# 3.
# Modelos Estocásticos de Volatilidade

## 3.1
## Processos estocásticos de Itô-Langevin

Neste capítulo, vamos apresentar modelos que possam descrever de forma o mais confiável e parcimoniosa possível o comportamento intermitente da série temporal da volatilidade.

Estes modelos são representações matemáticas das condições do processo estocástico no qual a volatilidade é considerada a resposta e cujas equações descrevem as interações ou os vínculos do processo.

Vamos considerar aqui equações diferenciais estocásticas de Itô-Langevin [22] cuja expressão geral é dada por

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \,, \tag{3.1}$$

onde $dz$ são os incrementos de um processo difusivo de Wiener satisfazendo a $\langle dz \rangle = 0$ e $\left\langle (dz)^2 \right\rangle = 2dt$ .

A equação diferencial (3.1) fornece uma realização específica (uma trajetória) do processo estocástico seguido pela variável aleatória $x$. Se tomarmos uma média sobre várias trajetórias, a probabilidade de obter-se um certo valor de $x$ no tempo $t$ é descrita pela distribuição $P(x,t)$.

No apêndice A apresentamos de forma sucinta a dedução da equação de Fokker-Planck [23] abaixo, que descreve a evolução temporal de $P(x,t)$ a partir do processo geral de Itô-Langevin (3.1). Ela é dada por (ver (A.10)):

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)P(x,t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b^2(x,t)P(x,t)\right] \tag{3.2}$$

Uma das características principais observadas na evolução temporal da volatilidade é a tendência dos valores reverterem para um valor típico histórico, característico do mercado financeiro em questão. Desta forma, grandes flutuações em relação a este valor típico, tendem a decair. O valor histórico da volatilidade é assim um parâmetro do processo estocástico e pode ser obtido através da média de longo prazo θ dos dados empíricos.

Outro parâmetro natural deste processo é a taxa no tempo γ com a qual estas flutuações tendem a relaxar. Este parâmetro também depende do mercado considerado, uma vez que depende da qualidade do fluxo de informação, da liquidez do ativo, etc.

Os modelos estocásticos que possuem os ingredientes acima são chamados de modelos de reversão à média.

## 3.2 Processo de Ornstein-Uhlenbeck Aritmético

O modelo mais simples de reversão à média é o que descreve o processo aritmético de Ornstein-Uhlenbeck (O-U), cuja equação diferencial estocástica de Itô-Langevin é representada por

$$dx = -g\,(x - q\,)dt + xdz \tag{3.3}$$

onde γ e θ são os parâmetros controlando o processo de reversão à média (de valor θ, ocorrendo a uma taxa de relaxação γ). O parâmetro ξ descreve a amplitude do processo difusivo de Wiener, descrito pela variável estocástica *z*, cujos incrementos satisfazem a $\langle dz \rangle = 0$ e $\left\langle (dz)^2 \right\rangle = 2dt$ .

Este modelo possui solução exata. O valor esperado de *x*(*t*), dado pela média por flutuações estatísticas é (ver apêndice B):

$$E[x(t)] = e^{-gt} x(0) + q\,(1 - e^{-gt}\,) \tag{3.4}$$

A variância de *x*(*t*), dada por $E\left[ (x(t) - E[x(t)])^2 \right]$ é:

$$Var[x(t)] = \frac{x^2}{g}(1 - e^{-2ht}\,) \tag{3.5}$$

Das equações acima, obtém-se os limites assintóticos:

$$\lim_{t \to \infty} E[x(t)] = q \qquad \text{(valor esperado no longo prazo)} \tag{3.6a}$$

$$\lim_{t \to \infty} Var[x(t)] = \frac{x^2}{g} \qquad \text{(variância de longo prazo)} \tag{3.6b}$$

A partir de (3.6b), vê-se que o parâmetro relevante para descrição das flutuações quadráticas em torno do valor médio de longo prazo θ é dado por $x^2 / g$ , mostrando a "competição" entre o termo de difusão (que gera as flutuações) e o termo de reversão à média (que procura amortecê-las).

Portanto, tem-se na verdade dois parâmetros de controle independentes que podem ser estimados a partir dos dados empíricos. Vamos denominá-los θ e $a \equiv g / x^2$ .

Comparando-se (3.1) e (3.3) e ainda usando (3.2), a distribuição de probabilidade $P(x,t)$ do modelo satisfaz à equação de Fokker-Plank:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[g\,(x-q)P(x,t)\right] + x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[P(x,t)\right] \tag{3.7}$$

A partir da equação de Fokker-Planck (3.7), que descreve a evolução temporal da função densidade de probabilidade (*pdf*) $P(x,t)$, obtém-se a solução estacionária (ver apêndice B):

$$P^*(x) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2p}\,x} \exp\left[-\frac{g\,(x-q)^2}{2x^2}\right], \tag{3.8}$$

ou seja, uma distribuição gaussiana de valor médio θ e variância $x^2 / g = a^{-1}$ .

## 3.3 Processo de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico

Um dos processos mais importantes de reversão à média é chamado de processo de Ornstein-Uhlenbeck (O-U) Geométrico. A equação diferencial estocástica de Itô-Langevin é dada por:

$$dx = -g\,(x - q)\,x dt + x \;\; x dz \tag{3.9}$$

Os termos aritmético e geométrico nos dois modelos descrevem o caráter aditivo no tempo das flutuações $dx$ e das flutuações relativas $dx/x$, respectivamente.

Comparando-se (3.1) e (3.9), e usando (3.2), a distribuição de probabilidade $P(x,t)$ do modelo satisfaz à equação de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[g\,(x - q)\,xP(x,t)\right] + x^{2}\,\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\left[x^{2} P(x,t)\right] \tag{3.10}$$

A *pdf* estacionária do modelo O-U Geométrico é dada por (ver apêndice C):

$$P(x) = \frac{a^{1+b}}{\Gamma(1+b)}\, e^{-ax} x^{b} \tag{3.11a}$$

que é a Distribuição Gama, com $a = g/x^{2}$ e $b = qa - 2$ ou seja:

$$P^{*}(x) = \frac{a^{qa-1}}{\Gamma(qa-1)}\, e^{-ax} x^{qa-2} \tag{3.11b}$$

Note que a combinação αθ em (3.11) representa a razão entre o valor médio θ e a flutuação efetiva $x^{2}/g$ durante a relaxação. Assim αθ e α determinam o comportamento da distribuição estacionária.

## 3.4 Processo de Feller

Considere a equação diferencial estocástica abaixo com δ=1/2:

$$dx = -g\,(x - q)\,dt + x x^{d}\, dz, \tag{3.12}$$

Comparando-se (3.1) e (3.12) e usando (3.2), a distribuição de probabilidade $P(x,t)$ satisfaz à equação de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x-q)P(x,t)\right]+x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[xP(x,t)\right], \qquad (3.13)$$

cuja solução estacionária é dada por (ver apêndice C):

$$P^*(x)=\frac{a^{qa}}{\Gamma(qa)}e^{-ax}x^{qa-1} \qquad (3.14)$$

Nota-se a semelhança dos resultados (3.11) e (3.14), ou seja, a solução do processo de Feller é análoga ao processo O-U geométrico com parâmetro $\beta$ modificado para $b'=qa-1$.

## 3.5 Modelo de Heston

Dois modelos financeiros famosos são descritos pela equação diferencial de Itô-Langevin (3.12), onde a variável estocástica $x$ representa a volatilidade quadrática: $x\equiv \nu^2$.

O primeiro modelo que vamos investigar é o modelo Heston [24], onde $\delta$ =1/2 e o segundo modelo é o de Hull & White [25], onde $\delta$ =1.

Fazendo a transformação de variáveis $x\equiv n^2$ a partir da solução (3.14) do processo de Feller, obtém-se a *pdf* estacionária da volatilidade do modelo de Heston (ver apêndice C):

$$P^*(n)=2\frac{a^{qa}}{\Gamma(qa)}e^{-an^2}n^{2qa-1} \qquad (3.15)$$

## 3.6
## Modelo de Hull & White

Para a equação diferencial estocástica (3.12) com δ = 1, comparando-se com (3.1) e usando (3.2), obtém-se que a distribuição de probabilidade do modelo Hull & White satisfaz à equação de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[g\,(x - q)P(x,t)\right] + x^{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2 P(x,t)\right] \qquad (3.16)$$

cuja a solução estacionária é dada por (ver apêndice D):

$$P^*(x) = \frac{(qa)^{1+a}}{\Gamma(1+a)}\frac{e^{-qa/x}}{x^{a+2}} \qquad (3.17)$$

Fazendo a transformação de variáveis $x \equiv \nu^2$ a partir da solução (3.17), obtém-se a *pdf* estacionária da volatilidade do modelo de Hull & White (ver apêndice D):

$$P^*(n) = 2\frac{(qa)^{1+a}}{\Gamma(1+a)}\frac{\exp(-qa/n^{2})}{n^{2a+3}} \qquad (3.18)$$

## 3.7
## Modelo de Micciché *et. al*.

Recentemente [26] foi proposto um modelo para descrever o efeito de “feedback” da volatilidade. Este modelo é obtido a partir da equação do tipo GARCH, que relaciona a atividade do mercado presente com a atividade passada recente através de:

$$n_t = n_{t-1} - g\,(n_{t-1} - q) + x \cdot |\,r_{t-1}\,|, \qquad (3.19)$$

sendo θ, um valor típico do nível de volatilidade do mercado, γ, a taxa de reversão da volatilidade e ξ, um parâmetro que mede a influência da magnitude da flutuação de preço passada sobre a volatilidade presente.

Sendo $|\,r_{t-1}|$ uma versão “ruidosa” de $n_{t-1}$, de acordo com (2.3), podemos escrever a equação (3.19) no limite contínuo como:

$$dn = -g\,(n - q) + xn\; dz\,, \qquad (3.20)$$

com *dz* descrevendo o ruído.

Esta equação apresenta assim termo de ruído multiplicativo, e é equivalente a equação (3.12), com $\delta = 1$, agora com a variável estocástica $x$ representando a volatilidade.

Identificando $x = \nu$ na solução (3.17), obtém-se a *pdf* estacionária da volatilidade proposta por Miccichè *et. al*. [27]:

$$P^*(n) = \frac{(qa)^{1+a}}{\Gamma(1+a)} \frac{e^{-qa/n}}{n^{a+2}} \tag{3.21}$$

A partir das análises anteriores, obtemos dois resultados importantes:

- As soluções estacionárias apresentadas até aqui têm em comum o parâmetro $a = g/x^2$ caracterizando o comportamento das caudas das distribuições. Nos modelos O-U geométrico, de Feller e de Heston, dadas pelas soluções estacionárias (3.11), (3.14) e (3.15) respectivamente, a cauda das distribuições tem comportamento exponencial. Já nos modelos de Hull & White e de Miccichè *et.al.* dadas pelas soluções estacionárias (3.18) e (3.21) respectivamente, as caudas das distribuições são descritas por lei de potência.
- Isto significa que uma grande reatividade do mercado à informação passada (ou seja, grandes valores de $\xi$ em (3.19)) ou uma pequena taxa de eficiência informacional $\gamma$ diminuem este expoente, tornando mais lento o decaimento das distribuições.
- Estes resultados descrevem ainda um comportamento não universal da distribuição de probabilidade estacionária para grandes valores de volatilidade, pois dependem dos parâmetros do mercado.

## 3.8 Modelo Log-normal

Como mostramos no capítulo 2, resultados empíricos apontam para a distribuição log-normal como descrevendo a freqüência de ocorrência de valores intermediários de volatilidade.

Várias equações diferenciais estocásticas têm como solução estacionária uma *pdf* log-normal.

No modelo de Schwartz [28], a volatilidade segue um processo estocástico descrito por:

$$dn = -g(\ln n - q)n\, dt + xn\, dz\,, \tag{3.22}$$

Comparando-se (3.1) e (3.22) e usando (3.2), obtém-se a equação de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n,t) = \frac{\partial}{\partial n}\left[n(\ln n - q)nP(n,t)\right] + x^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2}[n^2 P(n,t)] \qquad (3.23)$$

cuja *pdf* estacionária (ver apêndice E), é dada pela distribuição log-normal:

$$P^*(n) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2p}\,xn} \exp\left[\frac{-g(\ln n - q')^2}{2x^2}\right] \qquad (3.24)$$

cujos parâmetros θ′ = θ – α e $a^{-1} = x^2/g$ representam respectivamente o valor médio e a variância dos valores de volatilidade em escala logaritmica.

Usando o Lema de Itô [22] para transformação de variável estocástica $x \equiv \ln v$, a partir de (3.22) obtém-se (ver apêndice E):

$$d(\ln n) = -g[\ln n - q']dt + xdz\,. \qquad (3.25)$$

Assim, de acordo com (3.25), no modelo de Schwartz, $x \equiv \ln\nu$ segue processo de reversão à média do tipo O-U aritmético dado por (3.3), cuja *pdf* estacionária é uma distribuição gaussiana de média θ' e variância $a^{-1}$ de acordo com (3.8). Este resultado é consistente com a solução (3.24) (ver apêndice E).

Outro modelo associado a uma *pdf* log-normal tem equação diferencial estocástica dada por [27]:

$$dn = -g(\ln n - q)dt + xn^{1/2}dz \qquad (3.26)$$

Comparando-se (3.1) e (3.26) e usando (3.2), a equação de Fokker-Planck associada é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n,t) = \frac{\partial}{\partial n}\left[g(\ln n - q)P(n,t)\right] + x^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2}[nP(n,t)] \qquad (3.27)$$

cuja solução estacionária é dada pela distribuição log-normal com parâmetros θ e $a^{-1}x^2/g$ representando respectivamente o valor médio e a variância dos valores de volatilidade em escala logaritmica (ver apêndice E):

$$P^*(n) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2p}\,xn} \exp\left[\frac{-g(\ln n - q)^2}{2x^2}\right] \qquad (3.28)$$