

2 A teoria das opções

2.1. Introdução

Este capítulo resume os principais conceitos utilizados nesta pesquisa relativos a teoria das opções. A teoria das opções é a base para a criação de metodologias para calcular o valor de um ativo. Um ativo pode ser uma *commodity* (bem real negociado em bolsa, como açúcar, algodão, petróleo, ouro etc.), uma ação, um projeto, etc., e para auxiliar na determinação do preço de um ativo utilizam-se processos estocásticos. Neste capítulo é descrito brevemente os conceitos básicos sobre os principais processos estocástico usados para modelar o preço de um ativo, os principais conceitos da teoria de opções financeiras e por último uma breve descrição da teoria de opções reais.

2.2. Processos Estocásticos

Um processo estocástico é uma coleção ordenada de variáveis aleatórias. Uma variável cujo valor evolui aleatoriamente ao longo do tempo pode ser reconhecida por seguir um processo estocástico. Processos estocásticos são usados geralmente para simular o comportamento dos preços de *commodities* e derivativos em geral.

Um processo estocástico pode ser contínuo ou discreto. Se uma variável definida por um processo estocástico é contável para cada instante de t , então esta variável é definida por um processo estocástico discreto. Se esta variável possui valores que podem mudar em qualquer instante de tempo (podem ser determinados para cada instante), então esta variável segue um processo estocástico contínuo.

O processo estocástico discreto onde a informação contida no valor corrente de uma variável é a única informação relevante para prever o seu valor futuro, é conhecido como processo de Markov. Sua descrição é apresentada a seguir.

2.2.1. Processo de Markov

Um processo de Markov é aquele cujo valor futuro de uma variável é explicado única e exclusivamente pela informação contida no seu valor corrente sendo irrelevante toda informação contida nos seus valores passados.

É razoável considerar que o preço de um ativo siga um processo de Markov, já que o preço por si só não pode explicar seus valores além de um instante seguinte. Uma vez que os preços dos ativos são influenciados a curto prazo por incertezas de mercado, pode-se utilizar o processo de Markov para simular o valor dos preços dos ativos ao longo do tempo. Na área de finanças utiliza-se bastante o processo de Wiener que é um tipo de processo de Markov. Este processo é descrito a seguir.

2.2.2. Processos de Wiener

Defini-se o processo de Wiener como aquele onde uma variável $z(t)$ em que cada mudança em z (Δz) correspondente a um intervalo de tempo Δt , satisfaça as seguintes condições [7]:

1. A relação entre Δz e Δt é:

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1)$$

Onde ϵ é uma variável aleatória normalmente distribuída com média zero e desvio padrão 1.

2. Os valores de Δz para dois intervalos diferentes de tempo Δt são independentes.

Pode-se afirmar, sobre a primeira propriedade, que Δz tem uma distribuição normal com:

- Média de $\Delta z = 0$.
- Desvio Padrão de $\Delta z = \sqrt{\Delta t}$, logo, a variância de $\Delta z = \Delta t$.

A segunda propriedade implica que z segue um processo de Markov.

Uma extensão deste processo é conhecido como Processo Generalizado de Wiener e definido por:

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (2)$$

Onde Δx é um processo de Wiener generalizado, a e b são constantes, e Δt é o intervalo de tempo discreto.

A equação anterior apresenta o parâmetro ϵ que é uma trajetória aleatória que vem de uma distribuição normal padronizada com Δx definido para um intervalo de tempo extremamente pequeno por [7]:

- Média de $\Delta x = a\Delta t$.
- Desvio Padrão de $\Delta x = b\sqrt{\Delta t}$.
- Variância de $\Delta x = b^2\Delta t$.

2.2.3. Processo de Itô

O Processo de Itô é um processo de Wiener generalizado que pode ser escrito da seguinte forma:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (3)$$

Onde a e b são funções da variável em questão x e do tempo t .

A variância pode mudar ao longo do tempo assim como sua média. Em pequenos intervalos de tempo entre t e $t + \Delta t$, a variável x muda para $x + \Delta x$ onde:

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (4)$$

Onde a e b são funções da variável determinante x e do tempo t .

2.2.4. Lema de Itô

Suponha que o valor de uma variável x siga o processo de Itô descrito em (3). A variável x terá então uma média a e variância b^2 . O lema de Itô mostra que há uma função, G , de x e t que segue o processo:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (5)$$

Onde dz é o mesmo processo de Wiener da equação (3). Portanto, G também assume um processo de Itô com uma média:

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \quad (6)$$

e uma variância:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2 \quad (7)$$

2.2.5. Movimento Geométrico Browniano

O Movimento Geométrico Browniano é um processo de Itô. Este processo pode ser descrito como:

$$dx = \mathbf{a}xdt + \mathbf{s}x dz \quad (8)$$

Onde, comparando com a equação (3), $a(x,t) = \mathbf{a}x$ e $b(x,t) = \mathbf{s}x$, sendo \mathbf{a} e \mathbf{s} constantes.

O Movimento Geométrico Browniano é bastante utilizado para simulações do preço de ativos no mercado financeiro, tendo sido o ponto de partida para Fisher Black e Myron Scholes chegarem à equação de precificação de uma opção.

2.2.6. Processos de Reversão à Média

O Processo de Reversão à Média se caracteriza por ressaltar os fatores que envolvem as incertezas de mercado relacionadas à custos marginais de produção a

longo-prazo [6] [5]. Este processo mostra por exemplo no caso de países exportadores de petróleo, que apesar do preço do petróleo flutuar aleatoriamente no mercado internacional, a longo-prazo, este preço convergirá para o custo marginal de produção do petróleo[6].

Este processo de reversão à média também é conhecido como processo aritmético de Ornstein-Uhlenbeck:

$$dx = h(\bar{x} - x)dt + sdz \quad (9)$$

Onde h é a velocidade de reversão à média, s que representa a volatilidade do processo, os elementos infinitesimais dt e dz representam respectivamente um intervalo infinitesimal de tempo e um processo de Wiener, e \bar{x} é o nível ou média no qual x tende a reverter. No caso de x ser uma *commodity*, \bar{x} é o custo marginal de produção de longo-prazo desta *commodity* [6].

O processo de Ornstein-Uhlenbeck possui valor esperado em um tempo t futuro qualquer expresso pela seguinte equação:

$$E[x_t] = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-ht} \quad (10)$$

Onde x_0 é o valor corrente qualquer para x . A variância deste processo é calculada como:

$$\mathbf{n} \left[x_t - \bar{x} \right] = \frac{s^2}{2h} (1 - e^{-2ht}) \quad (11)$$

Onde h é a velocidade de reversão a média, s é a volatilidade do processo e t é o tempo.

2.2.7. Modelo de Reversão à Média de Dias

Neste processo, Dias em [8] e [9] aperfeiçoou o processo de Ornstein-Uhlenbeck para que este ficasse mais coerente com as oscilações dos preços das *commodities*.

Se uma variável x descrita pela equação (9) com distribuição Normal pode assumir valores negativos, há dificuldades de simular valores para preços de *commodities* que só assumam valores positivos.

Para contornar esta situação, Dias em [8], considera que $\bar{x} = \ln \bar{P}$ para o processo de Ornstein-Uhlenbeck descrito em (9), onde \bar{P} é o preço de equilíbrio de longo prazo e \bar{x} , o nível de longo prazo. Assim seu valor esperado torna-se:

$$E[P_t] = e^{E[x(t)]} \quad (12)$$

Onde $x(t)$ é a variável do processo de Ornstein-Uhlenbeck e P é o preço do ativo. Neste caso, tem-se o valor esperado de P de acordo com a equação:

$$E[P_t] = \exp\{x_0 e^{-ht} + \bar{x}(1 - e^{-ht})\} \quad (13)$$

De acordo com Dias em [8][9], o processo $P(t) = e^{x(t)}$ não funciona com a relação descrita em (12), pois a exponencial de uma distribuição Normal adiciona metade da variância na média da distribuição log-normal. Com o objetivo de atingir a relação descrita em (12), a metade da variância é compensada utilizando a equação:

$$P(t) = \exp[x(t) - 0.5Var(x(t))] \quad (14)$$

Onde $Var(x(t))$ é calculado utilizando (11).

2.2.8. Modelo de Reversão à Média de Bhattacharya

O processo de Bhattacharya apresentado em [10] é caracterizado pela equação:

$$dx = h(\bar{x} - x)dt + sxdz \quad (15)$$

Onde x é variação do fluxo de caixa de um projeto por unidade de tempo e dz é um processo de Wiener.

Para o processo acima, o valor esperado pode ser calculado considerando uma fração do fluxo de caixa conforme:

$$dx = h(\bar{x} - x)dt$$

Se for considerado $E(x, t)$, o valor esperado numa data futura t para o valor momentâneo x então,

$$(\bar{x} - E(x, t)) = (\bar{x} - x)e^{-ht}$$

O que resulta para $E(x, t)$:

$$E[x, t] = \exp\{xe^{-ht} + \bar{x}(1 - e^{-ht})\} \quad (16)$$

O processo de Bhattacharya, segundo Sarkar e Zapatero em [11], é uma forma eficiente de estudar o valor de projetos ao longo do tempo. Este processo apresenta valores de um projeto x sempre positivos considerando o valor de x igual a zero como uma barreira reflexiva. Sarkar e Zapatero ainda mencionam sobre este processo, a característica da volatilidade proporcional aos ganhos do projeto fazer parte do termo transiente na equação (15) ($sxdz$).

2.3. Opções Financeiras

Uma opção dá o direito mas não a obrigação de comprar ou vender um ativo em uma data combinada por um preço combinado. O preço combinado é conhecido por preço de exercício e a data combinada por expiração ou maturação.

Para a posse desse direito, paga-se uma quantia conhecida como prêmio [7]. Por ativos relativos às opções financeiras, entende-se commodities, ações, índices, títulos, moedas estrangeiras e contratos futuros, etc.

Na negociação de uma opção, há duas partes envolvidas. A parte que recebe o valor do prêmio e o investidor que paga o valor do prêmio para obter a opção.

As opções podem ser de dois tipos segundo a data do exercício: opções européias e opções americanas.

Uma opção americana pode ser exercida em qualquer data até a maturação enquanto que uma opção européia pode ser exercida apenas na maturação.

Há dois tipos básicos de opções: As opções de compra e as opções de venda. Estes tipos são explicados a seguir.

2.3.1. Opção de Compra

Uma opção de compra dá o direito mas não a obrigação de comprar um ativo pelo preço de exercício em uma data futura. Se S_T é o preço do ativo na maturação e X seu preço de exercício, então o ganho obtido na negociação de uma opção européia de compra na maturação é:

$$c(S, T) = \max[S_T - X, 0] \quad (17)$$

Onde c é o valor da opção em função do preço do ativo S e do tempo de maturação T . Se a diferença entre o preço do ativo na maturação e o preço do exercício for positiva ou zero, a opção deve ser exercida, senão, a opção perde seu valor.

Para a opção de compra, a parte que recebe o valor do prêmio é obrigada a transferir a posse do ativo para o investidor quando este a exerce.

2.3.2. Opção de Venda

Uma opção de venda dá o direito de vender um ativo pelo preço de exercício em uma data futura. Se S_T é o preço do ativo na maturação e X seu preço de

exercício, então o ganho obtido na negociação de uma opção europeia de venda na maturação é:

$$p(S,T)=\max[X - S_T,0] \quad (18)$$

Onde p é o valor da opção em função do preço do ativo S e do tempo de maturação T .

Se a diferença entre o preço do exercício e o preço do ativo na maturação for igual ou superior a zero, o investidor exerce a opção.

Entre as partes envolvidas na negociação da opção de venda, a parte que recebe o valor do prêmio é obrigada a comprar o ativo se o investidor decidir exercer a opção.

2.3.3. Fatores que afetam o preço das opções

De acordo com Hull [7], existem 6 fatores que alteram sensivelmente o valor de uma opção:

1. O preço corrente do ativo.
2. O preço de exercício.
3. O tempo para expiração.
4. A volatilidade do preço das ações.
5. Taxa de juros livre de risco.
6. Os dividendos esperados durante a vida da opção.

Uma boa relação entre as variáveis citadas e sua influência sobre o valor das opções pode ser exibida na Tabela 1:

<i>Variável</i>	<i>Compra Européia</i>	<i>Venda Européia</i>	<i>Compra Americana</i>	<i>Venda Americana</i>
Preço da Ação	+	-	+	-
Preço do Exercício	-	+	-	+
Maturação	?	?	+	+
Volatilidade	+	+	+	+
Taxa de Juros Livre de Risco	+	-	+	-
Dividendos	-	+	-	+

Tabela 1 - Resumo dos efeitos das variáveis sobre o valor das opções enquanto varia-se uma e mantém-se as outras fixas [7].

Na Tabela 1, é ilustrado o efeito de cada fator sobre um determinado tipo de opção. Estes fatores não estão correlacionados mostrando o efeito de cada um em separado sobre as opções. Uma descrição é feita a seguir:

- Preço da Ação e Preço do Exercício: Para uma opção de compra exercida em uma data futura, a quantidade na qual o preço corrente do ativo ultrapassa o preço de exercício é conhecido por *Payoff*. Opções de compra tornam-se mais valiosas a medida que o preço do ativo aumenta e menos valiosas a medida que o preço de exercício aumenta. Para uma opção de venda, o *payoff* é quantidade em que o preço do exercício ultrapassa o preço do ativo. Assim, quanto maior o preço de exercício, maior o valor da opção de venda e quanto maior o preço do ativo, menor o valor da opção de venda.
- Maturação: A maturação não tem influência sobre opções européias. Sobre opções americanas, quanto maior a maturação ou data de expiração, maior a probabilidade de se exercer a opção.
- Volatilidade: É a medida de incerteza da trajetória do preço do ativo. Quanto maior a volatilidade, maior a incerteza sobre os movimentos do preço do ativo. Sabendo-se que tanto o detentor da opção de compra quanto o de venda tem no máximo o valor do prêmio a ser perdido em caso do *payoff* não agradar, o valor tanto da opção de venda quanto de compra tendem a aumentar.

- Taxa de juros livre de risco: O aumento da taxa de juros livre de risco reflete diretamente na projeção do preço futuro de um ativo aumentando-o. Anteriormente, foi mencionado o fato do preço do ativo diminuir o valor da opção de venda e aumentar o valor da opção de compra.
- Dividendos: Tem o efeito de reduzir sobre o preço do ativo na data ex-dividendo (data após o pagamento dos dividendos). Com isso, o valor de uma opção de compra diminui enquanto o valor de uma opção de venda aumenta.

Para uma opção européia de compra que não paga dividendos, o limite inferior para exercê-la é:

$$c \geq \max(S_0 - Xe^{-rT}, 0) \quad (19)$$

Onde S_0 é o preço atual da ação, X o preço de exercício, r é a taxa de juros livre de risco e T é a data de expiração.

O valor máximo de uma opção de compra jamais poderá ultrapassar o preço do ativo. Se o valor de uma opção de compra pudesse ultrapassar o valor do ativo, poderia-se comprar o ativo e vender-se a opção sem risco. Esta maximização também serve para opções de compra americanas.

Uma opção européia de venda tem como limite inferior:

$$p \geq \max(Xe^{-rT} - S_0, 0) \quad (20)$$

O valor máximo de uma opção de venda nunca ultrapassa Xe^{-rT} . Se assim fosse, poderia-se vender a opção de venda e reinvestir o lucro à taxa de juros livre de risco.

2.4. Modelo de Black & Scholes

Nesta seção pretende-se demonstrar brevemente a equação de Black & Scholes, e as considerações que levaram à sua formulação.

Black e Scholes fizeram uma série de considerações em [1] com o objetivo de formular um mercado ideal, para que fosse possível definir o valor de uma opção em função do preço de sua ação. As considerações são:

1. O preço da ação segue um Movimento Geométrico Browniano com taxa de juros e volatilidade constantes.
2. A venda de títulos é permitida com total utilização de recursos.
3. Não há custos de transações ou impostos. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis.
4. Não há qualquer dividendo durante a vida do derivativo.
5. Não há oportunidades de arbitragem sem risco.
6. A negociação com títulos é contínua.
7. A taxa de juros livre de risco de curto prazo é constante e igual para todos os vencimentos.

A Equação diferencial que caracteriza o problema do valor de uma opção que obedece a essas premissas é:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (21)$$

Onde r é a taxa de juros livre de risco, S é o preço do ativo, σ é a volatilidade do preço do ativo e f é o valor da opção que pode ser também representado por c ou p se for compra ou venda respectivamente.

A solução para esta equação para uma opção de compra no tempo zero é:

$$c = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \quad (22)$$

E para uma opção de venda:

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \quad (23)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r + \mathbf{s}^2 / 2)T}{\mathbf{s}\sqrt{T}} \quad (24)$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - \mathbf{s}^2 / 2)T}{\mathbf{s}\sqrt{T}} \quad (25)$$

Onde T é o tempo de maturação ou de exercício da opção, S_0 é o preço atual da ação, X é o preço do exercício, r é a taxa de juros livre de risco, \mathbf{s} é a volatilidade do preço da ação e $N(\cdot)$ é a Normal Cumulativa.

Black e Scholes e Merton deram grande contribuição ao meio científico impulsionando o estudo e o investimento em derivativos, levando a um mercado menos caótico nos anos 90, onde o investimento em opções passou a ser visto como uma maneira de redução da aversão ao risco frente a volatilidade do próprio mercado.

2.5. Opções Reais

Para uma firma, investir em um projeto depende de condições que satisfaçam a viabilidade deste projeto, o momento certo de investir e o retorno proporcionado.

A flexibilidade gerencial é inerente à avaliação de projetos de investimento. Esta flexibilidade permite poder escolher o momento certo de investir, e o quanto investir, alterar o cenário inicialmente definido, podendo o projeto ser diferido,

expandido, prorrogado ou abandonado após da fase de planejamento. Esta flexibilidade pode aumentar o valor do projeto.

As opções reais permitem capturar o valor da flexibilidade gerencial que os métodos tradicionais de avaliação de investimentos não conseguem fazer. Métodos como o Valor Presente Líquido (VPL) ou o Fluxo de Caixa Descontado (FCD) não são suficientes para captar o valor associado à flexibilidade, pois eles tratam apenas de fluxos de caixa previstos, descontados a uma taxa constante, por considerar o risco constante durante a vida do projeto.

O VPL é usado para tomada de decisão para determinado investimento baseado no valor atual do seu fluxo de caixa. Uma vez que este valor atual seja positivo, o investimento é rentável. Se o valor é negativo, jamais deve-se investir no projeto. Para o método do VPL, um investimento ou é reversível pois ao praticá-lo, o dinheiro gasto pode ser recuperado desde que as condições de mercado favoreçam, ou nunca deverá ser praticado, pois ao analisar o fluxo de caixa na data corrente, o valor presente não é atraente. Para as opções reais, o investimento é sempre irreversível, porém a data de investimento, que não precisa ser a data corrente, são flexíveis tornando o investidor apto a ponderar sobre o melhor momento e o quanto deve ser investido. Para o VPL, um investimento pode ser irreversível enquanto que para o método das opções reais, todo investimento é irreversível, pois o investimento é o exercício de uma opção.

As opções reais observam o fluxo de caixa dinamicamente. Através da avaliação dinâmica do fluxo de caixa é possível conhecer o valor de um investimento inicial ao longo do ciclo de vida de um projeto. Através dessa avaliação pode-se investir imediatamente ou, esperar e investir numa data futura. É possível, então fazer uma analogia entre uma opção real à uma opção financeira. Uma firma com uma oportunidade de investimento, tem a opção de gastar uma quantia em dinheiro (o preço do exercício) agora ou no futuro buscando retorno por um ativo (um projeto).

A tabela a seguir ilustra a analogia que há entre as opções reais e as opções financeiras:

OPÇÃO FINANCEIRA	OPÇÃO REAL
Preço de Exercício.	Investimento no Projeto.
Ação.	Projeto.
Fluxo de Dividendos da Ação.	Fluxo de Caixa do Projeto Líquido das variações de seu valor.
Tempo de expiração.	Tempo de expiração da oportunidade de investimento.
Taxa de Juros Livre de Risco.	Taxa de Juros Livre de Risco.
Volatilidade no preço da ação.	Volatilidade no Valor do projeto.

Tabela 2 - Analogia entre as opções financeiras e opções reais.

Para se calcular o valor de uma opção real utiliza-se o mesmo princípio das opções financeiras, aonde o valor é o máximo entre zero e a subtração do Valor do Ativo pelo Investimento que nesse caso se comporta como o preço de exercício. A decisão de exercer uma opção pode ser determinada pela taxa de conveniência que proporciona ao possuidor de uma *commodity* uma forma de se obter lucro sobre o preço a ser pago pela *commodity* no futuro [5][7]. A taxa de conveniência ou taxa de dividendos, reflete o quanto o detentor da *commodity* pode ganhar se protegendo da escassez desta *commodity* ou da produção em larga escala. Quanto maior o estoque de certa *commodity* por parte do detentor, menor a possibilidade deste ter algum prejuízo, menor então a taxa de conveniência [7].

2.6. A Curva de Exercício Ótimo

A curva de exercício ótimo também conhecida como curva de gatilho [8][9][12] representa a fronteira entre o exercício da opção, na parte superior da curva, e o não exercício, na parte inferior da curva para todos os instantes de tempo envolvidos desde o pagamento do prêmio até a maturação da opção. O valor de uma opção que se localiza acima da curva é conhecido como um valor “dentro do dinheiro”. O valor da opção abaixo da curva é um valor “fora do dinheiro”.

A curva de exercício ótimo é em geral obtida através de métodos numéricos ou pode-se encontrar esta curva de forma analítica como é mostrado por Barone-

Adesi e Whalley em [3] e Geske e Johnson em [4], neste caso considerou-se que o preço do ativo subjacente segue um movimento geométrico browniano.

Considere um projeto que pode ser visto como uma opção americana de compra com um valor de fluxo de caixa corrente S e um valor de investimento X , tal que $X < S$. Se é cumprida esta condição diz-se que a opção real está dentro do dinheiro ($S - X \geq 0$). O ponto onde esta diferença (valor da opção) se faz igual a zero ($S^* - X = 0$) é um ponto da fronteira de exercício ótimo para este instante. Neste instante é indiferente investir o não no projeto.

Neste trabalho, é utilizado a notação “*” sobreposto à letra utilizada para designar o preço do ativo em análise, para indicar o preço do ativo que pertence a curva de exercício ótimo [3][4].