Referências

[1] H. J. Herrmann, S. Luding and R. Cafiero, Physica A **295** (2001) 93-100

[2] J. Schofield and I. Oppenheim, Physica A **196** (1993) 209-240.

[3] W.A.M Morgado and I. Oppenheim, Phys. Rev. E **55** (1997) 1940-1945.

[4] H. J. Hermmann, Physica A **313** (1-2) (2002) 188-210.

[5] E. Livne, B. Meerson and P. V. Sasorov, Phys. Rev. E **65** (2002) 021602.

[6] B. Meerson *et al* cond-mat/028286 (2002).

[7] P. K. Haff, J. Fluid Mech.**134** (1983) 401-430

[8] T. Shimbrot and F. J. Mozzio, Phys. Today **53**(3) (2000) 25-30.

[9] F. Rouyer and N. Menon, Phys. Rev. Letters **85** (2000) 3676-3679

[10] H. M. Jaeger, S. R. Nagel and R. P. Behringer, Phys. Today **49** (1996) 32.

[11] E. Vernek, Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, 2003

[12] Huang, Kerson, *"Statistical Mechanics"*, (1987) Jhon Wiley & Sons, (1987).

[13] T. Pöschel and N. V. Brilliantov, Phys. Rev. E **67** (2003) 061304.

[14] T. Pöschel, N. V. Brilliantov, C. Salueña, T. Schwager, cond-mat/0312616 (2003)

[15] T. Pöschel and N. V. Brilliantov, Phys. Rev. E **61** (2000) 5573.

[16] S. Chappmam & T. G. Cowlling, *"Mathematical Theory of Non-Uniform Gases"*, Cambridge (1970).

[17] I. Goldhirsch and G. Zanetti, Phys. Rev. Letters **70** (1993) 1619-1622.

[18] W.A.M Morgado and I. Oppenheim, Physica A **252** (1998) 308-324.

[19] J. J. Brey, F. Moreno and J. W. Dufty, Phys. Rev. E **54** (1996) 445.

[20] J. J. Brey, James W. Dufty, Chang Sub Kim, Andrés Santos, Phys. Rev. E **58** (1998) 4638.

[21] Y. Oono and S. Puri, Phys. Rev. A **38** (1988) 434-453.

[22] S. Martins, W. A. M Morgado, M. S. O Massunaga and M. Bahiana, Phys.Rev. E **61** (2000) 4118.

[23] A.Shinozaki and Y Oono, Phys. Rev. E **48** (1993) 2622.

[24] A. Shinozaki, Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1993.

[25] J. J. Brey and M.J. Ruiz-Montero Comp. Phys. Comm. **121-122** (1999) 278-283.

[26] A. Kudrolli and J. Henry, Phys. Rev. E **62** (2000) 1489-1492.

[27] W.A.M Morgado and E. R. Mucciolo, Physica A **311** (2002) 150-168.

[28] T. Pöschel N. V. Brilliantov and T. Schwager, cond-mat 0212200 v1 (2002).

A
Apêndices

A.1 Discretização do laplaciano para o CDS

Suponhamos uma função arbitrária $f(x,y)$, no caso bidimensional. As expansões desta função em série de Taylor em torno de um ponto genérico (x_0,y_0) para pequenos desvios (a,a) serão:

$$f(x_0+a,y_0) = f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} a + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} a^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} a^3 + ... \quad (A.1)$$

$$f(x_0-a,y_0) = f(x_0,y_0) - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} a + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} a^2 - \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} a^3 + ... \quad (A.2)$$

$$f(x_0,y_0+a) = f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y_0} a + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y_0} a^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_{y_0} a^3 + ... \quad (A.3)$$

$$f(x_0,y_0-a) = f(x_0,y_0) - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y_0} a + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y_0} a^2 - \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_{y_0} a^3 + ... \quad (A.4)$$

Estas expansões são as expansões para os primeiros vizinhos do ponto (x_0,y_0), façamos agora as expansões para seus segundos vizinhos:

$$\begin{aligned} f(x_0+a,y_0+a) = {} & f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} a + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y_0} a + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} a^2 + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y_0} a^2 \\ & + \left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right|_{y_0} a^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} a^3 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_{y_0} a^3 + \left.\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\right|_{y_0} a^3 \right. \\ & \left. + \left.\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\right|_{y_0} a^3 \right] + ... \end{aligned} \quad (A.5)$$

$$\begin{aligned} f(x_0+a,y_0-a) = {} & f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} a - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y_0} a + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} a^2 + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y_0} a^2 \\ & - \left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right|_{y_0} a^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} a^3 - \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_{y_0} a^3 - \left.\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\right|_{y_0} a^3 \right. \\ & \left. + \left.\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\right|_{y_0} a^3 \right] + ... \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$\begin{aligned} f(x_0-a,y_0+a) = {} & f(x_0,y_0) - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} a + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y_0} a + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} a^2 + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y_0} a^2 \\ & - \left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right|_{y_0} a^2 + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} a^3 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_{y_0} a^3 + \left.\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\right|_{y_0} a^3 \right. \\ & \left. - \left.\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\right|_{y_0} a^3 \right] + ... \end{aligned} \quad (A.7)$$

$$f(x_0-a,y_0-a) = f(x_0,y_0) - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} a - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y_0} a + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} a^2 + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y_0} a^2$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\bigg|_{y_0} a^2 + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\bigg|_{x_0} a^3 - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\bigg|_{y_0} a^3 - \frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\bigg|_{y_0} a^3 \right.$$
$$\left. -\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\bigg|_{y_0} a^3\right] + \ldots \tag{A.8}$$

Somando as expressões (A.1-A.4) temos:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{(x_0,y_0)} &= f(x_0+a,y_0) + f(x_0-a,y_0) + f(x_0,y_0+a) \\ &+ f(x_0,y_0-a) - 4f(x_0,y_0).\end{aligned} \tag{A.9}$$

Semelhantemente, a soma das expressões (A.5-A.8) conduz a:

$$\begin{aligned}2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{(x_0,y_0)} &= f(x_0+a,y_0+a) + f(x_0+a,y_0-a) \\ &+ f(x_0-a,y_0+a) + f(x_0-a,y_0-a) \\ &- 4f(x_0,y_0).\end{aligned} \tag{A.10}$$

Por último, dividindo a equação (A.9) por 6 e a (A.10) por 12 e em seguida somando-as obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{(x_0,y_0)} &= \frac{1}{6}\Big[\, f(x_0+a,y_0) + f(x_0-a,y_0) + f(x_0,y_0+a) \\ &+ f(x_0,y_0-a)\Big] + \frac{1}{12}\Big[\, f(x_0+a,y_0+a) \\ &+ f(x_0+a,y_0-a) + f(x_0-a,y_0+a) \\ &+ f(x_0-a,y_0-a)\Big] - f(x_0,y_0).\end{aligned} \tag{A.11}$$

Obtivemos portanto uma expressão para o laplaciano no ponto (x_0, y_0) por uma expansão em série de Taylor até a $4^{\underline{a}}$ ordem. Essa é uma forma isotrópica de discretização do laplaciano. O truncamento das expansões acima fornecem uma boa aproximação sempre que o parâmetro a for muito pequeno, isto é: ($a \ll 1$). O que fazemos no CDS é considerar válida essas expansões mesmo no caso de $a = 1$. Essa consideração será razoável se fizermos a hipótese de que as derivadas são todas pequenas ($\ll 1$), portanto é nesse regime que temos que trabalhar. É comum escrever a última equação numa forma mais compacta:

$$\nabla^2_{CDS} f = \ll f \gg - f, \tag{A.12}$$

com

$$\ll f \gg \equiv \frac{1}{6}\sum_{NN} f + \frac{1}{12}\sum_{NNN} f. \tag{A.13}$$

A.2 Inclusão da Matriz K nas Equações

A partir das equações (A.12) e (A.13), podemos ecrever o laplaciano discretizado de uma função ϕ, como:

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi = \frac{1}{2}\{&[\phi(i+1,j)-\phi(i,j)]+[\phi(i-1,j)-\phi(i,j)]\\ &+[\phi(i,j+1)-\phi(i,j)]+[\phi(i,j-1)-\phi(i,j)]\}\\ &+\frac{1}{4}\{[\phi(i+1,j+1)-\phi(i,j)]+[\phi(i-1,j+1)-\phi(i,j)]\\ &+[\phi(i-1,j-1)-\phi(i,j)]+[\phi(i+1,j-1)-\phi(i,j)]\}+\end{aligned}\tag{A.14}$$

Incluindo a matriz K, temos:

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi = \frac{1}{2}\{&[K(i,j,i+1,j)\phi(i+1,j)-K(i+1,j,i,j)\phi(i,j)]\\ &+[K(i,j,i-1,j)\phi(i-1,j)-K(i-1,j,i,j)\phi(i,j)]\\ &+[K(i,j,i,j+1)\phi(i,j+1)-K(i,j+1,i,j)\phi(i,j)]\\ &+[K(i,j,i,j-1)\phi(i,j-1)-K(i,j-1,i,j)\phi(i,j)]\}\\ &+\frac{1}{4}\{[K(i,j,i+1,j+1)\phi(i+1,j+1)-K(i+1,j+1,i,j)\phi(i,j)]\\ &+[K(i,j,i-1,j+1)\phi(i-1,j+1)-K(i-1,j+1,i,j)\phi(i,j)]\\ &+[K(i,j,i-1,j-1)\phi(i-1,j-1)-K(i-1,j-1,i,j)\phi(i,j)]\\ &+[K(i,j,i+1,j-1)\phi(i+1,j-1)-K(i+1,j-1i,j)\phi(i,j)]\}\end{aligned}\tag{A.15}$$

Por um processo análogo ao caso do laplaciano encontramos a derivada em x, como:

$$\begin{aligned}\partial_x\phi = &\frac{2}{3}\{[\phi(i+1,j)-\phi(i,j)]-[\phi(i-1,j)-\phi(i,j)]\}\\ &-\frac{1}{12}\{[\phi(i+2,j)-\phi(i,j)]-[\phi(i-2,j)-\phi(i,j)]\}\end{aligned}\tag{A.16}$$

Que reescrevemos com a matriz K, como segue:

$$\begin{aligned}\partial_x\phi = \frac{2}{3}\{&[K(i,j,i+1,j)\phi(i+1,j)-K(i+1,j,i,j)\phi(i,j)]\\ &-[K(i,j,i-1,j)\phi(i-1,j)-K(i-1,j,i,j)\phi(i,j)]\}\\ &-\frac{1}{12}\{[K(i,j,i+2,j)\phi(i+2,j)-K(i+2,j,i,j)\phi(i,j)]\\ &-[K(i,j,i-2,j)\phi(i-2,j)-K(i-2,j,i,j)\phi(i,j)]\}\end{aligned}\tag{A.17}$$

A derivada em y, tem uma forma final análoga a da derivada em x, porém as células em que acontecem fluxos estão na direção j.

Em nosso modelo computacional utilizamos apenas primeiros vizinhos, contudo colocamos aqui esta forma com segundos e terceiros vizinhos para mostrar como futuras aplicações mais sofisticadas poderão ser implementadas.