, me trouxe, pela oportunidade de ter meus pais, a dona Paula, meus irmãos, minha família, meus amigos, meu lar. Por ter tido a oportunidade de me levantar todos os dias e seguir em frente, mesmo diante de todas as adversidades que por ventura apareceram. Por um dia ter sonhado e ter realizado.

Agradeço a minha mãe, Iraci, por todo cuidado que teve por em mim e por nunca ter medido esforços para me ajudar nesse caminho. Por todas as vezes que, com sua calma, paciência e bom coração, compreendeu meus anseios, minhas angústias e meu silêncio. Agradeço, com toda sinceridade, todo cuidado e amor para comigo.

Agradeço ao meu pai, Cícero, pelos conselhos e por estar comigo (do jeito dele) em cada momento. Por sempre me apoiar, e ter me mostrado que a vida é dura, mas acima de tudo, podemos contornar todos os obstáculos e seguir em frente.

Agradeço a dona Paula, que sempre cuidou de mim como sendo seu filho, que sempre me acolheu, me apoiou e orou por mim. Por poder ter a certeza que sempre, mesmo sem algum laço familiar, estará de portas e braços abertos a me receber e acolher.

Aos meus irmãos que sempre acreditaram em mim, me apoiaram, me motivaram. Não há palavras que meçam minha gratidão.

Aos meus avós.

Aos amigos que sempre me acompanharam e aos que adquiri nessa jornada Lucas Willian, Bacelar, Matheus e Eryane, Marina, Thiago, Renan Lima, Marilía Aquino, Thamara, Edvaldo, Ivone, Geovania, Marta, Wellington, Giovanna, Rose Brothinha, Will, Sebastião, Marcello Congro, Francisco, Kaio, Renan Sales, Renan Marques, Cristianderson.

Agradeço a Elice, uma amiga para a vida. Ela que sempre me aguentou nos momentos em que estive desorientado, me aconselhou, me ouviu e compartilhou

histórias engraçadas. Por poder sempre contar com ela. Por seu cuidado e carinho. Obrigado.

Ao Jemerson e Vanessa sempre estiveram ao meu lado e por todo compartilhamento mútuo sobre nossas angústias, tristeza, conquistas, alegrias.

Ao Guilherme e Ana que não mediram esforços para me receber no Rio e sempre cuidaram de mim como irmãos. Ao Ícaro por todos os momentos e pela companhia maravilhosa.

À cunhada e Lucas, por todas as gargalhadas, sonhos e comidas maravilhosas, além da companhia de nós quatro.

Ao Ismael, que acompanhou comigo esse trajeto e compartilhou muitos bons momentos e incentivos durante a pesquisa do mestrado. Ao Rafael que sempre me ajudou e sem ele o caminho teria sido ainda mais difícil. À todos os amigos e colegas do tecgraf.

À Adenilma, toda minha gratidão por estar ao meu lado e por fazer parte da minha vida. Por nunca ter desistido de nós e por sonharmos juntos com um futuro maravilhoso. Por ter me dado seu mundo e por cuidar bem do meu. Obrigado!

Todos os professores que me acompanharam durante minha trajetória, todos os técnicos e funcionários. Em especial ao professor Raul, pois sem aquela ligação do dia 11 de março de 2019, talvez eu não viesse a fazer o mestrado.

Agradeço toda paciência do Cristian e todo o aprendizado que compartilhou comigo. Por suas orientações, compreensão e disponibilidade. Obrigado, Cristian!

Agradeço com toda sinceridade, a professora Deane pela confiança em mim depositada, pelo apoio e orientação nesse trabalho, além de todo aprendizado que me proporcionou. Obrigado, Deane!

Por fim, agradeço ao CNPq, à PUC-Rio e ao Tecgraf por todo o apoio para realização da pós graduação e da pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Moraes, Ilames Jordan Gama de. **Análise termomecânica do dano em materiais quase-frágeis**. Rio de Janeiro, 2021. 97p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A previsão do comportamento de materiais quase-frágeis desde o início de sua degradação até o aparecimento de fraturas pode ser apoiada pelo o uso da mecânica do dano contínuo. Efeitos térmicos, além de mecânicos, podem apresentar contribuição significativa na resposta do material e da estrutura. Nesse sentido, o acoplamento entre os distintos ramos da física descrevem a livre conversão da energia em suas diversas formas. O presente trabalho trata do acoplamento térmico em problemas de dano em materiais quase frágeis, em que são abordados o modelo de dano isotrópico e os critério de danificação, bem como leis de evolução do dano térmico e mecânico. Além disso, aspectos inerentes à termodinâmica e transferência de calor são explicitados. O efeito térmico na análise estrutural inicia-se com uma investigação sobre os requisitos para que variações de temperatura produzam tensões térmicas e prossegue com um estudo do efeito no material, que reduz as propriedades de módulo de elasticidade, resistência à tração e à compressão além da energia de fratura. No entanto, a modelagem em elementos finitos da degradação da rigidez da estrutura devido ao processo de dano apresenta problemas de dependência da malha, que requerem o uso de técnicas de regularização da solução. Esse tópico é também abordado no trabalho. Exemplos numéricos demonstram os efeitos do acoplamento termomecânico na previsão da integridade de estruturas de materias quase-frágeis.

Palavras-chave

Mecânica do Dano Contínuo, Materiais Quase-Frágeis, Dano Térmico, Análise Não Lineares, Análise por Elementos Finitos

Abstract

Moraes, Ilames Jordan Gama de. **Thermomechanical analysis of damage in quase-brittle materials**. Rio de Janeiro, 2021. 97p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Predicting the behavior of almost brittle materials in face of material degradation up to fracture is a topic that can be addressed with the use of continuous damage mechanics. Thermal effects, in addition to mechanical ones, may contribute significantly to the structural and material response. In this sense, the coupling between the different branches of physics takes into account the free conversion of energy in its various forms. The present work is about the thermal-mechanical coupling in in quasi-brittle materials, in which the isotropic damage model and the damage criteria are addressed, as well as the laws of evolution of thermal and mechanical damage. In addition, aspects inherent to thermodynamics and heat transfer are explained. The thermal effect in the structural analysis begins with an investigation of the requirements for temperature variations to produce thermal stresses and follows with a study of the effect of temperature on the material, which affects the elasticity module, the tensile and compression strength, in addition to the fracture energy. However, finite element modeling of stiffness degradation due to the damage process leads to problems of dependence on the mesh, which requires the use of regularization techniques, as addressed in this work. Numerical examples demonstrate the effects of thermo-mechanical coupling in the assessment of structure integrity.

Keywords

Continuus Damage Mechanics, Quasi-brittle Materials, Thermal Damage, Nonlinear Analysis, Finite Element Analysis.

Sumário

| | |
|-----------------------------------------------------|----|
| 1 Introdução | 19 |
| 1.1. Panorama Geral | 19 |
| 1.2. Motivação | 20 |
| 1.3. Objetivos | 21 |
| 1.4. Organização da Dissertação | 21 |
| 2 Mecânica do dano contínuo | 23 |
| 2.1. Dano isotrópico | 24 |
| 2.2. Critérios de danificação | 28 |
| 2.3. Lei de evolução do dano e regularização | 32 |
| 3 Dano termo-mecânico. | 35 |
| 3.1. Considerações iniciais | 37 |
| 3.2. Princípios de transferência de calor | 40 |
| 3.2.1. Condução | 40 |
| 3.2.2. Convecção | 41 |
| 3.2.3. Radiação | 43 |
| 3.3. Termomecânica | 44 |
| 3.4. Acoplamento termomecânico | 46 |
| 3.5. Dano térmico | 49 |
| 4 Formulação em elementos finitos | 54 |
| 4.1. Equações não lineares para o problema mecânico | 54 |

| | |
|----------------------------------------------------------|--------|
| 4.2. Equações não lineares para o termomecânico com dano | 59 |
| 4.3. Discussão acerca da rigidez tangente | 63 |
| 5 Resultados numéricos | 66 |
| 5.1. Isotropic Damage | 67 |
| 5.1.1. Viga de Kurumatani | 67 |
| 5.1.2. Placa em L – Pohl et al. (2014) | 69 |
| 5.1.3. Placa em L – Winkler et al. (2001) | 73 |
| 5.1.4. Efeito escala na placa em L | 76 |
| 5.2. Termomecânica | 77 |
| 5.2.1. Viga de Kolditz | 77 |
| 5.2.2. Cubo de Kolditz | 79 |
| 5.2.3. Placa de Logan | 80 |
| 5.3. Dano termomecânico | 82 |
| 5.3.1. Arco engastado | 82 |
| 6 Conclusões e trabalhos futuros | 90 |
| 7 Referências | 93 |

Lista de Figuras

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 2.1: Teste de tração uniaxial (Adaptado de Pouplana) | 25 |
| Figura 2.2: Redução da seção transversal em um instante do ensaio (Adaptado de Pouplana) | 25 |
| Figura 2.3: Comparação entre a resposta linear elástica e elástica com dano | 26 |
| Figura 2.4: Exemplo de critério de danificação para material quase-frágil | 29 |
| Figura 2.5: Critério de danificação | 30 |
| Figura 2.6: Comportamento da lei de evolução do dano | 33 |
| Figura 3.1: Microestados | 38 |
| Figura 3.2: Tensão térmicas ao longo do eixo axial | 45 |
| Figura 3.3: Tensões térmicas de flexão | 46 |
| Figura 3.4: Balanço de energia para o acoplamento termomecânico | 47 |
| Figura 4.1: Discretização (Adaptado de Fellipa, 2001) | 55 |
| Figura 4.2: Diagrama carga x deslocamento | 56 |
| Figura 4.3: Análise da rigidez tangente considerando os efeitos térmicos | 64 |
| Figura 5.1: Geometria da viga | 67 |
| Figura 5.2: Viga danificada | 69 |
| Figura 5.3: Placa em forma de L (Pohl et al. (2014)) | 70 |
| Figura 5.4: Configuração final da placa em L danificada | 72 |
| Figura 5.5: Placa em formato de L (Winkler et al. (2001)) | 73 |
| Figura 5.6: Placa de Winkler danificada | 75 |
| Figura 5.7: Viga de Kolditz | 78 |
| Figura 5.8: Cubo de Kolditz et al. (2015) – distribuição de temperatura no início da análise | 80 |
| Figura 5.9: Placa de Logan | 81 |
| Figura 5.10: Condições de contorno do arco | 83 |

Figura 5.11: Distribuição de temperatura (K) para o arco ao final da análise

83

Figura 5.12: Distribuição de tensões para análise realizada (a) sem dano e condições de contorno A, (b) sem dano e condições de contorno B, (c) com dano e condições de contorno A e (d) com dano condições de contorno B. 85

Figura 5.13: Configuração deformada do arco ao final da análise 86

Figura 5.14: Dano na face inferior do arco ao final da análise para (a) condições de contorno A e (b) condições de contorno B 86

Figura 5.15: Pontos de Gauss utilizados para o plote das tensões principais

88

Lista de Gráfico

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Gráfico 1: Curva Load Factor X Displacement | 68 |
| Gráfico 2: Resposta Carga X Deslocamento – Placa da Pohl | 71 |
| Gráfico 3: Curva tensão deformação para um ponto de Gauss considerando diferentes discretizações | 72 |
| Gráfico 4: Resposta Carga x Deslocamento vertical – Placa de Winkler et al (2001) | 75 |
| Gráfico 5: Modelo de Winkler ampliado | 76 |
| Gráfico 6: Modelo de Pohl reduzido | 77 |
| Gráfico 7: Tensões na placa de Logan | 82 |
| Gráfico 8: Distribuição de temperatura ao longo do caminho AB | 84 |
| Gráfico 9: Deslocamento vertical no nó central da face superior do arco | 87 |
| Gráfico 10: Reação de apoio horizontal x deslocamento vertical do ponto médio da face superior do arco | 87 |
| Gráfico 11: Curva Tensões principais x Temperatura no ponto de Gauss 01 (a) e curva Dano x Temperatura para os pontos de Gauss 01 e 02 (b) | 89 |

Lista de Tabelas

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1: Valores para os principais parâmetros da relação tensão-deformação para concretos de peso normal com agregados silicosos e calcáreos apresentada no EUROCODE 2. | 51 |
| Tabela 2: Propriedades - viga de Kurumatani et al (2016) | 67 |
| Tabela 3: Propriedade dos materiais - Placa em L | 70 |
| Tabela 4: Propriedades placa de Winkler et al. | 73 |
| Tabela 5: Propriedades da viga de Kolditz et al (2015) | 78 |
| Tabela 6: Tensões na viga de Kolditz | 79 |
| Tabela 7: Propriedades do cubo de Kolditz et al (2015) | 80 |
| Tabela 8: Propriedades da placa de Logan | 81 |
| Tabela 9: Tensões na placa de Logan | 81 |
| Tabela 10: Propriedades do material - arco | 83 |

Lista de Símbolos e Variáveis

| | |
|--------------------|--------------------------------------------------------|
| d | Variável de dano mecânica |
| E_0 | Módulo de elasticidade inicial |
| E_{sec} | Módulo secante |
| σ | Tensão |
| ε | Deformação |
| r_0 | <i>Threshold</i> |
| r | Variável mecânica de estado |
| σ | Tensor de tensões |
| E | Tensor constitutivo |
| ε | Tensor de deformação |
| f^c | Função de carregamento |
| ε_{eq} | Deformação equivalente |
| I_1 | Primeiro invariante do tensor de deformações |
| J_2 | Segundo invariante do tensor de deformações desviadora |
| ν | Coefficiente de Poisson |
| κ | Razão entre resistência à compressão e à tração |
| r_{max} | Máxima deformação antes da completa danificação |
| G_f | Energia de fratura |
| h_m | Menor comprimento do elemento finito |
| h_e | Comprimento representativo do elemento finito |
| Ω | Multiplicidade |
| S | Entropia |
| U | Energia |
| Q | Calor |
| W | Trabalho |
| F | Energia livre de Helmholtz |
| T | Temperatura |

| | |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------|
| V | Volume |
| ∇T | Gradiente de temperatura |
| k | Condutividade |
| q_{cond} | Taxa de transferência de calor por condução |
| q | Fluxo de calor por unidade de área |
| T_s | Temperatura na superfície |
| A | Área |
| T_∞ | Temperatura no fluído |
| h_c | Coeficiente de convecção |
| \mathfrak{E}_n | Poder emissivo de um corpo negro |
| \mathfrak{E} | Poder emissivo |
| ϑ | Emissividade do material |
| \mathcal{G} | Irradiação |
| φ | Absortividade |
| h_r | Coeficiente de calor por radiação |
| ε_t | Deformação térmica livre |
| α | Coeficiente de dilatação térmica |
| D_m | Energia mecânica dissipada |
| ρ | Densidade |
| c | Calor específico |
| $k_{E,T}$ | Coeficiente de correção do módulo de elasticidade com a temperatura |
| r^{td} | Variável de estado térmica |
| θ_0 | <i>Threshold</i> térmico |
| \mathbf{u} | Campo de deslocamento |
| $\hat{\mathbf{u}}$ | Deslocamento prescrito |
| e_{xx} | Deformação em x |
| e_{yy} | Deformação em y |
| e_{xy} | Deformação cisalhante |
| \mathbf{b} | Forças de corpo |
| $\hat{\mathbf{t}}$ | Forças de superfície prescritas |
| Π | Energia potencial total |
| N_i | Funções de forma |

| | |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| \mathbf{B} | Matriz que relaciona os deslocamentos com deformações |
| \mathbf{B}_T | Matriz das derivadas para o acoplamento |
| \mathbf{K} | Matriz de rigidez mecânica |
| \mathbf{M} | Matriz térmica |
| $(.)^e$ | Grandeza relacionada ao elemento |
| h | Espessura |
| \mathbf{f}_{int} | Vetor das forças internas |
| \mathbf{f}_{ext} | Vetor de forças externas |
| $\bar{\mathbf{f}}$ | Vetor de forças de referências |
| λ | Fator de carga |
| Δl | Comprimento do arco |
| $g(\Delta \mathbf{u}_i^k, \Delta \lambda_i^k)$ | Equação de restrição para o processo iterativo |

“Coincidência é a maneira que Deus encontrou para permanecer no anonimato.”

Albert Einstein

“Dificuldades, meus filhos, sempre teremos. A maneira com a qual lidamos com nossos problemas é que nos coloca no grupo dos que seguiram em frente ou dos que ficaram pelo caminho.”

Maria Gabriela Lira Rangel

1

Introdução

1.1. Panorama Geral

Na Engenharia Civil é imprescindível conhecer as solicitações que atuam na estrutura e a resposta do material a essas solicitações, traduzidas em tensões, deformações e deslocamentos. A premissa básica de uma estrutura é a capacidade de suportar as cargas atuantes sem que haja perda de sua funcionalidade ou, no pior caso, falha do elemento estrutural causando o colapso da estrutura.

Em virtude da evolução tecnológica assistida nas últimas décadas, análises cada vez mais sofisticadas e realistas de problemas de engenharia são realizadas. Isso é permitido devido ao avanço de métodos de cálculo computacionais, como o método dos elementos finitos.

A falha de um material quase-frágil é precedida pelo surgimento de microfissuras e sua posterior coalescência. Apesar dessas microfissuras, é observado a existência de transferência de esforços. Modelos de fratura coesiva são capazes de descrever o comportamento do material e prever a propagação da fratura. Outro modelo constitutivo capaz de fornecer resposta realista para a falha do material devido a carregamentos mecânicos é o modelo de dano contínuo, que é um modelo em que a integridade do material é incorporada por uma variável de dano. A modelagem do dano isotrópico feito por elementos finitos requer técnicas de regularização para reduzir os efeitos de dependência da malha.

Contudo, a falha do material pode ocorrer devido às cargas de outras naturezas, como carregamentos térmicos. Nesse sentido, análises termomecânicas são necessárias para a previsão do comportamento com maior fidedignidade.

Diversos trabalhos apresentam modelos que envolvem análises termomecânica com dano. Stabler e Baker (2000) apresentaram um modelo com base na energia livre de Helmholtz. Luccioni *et al.* (2003) apresentaram um modelo termomecânico para

análises em concreto em altas temperaturas. Pearce *et al.* (2004) expuseram um modelo de dano termomecânico formulado para análises em concreto.

Baker *et al.* (2005) desenvolveram um modelo de dano anisotrópico termomecânico para concreto em altas temperaturas, o qual considera o regime transiente. Gundlach *et al.* (2010) apresentaram em seu trabalho duas metodologias modelar o dano em materiais frágeis

Diante desse cenário, este trabalho se propõe discutir os aspectos da análise da danificação em materiais quase-frágeis com base no modelo termomecânico com dano isotrópico, além de abordar os conceitos de dano térmico. Embora o trabalho seja voltado para materiais quase-frágeis, um enfoque ao concreto é dado durante a discussão sobre o dano térmico devido a vasta literatura sobre seu comportamento quando exposto a altas temperaturas.

1.2. Motivação

Problemas de engenharia são comumente tratados com o uso de simplificações nas análises, seja nas ações solicitantes, seja no modelo estrutural ou no modelo constitutivo, mesmo que o comportamento real seja complexo e apresente resposta não linear.

Com o advento e avanço tecnológico, bem como a produção do conhecimento em níveis de maior profundidade na engenharia, é crescente o número de trabalhos capazes de prever o comportamento estrutural considerando a complexidade do material e as interações entre ações de naturezas distintas, como é o caso da interação dos materiais com os efeitos provenientes de variações de temperaturas.

Diante disso, a motivação deste trabalho, é a possibilidade de realizar análises realísticas, levando em consideração o comportamento não linear e a influência de outras naturezas, tal qual a temperatura.

1.3. Objetivos

O objetivo principal desse trabalho é compreender e formular o dano termomecânico a fim de contribuir para literatura sobre o acoplamento termomecânico e fornecer uma ferramenta computacional capaz de realizar análises em materiais quase-frágeis quando submetido à diferenças de temperaturas. Soma-se a isso, discutir brevemente acerca da rigidez tangente em modelos de dano termomecânico considerando o método dos elementos finitos.

1.4. Organização da Dissertação

Este trabalho está organizado em 6 capítulos de modo a apresentar os aspectos básicos para análises de dano térmico e mecânico, com enfoque no método dos elementos. O primeiro capítulo consiste no panorama geral, motivação, objetivos e estrutura da dissertação.

O Capítulo 2 apresenta os conceitos básicos de dano isotrópico empregado neste trabalho. As equações básicas para a construção do modelo são apresentadas e é realizado uma breve discussão sobre os critérios de danificação e leis de evolução de dano.

O Capítulo 3 aborda os temas relacionados ao acoplamento termomecânico e o dano térmico. Inicialmente, definições básicas da termodinâmica são apresentadas e discutidas, tais como calor, temperatura, equilíbrio térmico, entropia e energia livre de Helmholtz, além das leis da termodinâmica. Posteriormente, são apresentados os mecanismos de transferência de calor. O tópico seguinte explora o mecanismo de surgimento de tensões em sólidos, decorrentes de variações de temperatura. Por fim, as equações de acoplamento termomecânico são deduzidas e o dano térmico é apresentado.

No Capítulo 4, são apresentados a essência de uma análise bidimensional e o método dos elementos finitos (MEF). Uma breve explicação do procedimento de análise não linear de estruturas por meio do MEF é dada. Ademais, as equações que

regem o dano isotrópico e o acoplamento em elementos finitos são expostas e uma discussão sobre a rigidez tangente encerra o capítulo.

O Capítulo 5 refere-se aos exemplos numéricos realizados nesse trabalho, sendo dividido em 3 tópicos. O primeiro, apresenta simulações que levam em consideração somente o dano isotrópico. No segundo tópico do capítulo, análises termomecânicas são realizadas. O último tópico é destinado a aplicações termomecânicas com dano.

No capítulo 6, expõem-se as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 Mecânica do dano contínuo

Os materiais de engenharia, como o concreto, argamassa, aço, ligas, madeira apresentam estruturas físicas distintas entre si. No entanto, o comportamento mecânico apresenta similaridades tais como parcelas elásticas, deformações irreversíveis, dano, propagação de fratura. É por meio dessas similaridades que a mecânica dos meios contínuos se torna adequada para descrever o comportamento dos materiais. Em um nível mesoscópico, conforme Lemaitre (1996), seu comportamento pode ser descrito através de mecanismos de energia comuns a todos, tal qual a energia de fratura. Isso permite realizar análises sem a preocupação da distinção de sua estrutura física.

A elasticidade, ao nível microscópico, é regida pelas ligações atômicas. A plasticidade, por sua vez, é governada pelo deslizamento de camadas de átomos em metais, pelo rearranjo das moléculas em polímeros, pelo deslizamento ao longo das superfícies descoesas do concreto, ou pelo rearranjo das células na madeira. Por fim, o dano é a quebra das ligações atômicas/moleculares, na microescala, ou a iniciação de uma microfissura, na mesoescala. Desta forma, nota-se, que nos mais diversos tipos de materiais o dano está associado a deformações irreversíveis ou plásticas.

Diante disso, a mecânica do dano contínuo, ao nível mesoscópico, apoia-se no conceito de elemento de volume representativo, o qual deve ser pequeno suficiente para representar altos gradientes presentes no material, porém grande o bastante para representar de forma integrada o efeito dos microprocessos (LEMAITRE, 1996).

Deste modo, do ponto de vista microscópico, o dano é a quebra das ligações atômicas/moleculares. No entanto, o modo como o dano se manifesta na mesoescala depende do tipo de material. Nesse sentido, é comum falar-se em dano frágil, dano dúctil, dano por fluência, dano por fadiga de baixo ciclo ou de alto ciclo. Kachanov (1990) ainda apresenta outros tipos de dano, como dano quimomecânico (*chemomechanical damage*) e degradação ambiental (*environmental degradation*).

De todo modo, o fenômeno de dano possui algumas características em comum independente do comportamento do material. A primeira é que ele é “localizado”. Diferente das deformações que, de modo geral, atuam sobre todo o corpo, o dano pode estar localizado em somente uma parcela do sólido. Além disso, o dano é difícil de ser medido diretamente, sendo aproximado através das propriedades dos materiais, tais como a redução do módulo de elasticidade ou alterações em propriedades acústicas (KACHANOV, 1990).

Krajcinovic (1996), ressalta como a resposta a um estímulo particular é definida pelas propriedades do material. Tais propriedades podem ser intrínsecas, ou seja, aquelas cuja medida dependem somente do material e não da forma ou tamanho do sólido; e as propriedades extrínsecas, que estão associadas também à forma e tamanho do sólido. O fato de o módulo de elasticidade ser uma propriedade intrínseca, evidencia o uso do módulo de Young como medida de degradação do material.

Portanto, o dano pode ser definido como a perda progressiva da integridade estrutural, que do ponto de vista da engenharia corresponde à perda de rigidez, que está relacionada com o módulo de elasticidade. Com isso, a mecânica do dano é o ramo da mecânica que lida com o mecanismo de deterioração do material por meio de variáveis mecânicas. Ao nível da microescala, o dano pode ser entendido como o acúmulo de tensões na vizinhança dos microdefeitos e a ruptura das ligações moleculares e atômicas. Na mesoescala, o dano consiste na coalescência de microfissuras e microvazios os quais induzem o início de uma macrofissura. Por fim, do ponto de vista da macroescala, o dano é a macrofissura que ocorre e se propaga no material. (LEMAITRE, 1996).

2.1.

Dano isotrópico

O modelo de dano isotrópico é facilmente entendido por meio de um ensaio de tração. Para isso, considera-se, aqui, o material quase-frágil em regime elástico e de pequenas deformações.

A figura 2.1 mostra um esquema de teste de tração uniaxial, no qual duas barras rígidas são conectadas por tiras de material frágil com seção transversal da amostra A_0 . À medida que o ensaio é realizado, observa-se o alongamento em todas as tiras e o comprimento inicial L , torna-se $L_1 = L + \delta_1$.

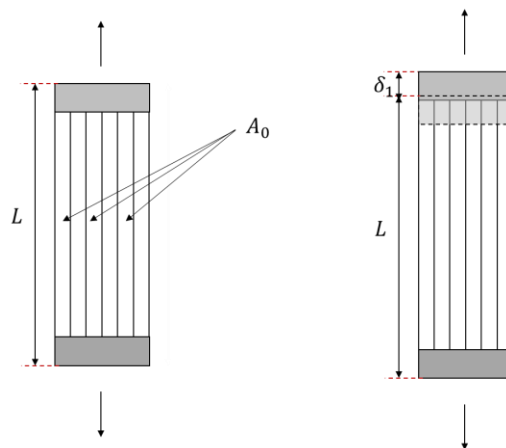


Figura 2.1: Teste de tração uniaxial (Adaptado de Pouplana)

A tensão σ que atua nas tiras é relacionada com a deformação específica através da lei de Hooke utilizando o módulo de elasticidade inicial. A tensão efetiva, por outro lado, entendida como a tensão referente a porção íntegra do material, pode ser determinada meio da rigidez secante. Ambas as tensões permanecem iguais no início do teste e afastam-se à medida que a seção transversal decresce.

Com o aumento da taxa de alongamento na amostra durante o ensaio, observa-se a ruptura das tiras e, por conseguinte, uma redução da área da seção transversal, tal que $A < A_0$. Com isso, é observada uma redistribuição de tensões.

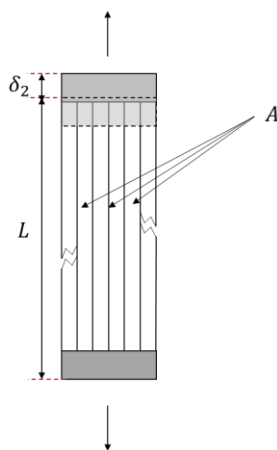


Figura 2.2: Redução da seção transversal em um instante do ensaio (Adaptado de Pouplana)

A razão entre as áreas é uma grandeza escalar capaz de descrever a integridade da seção. Em outras palavras, a relação $\frac{A}{A_0}$ decresce de 1, para o material não danificado ($A = A_0$), até 0, para o material completamente danificado ($A = 0$).

Conforme Kachanov (1986), o dano é uma função monotonicamente crescente. A descrição da integridade do material com base na razão das áreas induz apresentar a deterioração do material da seguinte forma:

$$d = 1 - \frac{A}{A_0} \quad (2.1)$$

A rigidez secante relaciona-se com o a rigidez inicial pela equação:

$$E_{sec} = (1 - d)E_0 \quad (2.2)$$

Com isso, as tensões efetivas são facilmente determinadas por:

$$\sigma = (1 - d)E\varepsilon \quad (2.3)$$

A figura 2.3 apresenta a comparação entre a resposta elástica e a resposta com o modelo de dano. Neste último, o pico da curva relaciona a tensão máxima de tração resistente e o valor de r_0 , que é sua deformação correspondente, calculado como a razão da resistência à tração e o módulo de elasticidade. Cabe destacar que o comportamento da curva no tramo de amolecimento é determinado pela evolução da variável d . Na figura 2.3 essa evolução é linear. Além disso, a área abaixo do gráfico à direita do pico representa a energia de fratura.

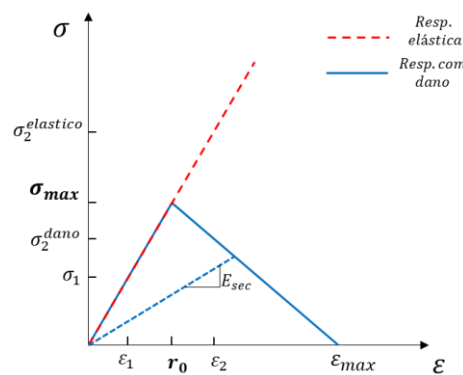


Figura 2.3: Comparação entre a resposta linear elástica e elástica com dano

Para o caso de descarregamento e recarregamento, a irreversibilidade do dano deve ser levada em consideração através de uma variável de estado r , expressa matematicamente por:

$$r(t) = \max \left\{ r_0, \max_{\tau \leq t} \varepsilon(\tau) \right\} \quad (2.4)$$

Na equação 2.4, τ é o pseudo tempo, correspondente ao passo no ensaio. Com isso, a variável de dano d é função do estado de deformação do sólido: $d = g(r)$.

O modelo constitutivo deduzido para o teste de tração pode ser estendido para o caso geral através da equação 2.5 e a variável de estado pela equação 2.6:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

onde d é a variável de dano, $\mathbf{D} = (1 - d)\mathbf{E}$ é o tensor constitutivo de 4ª ordem; $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são os tensores de tensão e deformação, respectivamente.

$$r(t) = \max \left\{ r_0, \max_{\tau \leq t} \varepsilon_{eq}(\tau) \right\} \quad (2.6)$$

Em que ε_{eq} é a deformação equivalente, a qual é capaz de representar o estado de deformação.

A equação 2.6 refere-se ao histórico de deformação do sólido durante a realização da análise. Do mesmo modo que a teoria da plasticidade requer uma função de escoamento para indicar a ocorrência da plastificação, o modelo de dano contínuo requer uma função de carregamento que indica a evolução do dano. Essa função é dada pela equação 2.7 abaixo.

$$f^c = \varepsilon_{eq} - r \quad (2.7)$$

As condições de carregamento, descarregamento e recarregamento são avaliadas através das condições de Kuhn-Tucker:

$$f^c \leq 0; \quad \dot{r} \geq 0; \quad \dot{r} f^c = 0 \quad (2.8)$$

Conforme apresentado por Pouplana (2015), a primeira condição garante que o valor de ε_{eq} seja menor ou igual que r , já que r é sempre o maior valor atingido por

ε_{eq} . A segunda condição, refere-se à irreversibilidade do dano e, por fim, a terceira condição expressa que o valor de r só aumenta se r e ε_{eq} forem iguais, já que \dot{r} é positivo ou nulo.

A dedução acima demonstra que o modelo de dano isotrópico é um modelo simples capaz de descrever a perda de rigidez do material por meio de uma variável de dano cuja natureza escalar não afeta o coeficiente de Poisson. Ademais, a simplicidade do modelo consiste em descrever o comportamento do material danificado por meio das equações constitutivas do material não danificado, de acordo com o princípio da deformação equivalente apresentado por Lemaitre e Chaboche (1994).

Algumas observações são feitas no modelo de dano isotrópico em análises mecânicas: é assumido que a temperatura é constante em um dado ponto; a entropia do sistema cresce à medida que o dano ocorre, atendendo à segunda lei da termodinâmica; e, de modo geral, o dano é irreversível.

Apesar da simplicidade das equações constitutivas que governam o comportamento de amolecimento, a escolha do parâmetro d é uma tarefa complexa. Kachanov (1996) descreve que esse parâmetro deve ser determinado por meio de análises da microestrutura física, por modelos matemáticos baseados em dados experimentais ou através de modelos estatísticos.

2.2. Critérios de danificação

Conforme supracitado, o modelo constitutivo de dano requer um critério de para o qual o dano inicia a fim de avaliar a deterioração do material. Os critérios são análogos aos critérios de escoamento da teoria da plasticidade e indicam, em termos de tensões ou deformações principais, os valores máximos para os quais a resposta do material permanece elástica, o que decorre do fato do modelo aqui empregado ser elástico e em regime de pequenas deformações.

A fim de elucidar a construção de um critério de danificação, uma análise uniaxial em um corpo de prova quase-frágil, como o concreto, é utilizada. Para o caso de tração uniaxial, o sólido falha quando uma das tensões principais atinge o limite de

resistência à tração σ_{rt} . Do mesmo modo, para o caso de compressão uniaxial, o sólido falha quando uma das tensões principais atinge o limite de resistência à compressão σ_{rc} .

A figura 2.4a apresenta o plano das tensões principais σ_1 e σ_2 , e as regiões delimitadas pelas retas σ_{rt} e σ_{rc} no primeiro e no terceiro quadrante representam as regiões em que o comportamento do material é elástico. Acrescenta-se ao plano das tensões principais os limites obtidos por ensaios de resistência à torção. Com isso, a região que corresponde ao comportamento elástico é representada pela figura 2.4b.

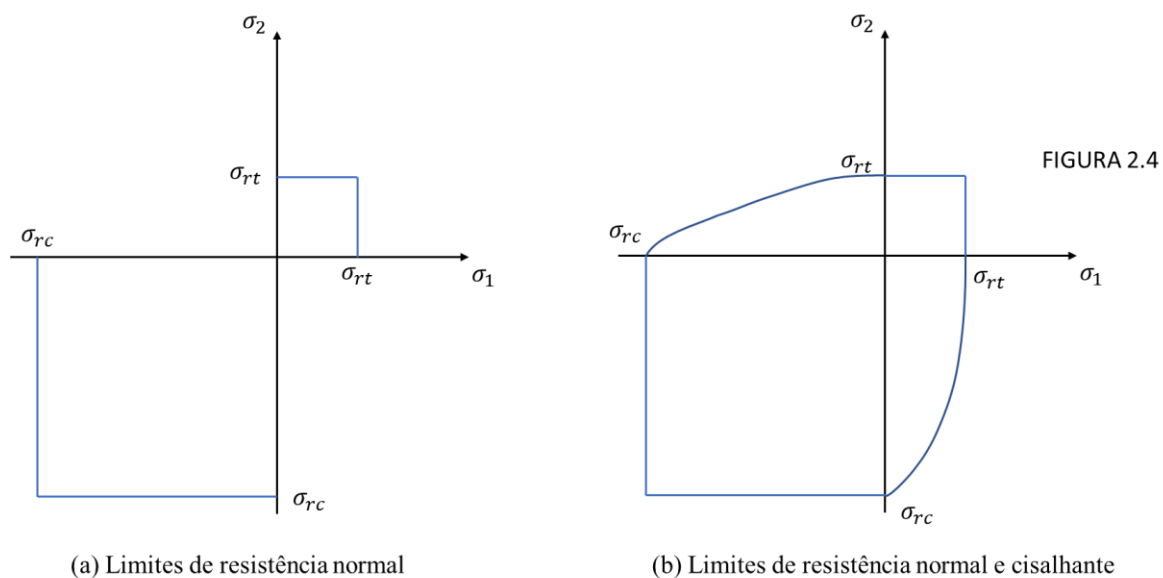


Figura 2.4: Exemplo de critério de danificação para material quase-frágil

Inúmeros critérios de danificação são encontrados na literatura. Os trabalhos de Simo e Ju (1987a e 1987b), Mazars (1981) e Pouplana (2015), apresentam critérios de danificação para o modelo de dano isotrópico baseado na deformação equivalente. Pouplana (2015), além do critério de Mazars, apresenta os critérios de norma de deformação (*strain Norm*), von Mises modificado e o critério de Simo e Ju modificado. Cabe salientar que no dano isotrópico, formulado em termos de deformações, o cálculo para verificação da danificação do material é feito através da deformação equivalente.

A figura 2.5 apresenta graficamente os domínios elásticos para os critérios de norma de energia, Mazars e von Mises modificado que serão utilizados nesse trabalho.

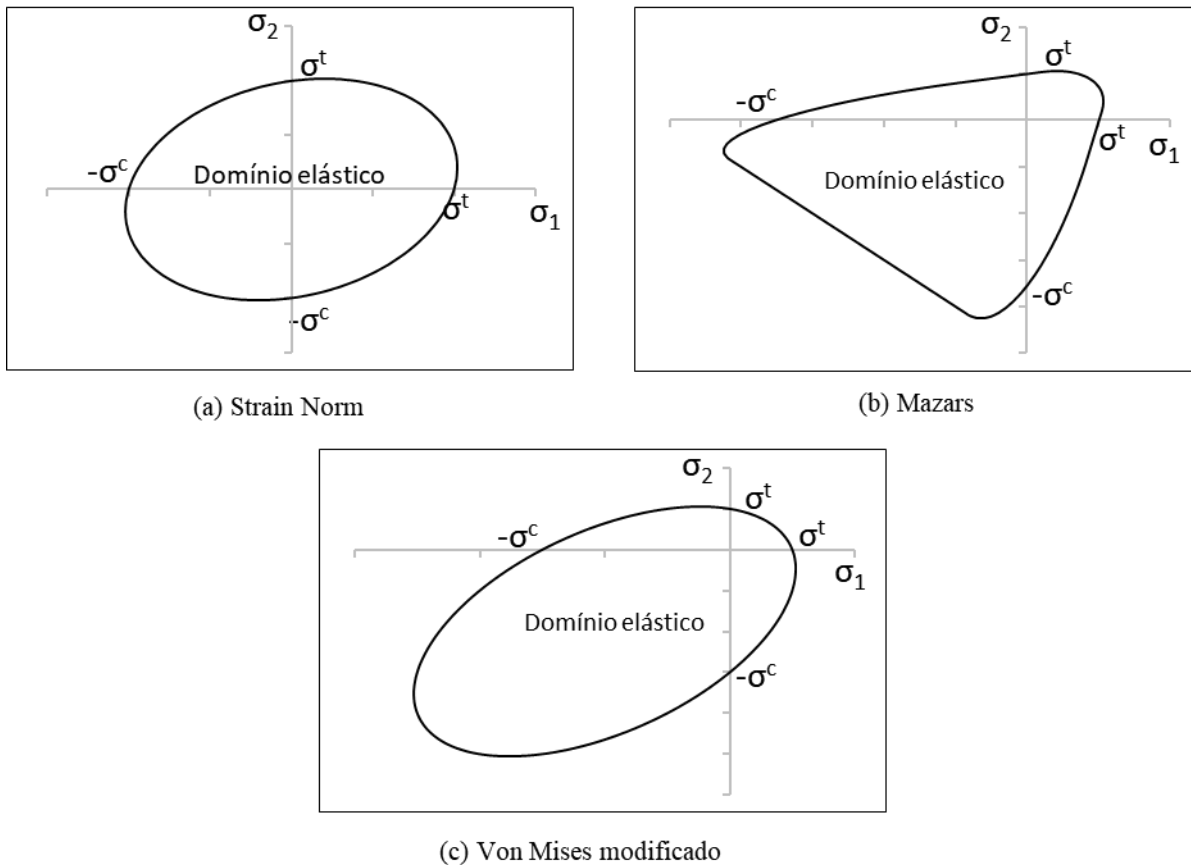


Figura 2.5: Critério de danificação

O critério de deformação é baseado na norma de energia, equação 2.9, e representa a máxima energia que o sólido é capaz de absorver antes da falha, que consiste na região elástica.

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}}{E}} = \sqrt{\frac{1}{E} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}} \quad (2.9)$$

O critério de Mazars é formulado com base no dano proveniente das tensões de tração, ou seja, das deformações positivas. Esse critério apresenta boa concordância

para a deformação equivalente que corresponde à região tração-tração e à região tração-compressão. A região compressão-compressão, representada pelo critério, mostra discordância em relação à dados experimentais (MAZARS, 1981), o que significa que outros modelos se tornam mais eficientes para sólidos sujeitos à compressão pura.

O critério de Mazars pode ser expresso pela equação 2.10:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum \langle \varepsilon_i \rangle^2} \quad (2.10)$$

Na equação acima $\langle . \rangle$ refere-se ao colchete de McAuley e retorna o valor 0, se $x < 0$, ou x , se $x > 0$.

Uma observação importante é que esse critério acaba por priorizar um estado hidrostático de tensão e negligencia as tensões desviadoras (MOREIRA E EVANGELISTA JÚNIOR, 2019). Para o caso onde as tensões cisalhantes são preponderantes em relação as tensões normais, é mais interessante o uso do critério de von Mises modificado.

O critério de von Mises modificado, proposto por De Vree *et al.* (1995), conforme a figura 2.5, é capaz de descrever o domínio elástico para materiais frágeis e/ou quase-frágeis, cuja expressão matemática, apresentada por Kurumatani *et al.* (2016), é dada pela equação 2.11.

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\kappa - 1}{2\kappa(1 - 2\nu)} I_1 + \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\left(\frac{\kappa - 1}{1 - 2\nu} I_1 \right)^2 + \frac{12\kappa}{(1 + \nu)^2} J_2} \quad (2.11)$$

Na equação 2.11, ν é o coeficiente de Poisson; κ é a razão entre as resistências de compressão e tração. I_1 e J_2 são o primeiro invariante do tensor de deformações e o segundo invariante do tensor de deformações desviadora, dados pelas equações 2.12a e 2.12b, respectivamente.

$$I_1 = Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (2.12a)$$

$$J_2 = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + 3(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)) \quad (2.12b)$$

2.3.

Lei de evolução do dano e regularização

O modelo de dano isotrópico requer uma lei que reja a evolução do dano. Diversas leis de evolução de dano são propostas na literatura. Mazars (1981), apresenta o modelo de evolução exponencial, com duas constantes dependentes do tipo do material. Oliver *et al.* (1990), apresenta uma lei de evolução exponencial, porém com somente uma variável dependente explicitamente do material. Pohl *et al.* (2014), apresenta uma lei de evolução linear, dependente da deformação crítica do material. Pouplana (2015), expõe, entre outras, a lei de evolução polinomial, a qual possui dois parâmetros associados a resistência residual e ao formato do trecho de amolecimento, no modelo constitutivo do material. Kurumatani *et al.* (2016), propôs uma lei de evolução deduzida a partir da força coesiva na superfície de fratura e a abertura de fratura. Outras leis de evolução de dano podem ser encontradas nos trabalhos de Golub (1995), Cervera *et al.* (2006) e Žarković (2019).

Ao longo deste trabalho as leis de evolução linear e exponencial proposta por Kurumatani *et al.* (2016) serão utilizadas. Sendo assim, maiores detalhes são apresentados abaixo.

A lei de evolução linear, apresentada por Pohl *et al.* (2014), é descrita matematicamente pela equação 2.13.

$$d = g(r) = \begin{cases} 0, & r \leq r_0 \\ \frac{r_{max}}{r} \frac{r-r_0}{r_{max}-r_0}, & r_0 < r < r_{max} \\ 1, & r \geq r_{max} \end{cases} \quad (2.13)$$

O valor de r_{max} é função das propriedades do material e do tamanho do elemento finito da malha discretizada:

$$r_{max} = \frac{2G_f}{Er_0h_m} \quad (2.14)$$

onde G_f é a energia de fratura, E é o módulo de Young e h_m é o menor lado do elemento finito danificado.

A evolução da variável de dano através da lei proposta por Kurumatani *et al.* (2016), é dada por:

$$d = g(r) = 1 - \frac{r_0}{r} e^{-\frac{Er_0 h_e}{G_f}(r-r_0)} \quad (2.15)$$

Na equação 2.15, h_e é o comprimento representativo do elemento. Para elementos finitos triangulares, $h_e = \sqrt{2A_e}$; para elementos quadrilaterais, $h_e = \sqrt{A_e}$; para elementos hexaédricos $h_e = V_e^{\frac{1}{3}}$.

A figura 2.6 apresenta o comportamento, ao nível do material, das leis de evolução de dano apresentadas acima, para uma tração uniaxial, em que $E = 28000 \text{ MPa}$, $r_0 = 2 \times 10^{-4}$, $r_{max} = 5 \times 10^{-4}$, $G_f = 0.00056 \text{ N/mm}$ e $h_e = 1 \text{ mm}$.

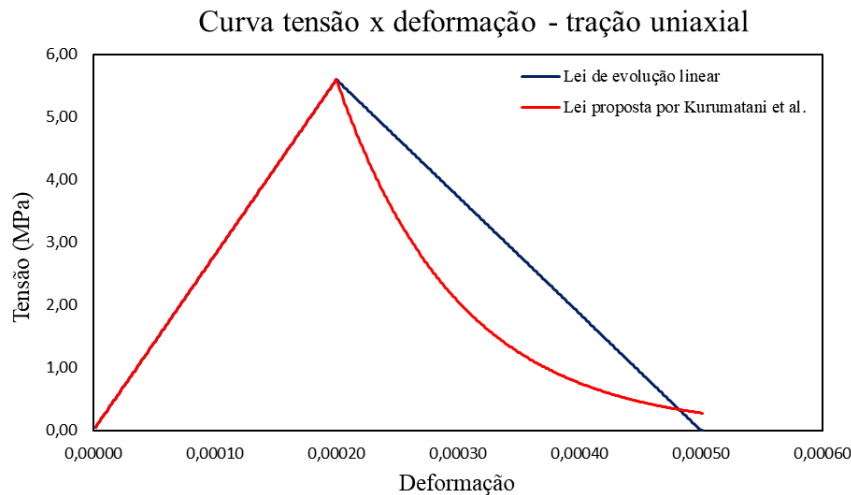


Figura 2.6: Comportamento da lei de evolução do dano

Em ambas as leis apresentadas acima, a linear e a proposta por Kurumatani *et al.* (2016), estão associados a duas propriedades em comum: a energia de fratura e uma variável relativa ao tamanho do elemento finito da malha discretizada. Isso decorre da presença da resposta dependente da malha. O modelo de dano contínuo é caracterizado por ser um problema mal posto e possuir dependência de malha.

Com isso, técnicas de regularização são necessárias para contornar essa característica, tais como o modelo não local, apresentado por De Vree *et al.* (1995);

combinação de modelo não local com a técnica de malha adaptativa, proposto por Pouplana (2015); modelos de microplano, proposto por Bažant *et al.* (2000) e Caner and Bažant (2013).

Nesse trabalho, a técnica baseada no comprimento característico, calculado conforme a área do elemento finito, conforme Kurumatani *et al.* (2015), é utilizado.

3 Dano termo-mecânico.

Os problemas de engenharia por vezes estão sujeitos a ações de natureza distintas que decorrem de fenômenos mecânicos, escoamento hidráulico, mudanças químicas, além de diferenças de temperatura. Nesse sentido é de interesse da engenharia a modelagem matemática para expressar o comportamento do material frente às ações simultâneas de diferentes físicas. Em estruturas de concreto, por exemplo, sujeitas a sinistros como incêndio, ou estruturas de concreto em plantas industriais que abrigam caldeiras ou fundições, bem como usinas térmicas e nucleares, são requeridas análises capazes de prever com acurácia os esforços e comportamento da estrutura devido ao carregamento mecânico e térmico.

Além disso, operações subterrâneas para exploração de minério e recursos energéticos como gás natural e petróleo são exemplos que resultam em problemas de engenharia que necessitam de modelagem termomecânica, devido à alta temperatura no qual a rocha se encontra em condições subterrâneas.

Diante desse cenário, é imprescindível a descrição matemática do comportamento estrutural diante desses carregamentos.

Em 1987 Castillo *et al.*, analisaram os efeitos da temperatura em concretos de alta resistência comparando a resistência à compressão do corpo de prova em temperaturas variando entre 100°C e 800°C com a resistência à temperatura ambiente. Três metodologias foram empregadas nos ensaios: (i) aquecimento da amostra até a temperatura estimada e em seguida realização do ensaio; (ii) aquecimento da amostra até a temperatura de ensaio, com posterior resfriamento até a temperatura ambiente, e então a realização do ensaio e; (iii) aquecimento da amostra após um pré-carregamento e posterior realização do ensaio. Os resultados apresentaram uma redução de 70% para a resistência à compressão das amostras ensaiadas com a primeira e segunda metodologia para uma temperatura de 800°C. Para temperaturas superiores à 400°C, os ensaios realizados com a terceira

metodologia resultaram numa redução de resistência menor que as duas primeiras (CASTILLO *et al.*, 1987).

Baker *et al.* (1996) analisaram a energia de fratura para o concreto simples por meio de ensaio de flexão de 3 pontos, cujo intervalo de temperatura durante o ensaio está compreendido entre 20°C e 600°C. Os resultados apresentados pelos autores evidenciaram que temperaturas acima de 300°C conduzem a uma queda súbita na energia de fratura do material.

Stabler e Baker (2000) apresentaram um modelo de dano isotrópico com acoplamento termomecânico, desenvolvido com base na energia livre de Helmholtz, considerando o acúmulo do dano devido às deformações térmicas e mecânicas observadas no material em altas temperaturas. Deve-se ressaltar que apesar de considerar o calor específico constante, a segunda lei da termodinâmica não foi violada. Os resultados apresentados pelos autores dizem respeito a análises numa faixa de temperatura entre 25°C e 800°C.

Luccioni *et al.* (2003) apresentaram um modelo termomecânico para concreto em elevadas temperaturas baseado no acoplamento plasticidade e dano de modo a incorporar o dano induzido por altas temperaturas. Pearce *et al.* (2004) enunciaram um modelo de dano termomecânico para concreto em altas temperaturas e em regime transiente considerando fluência térmica.

Baker *et al.* (2005) desenvolveram um modelo de dano anisotrópico termomecânico acoplado para o concreto em altas temperaturas, considerando regime transiente, em que a segunda lei da termodinâmica não é violada e possui estabilidade computacional. Além disso, os autores abordaram a redução de propriedades mecânicas, como a resistência à compressão e módulo de elasticidade, com o aumento da temperatura. Tal fato é evidenciado pelo comportamento microestrutural do concreto, passível ao surgimento de microfissuras, dada uma diferença de temperatura, devido sua heterogeneidade.

Gundlach *et al.* (2010) apresentaram duas abordagens para modelar o dano em materiais frágeis, no caso materiais cerâmicos, sendo a primeira correspondente ao aumento da fissura na matriz homogênea e a segunda no contorno dos grãos. Por outro lado, Xu *et al.* (2018) expuseram um modelo de dano com acoplamento

termomecânico para granito, utilizando o princípio da deformação equivalente proposto por Lemaitre (1996). Nesse trabalho, Xu *et al.* descreveram o dano térmico com base na redução do módulo de elasticidade inicial com o aumento da temperatura, redução essa decorrente de tensões térmicas que conduzem à degradação do material.

Neste capítulo serão abordados, inicialmente, alguns conceitos referentes às bases da termodinâmica; posteriormente serão apresentados os mecanismos de transferência de calor, seguido por uma descrição do processo de aparecimento de tensões térmicas. Por fim, será apresentada a formulação de acoplamento entre a mecânica e a termodinâmica.

3.1. Considerações iniciais

A compreensão de alguns conceitos da termodinâmica é facilmente alcançada do ponto de vista da física estatística. Conceitos como calor, entropia, equilíbrio térmico, são alguns exemplos. A fim de elucidar esses conceitos, um exemplo simples de um gás de baixa densidade será utilizado.

Nesse caso, é observado um grande número de partículas e cada partícula está associada a um estado de energia. Essa energia pode ser cinética de translação, de rotação, vibração ou potencial. Uma parcela dessas partículas pode estar em um estado de energia vibracional, enquanto outra parcela em um estado de energia cinética translacional e uma terceira parcela de partículas em um estado de energia cinética rotacional. Cada uma dessas parcelas é denominada de partição e a energia total do sistema é determinada pelo produto da partição pela energia correspondente (ALONSO E FINN, 2013).

A configuração de energia do sistema descrito acima representa um microestado de energia. No entanto, é importante destacar que em um dado sistema existem inúmeros microestados e cada um é associado a uma probabilidade de ocorrência. A figura 3.1 apresenta um esquema em que a primeira partição associada a uma energia é representada pela letra A, a segunda partição pela letra B e a terceira, pela letra C. É possível agrupar os microestados de acordo com suas configurações,

assim todos os microestados com a ocorrência de uma configuração de energia com somente um A é agrupado no macroestado $1A$.

Nota-se que além de permutações, algumas partições podem ter maior ou menor probabilidade de aparecer que outras, tal como os microestados com duas ocorrências da configuração A , o que dá origem ao macroestado $2A$. Diz-se, então, sua multiplicidade (Ω) é 3 (ver figura 3.1).

Em um sistema isolado a energia total deve ser constante. No entanto, as interações entre as partículas levam a uma variação nas partições, o que conduz a um novo microestado. Esse novo microestado é aquele com maior probabilidade de ocorrência. Com isso o equilíbrio estatístico é alcançado. Cabe salientar que o equilíbrio estatístico equivale ao equilíbrio térmico (ALONSO E FINN, 2013).

| Microestados | | | | Macroestados |
|--------------|---|---|------------|--------------|
| A | B | C | 1ª config. | 1 A |
| A | C | B | 2ª config. | 1 A |
| B | A | C | 3ª config. | 1 A |
| B | C | A | 4ª config. | 1 A |
| C | B | A | 5ª config. | 1 A |
| C | A | B | 6ª config. | 1 A |
| A | A | B | 7ª config. | 2 A |
| A | B | A | 8ª config. | 2 A |
| B | A | A | 9ª config. | 2 A |
| ⋮ | | | | |

Figura 3.1: Microestados

Diante do exposto, o calor pode ser definido como energia interna e, consequentemente, a temperatura é uma forma de medir a tendência de um objeto ceder sua energia interna espontaneamente. Além disso, a entropia (S), por vezes definida como a grandeza que mede o grau de desordem do sistema, é facilmente encontrada através da multiplicidade (Ω) do sistema por meio da equação 3.1:

$$S = k \ln(\Omega) \quad (3.1)$$

onde k é a constante de Boltzmann, a qual relaciona a energia de uma molécula com sua temperatura. Vale destacar que a variação de entropia para processos em que o volume é constante pode ser calculada como $\Delta S = \frac{Q}{T}$.

Uma vez explorado um sistema isolado, a interação deste com outro sistema termodinâmico implica em variações de energia interna. O contato entre dois ou mais objetos com temperaturas distintas entre si, por exemplo, incorrerá numa variação da temperatura em cada um deles, de modo que ao final todos estejam com a mesma temperatura. O resultado é um equilíbrio térmico do novo sistema, no qual os objetos com maior temperatura cedem energia para os objetos com menor temperatura, processo que perdura até o término do tempo de relaxação. Esse fenômeno é a lei zero da termodinâmica.

Na natureza, a energia pode frequentemente ser convertida entre suas diversas formas. Contudo, a energia total se conserva. Dessa forma, é observado que qualquer variação de energia em um sistema isolado é condicionada à interação desse sistema com um processo de transferência de energia externa. Na termodinâmica, porém, os mecanismos de transferência de energia são calor e trabalho (SCHROEDER, 1999). Com isso, a primeira lei da termodinâmica, é a lei da conservação de energia que é expressa matematicamente pela equação 3.2:

$$\Delta U = Q + W \quad (3.2)$$

onde Q é o calor e W é o trabalho.

Nota-se que durante a interação entre dois objetos com temperatura distintas, o número de combinações possíveis de configuração de energia do novo sistema aumenta. Com isso, a multiplicidade associada ao equilíbrio térmico aumenta significativamente, resultando num aumento da entropia do sistema. Tal fato consiste na segunda lei da termodinâmica que pode ser enunciada simplesmente como: A multiplicidade de um sistema termodinâmico tende a aumentar (SCHROEDER, 1999).

Ademais, qualquer processo em que a entropia aumente é denominado de processo irreversível. Processos em que a entropia não varia, são denominados de

processos reversíveis. Ressalta-se que interações termodinâmicas que envolvem diminuição da entropia do universo violam a segunda lei da termodinâmica e são, portanto, inexistentes.

Outros conceitos necessários são descritos a seguir. A capacidade calorífica é a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura em 1 grau; calor específico é a capacidade calorífica por unidade de massa; entalpia, H , é a energia necessária para “criar” um sistema termodinâmico ($H = U + PV$), ou em outras palavras, a energia interna (U) acrescida do trabalho de expansão da atmosfera referente ao espaço que o sistema termodinâmico necessitará (PV).

Por fim, a energia que pode ser recuperada ao “destruir” um sistema é menor do que a entalpia. Isso decorre da necessidade de despejar calor no ambiente devido à entropia. Ou seja, a energia que pode ser recuperada é a energia livre que pode ser utilizada para realizar trabalho. Se a temperatura do ambiente pode ser considerada constante, então essa energia livre é a energia livre de Helmholtz (F), dado pela equação 3.3.

$$F = U - TS \quad (3.3)$$

onde T é a temperatura.

3.2. Princípios de transferência de calor

Uma vez definido calor como energia, há três mecanismos de transferência. São eles: condução, convecção e radiação.

3.2.1. Condução

O mecanismo de transferência de calor por condução pode ser explicado através de um gás confinado num recipiente. Seja $S1$ e $S2$ duas superfícies opostas desse recipiente, com a primeira apresentando uma temperatura $T1 > T2$, sendo $T2$ a temperatura da $S2$.

A temperatura do gás dentro desse recipiente, pode ser associada à energia cinética das moléculas adjacentes ao ponto medido. Com isto, moléculas próximas à superfície S1 apresentarão maior energia que moléculas próximas à superfície S2. A energia é transferida entre as moléculas por meio de colisões, de modo que moléculas com maior energia a transfere para moléculas com menor energia cinética (temperatura baixa), por exemplo. Em outras palavras, a condução ocorre por difusão de energia (INCROPERA, 2008).

Para um líquido, cujas moléculas estão próximas, as interações moleculares são mais intensas e com maior frequência, se comparado aos gases. Para o sólido, o princípio é o mesmo. Entretanto, a transferência está relacionada a ondas na estrutura reticuladas, denominada rede de lattice, e estas ondas são induzidas pelo movimento atômico.

É interessante notar que se o sólido for constituído de material não condutor, então a transferência será unicamente pelas ondas nos retículos. No entanto, para sólidos condutores, o movimento dos elétrons é capaz de interferir essa energia (INCROPERA, 2008).

O mecanismo de condução é descrito por meio da lei de Fourier. A equação 3.4 representa a taxa de condução q_{cond} . Destaca-se aqui que a lei de Fourier é fenomenológica, ou seja, foi desenvolvida através da observação do calor transferido em um objeto.

$$q_{cond} = -k \nabla T = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (3.4)$$

Onde ∇T é o gradiente de temperatura e k é a condutividade térmica do material.

3.2.2. Convecção

Esse mecanismo de transferência de calor é caracterizado por ser uma superposição da transferência de calor por difusão de energia com a transferência devido ao movimento macroscópico do fluido. Em outras palavras, o escoamento do

fluido é capaz de transportar o calor de uma região para outra ao mesmo tempo em que ocorre uma difusão de energia no próprio fluido (INCROPERA, 2008).

Se o escoamento de um fluido entrar em contato com uma superfície, haverá a formação de um fenômeno chamado camada limite de velocidade, onde a velocidade do fluido na superfície será nula (ou a própria velocidade da superfície) e aumentará até um valor V_{∞} , valor esse igual à velocidade de escoamento do fluido fora da camada limite.

Da mesma forma, haverá uma camada limite menor, igual ou maior que a camada limite de velocidade, sendo, no entanto, de distribuição de temperatura. Isso significa que haverá a formação de uma camada limite térmica. Nessa camada, a temperatura próxima à superfície é maior e decresce à medida que se afasta.

O processo de transferência de calor por convecção, pode-se dizer, ocorre nessa camada limite térmica. A difusão de energia ocorre quando as moléculas do fluido estão próximas à superfície, quando a velocidade do escoamento em relação a superfície é nula. O calor dentro da camada limite é arrastado na direção do escoamento e é transferido para parte externa da camada limite (que cresce na direção do escoamento).

Dessa forma, é possível classificar a convecção em convecção forçada, livre e mista. A primeira é aquela em que a convecção é originada por meios externos, como *cooler's*, ventiladores, bombas, entre outros mecanismos.

A convecção livre é aquele mecanismo de transferência de calor em que o escoamento é produzido naturalmente por forças de empuxo, geradas pela diferença de temperatura que ocasiona uma diferença de densidade. Uma série de equipamentos dispostos verticalmente em que há o aquecimento dos mesmos devido seu funcionamento, aquece o ar ao seu redor, diminuindo sua densidade e gerando um escoamento e, conseqüentemente, uma convecção livre (ou natural) (INCROPERA, 2008).

Por fim, a convecção mista é a junção das convecções livres e forçadas.

A equação que rege esse mecanismo de transferência de calor é a equação 3.5.

$$q = \frac{h}{A} (T_s - T_{\infty}) \quad (3.5)$$

Onde:

- h é o coeficiente de troca de calor por convecção;
- T_s é temperatura na superfície;
- T_∞ é temperatura do fluido;
- A é a área.

3.2.3. Radiação

É a energia emitida pela matéria com temperatura não nula. Os líquidos e os gases também podem emitir radiação. Essa emissão é atribuída à mudança nas configurações eletrônicas dos átomos. Além disso, a energia é transferida por ondas eletromagnéticas e/ou fótons.

Para uma superfície, a energia liberada provém da energia térmica e a taxa de liberação é por unidade de área; essa taxa é o poder emissivo (\mathfrak{E}) da superfície. Esse poder emissivo é limitado superiormente e o valor é determinado pela lei de Stefan-Boltzmann, equação 3.6:

$$\mathfrak{E}_n = \mathcal{S} T_s^4 \quad (3.6)$$

onde \mathcal{S} é a constante de Stefan-Boltzmann ($\mathcal{S} = 5.67 \times 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$) e T_s é a temperatura na superfície.

A equação acima, determina o valor do poder emissivo de um corpo negro. Este por sua vez, pode ser definido como sendo a matéria capaz de absorver toda radiação nela emitida. Entretanto, para uma superfície real a taxa de radiação emitida é menor que a de um corpo negro. Assim, o poder emissivo de um corpo real deve ser corrigido por um fator (ϑ), que é a emissividade do material e está compreendido entre 0 e 1. Assim, a equação acima torna-se equação 3.7: (INCROPERA, 2008).

$$\mathfrak{E} = \vartheta \mathcal{S} T_s^4 \quad (3.7)$$

Da mesma forma que uma superfície pode emitir radiação, a radiação também pode ser emitida pela vizinhança e incidir na superfície. A taxa com que essa radiação incide sobre a superfície é denominada irradiação \mathcal{G} e mostra a taxa de incidência da

radiação sobre a superfície. O parâmetro φ , absorptividade, mede a taxa de absorção da energia radiante, equação 3.8:

$$\mathcal{G}_{abs} = \varphi \mathcal{G} \quad (3.8)$$

A absorptividade é um valor compreendido entre 0 e 1 e depende da superfície (opaca, transparente ou semitransparente).

Um caso particular de radiação ocorre quando há troca de radiação de uma superfície pequena (T_s) e uma superfície isotérmica (T_{viz}) maior, que contém a menor. Nesse caso, a taxa de transferência de calor por radiação, q_{rad}^* , é dada pela equação (3.9).

$$q_{rad}^* = \vartheta \mathfrak{E}_n(T_s) - \varphi \mathcal{G} = \vartheta \mathcal{S}(T_s^4 - T_{viz}^4) \quad (3.9)$$

A equação acima pode ser simplificada, introduzindo o coeficiente de calor por radiação, h_r (equação 3.10), e torna-se equação (3.11) (INCROPERA, 2008).

$$h_r = \vartheta \mathcal{S}(T_s + T_{viz})(T_s^2 + T_{viz}^2) \quad (3.10)$$

$$q_{rad} = h_r A(T_s - T_{viz}) \quad (3.11)$$

Note que essa última fornece a troca de calor líquida, e não a taxa de transferência de calor.

3.3. Termomecânica

Os processos de transferência de calor estão presentes nas mais diversas áreas, seja na conservação dos alimentos, em processos químicos, na indústria de beneficiamento do minério de ferro ou na produção de energia. Na engenharia estrutural a transferência de calor, bem como as variações de temperatura, produz respostas bem peculiares às quais a dilatação, ou contração (traduzidas como deformações térmicas) e tensões mecânicas são objetos de estudo da termomecânica.

As tensões térmicas são tensões decorrentes de forças que surgem devido as restrições à dilatação ou contração no sólido. A figura 3.2 apresenta o caso clássico

de tensões térmicas ao longo do eixo longitudinal. Na figura 3.2a, a barra é presa em uma das extremidades e livre na outra. Ao sofrer uma diferença de temperatura, ocorre uma dilatação e o comprimento da barra passa a ser $l + \Delta l$. Nesse caso, não é observado o surgimento de tensões mecânicas devido ao ΔT , as deformações térmicas, são deformações térmicas livre (equação 3.12).

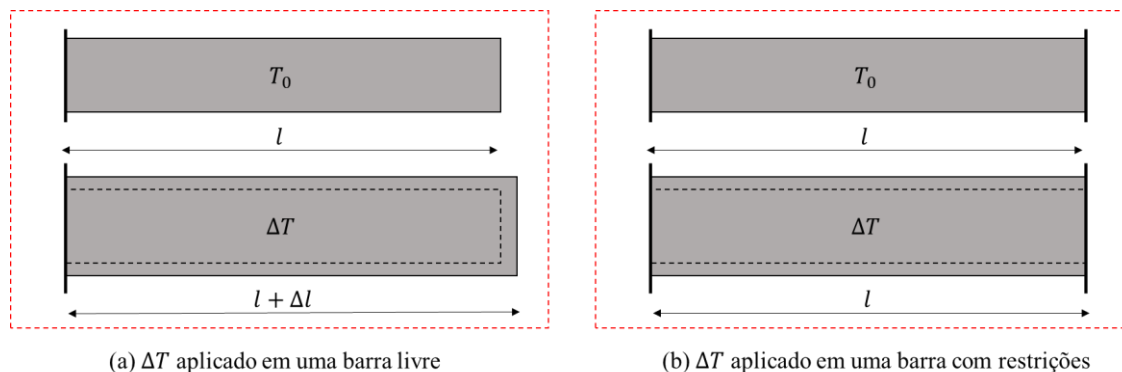


Figura 3.2: Tensão térmicas ao longo do eixo axial

A figura 3.2b, mostra a mesma barra, porém restrita em ambas as extremidades. Nesse caso, nota-se que não ocorre dilatação no eixo longitudinal em virtude das restrições e o comprimento l permanece o mesmo após um ΔT aplicado. Contudo, tensões mecânicas são observadas e as deformações deixam de ser deformações térmicas livres. Para o concreto, por exemplo, esse fenômeno é conhecido como carga induzida por deformações térmicas (*load induced thermal strain – LITS*). Buttignol (2020), define LITS, de modo geral, como a diferença da deformação total medida no sólido e a deformação térmica livre, subtraindo ainda a deformação elástica. Cabe salientar que essa subtração conta ainda com parcelas de deformação por fluência, uma vez que são inseparáveis experimentalmente.

$$\varepsilon_t = \int \alpha dT \quad (3.12)$$

onde α é o coeficiente de dilatação térmica do material e ε_t é a deformação térmica livre.

A solução de um problema como o apresentado na figura 3.2b, por meio da resistência dos materiais, consiste em calcular o alongamento da barra considerando

uma das extremidades livre e então calcular a força que corresponde a esse alongamento. No entanto, essa abordagem é válida para o material homogêneo, isotrópico e em regime elástico.

A figura 3.3 apresenta uma viga em balanço onde a superfície do topo é aquecida. A variação da temperatura conduz às deformações vistas na figura e tensões mecânicas. No exemplo da figura 3.2b, as tensões surgem devido à restrição externa. No caso abaixo, as tensões observadas tem origens em restrições internas. Ou seja, a camada de topo tende a ter alongamentos maiores que camadas adjacentes, o que causa um efeito de restrição interna. Note que nesse caso as tensões surgem à medida que o calor é transferido por condução.

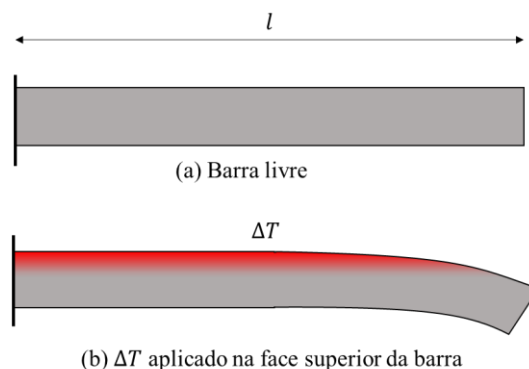


Figura 3.3: Tensões térmicas de flexão

Além disso, restrições internas em geomateriais e no concreto ocorrem devido à sua heterogeneidade, onde cada material constituinte (pasta cimentícia e agregado, no caso do concreto) possuem coeficientes de dilatação térmica próprios.

3.4. Acoplamento termomecânico

Os problemas termomecânicos possuem condições de contorno que descrevem o estado inicial do corpo tanto do ponto de vista mecânico, quanto térmico. O acoplamento termomecânico é governado pelo conjunto de equações que correspondem ao balanço de energia térmica, equações de equilíbrio e a lei constitutiva do material.

De acordo com Stuzalec (1992), os problemas termomecânicos são separados em processos termodinâmicos reversíveis e irreversíveis. Para elucidar essa separação, o aquecimento de 130°C em uma haste de alumínio de comprimento inicial 2 metros, confere um alongamento de Y mm. No entanto, um carregamento mecânico que produz um alongamento de Y mm, não dissipa 130°C de energia térmica. Isso ocorre porque o processo é irreversível.

Como mencionado anteriormente, a energia pode facilmente ser convertida entre suas diversas formas. Com isso, o acoplamento entre físicas é regido em termos de balanço de energia. A figura 3.4 mostra um esquema para o balanço de energia no acoplamento termomecânico.

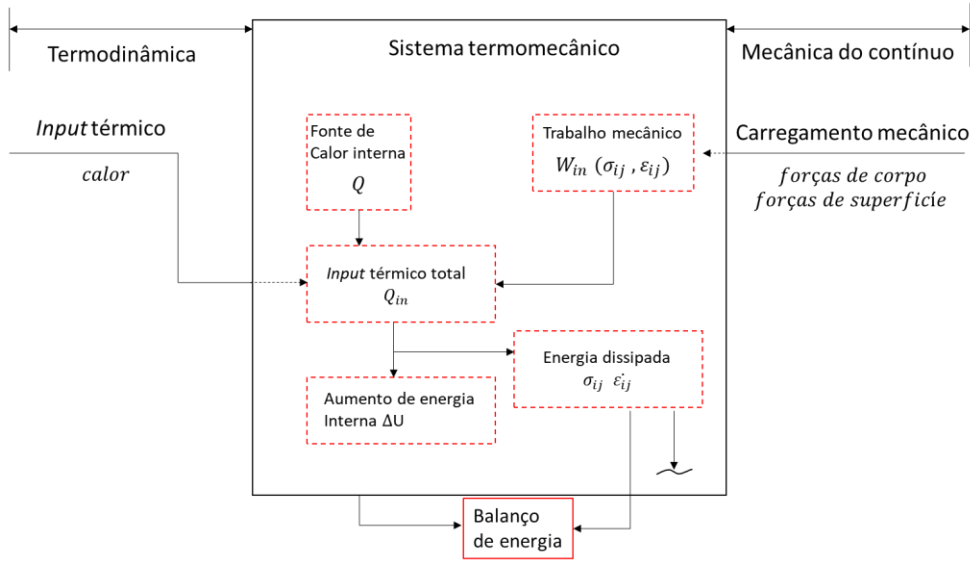


Figura 3.4: Balanço de energia para o acoplamento termomecânico

De acordo com a primeira lei da termodinâmica, a variação da energia interna é a soma das parcelas do calor e do trabalho. Nesse caso, a parcela referente ao trabalho decorre das forças de corpo e forças de superfícies. Com isso, a equação 3.13a e 3.13b representa a primeira lei, em termos de taxa de variação para um volume dv para o acoplamento.

$$\dot{U} = \int_v Q_i dv + \int_s q_i n_i ds + \int_v \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dv \quad (3.13a)$$

$$\dot{u} = Q_i + q_{i,i} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (3.13b)$$

em que Q_i é o calor interno, interpretado como fonte de calor (ou sumidouro) e $q_{i,i}$ é o calor que é transferido. As duas primeiras parcelas na equação 3.13b se referem ao calor interno e ao calor na superfície, respectivamente.

Hsu (1986), expõe que a equação 3.13 é estritamente para processos reversíveis, uma vez que nem toda energia mecânica que entra no sólido é convertida em calor. A porção de energia mecânica que é dissipada deve ser levada em conta nesse balanço. Pela segunda lei da termodinâmica $TdS > dQ$, a qual pode ser reescrita considerando a parcela de energia mecânica dissipada, D , como:

$$Tds = dQ + D \rightarrow T\dot{S} = q_{i,i} + Q_i + D \quad (3.14)$$

As equações 3.13 e 3.14, apresentam o balanço de energia para o acoplamento termomecânico. No entanto, em termos de análises de engenharia é conveniente o uso de equações com termos mais acessíveis. Hsu (1986) utiliza a energia livre de Helmholtz ($F = U - TS$). Nota-se, pela primeira lei e pela equação 3.13a e 3.13b, que a energia livre de Helmholtz é função da temperatura e da deformação ($F(T, \varepsilon_{ij})$).

A energia livre de Helmholtz em termos de taxa de variação é:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} \quad (3.15)$$

Por outro lado, o primeiro lado da equação 3.14 pode ser determinado como:

$$T\dot{S} = -T \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) \quad (3.16)$$

Na equação 3.16, a entropia foi calculada conforme sua equivalência: $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$.

Por intermédio da equação 3.15, a equação 3.16 torna-se a equação 3.17:

$$T\dot{S} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} - T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \dot{T} \quad (3.17)$$

Da termodinâmica, a capacidade térmica pode ser calculada como $C = T \frac{\partial S}{\partial T} = T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$. Assim, substituindo na equação 3.17 e inserindo na equação 3.14, tem-se:

$$-T \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho c \dot{T} - D = q_{i,i} + Q_i \quad (3.18)$$

Na equação 3.18, D energia mecânica dissipada, entendida como o fator de acoplamento plástico (NGO (2014), HSU (1986)), e a parcela $-T \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij}$ pode ser entendida como o termo de acoplamento termoelástico.

As equações 3.13 a 3.18 referem-se ao balanço de energia para o acoplamento. em termos de equações constitutivas, o acoplamento, em termos de deformação total, é dado pela equação 3.19, considerando um modelo elástico em pequenas deformações.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (3.19)$$

Em que $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de deformações total, $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ é a parcela elástica, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é a parcela de deformação térmica livre.

3.5. Dano térmico

A descrição do dano térmico deve ser precedida de uma compreensão do comportamento dos materiais quase-frágeis sob variações de temperaturas e em condições transientes. Apesar de abordar materiais frágeis e quase-frágeis de modo geral, um enfoque maior é dado ao concreto.

É bem conhecido que o rápido aquecimento e temperaturas elevadas, causam degradação ao concreto. Redução da resistência à tração, à compressão, redução da energia de fratura e do módulo de elasticidade são consequências do comportamento em altas temperaturas que decorrem da resposta na microestrutura do concreto tanto do ponto de vista físico, quanto do ponto de vista químico e que dependem da matriz cimentícia e do tipo de agregado (LUCCIONI, 2003).

No processo de aquecimento do concreto, o primeiro fenômeno observado é que a água livre (que não foi reagida na mistura) aquece e evapora. Nesse processo de evaporação, microfissuras podem surgir, devido à expansão do volume (transformação água no estado líquido para o gasoso). Isso causa pressão na matriz do concreto. Nota-se que a porosidade do mesmo é capaz de maximizar esse efeito.

Aos 130°C, a estrigita, que é resultado da hidratação da matriz, se desagrega e como consequência, ocorre um decaimento da resistência do concreto. Após isso, ao atingir 200°C, a pasta hidratada passa a ter redução nas forças de Van der Waals. Aos 300°C, ocorre o início da evaporação da água interlaminar do silicato de cálcio hidratado (C-S-H) e que cessa somente aos 900 °C. Outros fenômenos ocorrem, como a quebra da portlandita aos 450 °C e a quebra da calcita, que ocorre por volta de 700°C. Além disso, em torno de 575°C são observadas alterações no quartzo, originando expansões e contribuindo para o processo de microfissuração (SOUZA, 2020).

No que diz respeito à resposta constitutiva do material do ponto de vista mecânico ao aumento da temperatura, é necessário compreender que o concreto é multifásico: matriz cimentícia e agregados. Além disso, o concreto conta com uma zona de transição interfacial entre a matriz e os agregados. Xotta *et al.* (2015), cita que o concreto é um material que apresenta uma boa resposta com respeito a resistência ao fogo. Contudo, altos gradientes produzem rápida evaporação da água livre que resulta em pequenas explosões (XOTTA *et al.*, 2015). Esse fenômeno é conhecido como *spalling*.

Xotta *et al.* (2015), argumenta ainda que a ordem de grandeza dos grãos cimentícios e dos agregados destoa entre si. Essa diferença de tamanho implica em um mal acondicionamento dos grãos de cimento nos arredores dos agregados, causando um efeito de parede. Como consequência, é observada uma maior porosidade na zona de interface entre a matriz e os agregados, que se torna uma região mais frágil.

O concreto quando exposto a altas temperaturas apresenta variações distintas de suas dimensões como consequência dos diferentes coeficientes de dilatação térmica da matriz e dos agregados. O efeito de parede e a maior porosidade na zona de transição

de interface são responsáveis pela irreversibilidade do dano térmico, uma vez que aquecido, microfissuras serão formadas na zona interfacial e permanecem apesar do resfriamento.

A tabela 1 apresenta os principais valores para resistência a compressão e deformação no concreto, considerando dois tipos de agregados. Nota-se que para uma temperatura de 1200°C, o concreto deixa de resistir aos esforços solicitantes.

Tabela 1: Valores para os principais parâmetros da relação tensão-deformação para concretos de peso normal com agregados silicosos e calcários apresentada no EUROCODE 2.

| Concreto | Agregado silicoso | | | Agregado de calcário | | |
|----------------|-----------------------|------------------------|-------------------------|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| temp. θ | $f_{c,\theta}/f_{ck}$ | $\epsilon_{c1,\theta}$ | $\epsilon_{cu1,\theta}$ | $f_{c,\theta}/f_{ck}$ | $\epsilon_{c1,\theta}$ | $\epsilon_{cu1,\theta}$ |
| [°C] | [-] | [-] | [-] | [-] | [-] | [-] |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 20 | 1,00 | 0,0025 | 0,0200 | 1,00 | 0,0025 | 0,0200 |
| 100 | 1,00 | 0,0040 | 0,0225 | 1,00 | 0,0040 | 0,0225 |
| 200 | 0,95 | 0,0055 | 0,0250 | 0,97 | 0,0055 | 0,0250 |
| 300 | 0,85 | 0,0070 | 0,0275 | 0,91 | 0,0070 | 0,2750 |
| 400 | 0,75 | 0,0100 | 0,0300 | 0,85 | 0,0100 | 0,0300 |
| 500 | 0,60 | 0,0150 | 0,0325 | 0,74 | 0,0150 | 0,0325 |
| 600 | 0,45 | 0,0250 | 0,0350 | 0,60 | 0,0250 | 0,0350 |
| 700 | 0,30 | 0,0250 | 0,0375 | 0,43 | 0,0250 | 0,0375 |
| 800 | 0,15 | 0,0250 | 0,0400 | 0,27 | 0,0250 | 0,0400 |
| 900 | 0,08 | 0,0250 | 0,0425 | 0,15 | 0,0250 | 0,0425 |
| 1000 | 0,04 | 0,0250 | 0,0450 | 0,06 | 0,0250 | 0,0450 |
| 1100 | 0,01 | 0,0250 | 0,0475 | 0,02 | 0,0250 | 0,0475 |
| 1200 | 0,00 | - | - | 0,00 | - | - |

Barh *et al.* (2013) em seu trabalho apresenta uma metodologia para determinação de propriedades como o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, por meio da *Impulse Excitation Technique* que leva a resultados satisfatórios para a determinação de tais propriedades do concreto quando exposto ao fogo. Para incorporar o efeito da temperatura no módulo de elasticidade, Barh *et al.* (2013), desenvolveram uma expressão matemática que consiste em um coeficiente de redução, dado pela equação 3.20.

$$k_{E,\theta} = 1.080xe^{-0.002\theta} \quad (3.20)$$

A dependência da energia de fratura com respeito à temperatura pode ser calculada conforme a lei experimental (equação 3.21) apresentada por Pearce *et al.* (2004), válida para temperaturas até 500°C:

$$G_f = G_{f0} \left(1 + 0.39 \left(\frac{\theta - 20}{100} \right) - 0.07 \left(\frac{\theta - 20}{100} \right)^2 \right) \quad (3.21)$$

Diante disso, o concreto exposto a altas temperaturas, apesar da ausência de carregamento mecânico, podem ser completamente danificado. O modelo de dano térmico deve ser capaz de representar os fenômenos discutidos acima. Baker e Stabler (1998), apresentaram três características que o modelo de dano térmico deve atender: (i) redução do módulo de Young; (ii) redução da resistência última e (iii) aumento nas deformações correspondentes às tensões últimas.

De forma semelhante ao dano isotrópico apresentado no capítulo 2, o dano térmico possui uma lei de evolução do dano ($g(T)$), função de carregamento ($f^c(T)$), variável de estado (r^{td}) e um limiar de dano térmico (θ_0) – *thermal damage threshold*.

A variável de estado que armazena o histórico de temperatura, é expressa por:

$$r^{td} = \max \left\{ \theta_0, \max_t (T(t)) \right\} \quad (3.22)$$

A função de danificação é análoga à equação 2.7:

$$f(T) = T - r^{td} \quad (3.23)$$

Pearce *et al.* (2004) apresenta a seguinte lei de evolução:

$$g(T) = 20(r^{td} - \theta_0) \left(1 - 5(r^{td} - \theta_0) \right) \quad (3.24)$$

Além de Pearce *et al.* (2004), Luccioni *et al.* (2003) apresenta uma lei de evolução do dano térmico com base na razão dos módulos de elasticidade:

$$g(\theta) = 1 - \frac{E(\theta)}{E_0} \quad (3.25)$$

O módulo de elasticidade em função da temperatura pode ser expresso através da equação 3.20. Com isso, a equação 3.25 torna-se:

$$g(\theta) = 1 - 1.080e^{0.002r^{td}} \quad (3.26)$$

Assim o modelo constitutivo com dano térmico é análogo ao apresentado pela equação 2.5:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}_t : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.27)$$

onde $\boldsymbol{D}_t = (1 - g(T))\boldsymbol{D}$ é o tensor constitutivo termomecânicamente acoplado.

4 FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é um método numérico para resolução de problemas de engenharia, matemática, física, áreas afins e é o método utilizado nesse trabalho. O presente capítulo tem por objetivo apresentar a formulação do problema em sua forma fraca e abordar aspectos do método de solução dos problemas não lineares.

4.1. Equações não lineares para o problema mecânico

A solução de um problema de análise estrutural em regime linear de pequenos deslocamentos, consiste na solução das equações de equilíbrio e condições de contorno, das relações cinemáticas e do modelo constitutivo, dadas pelas equações 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente.

$$\nabla \sigma + b = 0; \quad u = \hat{u} \quad e \quad \sigma_n = \hat{t} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon = \nabla u \quad (4.2)$$

$$\sigma = D\varepsilon \quad (4.3)$$

Salienta-se que a equação 4.1 é uma equação diferencial de segunda ordem relativo ao campo de deslocamento e é classificada como uma equação elíptica, onde σ é o tensor de tensões, o termo b refere-se as forças de corpo, ε é o tensor de deformações, \hat{u} são os deslocamentos prescritos e \hat{t} são as forças de superfície prescritas. Além disso, para o caso bidimensional, $u = [u_x(x, y), u_y(x, y)]^T$ na equação 4.2, é o campo de deslocamento.

Em elementos finitos, o domínio do problema é discretizado em subdomínios, os quais são denominados de elemento finito. A figura 4.1 mostra a discretização de um sólido e um elemento quadrilateral com 4 nós, onde cada nó possui dois graus de liberdade, a saber deslocamento na direção x e deslocamento na direção y . Dessa forma, o deslocamento em um elemento é dado pela equação 4.4 abaixo:

$$\mathbf{u}^e = [u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ \dots \ u_{xn} \ u_{yn}]^T \quad (4.4)$$

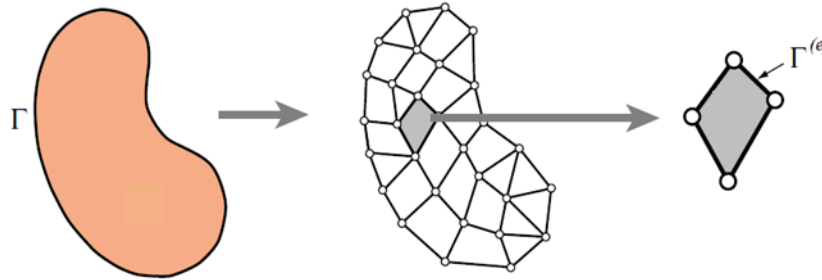


Figura 4.1: Discretização (Adaptado de Fellipa, 2001)

O deslocamento em um ponto contido no elemento finito, é determinado por meio da interpolação dos deslocamentos dos nós, equação 4.5, através das funções de forma $\{\mathbf{N}\}$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \mathbf{u}^e \quad (4.5)$$

Substituindo a equação 4.5 em 4.2, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (4.6)$$

onde \mathbf{B} é a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos.

O método dos elementos finitos conduz as equações diferenciais de equilíbrio apresentadas acima, a um conjunto de equações algébrica, dadas por 4.7:

$$\mathbf{f}^{ext} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \text{ com } \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (4.7)$$

onde \mathbf{f}^{ext} é o vetor de forças externas, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ as forças internas e \mathbf{K} é a matriz de rigidez, calculada por $\mathbf{K} = \sum^{N_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV$, em que o somatório indica a montagem da matriz de rigidez global, N_e é o número de elementos.

Para o caso do material elástico com dano, a equação 4.3 é modificada e assume a forma $\boldsymbol{\sigma} = (1 - d)\mathbf{E}:\boldsymbol{\varepsilon}$. E, por conseguinte, a força interna é alterada.

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} \quad (4.8)$$

em que $\mathbf{K}(\mathbf{u}) = \sum^{N_e} \mathbf{B}^T (1 - d(\mathbf{u})) \mathbf{E} \mathbf{B}$ é a matriz de rigidez global, a qual é não linear nos deslocamentos, devido a dependência da variável de dano.

A resposta não linear de uma estrutura pode ser visualizada graficamente por meio de curvas carga-deslocamento. A curva plotada é denominada de trajetória de equilíbrio para aquele deslocamento e cada ponto no caminho representa uma configuração em equilíbrio estático.

A figura 4.2 exemplifica uma curva carga – deslocamento, onde o trecho R-C é denominado de caminho fundamental. O ponto C, é o ponto crítico e pode ser um ponto limite, onde a tangente é horizontal, ou pode ser um ponto de bifurcação, o qual indica uma mudança brusca no caminho de equilíbrio e que duas trajetórias de equilíbrio podem se cruzar. O ponto V é o ponto de viragem, de modo que se apresenta maior relevância em termos de método de solução. O ponto F é o ponto de falha.

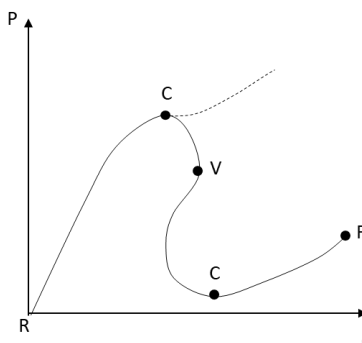


Figura 4.2: Diagrama carga x deslocamento

A trajetória de equilíbrio de uma análise estática não linear por meio do método dos elementos finitos, considerando a não linearidade do material é obtida de forma incrementalmente, conforme a equação 4.9:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_i) - \lambda_i \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{r} \quad (4.9)$$

em que $\bar{\mathbf{f}}$ é o vetor de forças de referência, \mathbf{r} é o resíduo da diferença entre as forças internas e a força de referência vezes o fator de carga, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}$ e λ é o fator de carga dado por $\lambda_i = \lambda_{i-1} + \Delta \lambda_i$, ressalta-se que o subscrito i indica o passo da análise.

O equilíbrio incremental é obtido por:

$$\Delta \mathbf{f}(\Delta \mathbf{u}_i) - \Delta \lambda_i \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{r} \quad (4.10)$$

A solução da equação 4.10 necessita de uma equação adicional de restrição, já que a inserção de $\Delta \lambda$ conduz a uma outra variável desconhecida.

Dessa forma, $\Delta \lambda_i$ é calculado através de:

$$g(\Delta \mathbf{u}_i, \Delta \lambda_i) = 0 \quad (4.11)$$

Na equação 4.10, a forma incremental da tensão utilizada é:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = (1 - d) E \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.12)$$

A solução de problemas não lineares, lança mão de técnicas iterativas, a qual a mais utilizada é a de Newton-Rapson, dada suas notórias características de estabilidade e convergência. Seguindo a formulação apresentada em Muñoz e Roehl (2017), as equações 4.10 e 4.11 em suas formas incremental-iterativa, tornam-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^{k-1} & -\bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{g}_{,\Delta \mathbf{u}}^{k-1} & \mathbf{g}_{,\Delta \lambda}^{k-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}^k \\ \delta \lambda^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^{k-1} \\ g(\Delta \mathbf{u}_i^{k-1}, \Delta \lambda_i^{k-1}) \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Apesar do método de Newton-Rapson ser largamente utilizado, é preciso métodos de continuação capazes de superar os pontos críticos mencionados acima, os

quais definem a equação de restrição. Diversos trabalhos apresentam métodos de continuação robustos e capazes de superar tais pontos. Gutierrez (2004) apresenta um método de dissipação de energia, Verhoosel *et al.* (2008) expõem um método robusto baseado no comprimento do arco cilíndrico e dissipação de energia, Muñoz e Roehl (2017) combinaram métodos com múltiplas restrições.

Outro método de continuação comumente utilizado é o método do comprimento de arco cilíndrico, em que a equação de restrição é dada pela equação 4.14 (SOUZA NETO, 2008; CRISFIELD, 1991):

$$g(\Delta \mathbf{u}_i^k, \Delta \lambda_i^k) = |\Delta \mathbf{u}_i^k|^2 - \Delta l_i \quad (4.14)$$

O último termo da equação é o parâmetro de comprimento do arco. Souza Neto (2008), apresenta a equação 4.13 com processos iterativos para o arco cilíndrico, com um incremento genérico i , na forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T(\mathbf{u}^{(k-1)}) & -\bar{\mathbf{f}} \\ (2\Delta \mathbf{u}^{(k-1)})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}^k \\ \delta \lambda^k \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^{k-1}, \Delta \lambda^{k-1} \\ ((\Delta \mathbf{u}^{(k-1)})^T \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} - l^2) \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Destaca-se que $\Delta \mathbf{u}_i^k = \Delta \mathbf{u}_i^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^k$ e $\lambda_i^k = \lambda_i^{k-1} + \delta \lambda^k$. O valor de $\delta \lambda^k$ é calculado através da equação 4.16.

$$a(\delta \lambda^k)^2 + b\delta \lambda^k + c = 0 \quad (4.16)$$

Em que:

$$a = |(\mathbf{K}_T^{k-1})^{-1} \bar{\mathbf{f}}|^2 \quad (4.17a)$$

$$b = ((\mathbf{K}_T^{k-1})^{-1} \bar{\mathbf{f}})^T \mathbf{d} \quad (4.17b)$$

$$c = ((\mathbf{K}_T^{k-1})^{-1} \bar{\mathbf{f}})^T ((\mathbf{K}_T^{k-1})^{-1} \bar{\mathbf{f}}) - \Delta l^2 \quad (4.17c)$$

$$\mathbf{d} = \Delta \mathbf{u}_i^{k-1} + \mathbf{K}_T^{k-1} \mathbf{r}_i^{k-1} + \Delta \lambda_i^{k-1} (\mathbf{K}_T^{k-1})^{-1} \bar{\mathbf{f}} \quad (4.17d)$$

onde $\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ é a rigidez tangente.

4.2.

Equações não lineares para o termomecânico com dano

Esta seção apresenta a discretização das equações de equilíbrio e difusão térmica através do método de elementos finitos para o acoplamento.

A equação de equilíbrio em um ponto, para o caso geral, é dada por:

$$\nabla \sigma + b = 0 \quad (4.18)$$

onde σ representa as tensões totais, expressa pela equação 3.27, e b é o vetor de forças de corpo. As relações cinemáticas, é fornecida pela equação 4.2.

A lei constitutiva do material define a relação entre o incremento de tensão total $\Delta \sigma$ e o incremento de deformação devido à mudança de tensão $\Delta \epsilon_\sigma$ (deformação mecânica),

$$\Delta \sigma = D_d \Delta \epsilon_\sigma \quad (4.19)$$

onde D_d é a matriz constitutiva do material. Assumindo condições não-isotérmicas, o incremento de deformação total pode ser expresso como a soma do incremento de deformação mecânica, $\Delta \epsilon_\sigma$, e o incremento de deformação devido à mudança de temperatura $\Delta \epsilon_T$:

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_\sigma + \Delta \epsilon_T \quad (4.20)$$

onde $\Delta \epsilon_T = \alpha_T m \Delta T$ e α_T é o coeficiente de expansão térmica, $m = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ e ΔT é a mudança de temperatura. Substituindo Eq. 4.20 na equação 4.19 resulta em:

$$\Delta \sigma = D_d \Delta \epsilon - D_d \alpha_T m \Delta T \quad (4.21)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados, a discretização da Eq. 4.18 resulta em,

$$\int_V B^T \sigma dV - \int_V N^T b \cdot dV - \int_S N^T t dS = 0 \quad (4.22)$$

onde \mathbf{t} é o vetor com as trações externas. A quação de equilíbrio também pode ser expressada na seguinte forma:

$$\mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

onde a força externa é dada por

$$\mathbf{f}^{ext} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} \cdot dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \quad (4.24)$$

e as forças internas é dado por

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.25)$$

Do mesmo modo que o problema mecânico não linear, é necessário desenvolver a forma incremental da Eq. 4.23, o qual é obtido diferenciando a Eq. 4.23 em função do tempo e usando a regra da cadeia.

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

onde

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma}{\partial \mathbf{u}} dV \quad (4.27)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial T} = \int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma}{\partial T} dV \quad (4.28)$$

$\mathbf{D}_d = \partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma$ é derivada das tensões com respeito às deformações mecânica e $\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma / \partial T = 1$ é a derivada da deformação mecânica em função da mudança de temperatura. Finalmente, a forma matricial da equação de equilíbrio é dado por

$$\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{u} - \mathbf{M} \cdot \Delta T = \Delta \mathbf{F}_e \quad (4.29)$$

Com o propósito de incluir o efeito térmico, o campo de temperatura deve ser calculado. Considerando fluxo de calor em equilíbrio no interior do corpo sólido, a equação do balanço de energia é dada por

$$\nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla T) - \rho C_p \dot{T} + Q_i = 0 \quad (4.30)$$

onde T é a temperatura (em K), \mathbf{k} é o tensor de condutividade térmica (em $W/m.K$), ρ é a densidade do material (em kg/m^3) e C_p é seu calor específico à pressão constante

(em $J/kg.K$) e Q_i é a taxa de geração de calor por unidade de volume (em W/m^3). Discretizando a Eq. 4.30 através do método de Galerkin obtemos a forma fraca da equação de balanço de energia.

$$\mathbf{X}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{\Theta}_e \mathbf{T} = \mathbf{Q}_T \quad (4.31)$$

onde

$$\mathbf{X}_e = \int_V \rho C_p \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (4.32)$$

$$\mathbf{\Theta}_e = \int_V \mathbf{B}_T^T \mathbf{k} \mathbf{B}_T dV \quad (4.33)$$

$$\mathbf{Q}_T = \int_V Q \mathbf{N}^T dV \quad (4.34)$$

onde $\mathbf{B}_T = \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \quad \frac{\partial N}{\partial y} \quad \frac{\partial N}{\partial z} \right\}^T$.

A partir da Eq. 4.29 e Eq. 4.31 A representação matricial da formulação termomecânica é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_e \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_g} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Theta}_e \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_g} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{T} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_e \\ \mathbf{Q}_T \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_{eg}} \quad (4.35)$$

A Eq. 4.35 pode ser reescrita da seguinte forma.

$$\mathbf{C}_g \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F}_{eg} \quad (4.36)$$

Em geral, a Eq. 4.36 representa uma equação diferencial dependente do tempo. Portanto, um método de discretização de tempo é adotado para aproximar a solução

numericamente ao longo do tempo. A solução nos próximos passos de tempo é aproximada como

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \{ (1 - \theta) \dot{\mathbf{x}}_n + \theta \dot{\mathbf{x}}_{n+1} \} \quad (4.37)$$

Onde $0 \leq \theta \leq 1$ é o parâmetro de integração do tempo, Δt é o incremento de tempo no passo. Para o esquema Backward Euler implícito, o parâmetro de integração de tempo θ assume o valor de 1, que é incondicionalmente estável.

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+\theta} = \frac{(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n)}{\Delta t} \quad (4.38)$$

Substituindo Eq. 4.37 e 4.38 na Eq. 4.36, obtemos seguinte equação

$$(\mathbf{C}_g + \Delta t \theta \mathbf{K}_g) \Delta \mathbf{x}_{n+1} = \Delta t \{ \theta \mathbf{F}_{eg_{n+1}} + (1 - \theta) \mathbf{F}_{eg_n} \} - \Delta t \mathbf{K}_g \mathbf{x}_n \quad (4.39)$$

Considerando o esquema de integração implícita, a Eq. 4.38 resulta em

$$(\mathbf{C}_g + \Delta t \mathbf{K}_g) \Delta \mathbf{x}_{n+1} = \Delta t \mathbf{F}_{eg_{n+1}} - \Delta t \mathbf{K}_g \mathbf{x}_n \quad (4.40)$$

Em geral, a Eq. 4.40 é um sistema não linear já que \mathbf{C}_g e \mathbf{K}_g podem depender do \mathbf{x}_{n+1} . Portanto, a solução requer um método iterativo. O método de Newton-Raphson foi adotado devido a sua robustez e convergência quadrática. Este método minimiza o vetor residual iterativamente,

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}_{n+1}) = \Delta t \mathbf{F}_{eg_{n+1}} - \Delta t \mathbf{K}_g \mathbf{x}_n - (\mathbf{C}_g + \Delta t \mathbf{K}_g) \{ \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \} \quad (4.41)$$

A formulação termomecânica, baseada no método dos elementos finitos, foi implementada em um framework interno GeMA (MENDES, 2016). O GeMA tem sido usado em várias aplicações multi-escala e multi-física, considerando efeito térmico. Cabe destacar que a equação 4.30 é uma simplificação da equação 3.18, em que a parcela D referente ao acoplamento termoplástico foi desconsiderado, já que o acoplamento é com o regime elástico. Além disso, nesse trabalho não está sendo

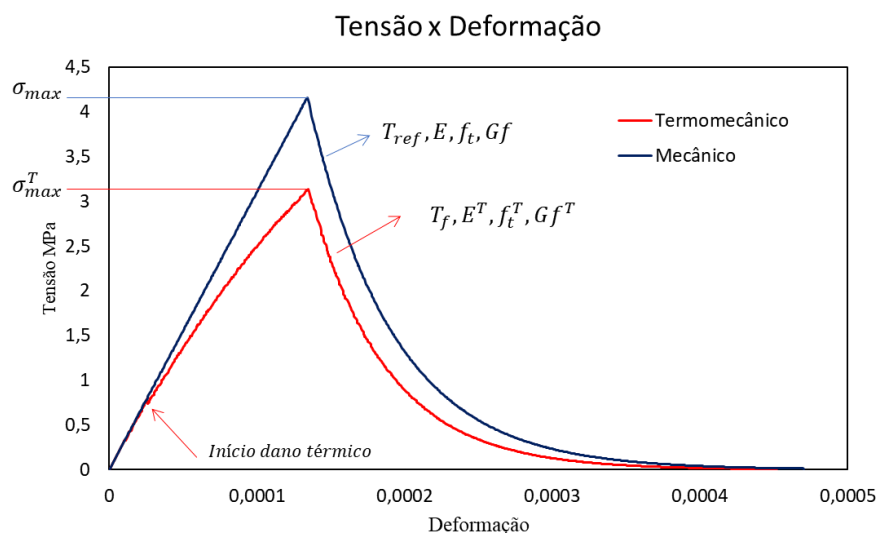
considerado a parcela $-T \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij}$, já que algumas aplicações o efeito mecânico no balanço de energia térmico é irrisório.

4.3. Discussão acerca da rigidez tangente

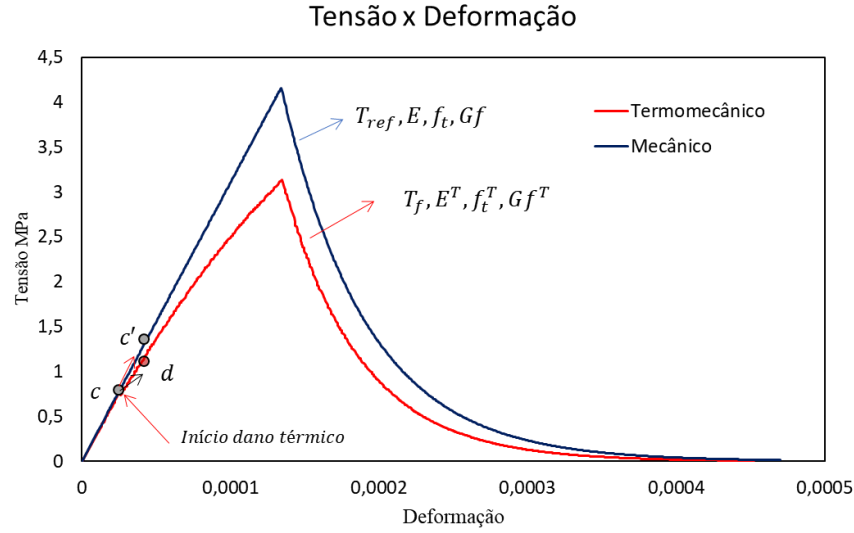
Nesse tópico, uma breve discussão sobre a rigidez tangente é realizada.

Para isso, a figura 4.4a compara duas curvas tensão – deformação, uma termomecânica com dano mecânico e outra termomecânica acoplada com dano térmico. A curva termomecânica, à temperatura de referência, possui propriedades E, f_t, G_f . A curva em vermelho, representa a análise a uma temperatura T e suas propriedades afetadas pelo dano térmico, além de identificar o início do dano térmico.

Por intermédio da figura 4.4b, nota-se a importância de considerar o efeito da temperatura no cálculo da rigidez tangente. O ponto c na curva termomecânica representa um passo da análise. O passo seguinte, calculado de modo incremental, convergirá para o ponto c' , na análise termomecânica. Para a análise acoplada com dano térmico, o próximo ponto seria o ponto d .



(a)



(b)

Figura 4.3: Análise da rigidez tangente considerando os efeitos térmicos

No entanto, a não consideração do efeito térmico no cálculo da rigidez conduz a impossibilidade da convergência da análise para a curva que representa o modelo acoplado.

Para o caso mecânico, a rigidez tangente $K_T(\mathbf{u})$ é calculada pela equação 4.42:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial (\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV)}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial (w_p \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{u}} \quad (4.42)$$

em que a igualdade $\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = w_p \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}$, é devido a integração numérica e w_p é o peso na quadratura de Gauss.

Para o dano mecânico, apresentado no capítulo 2, a equação 2.5 é substituída na equação 4.9, fornecendo a rigidez tangente:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{D} - \frac{\partial d}{\partial r} \frac{dr}{d\epsilon_{eq}} \frac{d\epsilon_{eq}}{d\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4.43)$$

Por outro lado, para o acoplamento termomecânico com dano a equação 3.27 é substituído na equação 4.42, tal que:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{D}_T - (1 - g) \frac{\partial d}{\partial r} \frac{dr}{d\epsilon_{eq}} \frac{d\epsilon_{eq}}{d\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{K} \mathbf{u} - (1 - d) \frac{\partial g}{\partial r^{td}} \frac{dr^{td}}{dT} \frac{dT}{d\boldsymbol{\epsilon}_\sigma} \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4.44)$$

Na equação 4.44, a parcela $\frac{dr}{d\varepsilon_{eq}}$ existe somente se o dano mecânico evoluir. Do mesmo modo, a parcela $\frac{dr^{td}}{dT}$ só existe se o dano térmico evoluir.

Outro ponto a ser levantado é que a solução das equações não lineares apresentadas nesse capítulo podem ser tratadas como um problema de minimização do quadrado dos resíduos. Em outras palavras, o uso de algoritmos de otimização pode ser utilizado como alternativa, como os métodos quase-Newton.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentados alguns problemas referentes aos conteúdos abordados nos capítulos precedentes. O modelo constitutivo nas análises é o modelo elástico linear com dano e em regime de pequenas deformações. Inicialmente, somente o dano isotrópico é considerado. Posteriormente, problemas envolvendo a termomecânica são apresentados e, por fim, análises realizadas com o modelo de dano termomecanicamente acoplado são realizadas.

O dano térmico foi implementado no *framework* GeMA (*Geo Modeling Analysis*), que é um simulador com foco em elementos finitos de suporte a multifísicas proposto por Mendes (2016), sendo desenvolvido pelo Instituto Tecgraf/PUC-Rio. O GeMA possui diversos métodos de continuação para superar pontos limites, como o comprimento de arco, energia dissipada, combinação de métodos de continuação, além de controle de deslocamento. Ademais, o *framework* realiza análises estática não linear e transientes não linear.

A solução de um problema utilizando o GeMA consiste na sua discretização em elementos finitos, em informar as condições de contorno, o tipo de análise (*plane strain*, *plane stress*, 3D), a física e o resolvidor. A segunda parte consiste no processo de orquestração, cuja função é definir a sequência de passos que devem ser aplicados durante a realização da análise de modo a atingir os resultados desejados. (MENDES, 2016).

5.1. Isotropic Damage

5.1.1. Viga de Kurumatani

O primeiro exemplo numérico é um problema apresentado por Kurumatani *et al.* (2016), sendo utilizado para verificação da implementação, bem como o método de continuação utilizado na análise. Consiste numa flexão de três pontos dada uma viga com uma fenda. A figura 5.1 mostra a geometria e suas dimensões.

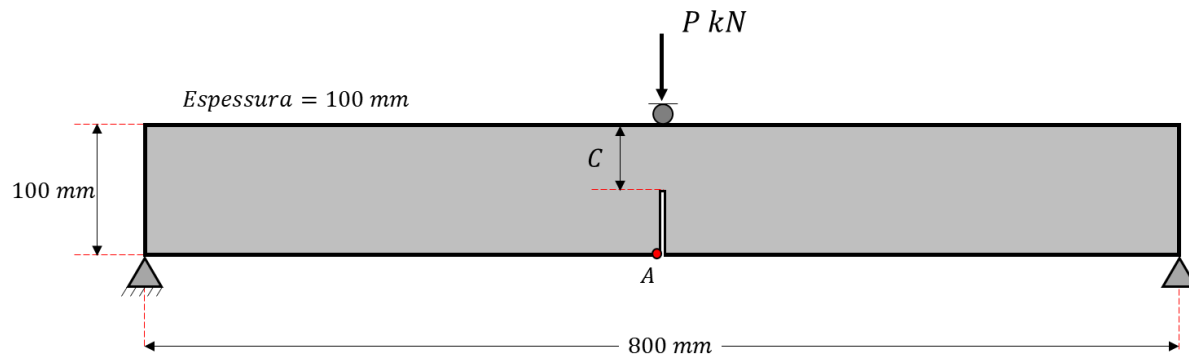


Figura 5.1: Geometria da viga

A análise é feita para três comprimentos distintos da fenda, a saber: $C=40$ mm, $C=50$ mm e $C=60$ mm. As propriedades do material podem ser encontradas na tabela abaixo.

Tabela 2: Propriedades - viga de Kurumatani *et al* (2016)

| Propriedade | Valor |
|-------------|---------------------|
| E | 3×10^7 kPa |
| ν | 0.0 |
| r_0 | 0.0001 |
| G_f | 0.1 N/mm |
| K | 10 |

Para a realização da análise estática não-linear em estado plano de tensão, o método de continuação utilizado foi a energia dissipada, cuja tolerância (erro) foi de 1×10^{-6} . O critério de dano utilizado foi o de von Mises modificado e lei de evolução de dano proposto por Kurumatani *et al*, apresentados no capítulo 2.

A discretização em elementos finitos da viga, consistiu no uso de elementos Q4 em 512 elementos, para a viga com $C=40$ mm; 542 elementos, para a viga $C=50$ mm; e 544 elementos, para $C=60$ mm.

O gráfico 1 mostra a resposta da análise das vigas em termos de curva carga – deslocamento, sendo plotado o fator de carga, onde o vetor de força de referência possui componentes unitárias na direção vertical e nula na horizontal, conforme o método de solução discutido em 4.1. O deslocamento plotado, por sua vez, é vertical e medido no ponto A, na figura 5.1. As curvas obtidas são comparadas com os resultados apresentados pelos autores, sendo a curva tracejada referente a viga com $C=40$ mm, a curva tracejada em verde relativo à viga com $C=50$ mm e, por fim, a viga com $C=60$ mm é representada pela curva tracejada em vermelho.

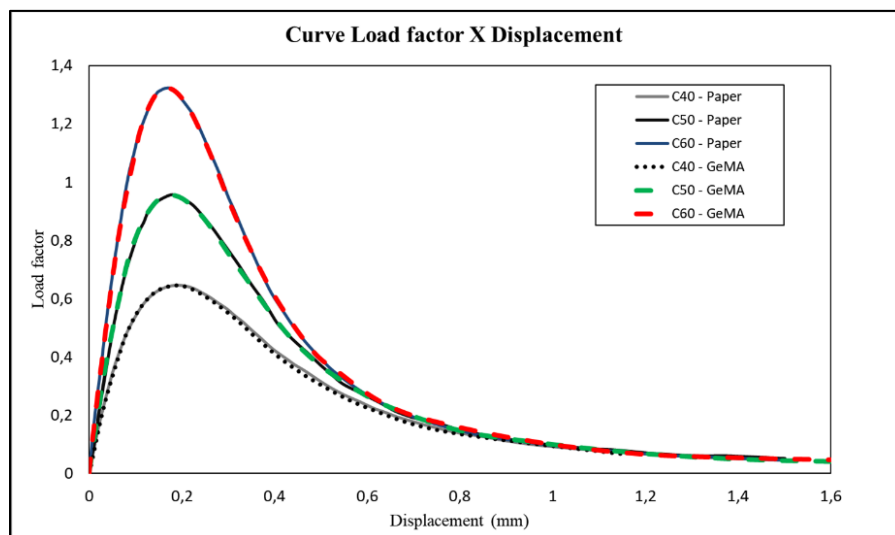


Gráfico 1: Curva Load Factor X Displacement

O pico da curva refere-se a carga máxima que o modelo pode suportar. O ramo após o pico, é o amolecimento e indica a fratura, traduzida como a perda da rigidez.

A figura 5.2 apresenta a viga ao final da análise. Os elementos na cor azul, indicam o material não danificado, enquanto os elementos na cor vermelha indicam o material completamente danificado. Cabe salientar que os elementos danificados representam a fratura.

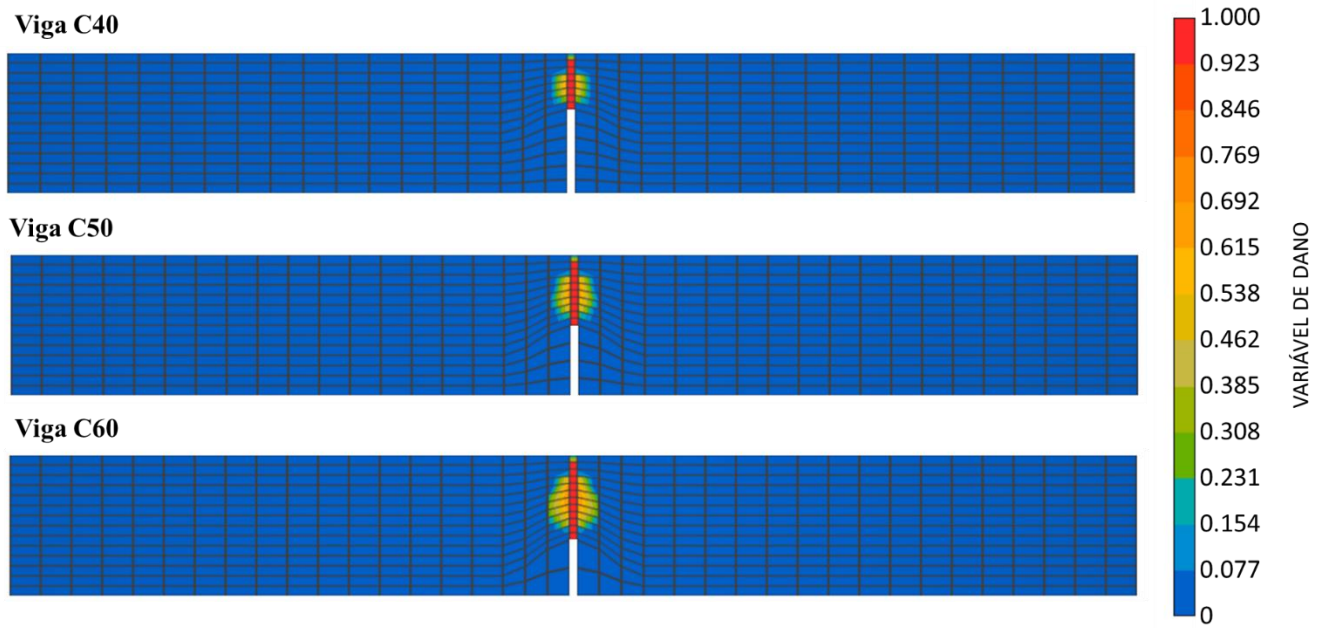


Figura 5.2: Viga danificada

5.1.2. Placa em L – Pohl *et al.* (2014)

O segundo exemplo é uma placa em forma de ‘L’ apresentada por Pohl *et al.* (2014), no qual é avaliado o comportamento não linear da placa. Desta feita, o digrama carga – deslocamento é utilizado.

A discretização da placa é realizada de tal modo que duas malhas em elementos finitos são obtidas, ambas com elemento quadrilateral Q4. A figura 5.3 abaixo, mostra a geometria, dimensões e condições de contorno do problema.

A primeira malha possui elementos de $0,5\text{ m} \times 0,5\text{ m}$ de dimensão. A segunda é uma malha fina, cujos elementos possuem dimensões de $0,05\text{ m} \times 0,05$. Ambas as malhas modeladas com somente uma faixa de elementos com dano.

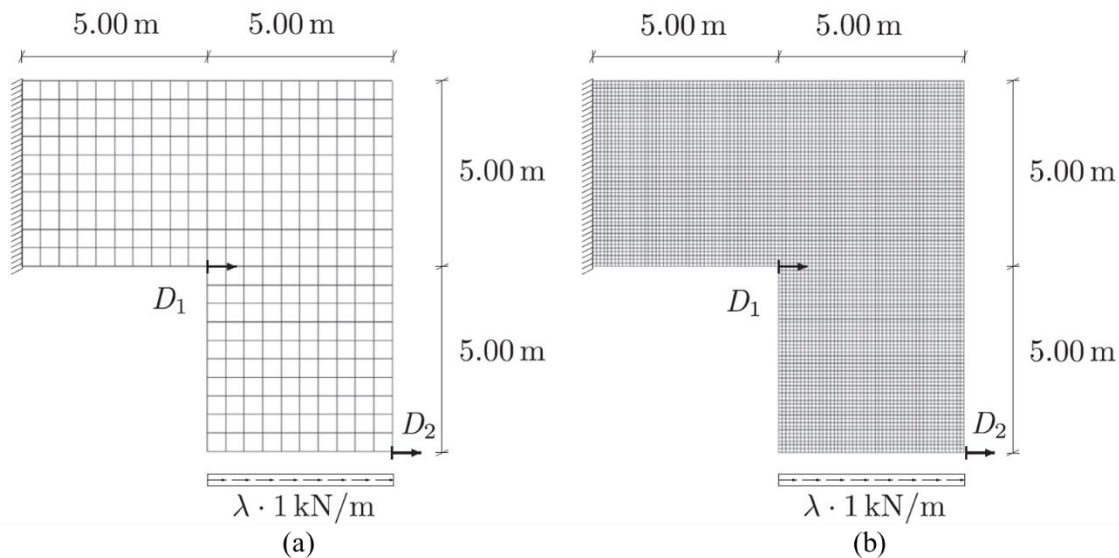


Figura 5.3: Placa em forma de L (Pohl *et al.* (2014))

As propriedades dos materiais são encontradas na tabela 3. O critério de danificação utilizado na análise foi o de von Mises modificado, com parâmetro $\kappa = 10$. A lei de evolução de dano utilizada foi a linear. O valor de R_{max} necessário para a lei é diferente para cada malha, como observado na tabela 3.

Tabela 3: Propriedade dos materiais - Placa em L

| Propriedade | Valor |
|----------------|--------|
| E | 10 kPa |
| ν | 0.0 |
| h | 1 m |
| r_0 | 0.01 |
| Rmax (Refined) | 0.1 |
| Rmax (Coarse) | 0.02 |

A solução do problema foi obtida utilizando método de continuação energia dissipada. O valor da mínima energia dissipada foi de 1×10^{-8} e o incremento de energia de 1×10^{-7} .

O gráfico 2, refere-se a curva carga aplicada à placa versus deslocamento horizontal do ponto D_2 , identificado na figura 5.3. O gráfico 2a apresenta a resposta para a malha grossa apresentando “dentes” no tramo de amolecimento. Cada dente representa a completa danificação de um elemento finito ao longo da trajetória da

fratura. O gráfico 2b, por sua vez, apresenta a resposta da análise com a malha fina, comparando o modelo de dano isotrópico e a resposta apresentada por Pohl *et al.*

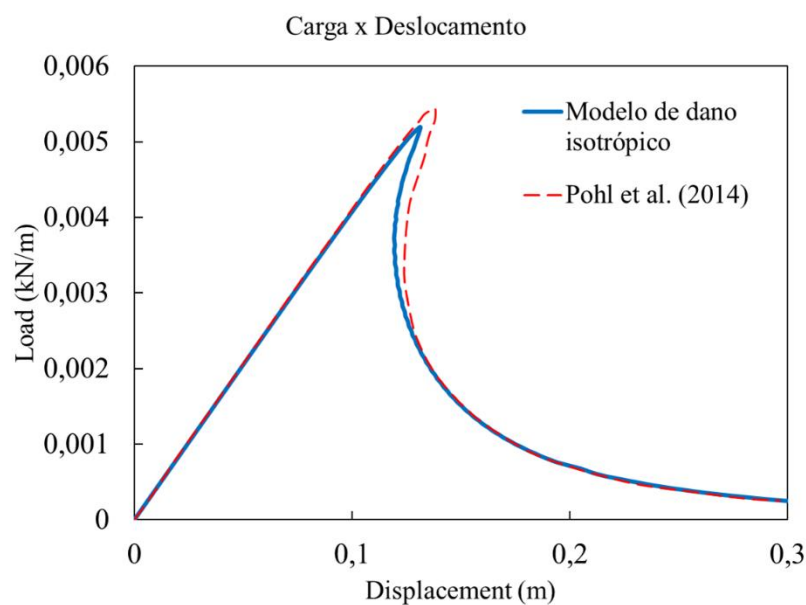
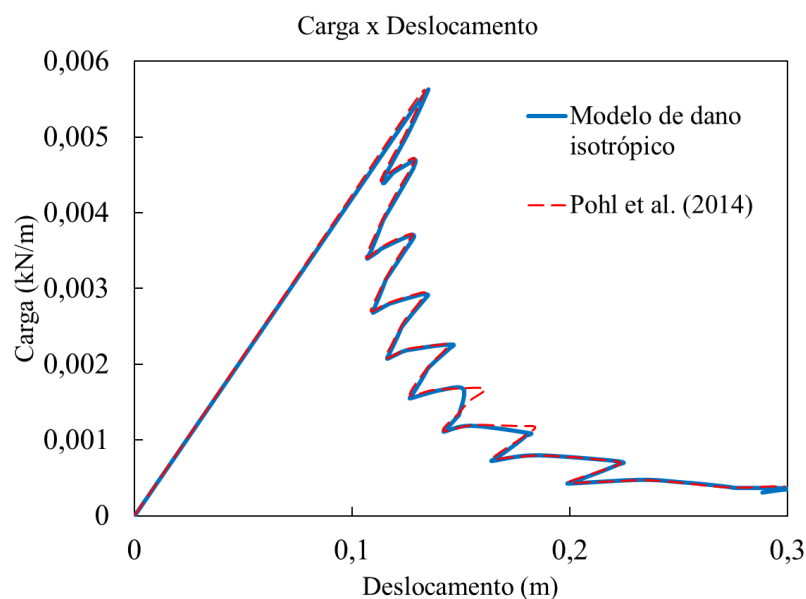


Gráfico 2: Resposta Carga X Deslocamento – Placa da Pohl

A figura 5.4 apresenta a placa em L ao término da análise, em sua configuração deformada.

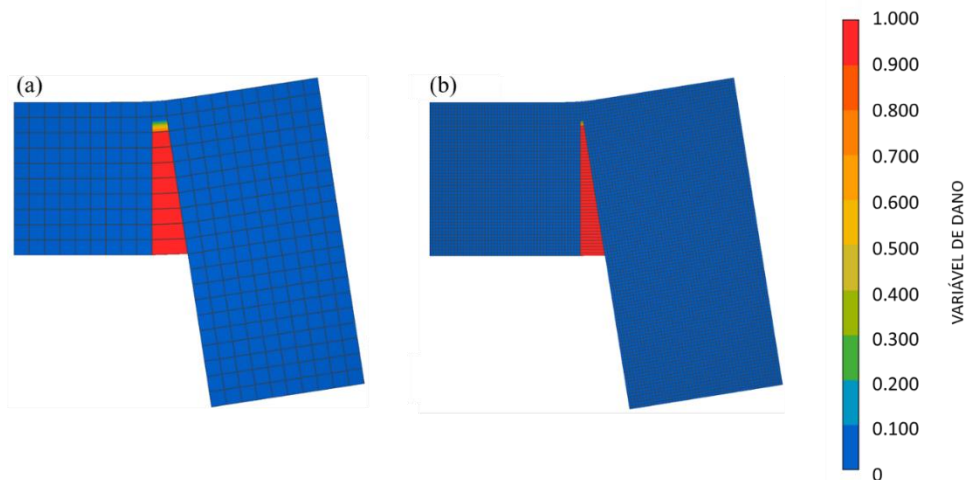


Figura 5.4: Configuração final da placa em L danificada

O gráfico 3 apresenta a relação constitutiva em um ponto de Gauss de um elemento danificado. Nota-se a curva em vermelho é referente a malha grossa e a azul, refere-se a malha fina. O trecho após o pico decresce de forma linear, conforme a lei de evolução de dano. Além disso, o ponto final da curva corresponde ao parâmetro r_{max} , apresentado na tabela 3.

Neste contexto, outra informação relevante, é a energia de fratura. Para a malha grossa, a área abaixo da curva, após o pico, é menor que a área referente a malha fina. É interessante notar que as curvas são diferentes entre si, apesar da energia de fratura ser uma propriedade do material e não da malha. Para a lei de evolução linear adotada por Pohl *et al.* (2014), o valor de r_{max} é calculado através da equação 2.14. Vale ressaltar que o referido valor, indica a deformação crítica, para qual o material oferece resistência nula, e depende do tamanho do elemento finito.

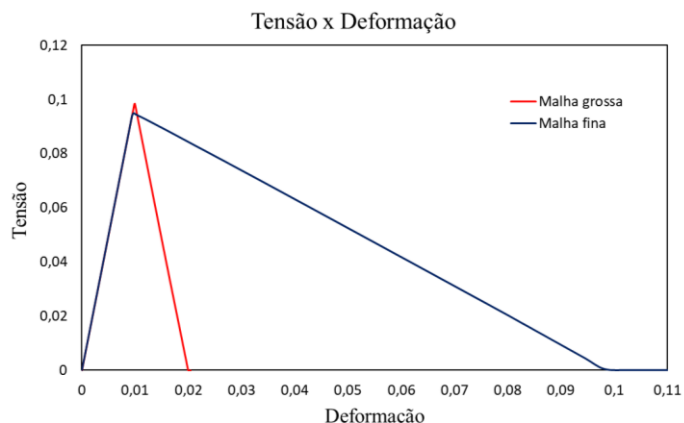


Gráfico 3: Curva tensão deformação para um ponto de Gauss considerando diferentes discretizações

5.1.3. Placa em L – Winkler *et al.* (2001)

O terceiro exemplo de dano isotrópico diz respeito aos resultados experimentais obtidos por Winkler *et al.* (2001) para uma placa em formato de L de concreto simples. A figura 5.5 mostra a geometria e condições de contorno do problema.

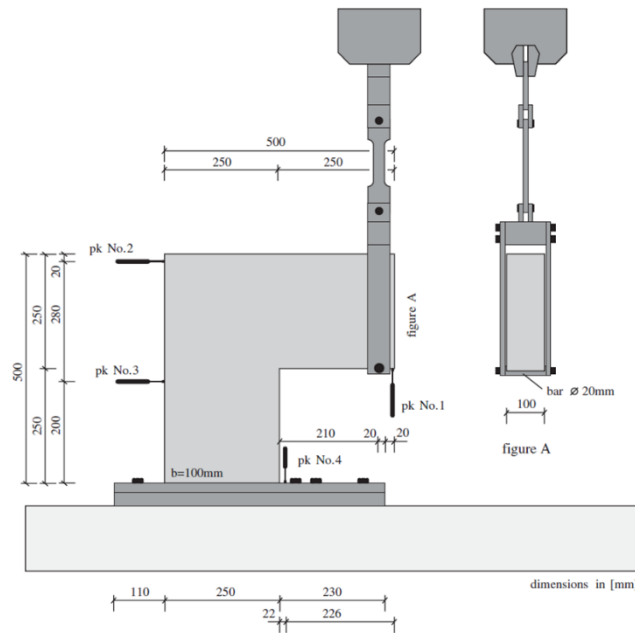


Figura 5.5: Placa em formato de L (Winkler *et al.* (2001))

As propriedades do material são encontradas na tabela 4. Na análise desse problema, foram comparados os resultados obtidos com o critério de Mazars, desenvolvido para concreto, e o de von Mises modificado, próprio para materiais quase frágeis. As leis de evolução de dano utilizadas foram a linear e de Kurumatani (exponencial), aplicadas a ambos critérios.

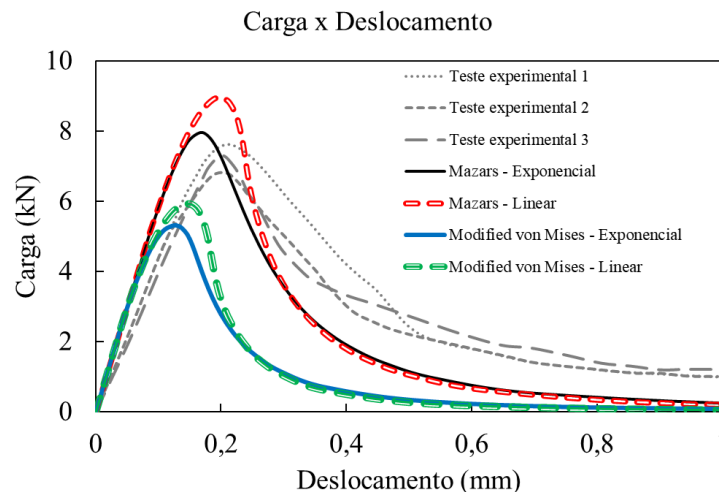
Tabela 4: Propriedades placa de Winkler *et al.*

| Propriedade | Valor |
|-------------|--------------|
| E | 25.85 GPa |
| ν | 0.18 |
| r_0 | 0.0001044487 |
| Gf | 90.5 N/mm |
| Rmax | 0.02 |

O método de continuação utilizado foi o de arco cilíndrico.

O gráfico 4a apresenta as respostas carga – deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga, obtidas pelas análises numéricas e os resultados experimentais apresentados por Winkler *et al.* (2001). É possível notar que o critério de Mazars com a lei de Kurumatani foi o que melhor pode predizer a carga de pico do ensaio. Além disso, é importante destacar que os dados apresentados por Winkler *et al.* (2001), conduzem a inclinações diferentes no trecho elástico, diferentes daquelas observadas no experimento.

Os resultados experimentais da placa apresentada por Winkler *et al.* (2001), é conhecido na literatura e o uso seus dados experimentais, no caso módulo de elasticidade, conduzem a uma resposta em que o trecho elástico da curva carga x deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga, diferem dos resultados experimentais, como pode ser observado no gráfico 4a. Kitzig and Häussler-Combe (2011), sugerem que durante o ensaio houve uma rotação da base da placa e propuseram uma correção, adotada também nesse trabalho. A correção consiste em ajustar os deslocamento vertical e horizontal através de um incremento Δu_V e Δu_H , cujos valores em *mm* são: $\Delta u_V = \frac{F}{F_{max}} \times (8 \times 10^{-5}) \times 375$ e $\Delta u_H = \frac{F}{F_{max}} \times (8 \times 10^{-5}) \times 350$. O gráfico 4b, apresenta as respostas corrigidas.



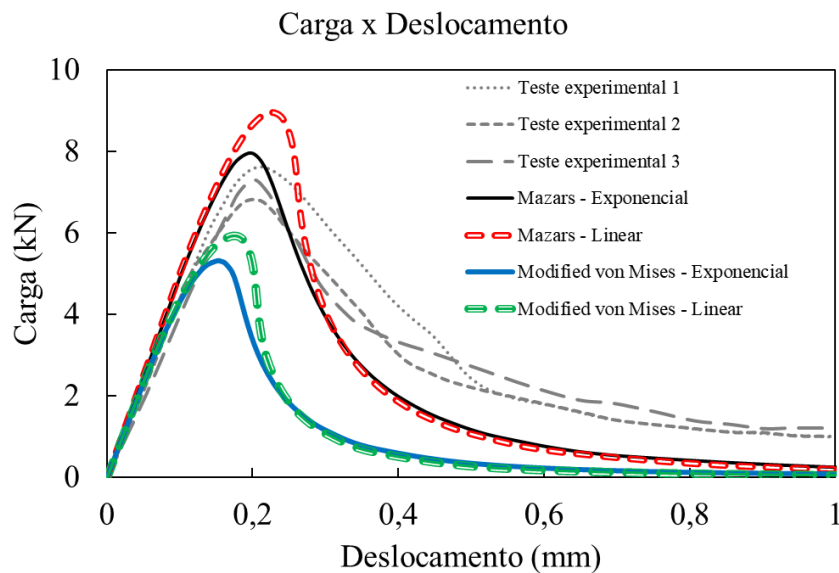


Gráfico 4: Resposta Carga x Deslocamento vertical – Placa de Winkler *et al* (2001)

A figura 5.6 mostra a placa danificada. Consta-se que o caminho da fratura foi horizontal, o que pode ser explicado pelo viés da discretização. Como consequência, o ramo de amolecimento da resposta pode apresentar rigidez menor que a resposta sem o enviesamento.

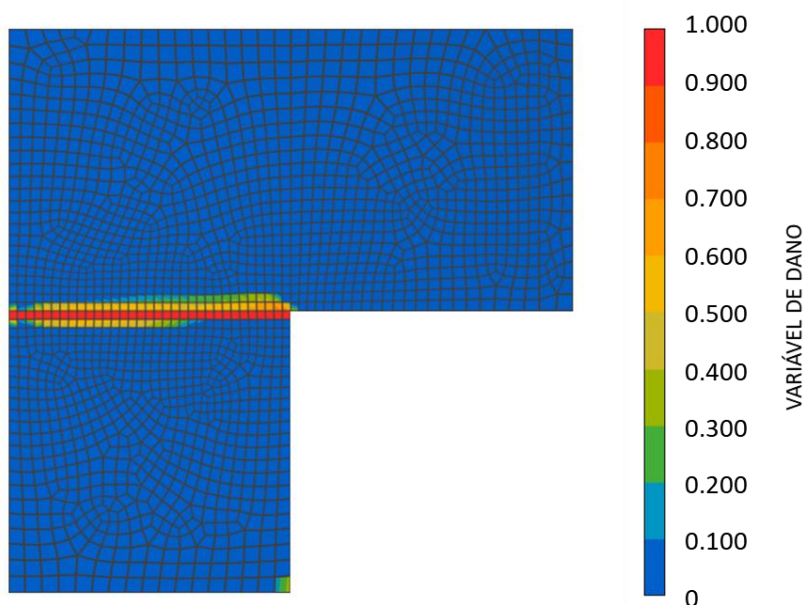


Figura 5.6: Placa de Winkler danificada

5.1.4. Efeito escala na placa em L

O estudo da placa em L, apresentado em Pohl *et al.* (2014) é amplamente utilizado tendo em vista seu aspecto desafiador, no que tange aos métodos de continuação. Do mesmo modo, os resultados experimentais obtidos por Winkler *et al.* (2001), são conhecidos na literatura e utilizados como *benchmark*.

Um ponto a ser observado é o comportamento global da curva experimental da placa em L, em Winkler *et al.* (2001) e a curva correspondente em Pohl *et al.* (2014), são distintos. A resposta experimental apresenta um amolecimento suave, enquanto o exemplo da seção 5.1.2 possui amolecimento brusco. Uma explicação para isso é a ordem de grandeza dos modelos. O modelo de Pohl *et al.* possui dimensão na ordem de metros. Por outro lado, o problema de Winkler *et al.* é da ordem de milímetros.

A fim de avaliar o efeito do tamanho da estrutura na resposta, os modelos de Winkler *et al.* e Pohl *et al.* foram analisados aplicando um fator de escala em suas dimensões. Para o problema de Winkler *et al.*, o fator de escala ampliou o modelo em 10 vezes; o fator de escala do modelo de Pohl *et al.*, reduziu o modelo em 10 vezes.

O gráfico 5 apresenta a resposta global do modelo, após a ampliação das dimensões do mesmo. O critério e a lei de ano utilizadas foram Mazars e Kurumatani, respectivamente. Nota-se que o modelo ampliado apresenta amolecimento brusco.

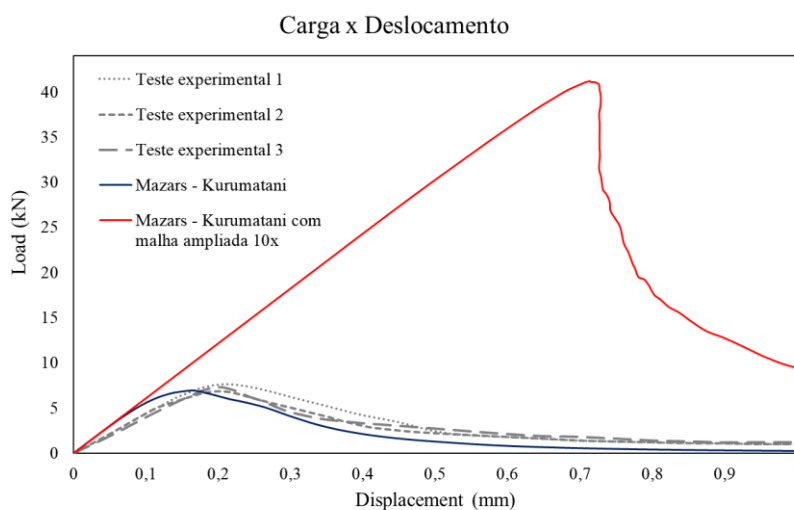


Gráfico 5: Modelo de Winkler ampliado

O gráfico 6, expõe a curva quando o modelo de Pohl *et al.* é reduzido. Verifica-se que o amolecimento passa a ser suave.

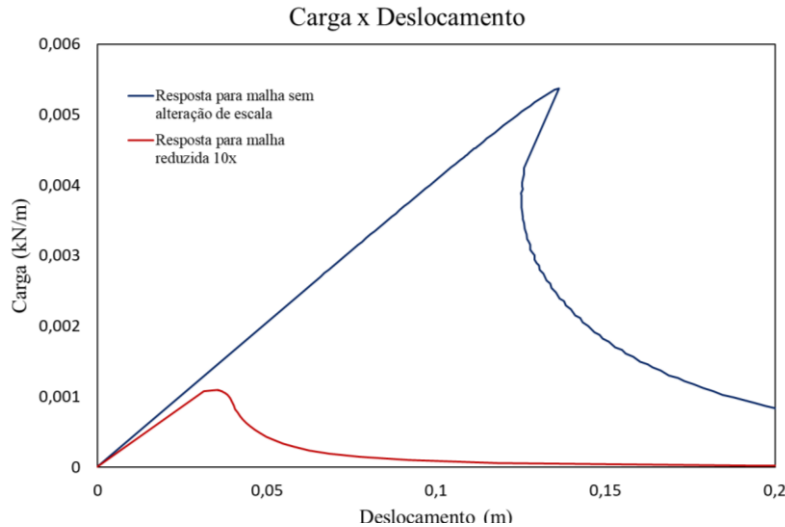


Gráfico 6: Modelo de Pohl reduzido

5.2. Termomecânica

Os exemplos dessa seção possuem solução analítica conhecida e refletem diferentes efeitos no comportamento termomecânico.

5.2.1. Viga de Kolditz

O primeiro exemplo numérico é encontrado no livro de Kolditz *et al.* (2015), e consiste na deformação de uma viga elástica devido a mudança instantânea da temperatura.

O comprimento da viga é $L = 1\text{ m}$ na direção x . Sua discretização é com elementos hexaédricos em $20 \times 2 \times 2$ elementos. A face em $x = 0$ é livre e as demais faces são presas na direção perpendicular. Em termos de tensão e deformação, as condições de contorno são $\sigma_{11} = 0$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$. As condições de contorno de temperatura são $T_0 = 0^\circ\text{C}$ em toda a viga e $T_1 = 1^\circ\text{C}$, em $x = L$ e permanece com $T = 0^\circ\text{C}$, em $x = 0$.

As propriedades do material são apresentadas na tabela 5.

Tabela 5: Propriedades da viga de Kolditz *et al* (2015)

| Propriedade | Valor |
|-------------|-------------------------|
| E | 25000 MPa |
| ν | 0.25 |
| α | 0,00003 K ⁻¹ |

A figura 5.7 apresenta o elemento estrutural em análise.

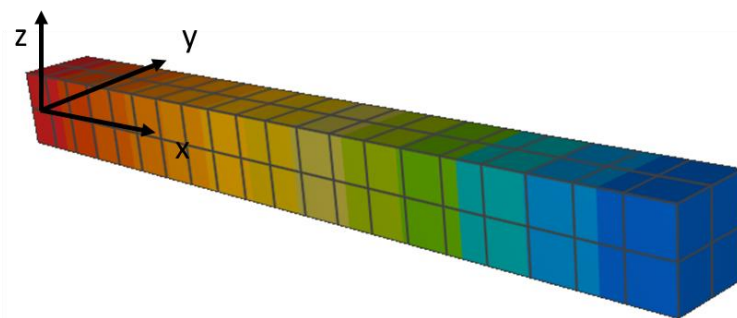


Figura 5.7: Viga de Kolditz

As equações 5.1a e 5.1b apresentam o cálculo analítico das tensões σ_{22} e σ_{33} .

$$\sigma_{22} = -\alpha \left(\frac{E}{1-\nu} \right) (T(x) - T_0) \quad (5.1a)$$

$$\sigma_{33} = -\alpha \left(\frac{E}{1-\nu} \right) (T(x) - T_0) \quad (5.1b)$$

A tabela 6 compara os resultados das tensões para o cálculo analítico com os resultados da simulação.

Tabela 6: Tensões na viga de Kolditz

| x | T(x) | Analítico [MPa] | | GeMA [MPa] | |
|------|------|-----------------|---------------|---------------|---------------|
| | | σ_{22} | σ_{33} | σ_{22} | σ_{33} |
| 0,05 | 0,05 | -0,05 | -0,05 | -0,05 | -0,05 |
| 0,1 | 0,1 | -0,10 | -0,10 | -0,10 | -0,10 |
| 0,15 | 0,15 | -0,15 | -0,15 | -0,15 | -0,15 |
| 0,2 | 0,2 | -0,20 | -0,20 | -0,20 | -0,20 |
| 0,25 | 0,25 | -0,25 | -0,25 | -0,25 | -0,25 |
| 0,3 | 0,3 | -0,30 | -0,30 | -0,30 | -0,30 |
| 0,35 | 0,35 | -0,35 | -0,35 | -0,35 | -0,35 |
| 0,4 | 0,4 | -0,40 | -0,40 | -0,40 | -0,40 |
| 0,45 | 0,45 | -0,45 | -0,45 | -0,45 | -0,45 |
| 0,5 | 0,5 | -0,50 | -0,50 | -0,50 | -0,50 |
| 0,55 | 0,55 | -0,55 | -0,55 | -0,55 | -0,55 |
| 0,6 | 0,6 | -0,60 | -0,60 | -0,60 | -0,60 |
| 0,65 | 0,65 | -0,65 | -0,65 | -0,65 | -0,65 |
| 0,7 | 0,7 | -0,70 | -0,70 | -0,70 | -0,70 |
| 0,75 | 0,75 | -0,75 | -0,75 | -0,75 | -0,75 |
| 0,8 | 0,8 | -0,80 | -0,80 | -0,80 | -0,80 |
| 0,85 | 0,85 | -0,85 | -0,85 | -0,85 | -0,85 |
| 0,9 | 0,9 | -0,90 | -0,90 | -0,90 | -0,90 |
| 0,95 | 0,95 | -0,95 | -0,95 | -0,95 | -0,95 |
| 1 | 1 | -1 | -1 | -1,01 | -1,01 |

As tensões observadas decorrem das restrições à expansão impostas ao modelo.

5.2.2. Cubo de Kolditz

O segundo exemplo refere-se a um cubo elástico que se deforma devido à mudança instantânea de temperatura, apresentado no livro de Kolditz *et al.* (2015).

O cubo possui dimensão unitária em todas as suas arestas e é discretizado 64 elementos hexaédricos. As condições de contorno do problema consideram deslocamentos livres em todos os nós ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ e $\varepsilon_{11} \neq 0, \varepsilon_{22} \neq 0, \varepsilon_{33} \neq 0$) e temperatura inicial de 0°C no volume e prescrita no topo com valor de -40°C.

As propriedades são dadas na tabela 7.

Tabela 7: Propriedades do cubo de Kolditz *et al* (2015)

| Propriedade | Valor |
|-------------|-----------------------------------|
| E | 25000 Mpa |
| ν | 0.25 |
| α | $5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ |

A figura 5.8 ilustra a distribuição de temperatura no cubo no início da análise

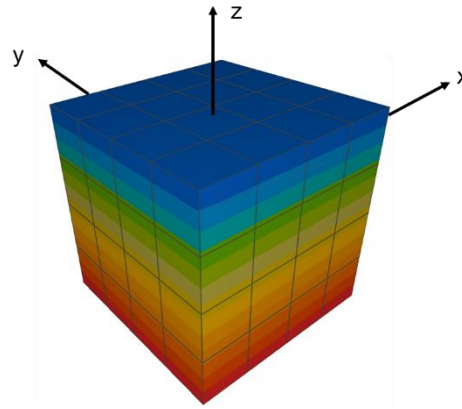


Figura 5.8: Cubo de Kolditz *et al.* (2015) – distribuição de temperatura no início da análise

Devido às condições de contorno do problema, o cubo de Kolditz apresenta somente deformações normais nas direções x , y e z , cuja expressão analítica é dada pela equação 5.2.

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \alpha(T_1 - T_0) \quad (5.2)$$

O cálculo analítico conduz à deformação de $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -2 \times 10^{-3}$. Note que as deformações são deformações térmicas livres e não dependem do campo de deslocamentos.

5.2.3. Placa de Logan

O terceiro exemplo numérico é encontrado no livro de Logan (2015) e corresponde a uma placa retangular $500 \text{ mm} \times 500 \text{ mm}$, com espessura de 5 mm ,

analisada considerando o estado plano de tensão. A placa é fixa em um dos lados e aquecida a uma temperatura uniforme de 50°C neste lado.

As propriedades do material são fornecidas na tabela 8.

Tabela 8: Propriedades da placa de Logan

| Propriedade | Valor |
|-------------|-------------------------------------|
| E | 210 GPa |
| v | 0.30 |
| α | 12x10 ⁻⁶ K ⁻¹ |

A figura abaixo mostra a geometria e as condições de contorno de deslocamento e temperatura. A discretização do modelo foi em 4 elementos finitos triangulares.

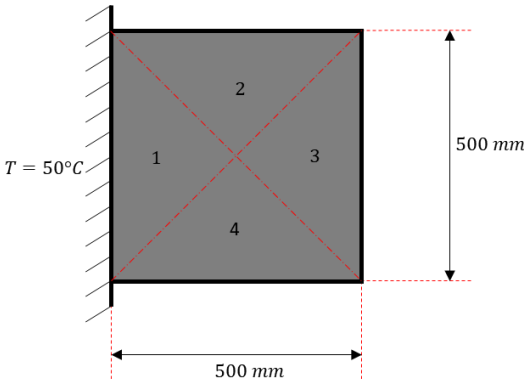


Figura 5.9: Placa de Logan

A tabela 9 e o gráfico 7 apresentam as tensões nos elementos 3 e 4 da placa em regime permanente, bem como a solução numérica apresentada por Logan para uniformemente aquecida. Os valores de ambas as soluções numéricas são praticamente idênticas.

Tabela 9: Tensões na placa de Logan

| Elemento | Tensão (kPa) | |
|----------|--------------|-------------------|
| | GeMA | Solução analítica |
| 3 | S_0 | -1,5998E+04 |
| | S_1 | 2,973E+04 |
| | S_3 | 0,000E+00 |
| 4 | S_0 | 0,000E+00 |
| | S_1 | -4,573E+04 |
| | S_3 | -1,600E+04 |

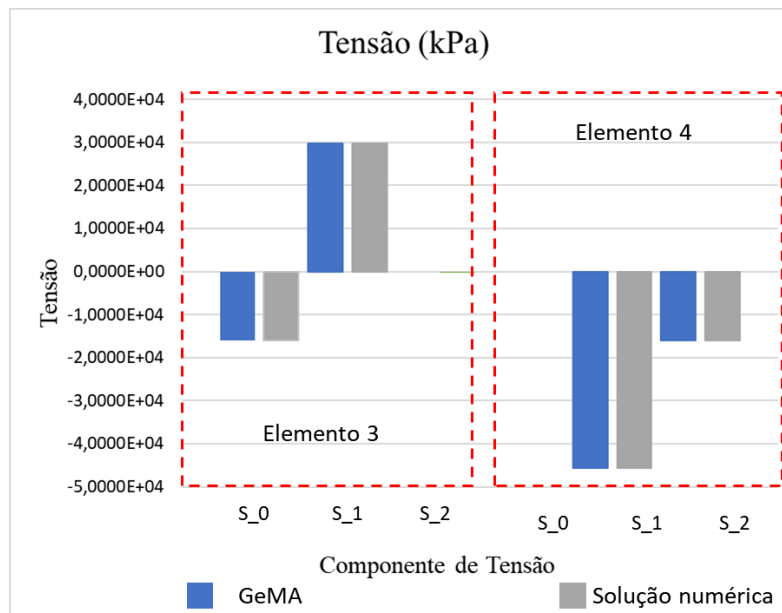


Gráfico 7: Tensões na placa de Logan

5.3. Dano termomecânico

5.3.1. Arco engastado

O próximo exemplo é um arco, baseado no trabalho de Badnava *et al.* (2018). A análise consiste em verificar o comportamento do arco, quando há uma diferença de temperatura de 70°C entre as faces superior e inferior do arco. A face superior está à temperatura ambiente de 20°C, enquanto a temperatura da face inferior é reduzida de 20°C para -50°C em 50 segundos. O arco possui raio interno de 0.16 m e raio externo de 0.18 m e espessura de 0.01 m.

As análises realizadas foram termomecânica e termomecânica com dano de modo a comparar as respostas obtidas. Dois conjuntos de condições de contorno foram adotados, no qual o primeiro, denominado de A, refere-se a todos os nós das extremidades fixos nas duas direções. O segundo é denominado de B, e considera os nós fixos na horizontal, exceto o nó do ponto médio, fixo nas duas direções, conforme mostra a figura 5.10.

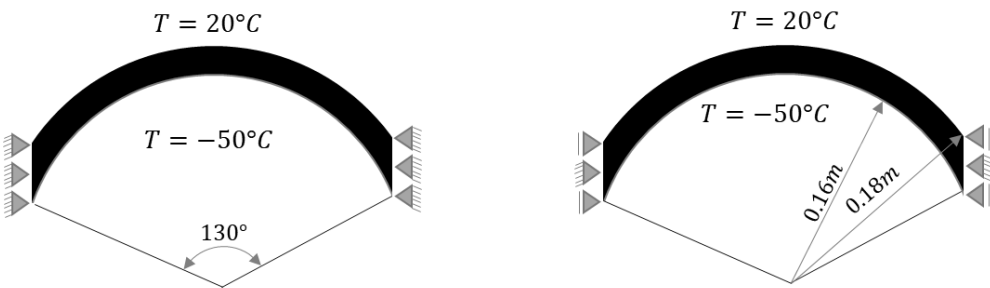


Figura 5.10: Condições de contorno do arco

As propriedades do material são apresentadas na tabela 10.

Tabela 10: Propriedades do material - arco

| Propriedade | Valor |
|----------------|--------------------------|
| E | 201.6 GPa |
| v | 0.3 |
| Gf | 2000 N/m |
| ρ | 2800 kg/m³ |
| α | 2.8×10^{-5} 1/K |
| k | 900 W/(kg.K) |
| r ₀ | 12.4×10^{-4} |
| ft | 250 Mpa |
| cp | 3384.26 |

A figura 5.11 apresenta o arco em análise. O caminho *AB* na região central é utilizado para avaliar a distribuição de temperatura entre as faces inferior e superior do arco, pontos A e B, respectivamente.

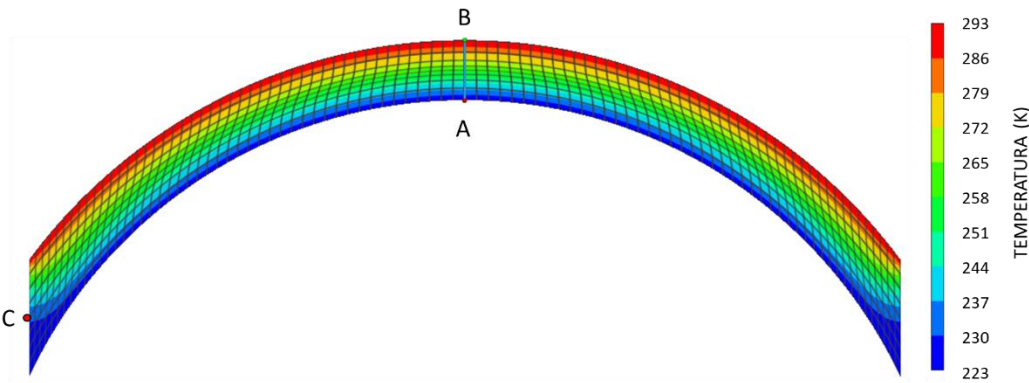


Figura 5.11: Distribuição de temperatura (K) para o arco ao final da análise

O gráfico 8 mostra a distribuição de temperatura ao longo do caminho AB da análise. Cada curva, representa essa distribuição no instante de tempo *t*. Dessa forma,

a primeira curva, em azul, refere-se ao tempo $t = 0s$, enquanto a última curva, em vermelho, refere-se ao tempo $t = 50s$. No eixo da distância, 0,00 corresponde ao ponto B e 0,02 ao ponto A do caminho.

Distribuição de temperatura ao longo do caminho AB

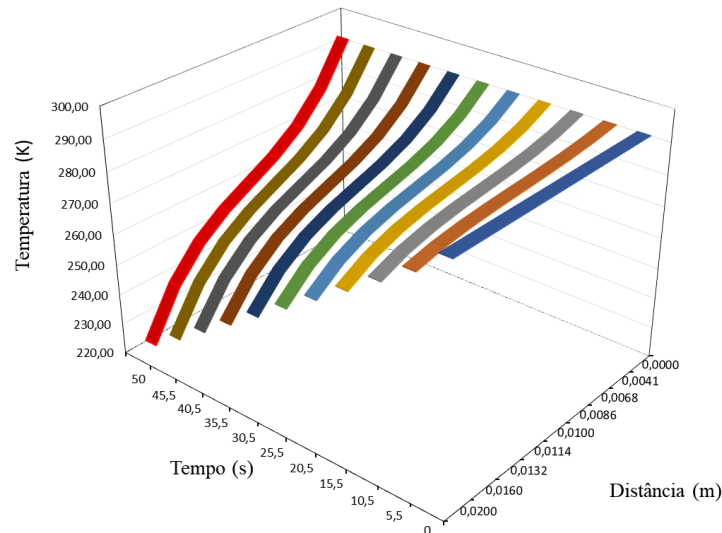
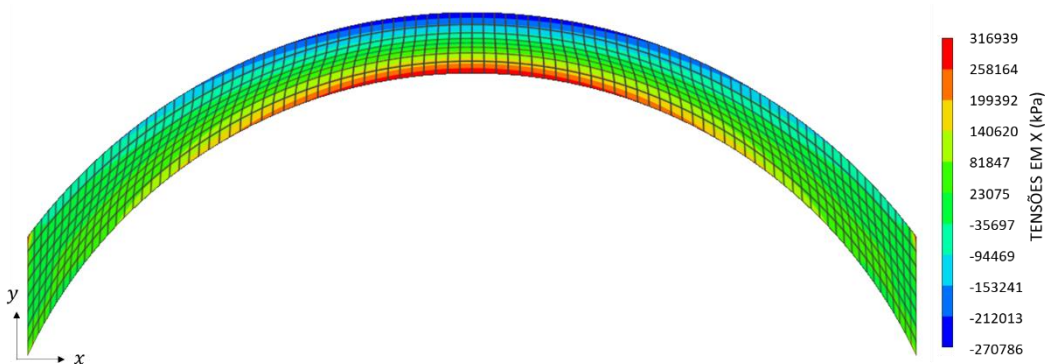


Gráfico 8: Distribuição de temperatura ao longo do caminho AB

A distribuição de tensão para o arco analisado com modelo termomecânico com dano e sem dano é expresso na figura 5.12, onde é observado que a face superior sofre esforço de compressão e a face inferior, de tração, para ambas as análises. Salienta-se que a distribuição de temperatura diz respeito a um resfriamento, produzindo deformações negativas na face inferior, o que corresponde a uma contração.



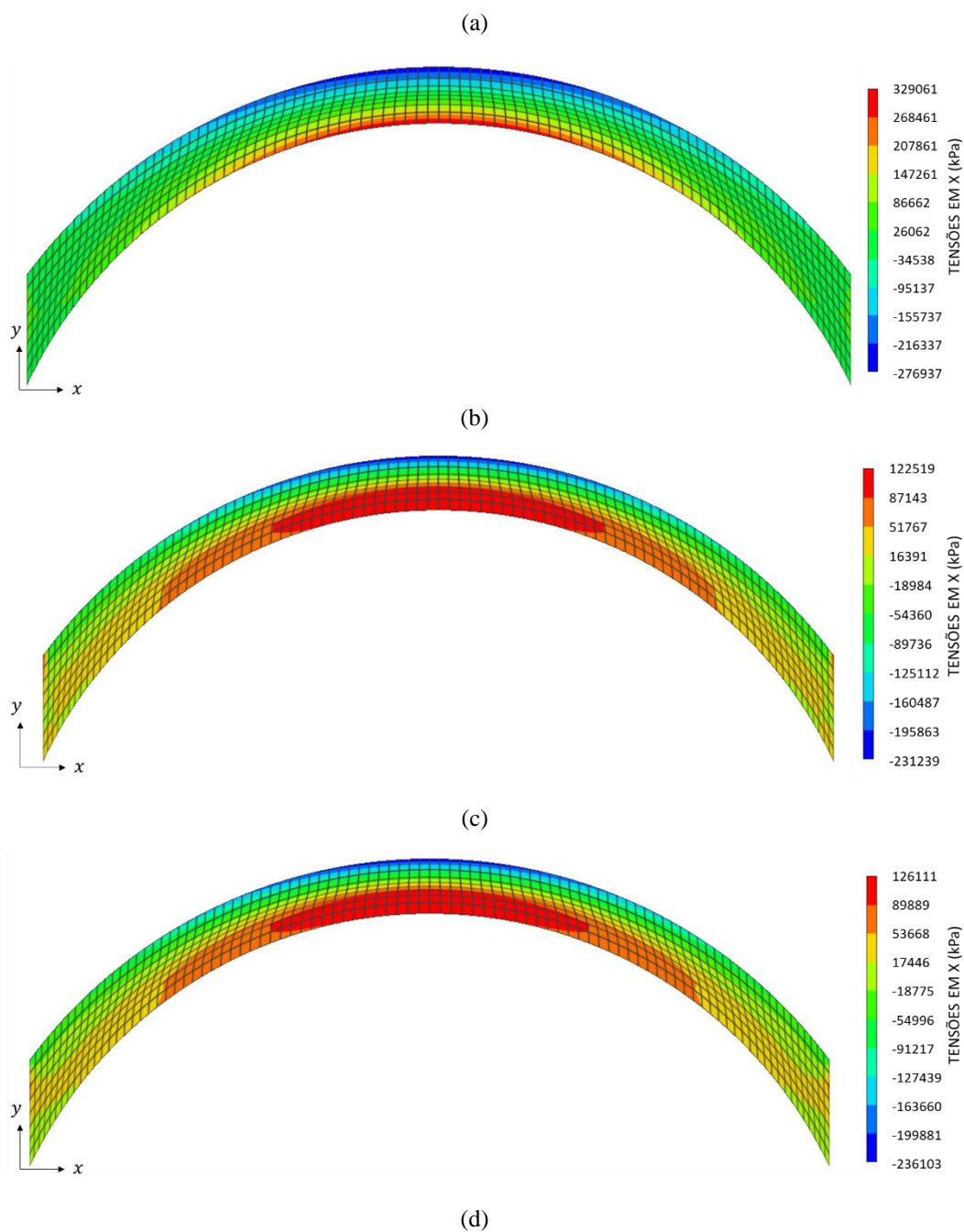


Figura 5.12: Distribuição de tensões para análise realizada (a) sem dano e condições de contorno A, (b) sem dano e condições de contorno B, (c) com dano e condições de contorno A e (d) com dano condições de contorno B.

A distribuição de tensões apresentada na figura 5.12 decorre do fenômeno de flexão, induzido pelo gradiente de temperatura, similar ao discutido no item 3.3.

A configuração deformada é mostrada na figura 5.13 para o arco com dano e condições de contorno B.

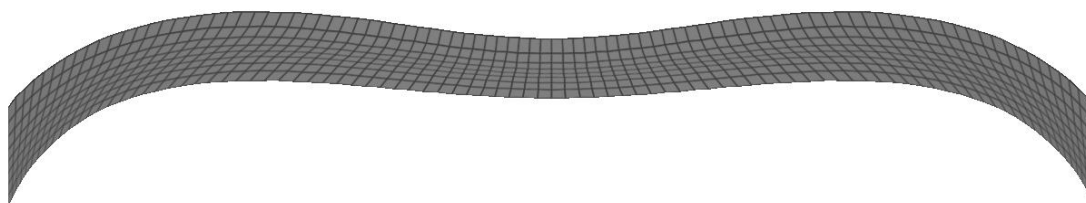


Figura 5.13: Configuração deformada do arco ao final da análise

A figura 5.14 exibe o dano devido aos efeitos térmicos. Em consonância com a distribuição de tensão, em que a tração está localizada na região inferior do arco, o aparecimento da fratura ocorre na região resfriada. O máximo valor identificado para a variável de dano foi 0.87.

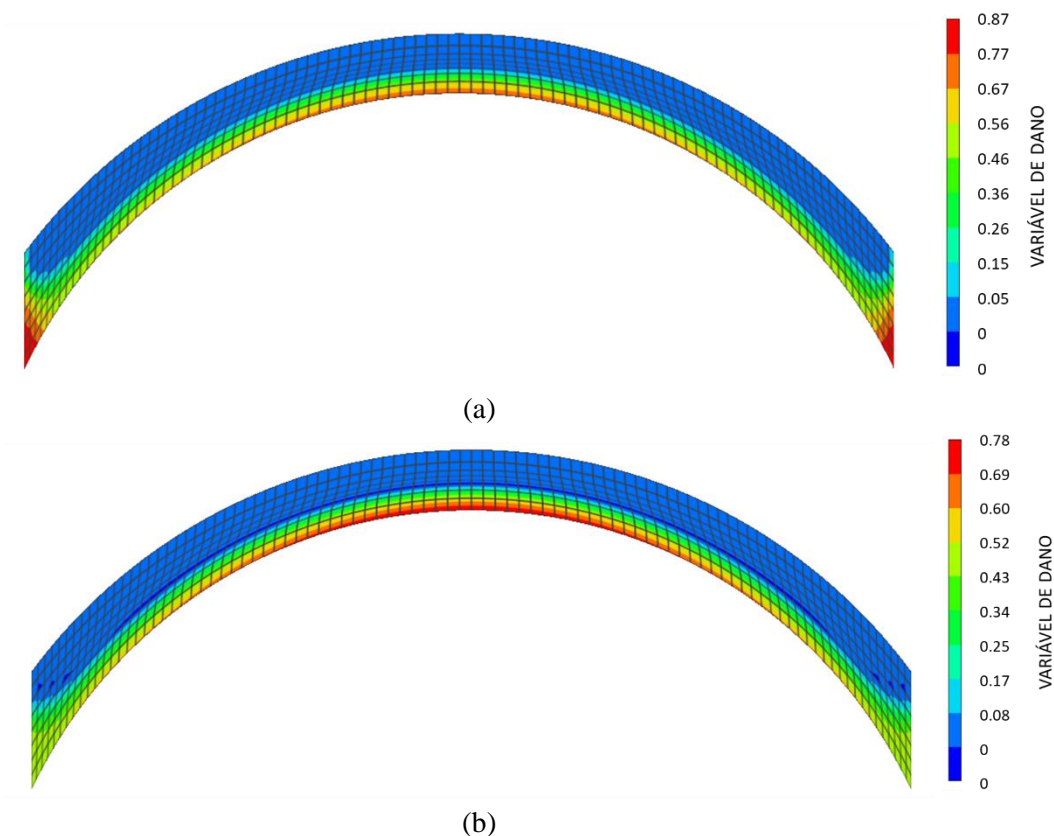


Figura 5.14: Dano na face inferior do arco ao final da análise para (a) condições de contorno A e (b) condições de contorno B

O gráfico 9 expõe os deslocamentos vertical medidos no ponto B (figura 5.11), para os modelos com e sem dano. Já o gráfico 10, apresenta a variação da reação de apoio no ponto C (figura 5.11) versus ao deslocamento.

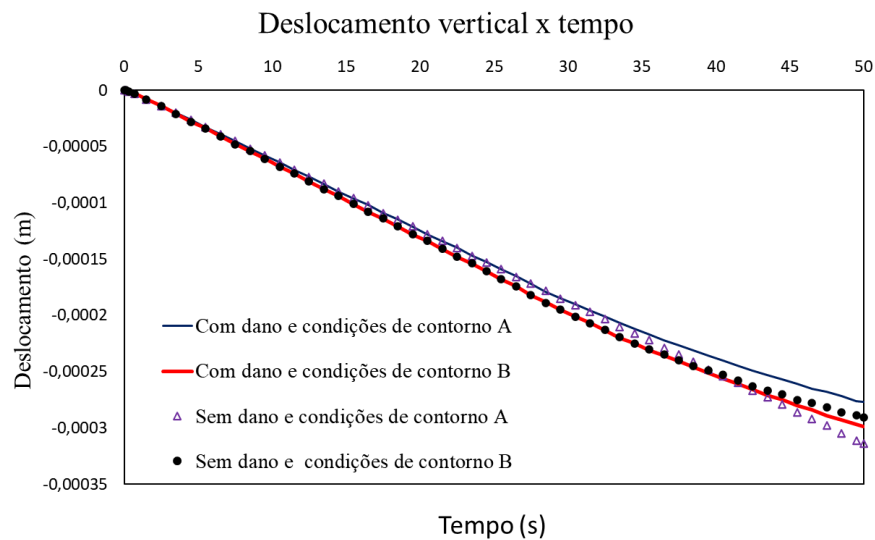


Gráfico 9: Deslocamento vertical no nó central da face superior do arco

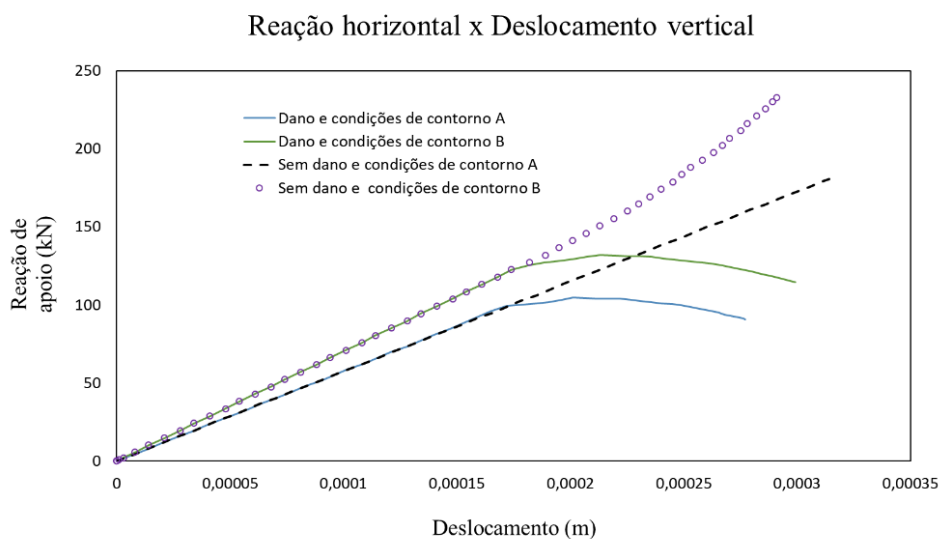


Gráfico 10: Reação de apoio horizontal x deslocamento vertical do ponto médio da face superior do arco

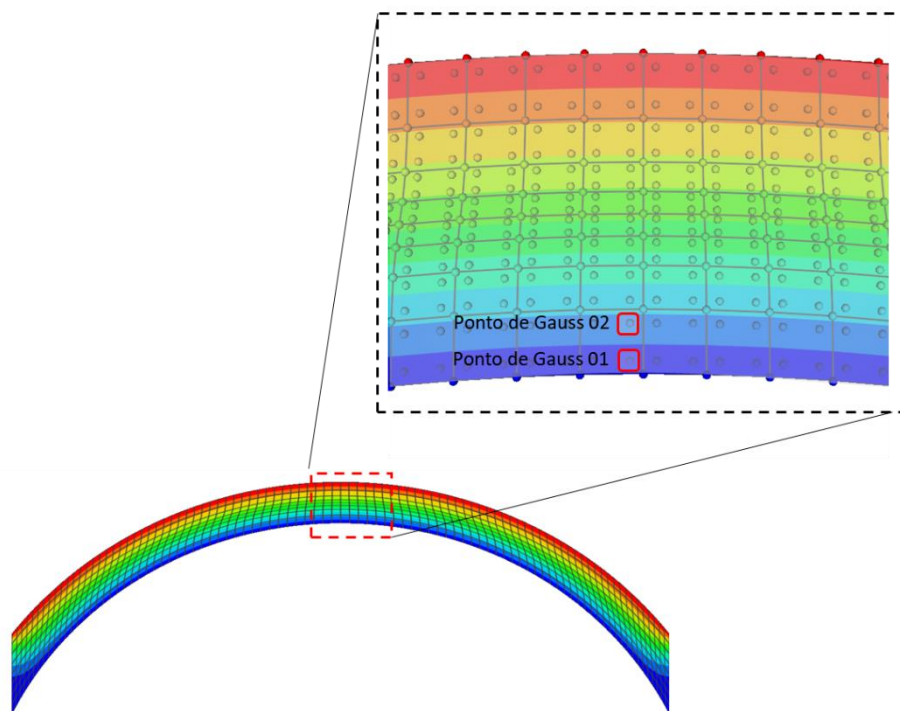
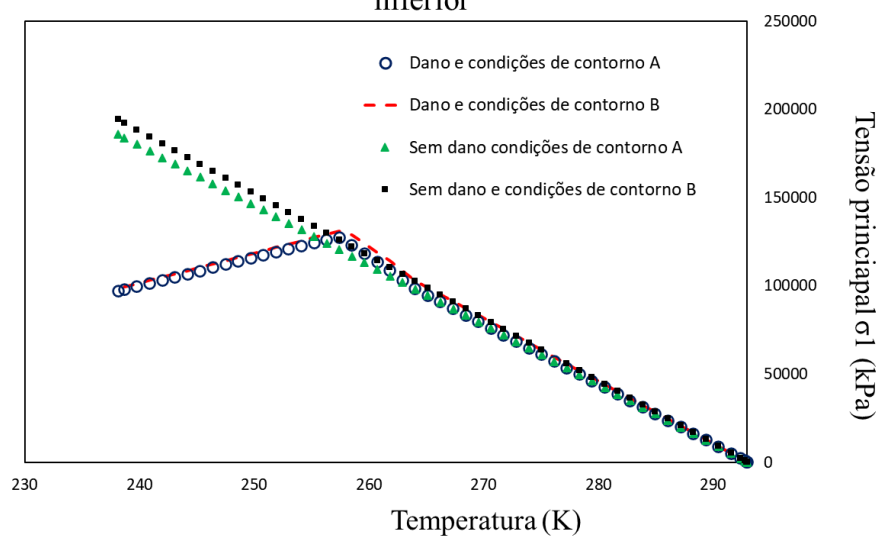


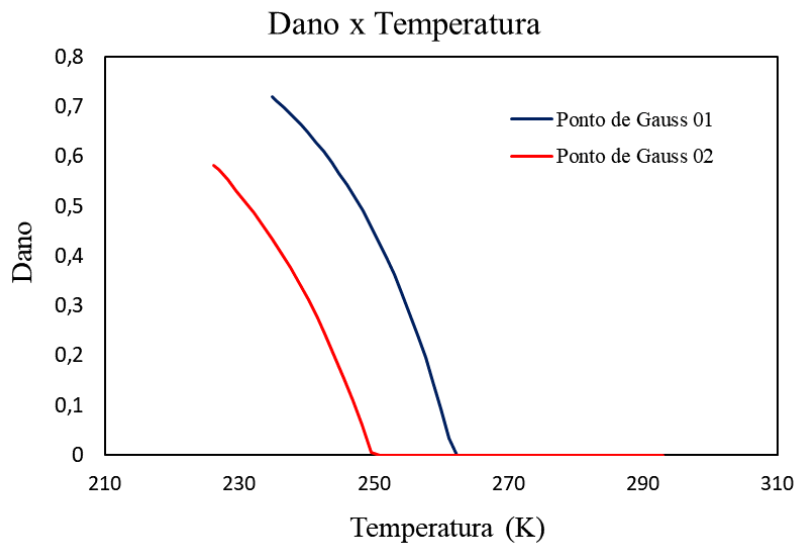
Figura 5.15: Pontos de Gauss utilizados para o plot das tensões principais

Por fim, foram avaliadas as tensões principais no ponto de Gauss 01 apresentados na figura 5.16a, relacionando-os com a temperatura em cada passo da análise, e a variação do dano conforme a temperatura muda.

Tensões principais x Temperatura - Ponto de Gauss face inferior



(a)



(b)

Gráfico 11: Curva Tensões principais x Temperatura no ponto de Gauss 01 (a) e curva Dano x Temperatura para os pontos de Gauss 01 e 02 (b)

Constata-se que as tensões principais para o caso do arco modelado com as extremidades fixas e para o caso com o nó central das extremidades fixo, diferem pouco. A diferença é maior para as análises sem dano.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O estudo de dano em materiais quase frágeis, como o concreto, rochas, argamassas e outros geomateriais é de grande importância para análises e projetos de engenharia. Modelagens realísticas devem prever a nucleação e propagação da fratura considerando as mais diversas ações. Diante disso, esta dissertação teve como objetivo estudar e analisar o acoplamento termomecânico com dano em materiais quase frágeis, utilizando o método dos elementos finitos, sendo realizadas análises estáticas não lineares e transientes não lineares.

Para o modelo de dano isotrópico, são necessários critérios de danificação que definem as condições sob as quais o dano ocorre. Além disso, leis de evolução de dano são necessárias, de modo a descrever os ramos de amolecimento da curva tensão x deformação, leis essas que envolvem, direta ou indiretamente, as propriedades dos materiais, como o módulo de elasticidade, a resistência à tração e energia de fratura.

Os resultados apresentados mostram a necessidade de métodos de continuação robustos para análises estática não lineares com dano, já que o comportamento da curva carga x deslocamento em um dado ponto da estrutura é, *a priori*, desconhecido. Nesse sentido, métodos de continuação capazes de realizar análises que conduzem a trajetórias de equilíbrio complexas, com amolecimento bruscos ou sucessivos pontos de carregamento e descarregamento, são eficazes. Além disso, deve-se ter em mente que os critérios para o aparecimento de dano e as leis de evolução levam curvas distintas, sendo necessário sensibilidade no processo de suas escolhas para que a resposta seja a mais realista possível. Outro ponto a observar, é que as propriedades dos materiais são utilizadas para ajustar o ramo de amolecimento da curva tensão x deformação por meio da lei de dano. Isso pode resultar, por exemplo, em energia de fratura diferentes, a depender da malha, embora a energia de fratura seja uma propriedade inerente ao material. Tal fato é observado na lei de evolução linear apresentada nesse trabalho.

O critério desenvolvido por Marazs para o concreto, é baseado nas deformações positivas. Consequentemente, sólidos sujeitos à compressão pura analisados com esse critério pode vir a apresentar resultados não realistas. Por outro lado, o critério de von Mises modificado é capaz de ajustar a região elástica com base na razão das resistências à compressão e à tração, o qual é realizado pelo κ .

Um fato importante a destacar é o efeito escala. Foi observado que a ordem de grandeza da dimensão do modelo pode ser associada à forma com que o amolecimento se apresenta. Apesar da informação ser mais relevante ao se utilizar resultados obtidos em laboratório para projetos de engenharia, deve-se ter ciência de tal fenômeno.

A resposta estrutural frente à variação de temperatura tem como principal consequência deformações térmicas. No entanto, o aparecimento dessas deformações pode ocasionar tensões mecânicas e leva a falha do material. Os requisitos para isso são as restrições à deformação, seja restrições decorrentes das condições de contorno do problema, seja proveniente de restrições do material, originadas pela heterogeneidade do material ou pelo gradiente de temperatura. A geometria do problema a ser analisado e o modo como a temperatura muda, conduz à respostas complexas.

Análises em elementos finitos realizadas termomecânicamente acopladas e com dano, necessitam que a rigidez tangente seja calculada de modo consistente e a não consideração do efeito térmico no material, por exemplo, introduz problemas de convergência nas análises.

O trabalho limitou-se ao modelo elástico em pequenas deformações termomecânicamente acoplado com dano. A equação do balanço de energia, no acoplamento entre as físicas térmicas e mecânicas desconsiderou a parcela referente ao acoplamento termoplástico, a qual está associada a dissipação de energia mecânica e a parcela referente à parte termoelástica, por postular que para materiais quase frágeis, sua contribuição seria pequena.

Diante disso, os trabalhos futuros contemplam implementar a parcela que envolve a segunda derivada da energia livre em relação a temperatura e as deformações, na equação do balanço de energia, incorporar um maior número de

exemplos de validação com o modelo termomecânico com dano, bem como realizar um estudo de modo a explorar como a taxa de deformação afeta a energia do sistema e avaliar os efeitos da temperatura no coeficiente de Poisson. Adicionalmente, para os próximos desenvolvimentos nessa linha sugere-se incorporar os mecanismos de convecção e radiação, além de avaliar o comportamento de materiais modelados heterogêneos no nível mesoscópico, de tal modo a analisar a influência dos materiais com propriedades distintas e avaliar o uso de técnicas de minimização do quadrado dos resíduos como solução alternativa para vencer as dificuldades de convergência encontradas durante as simulações são também objetivos futuros.

7 REFERENCIAS

BAKER, GRAHAM. THE EFFECT OF EXPOSURE TO ELEVATED TEMPERATURES ON THE FRACTURE ENERGY OF PLAIN CONCRETE. **MATERIALS AND STRUCTURES/MATERIAUX ET CONSTRUCTIONS**, v. 29, n. 6, p. 383–388, 1996.

BAKER, GRAHAM; DE BORST, RENÉ. AN ANISOTROPIC THERMOMECHANICAL DAMAGE MODEL FOR CONCRETE AT TRANSIENT ELEVATED TEMPERATURES. **PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY A: MATHEMATICAL, PHYSICAL AND ENGINEERING SCIENCES**, v. 363, n. 1836, p. 2603–2628, 2005.

BADNAVA, HOJJAT; MSEKH, MOHAMMED A.; ETEMADI, ELAHE; ET AL. AN H-ADAPTIVE THERMO-MECHANICAL PHASE FIELD MODEL FOR FRACTURE. **FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN**, v. 138, n. NOVEMBER 2017, p. 31–47, 2018.

BAKER, G.; STABLER, J.. COMPUTATIONAL MODELLING OF THERMALLY INDUCED FRACTURE IN CONCRETE. **COMPUTATIONAL MODELLING OF CONCRETE STRUCTURES**. BADGASTEIN. AUSTRIA, p. 467-480. 3 ABR. 1998.

BARRON, RANDALL F.; BARRON, BRIAN R.. **DESIGN FOR THERMAL STRESSES**. UNITED STATES OF AMERICA: WILEY, 2011. 530 p.

BAŽANT, ZDENĚK P; CAROL, IGNACIO; CANER, FERHUN C; ADLEY, MAR D.; AKERS, STEPHEN A. MICROPLANE MODEL M 4 FOR CONCRETE. I: FORMULATION WITH WORK-CONJUGATED DEVIATORIC STRESS. **JOURNAL OF ENGINEERING MECHANICS**, v. 126, n. 9, p. 944–953, 2000.

BUTTIGNOL, THOMAZ EDUARDO TEIXEIRA. A LOAD INDUCED THERMAL STRAIN (LITS) SEMI-EMPIRICAL MODEL FOR PLAIN AND STEEL FIBER REINFORCED CONCRETE SUBJECTED TO UNIAXIAL COMPRESSIVE LOAD. **CEMENT AND CONCRETE RESEARCH**, v. 127, n. AUGUST 2019, p. 105896, 2020.

CANER, FERHUN C.; BAŽANT, ZDENĚK P. MICROPLANE MODEL M7 FOR PLAIN CONCRETE. II: CALIBRATION AND VERIFICATION. **JOURNAL OF ENGINEERING MECHANICS**, v. 139, n. 12, p. 1724–1735, 2013.

CASTILLO, CARLOS M s. **EFFECT OF TRANSIENT HIGH TEMPERATURE ON HIGH STRENGTH CONCRETE**. 1987. 68 f. DISSERTAÇÃO (MESTRADO) - CIVIL ENGINEERING COURSE, RICE UNIVERSITY, HOUSTON, 1987.

CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. MESH OBJECTIVE TENSILE CRACKING VIA A LOCAL CONTINUUM DAMAGE MODEL AND A CRACK TRACKING TECHNIQUE. **COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING**, v. 196, n. 1–3, p. 304–320, 2006.

COOK, ROBERT D.; MALKUS, DAVID S.; PLESHA, MICHAEL E.; WITT, ROBERT J.. **CONCEPTS AND APPLICATIONS OF FINITE ELEMENT ANALYSIS**. 4. ED. MADISON: JOHN WILEY, 2002. 734 p.

CRISFIELD, M. A. **NON-LINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SOLIDS AND STRUCTURES**, CHICHESTER: JOHN WILEY & SONS, INC., 1991

DE VREE, J. H.P.; BREKELMANS, W. A.M.; VAN GILS, M. A.J. COMPARISON OF NONLOCAL APPROACHES IN CONTINUUM DAMAGE MECHANICS. **COMPUTERS AND STRUCTURES**, v. 55, n. 4, p. 581–588, 1995.

DE-POUPLANA, IGNASI. AN ISOTROPIC DAMAGE MODEL FOR GEOMATERIALS IN THE KRATOS FRAMEWORK. 2015. DISSERTAÇÃO, 126 F. THESIS - CAMINS SCHOOL, UPC BARCELONATECH, 2015.

FELIPPA, C. A. **INTRODUCTION TO FINITE ELEMENT METHODS**. BOULDER, COLORADO. UNIVERSITY OF COLORADO, 2001.

FELIPPA, C. A. **NONLINEAR TO FINITE ELEMENT METHODS**. BOULDER, COLORADO. UNIVERSITY OF COLORADO, 2004.

GOLUB, VEADYSLAV P. PERGAMON **NON-LINEAR CONTINUUM DAMAGE THEORY** THE INTO ACCOUNT IN THE EQUATIONS. MOST. v. 38, n. 10, 1996.

GUNDLACH, J.; HENNEBERG, D.; SCHEEL, J.; ET AL. MICROSCALE-MOTIVATED CONTINUUM DAMAGE SIMULATIONS OF BRITTLE CERAMICS UNDER THERMOMECHANICAL LOADING. **JOURNAL OF CERAMIC SCIENCE AND TECHNOLOGY**, v. 7, n. 2, p. 145–154, 2016.

GUTIÉRREZ, MIGUEL A. ENERGY RELEASE CONTROL FOR NUMERICAL SIMULATIONS OF FAILURE IN QUASI-BRITTLE SOLIDS. **COMMUNICATIONS IN NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, v. 20, n. 1, p. 19–29, 2004

HSU, TAI-RAN. **THE FINITE ELEMENT METHOD IN THERMOMECHANICS**. LONDON: ALLEN & UNWIN, 1986. 407 p.

INCROPERA, F.P.; DEWITT, D.P. **FUNDAMENTOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR E DE MASSA**, 6ª EDIÇÃO, LTC - LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA S. A., R. J. 2008.

JIRÁSEK, M.; PATZÁK. CONSISTENT TANGENT STIFFNESS FOR NONLOCAL DAMAGE MODELS. **COMPUTER AND STRUCTURES**, v.80, p. 1290 – 1293, 2002.

KACHANOV, LAZAR MARKOVICH. **INTRODUCTION TO CONTINUUM DAMAGE MECHANICS**. BROOKLINE: KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 1986. 135 p. (MECHANICS OF ELASTIC STABILITY).

KURUMATANI, MAO; TERADA, KENJIRO; KATO, JUNJI; ET AL. AN ISOTROPIC DAMAGE MODEL BASED ON FRACTURE MECHANICS FOR CONCRETE. **ENGINEERING FRACTURE MECHANICS**, v. 155, p. 49–66, 2016.

KITZIG, MIRKO; HÄUSSLER-COMBE, ULRICH. MODELING OF PLAIN CONCRETE STRUCTURES BASED ON AN ANISOTROPIC DAMAGE FORMULATION. **MATERIALS AND STRUCTURES/MATERIAUX ET CONSTRUCTIONS**, v. 44, n. 10, p. 1837–1853, 2011.

KOLDITZ, OLAF; SHAO, HUA; WANG, WENQING; BAUER, SEBASTIAN. **THERMO-HYDRO-MECHANICAL-CHEMICAL PROCESSES IN FRACTURED POROUS MEDIA: MODELLING AND BENCHMARKING: CLOSED-FORM SOLUTIONS**. NEW YORK: SPRINGER, 2015. 313 p. (TERRESTRIAL ENVIRONMENTAL SCIENCES).

KURUTZ, M. (1999). A SURVEY OF. STRUCTURAL TANGENT STIFFNESS IN FULLY NONLINEAR AND NONCONVEX CASES INCLUDING MATERIAL SOFTENING*. **MECHANICS OF STRUCTURES AND MACHINES**, 27(1), 37–62.

KRAJCINOVIC, DUSAN. **DAMAGE MECHANICS**. NEW YORK: ELSEVIER, 1996. 773 p. (APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS). PUBLISHERS: J. D. ACHENBACH; B. BUDIANSKY; H. A. LAUWERIER; P. G SAFFMAN; L. VAN WIJNGAARDEN AND J. R. WILLIS.

LEMAITRE, JEAN. **A COURSE ON DAMAGE MECHANICS**. 2. ED. NEW YORK: SPRINGER, 1996. 247 p.

LEMAITRE, JEAN; CHABOCHE, JEAN-LOUIS. **MECHANICS OF SOLID MATERIALS**. CAMBRIDGE: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1994. 584 p. B. SHRIVASTAVA.

LOGAN, DARYL L.. **A FIRST COURSE IN THE FINITE ELEMENT METHOD**. 6. ED. BOSTON: THOMPSON, 2015. 955 p.

LUCCIONI, B. M.; FIGUEROA, M. I.; DANESI, R. F. THERMO-MECHANIC MODEL FOR CONCRETE EXPOSED TO ELEVATED TEMPERATURES. **ENGINEERING STRUCTURES**, v. 25, n. 6, p. 729–742, 2003.

MAZARS, J. **MECHANICAL DAMAGE AND FRACTURE OF CONCRETE STRUCTURES**. ADVANCES IN FRACTURE RESEARCH, v. 4, p. 1499–1506, 1981.

MEJIA SANCHEZ, ELEAZAR CRISTIAN; PAULLO MUÑOZ, LUIS FERNANDO; ROEHL, DEANE. DISCRETE FRACTURE PROPAGATION ANALYSIS USING A ROBUST COMBINED CONTINUATION METHOD. **INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES**, v. 193–194, p. 405–417, 2020.

MENDES, CARLOS A. T.; GATTASS, MARCELO; ROEHL, DEANE. THE FRAMEWORK – AN INNOVATIVE FRAMEWORK FOR THE DEVELOPMENT OF MULTIPHYSICS AND MULTISCALE SIMULATIONS. IN: VII EUROPEAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING. CRETE ISLAND: GREECE, 2016. p. 1-9.

MOREIRA, JOSÉ FABIANO ARAÚJO; EVANGELISTA JUNIOR, FRANCISCO. CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS MODELING OF FAILURE FOR QUASI-BRITTLE MATERIALS. IN **PROCEEDINGS OF THE XL IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING**. NATAL, RN. NOVEMBER 11-14, 2019.

NGO, MINH; IBRAHIMBEGOVIC, ADNAN; BRANCHERIE, DELPHINE. CONTINUUM DAMAGE MODEL FOR THERMO-MECHANICAL COUPLING IN QUASI-BRITTLE MATERIALS. **ENGINEERING STRUCTURES**, v. 50, p. 170–178, 2013.

OLIVER, J; CERVERA, M; OLLER, S; ET AL. ISOTROPIC DAMAGE MODELS AND SMEARED CRACK ANALYSIS OF CONCRETE. **COMPUTER AIDED ANALYSIS AND DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES**, VOLS 1 AND 2, N. JANUARY, 1990.

PAULLO MUÑOZ, LUIS FERNANDO; ROEHL, DEANE. A CONTINUATION METHOD WITH COMBINED RESTRICTIONS FOR NONLINEAR STRUCTURE ANALYSIS. **FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN**, v. 130, N. APRIL, p. 53–64, 2017.

PEARCE, CHRIS J.; NIELSEN, CLAUS V.; BIĆANIĆ, N. GRADIENT ENHANCED THERMO-MECHANICAL DAMAGE MODEL FOR CONCRETE AT HIGH TEMPERATURES INCLUDING TRANSIENT THERMAL CREEP. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS IN GEOMECHANICS**, v. 28, N. 7–8, p. 715–735, 2004.

POHL, TANJA; RAMM, EKKEHARD; BISCHOFF, MANFRED. ADAPTIVE PATH FOLLOWING SCHEMES FOR PROBLEMS WITH SOFTENING. **FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN**, v. 86, p. 12–22, 2014.

SCHROEDER, DANIEL V.. **AN INTRODUCTION TO THERMAL PHYSICS**. NEW YORK: ADDISON WESLEY LONGMAN, 1999. 435 p.

SOUZA, LEOGEVILDO DOUGLAS PEREIRA DE. **ABORDAGEM ESTATÍSTICA E EXPERIMENTAL PARA A DETERMINAÇÃO DO DANO EM CONCRETO SOB ALTAS TEMPERATURAS**. 2020. 125f. (DOUTORADO EM ENGENHARIA CIVIL) – UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA. JOÃO PESSOA. 2020.

SOUZA NETO, E A DE; PÉRIC, D; OWEN, DRJ. **COMPUTATIONAL METHODS FOR PLASTICITY: THEORY AND APPLICATIONS**. UNITED KINGDOM: WILEY, 2008. 791 p.

STABLER, J.; BAKER, G. ON THE FORM OF FREE ENERGY AND SPECIFIC HEAT IN COUPLED THERMO-ELASTICITY WITH ISOTROPIC DAMAGE. **INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES**, v. 37, N. 34, p. 4691–4713, 2000.

STUZALEC, ANDRZEJ. **INTRODCTION TO NONLINEAR THERMOMECHANICS**. NEW YORK: SPRINGER, 1992. 186 p.

VERHOOSSEL C, V., REMMERS, JJC, GUTIÉRREZ, MA., 2009. A DISSIPATION-BASED ARC-LENGTH METHOD FOR ROBUST SIMULATION OF BRITTLE AND DUCTILE FAILURE. **INT. J. NUMER. METH- ODS ENG.** 77, 1290–1321. DOI: 10.1002/NME.2447.

WINKLER, B.; HOFSTETTER, G.; NIEDERWANGER, G. EXPERIMENTAL VERIFICATION OF A CONSTITUTIVE MODEL FOR CONCRETE CRACKING. PROCEEDINGS OF THE INSTITUTION OF MECHANICAL ENGINEERS PART L: **JOURNAL OF MATERIALS: DESIGN AND APPLICATIONS**, v. 215, N. 2, p. 75–86, 2001.

XOTTA, G.; MAZZUCCO, G.; SALOMONI, V. A.; ET AL. COMPOSITE BEHAVIOR OF CONCRETE MATERIALS UNDER HIGH TEMPERATURES. **INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES**, v. 64, p. 86–99, 2015.

XU, X. L.; KARAKUS, M. A COUPLED THERMO-MECHANICAL DAMAGE MODEL FOR GRANITE. **INTERNATIONAL JOURNAL OF ROCK MECHANICS AND MINING SCIENCES**, v. 103, N. JANUARY, p. 195–204, 2018.

ŽARKOVIĆ, D. ET AL, CONVERGENCE IMPROVEMENT IN COMPUTATION OF STRAIN-SOFTENING SOLIDS BY THE ARC-LENGTH METHOD, **FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN**, v. 164, N. MAY, P. 55–68, 2019