

**Dan Posternak**

Inferência da expressão analítica de uma  
Fronteira de Investimento Ótimo para um  
ativo que segue o processo de Reversão  
à Média por Programação Genética

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Departamento de Engenharia Elétrica**

Programa de Pós-Graduação

em Engenharia Elétrica

Rio de Janeiro

Setembro de 2004

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Dan Posternak**

**Inferência da expressão analítica de uma  
Fronteira de Investimento Ótimo para um  
ativo que segue o processo de Reversão  
à Média por Programação Genética**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial  
para obtenção do grau de Mestre pelo Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do  
Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio.

Orientador: Marco Aurélio C. Pacheco

Rio de Janeiro  
Setembro de 2004



**Dan Posternak**

**Inferência da Expressão Analítica de uma  
Fronteira de Investimento Ótimo para um Ativo  
que segue o processo de Reversão  
à Média por Programação Genética**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marco Aurélio Cavalcanti Pacheco**  
**Orientador**

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

**Profa. Karla Tereza Figueiredo Leite**  
UERJ

**Prof. Tara Keshar-Nanda Baidya**  
Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

**Prof. José Paulo Teixeira**  
Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**  
Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 21 de setembro de 2004

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Dan Posternak**

Graduado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) em 1996.

Ficha Catalográfica

Posternak, Dan

Interferência da expressão analítica de uma fronteira de investimento ótimo para um ativo que segue o processo de reversão à média por programação genética / Dan Posternak ; orientador: Marco Aurélio C. Pacheco. – Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Elétrica, 2004.

81 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.

Inclui referências bibliográficas

1.Engenharia elétrica – Teses. 2.Computação evolucionária. 3.Programação genética. 4.Regressão simbólica. 5.Opções financeiras. 6.Opções reais. 7.Reversão à média I. Pacheco, Marco Aurélio C. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

DBD: 621.3

## Agradecimentos

Aos meus pais, Leo Posternak e Sulamita Bushatsky.

Aos meus orientadores Marco Aurélio C. Pacheco e Marley Maria B.R. Vellasco pela total confiança, ensino e incentivo.

Ao Professor Tara Keshar Nanda Baidya que me ensinou que desafios são para curtir.

À Juan Guillermo, Yván Túpac e Edison Tito por todo o apoio técnico e pela amizade.

À Karla Figueiredo pelas sugestões.

Aos amigos André Vargas Abs da Cruz, Luciana Faletti Almeida, Thiago Guimarães, Bernardo Caldas Hoelz, Oldemar Duarte de Farias Jr. por todo o incentivo.

À Marco Antonio G. Dias por toda a contribuição.

Aos Professores que me indicaram ao mestrado e acreditaram em mim (Adriano Proença e Raad Yahya Qassim).

Para Sarah, a coisa mais importante que já me aconteceu na vida.

Para Sarah

“Amigos, a única miséria orgulhosa é a brasileira. Apanhem um pau-de-arara, ou melhor: - apanhem um retirante de Portinari. Lá está o homem, nos seus farrapos espectrais, lambendo a sua rapadura. Pois o pobre diabo brasileiro conserva, no meio da sua subnutrição mais hedionda, todas as suas potencialidades intactas. Basta que alguém provoque a sua honra. Ele ressuscitará como um Lázaro da miséria; e, na sua ressurreição, há de ser capaz de chupar a carótida de reis”.

Nélson Rodrigues

## Resumo

Posternak, Dan; Pacheco, Marco Aurélio C. (Orientador). **Regressão Simbólica por Programação Genética da expressão analítica de uma Fronteira de Investimento Ótimo para um ativo que segue o processo de Reversão à Média.** Rio de Janeiro, 2004. 81p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esta Pesquisa tem por objetivo utilizar a Regressão Simbólica por Programação Genética para encontrar uma equação analítica para a fronteira de exercício ótima (ou curva de gatilho) de uma opção sobre um ativo do qual o preço tem um comportamento simulado pelo processo estocástico conhecido como processo de reversão à média (PRM).

Para o cálculo do valor de uma opção desde de sua aquisição até sua maturação, normalmente faz-se o uso do cálculo da fronteira de exercício ótimo. Esta curva separa ao longo do tempo a decisão de exercer ou não a opção.

Sabendo-se que já existem soluções analíticas para calcular a fronteira de exercício ótimo quando o preço do ativo segue um Movimento Geométrico Browniano, e que tal solução genérica ainda não foi encontrada para o PRM, neste trabalho, foi proposto o uso da Programação Genética (PG) para encontrar tal solução analítica.

A Programação Genética utilizou um conjunto de amostras de curvas de exercício ótimo parametrizadas segundo a variação da volatilidade e da taxa de juros livre de risco, para encontrar uma função analítica para a fronteira de exercício ótima, obtendo-se resultados satisfatórios.

## Palavras-chave

Computação Evolucionária; Programação Genética; Regressão Simbólica; Opções Financeiras; Opções Reais; Reversão à Média.



## Abstract

Posternak, Dan; Pacheco, Marco Aurélio C. (Advisor). **Inference of the Analytical Expression from an Optimal Investment Boundary for an Asset that Follows the Reversion Mean Process through Genetic Programming.** Rio de Janeiro, 2004. 81p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This research intends on to use the Symbolic Regression by Genetic Programming to find an analytical equation that represents an Optimal Exercise Boundary for an option of an asset having its price behavior simulated by a stochastic process known as Mean Reversion Process (MRP).

To calculate an option value since its acquisition until its maturity, normally is used to calculate the Optimal Exercise Boundary. This frontier separates along the time the decision to exercise the option or not.

Knowing there already are analytical solutions used to calculate the Optimal Exercise Boundary when the asset price follows the Geometric Brownian Motion, and such general solution was not found yet to MRP, in this work, it was proposed the use of Genetic Programming to find such analytical solution.

The Genetic Programming used an amount of samples from optimal exercise curves parameterized according the change in the volatility and risk free interest rate, to find an analytical function that represents Optimal Exercise Boundary, achieving satisfactory results.

## Keywords

Evolutionary Computation; Genetic Programming; Symbolic Regression; Financial Options; Real Options; Mean Reversion.

## Sumário

|   |    |
|---|----|
| 1 . Introdução                                    | 14 |
| 1.1. Motivação                                    | 14 |
| 1.2. Objetivos                                    | 16 |
| 1.3. Descrição do Trabalho                        | 16 |
| 1.4. Conteúdo da Dissertação                      | 17 |
| <br>  |    |
| 2 . A teoria das opções                           | 19 |
| 2.1. Introdução                                   | 19 |
| 2.2. Processos Estocásticos                       | 19 |
| 2.2.1. Processo de Markov                         | 20 |
| 2.2.2. Processos de Wiener                        | 20 |
| 2.2.3. Processo de Itô                            | 21 |
| 2.2.4. Lema de Itô                                | 21 |
| 2.2.5. Movimento Geométrico Browniano             | 22 |
| 2.2.6. Processos de Reversão à Média              | 22 |
| 2.2.7. Modelo de Reversão à Média de Dias         | 24 |
| 2.2.8. Modelo de Reversão à Média de Bhattacharya | 25 |
| 2.3. Opções Financeiras                           | 25 |
| 2.3.1. Opção de Compra                            | 26 |
| 2.3.2. Opção de Venda                             | 26 |
| 2.3.3. Fatores que afetam o preço das opções      | 27 |
| 2.4. Modelo de Black & Scholes                    | 30 |
| 2.5. Opções Reais                                 | 31 |
| 2.6. A Curva de Exercício Ótimo                   | 33 |
| <br>  |    |
| 3 . Programação Genética                          | 35 |
| 3.1. Introdução                                   | 35 |
| 3.2. Representação                                | 36 |
| 3.3. Preparação para Programação Genética         | 38 |

|  |    |
|--|----|
| 3.4. Avaliação   | 40 |
| 3.4.1. Aptidão Bruta   | 40 |
| 3.4.2. Aptidão Padronizada   | 41 |
| 3.4.3. Aptidão Ajustada  | 41 |
| 3.4.4. Aptidão Normalizada   | 42 |
| 3.5. Operadores  | 42 |
| 3.5.1. Reprodução (cópia)  | 43 |
| 3.5.2. Operador “Crossover”  | 44 |
| 3.5.3. Mutação   | 45 |
| 3.5.4. Permutação  | 45 |
| 3.5.5. Edição  | 46 |
| 3.5.6. Encapsulamento  | 46 |
| 3.5.7. Destruição ( <i>Decimation</i> )                                | 47 |
| 3.6. Técnicas Evolucionárias   | 47 |
| 3.7. Parâmetros de Controle  | 48 |
| 3.8. Regressão Simbólica   | 49 |
| 3.9. Técnicas para Aperfeiçoamento da PG                               | 49 |
| 3.9.1. Programação Genética Fortemente Tipada                          | 50 |
| 3.9.2. Função Automaticamente Definida (ADF)                           | 50 |
| <br>   |    |
| 4 . Regressão Simbólica para uma Curva de Exercício Ótimo              | 54 |
| 4.1. Introdução  | 54 |
| 4.2. Descrição do modelo   | 54 |
| 4.2.1. Geração de Amostras   | 55 |
| 4.2.2. Programação Genética  | 55 |
| 4.2.3. Cálculo do Valor da Opção por SMC                               | 56 |
| <br>   |    |
| 5 . Solução por Regressão Simbólica                                    | 58 |
| 5.1. Introdução  | 58 |
| 5.2. Geração de Amostras das Curvas de Exercício Ótimo                 | 59 |
| 5.3. Função analítica de uma curva de exercício ótimo por PG           | 60 |
| 5.3.1. Terminais para a Evolução da Função da Curva de Exercício Ótimo | 60 |

|   |    |
|---|----|
| 5.3.2. Valores para os Parâmetros de Controle da PG               | 61 |
| 5.3.3. Resultados da PG   | 63 |
| 5.4. Cálculo do Valor da Opção por Simulação de Monte Carlo (SMC) | 72 |
| 6 . Conclusões e Trabalhos Futuros                                | 76 |
| 7 . Referências Bibliográficas                                    | 79 |

## Lista de tabelas

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 - Resumo dos efeitos das variáveis sobre o valor das opções enquanto varia-se uma e mantém-se as outras fixas [7].                           | 28 |
| Tabela 2 - Analogia entre as opções financeiras e opções reais.   | 33 |
| Tabela 3 - Dados para validação conforme métricas de previsão relativos ao indivíduo com avaliação normalizada de 0.66.                               | 66 |
| Tabela 4 - Dados para validação conforme métricas de previsão relativos ao indivíduo com avaliação normalizada de 0.77.                               | 66 |
| Tabela 5 - Dados para validação conforme métricas de previsão relativos ao indivíduo com avaliação normalizada de 0.79.                               | 67 |
| Tabela 6 - Simulação de Monte Carlo para Juros 0.04 e Volatilidade 0.25. Tempo aproximado de 10 minutos.  | 74 |
| Tabela 7 - Comparação entre o Valor da Opção das amostras e o Valor da Opção calculado para os mesmos parâmetros através de Simulação de Monte-Carlo. | 75 |

## Lista de figuras

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 - Representação em árvore para indivíduo de Programação Genética [15].  | 37 |
| Figura 2 - Numeração dos pontos de um indivíduo.   | 38 |
| Figura 3 - Ilustração do processo evolutivo de um sistema de Programação Genética [15].  | 39 |
| Figura 4 - Crossover entre dois indivíduos acima gerando os filhos abaixo com pedaços selecionados aleatoriamente nos pais trocados. | 44 |
| Figura 5 - Mutação. O segmento $\sqrt{30}$ foi substituído por 8.  | 45 |
| Figura 6 - Operação de Permutação [15].  | 45 |
| Figura 7 - Operação de Edição [15].  | 46 |
| Figura 8 - Operação de Encapsulamento. A sub-árvore “b*c” se transforma em $E_0$ podendo ser re-aproveitado [15].                    | 47 |
| Figura 9 - Diagrama de uma ADF [15].   | 51 |
| Figura 10 - Exemplo de uma ADF [15].   | 52 |
| Figura 11 - Crossover aplicado a ADF [15].   | 53 |
| Figura 12 - Diagrama de blocos ilustrando o modelo proposto.   | 55 |
| Figura 13 - GP X Curva Original, juros com 4% e volatilidade de 0.25.  | 68 |
| Figura 14 - GP X Curva Original, juros com 6% e volatilidade de 0.25.  | 68 |
| Figura 15 - GP X Curva Original, juros com 8% e volatilidade de 0.25.  | 69 |
| Figura 16 - GP X Curva Original, juros com 10% e volatilidade de 0.25.   | 69 |
| Figura 17 - GP X Curva Original, juros com 8% e volatilidade de 0.15.  | 70 |
| Figura 18 - GP X Curva Original, juros com 8% e volatilidade de 0.20.  | 70 |
| Figura 19 - GP X Curva Original, juros com 8% e volatilidade de 0.30.  | 71 |
| Figura 20 - GP X Curva Original, juros com 8% e volatilidade de 0.35.  | 71 |
| Figura 21 - GP X Curva Original, juros com 8% e volatilidade de 0.40.  | 72 |