

5.

EXEMPLOS NUMÉRICOS: ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA

5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta a aplicação dos procedimentos numéricos apresentados no Capítulo 4 na solução de problemas de vibração livre e análise dinâmica de alguns exemplos estruturais. Dando continuidade às análises não-lineares estáticas apresentadas no Capítulo 2, será dada atenção especial aos exemplos do arco senoidal e dos pórticos em L.

A seção 5.2 apresenta análises de vibração livre envolvendo o cálculo de frequências naturais e modos de vibração dos sistemas estruturais. Esta análise é fundamental no entendimento do processo de perda de estabilidade em estruturas com forte não-linearidade e caminhos de equilíbrio complicados.

Na seção 5.3 são analisados alguns problemas simples de integração numérica com o intuito de validar as implementações.

Finalmente, na seção 5.4 estuda-se o comportamento do arco senoidal e do pórtico em L quando estes são submetidos a certos carregamentos dinâmicos.

5.2. EXEMPLOS ENVOLVENDO ANÁLISE DE VIBRAÇÃO

Inicialmente, na seção 5.2.1, são apresentados alguns problemas estruturais simples envolvendo análise de vibração que validam as rotinas de solução de problemas de autovalores implementadas e estabelecem condições para se utilizar o elemento finito de ligação semi-rígida implementado em cálculos de frequências naturais. Em seguida, os exemplos estruturais de arco senoidal e pórticos em L, que já foram analisados na seção 3.2 quanto a influência dos parâmetros físicos e geométricos nos seus caminhos de equilíbrio, são analisados agora com o intuito de se compreender a influência destes parâmetros na estabilidade destas estruturas.

5.2.1

Barras com ligações semi-rígidas

Esta seção tem a finalidade de avaliar a eficiência dos procedimentos implementados no cálculo das freqüências naturais e a variação destas diante de diferentes níveis de carregamento estático.

Neste primeiro exemplo considera-se o caso de uma viga com duas ligações semi-rígidas nas suas extremidades, como mostrado na Figura 5.1.

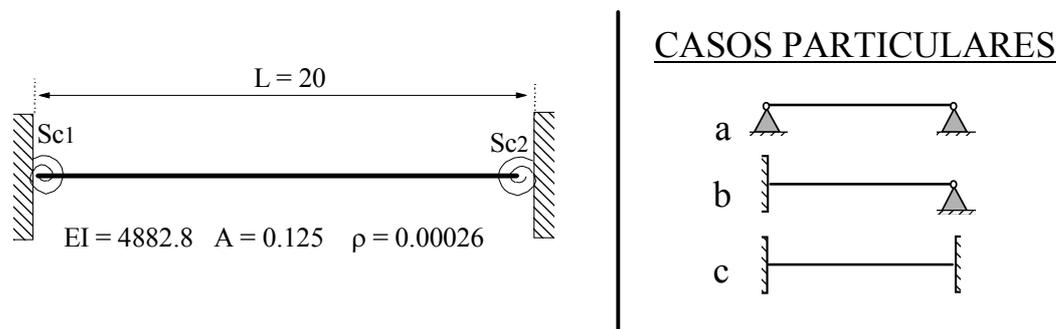


Figura 5.1: Viga com ligações semi-rígidas.

Dez elementos de mesmo tamanho são utilizados na modelagem, sendo 8 elementos de pórtico convencionais no interior e 2 elementos semi-rígidos nas extremidades da viga. Os valores obtidos para a menor freqüência natural de vibração do sistema, quando se varia a rigidez Sc da ligação, são apresentados na Figura 5.2 e comparadas com aquelas obtidas por Chan e Chui (2000).

Observe que quando a rigidez das ligações Sc tende a zero, a freqüência natural se aproxima, como esperado, do valor $\pi^2 \sqrt{EI/\rho AL^4}$, que é a solução analítica para menor freqüência natural da viga bi-apoiada. Quando a rigidez de uma das molas tende a infinito (engaste) enquanto a outra é mantida próxima de zero (apoio simples), a menor freqüência natural se aproxima do valor analítico da barra engastada-apoiada. Finalmente, quando $Sc \rightarrow \infty$, a menor freqüência se aproxima assintoticamente do resultado analítico da viga biengastada.

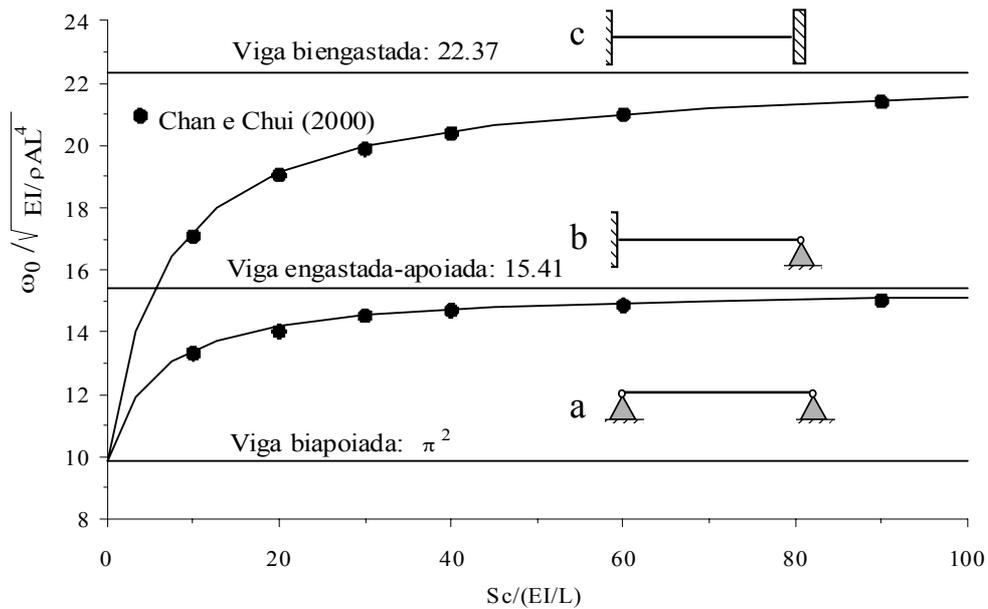


Figura 5.2: Viga com conexões semi-rígidas – Frequência natural ω_0 em função da Rigidez Sc .

Considera-se agora a coluna mostrada na Figura 5.3 que possui uma extremidade livre e uma conexão flexível na outra extremidade. Uma carga axial P é aplicada na extremidade livre.

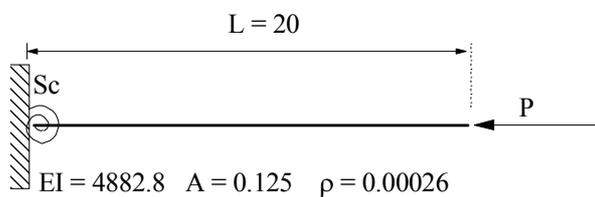


Figura 5.3: Coluna com ligação semi-rígida.

Na modelagem desse sistema estrutural foram adotados 9 elementos de mesmo tamanho distribuídos ao longo da barra e o elemento de conexão semi-rígido de comprimento $L_{SR} = L/500$. A necessidade de se utilizar elementos semi-rígidos de tamanho muito reduzido em certos problemas será discutida adiante.

Inicialmente, é realizada uma análise da estabilidade estática da coluna para diferentes valores da rigidez Sc . Várias trajetórias de equilíbrio foram obtidas e podem ser vistas na Figura 5.4, onde se destaca a influência da rigidez da ligação no valor da carga crítica da coluna.

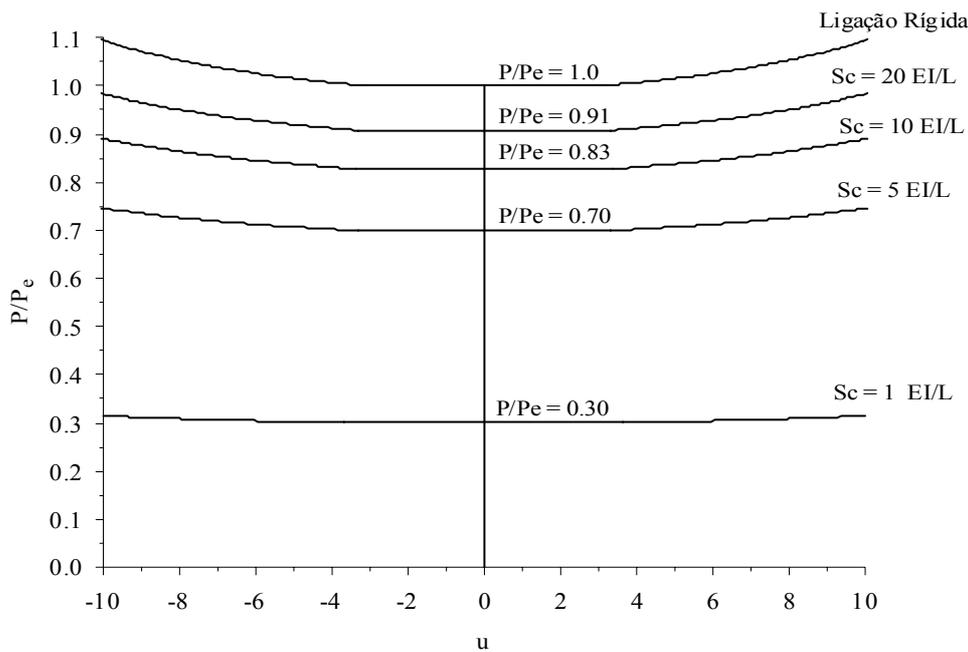


Figura 5.4: Trajetórias de equilíbrio da coluna para vários valores de Sc .

Como esperado, como o acréscimo de Sc , observa-se a tendência da carga de flambagem se aproximar do valor crítico da coluna engastada-livre ($P_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$). Quando $Sc=0$, o sistema se torna hipostático.

Em seguida, foi realizado um estudo sobre o efeito da carga axial P nas frequências naturais da coluna para diferentes valores de rigidez Sc . Os resultados dessa análise são mostrados na Figura 5.5. As frequências naturais obtidas são expressas de forma adimensional através da sua divisão pela menor frequência da coluna engastada-livre; o carregamento é adimensionalizado usando-se a carga crítica da coluna engastada-livre. Mais uma vez, utilizam-se aqui para comparação os resultados fornecidos por Chan e Chui (2000).

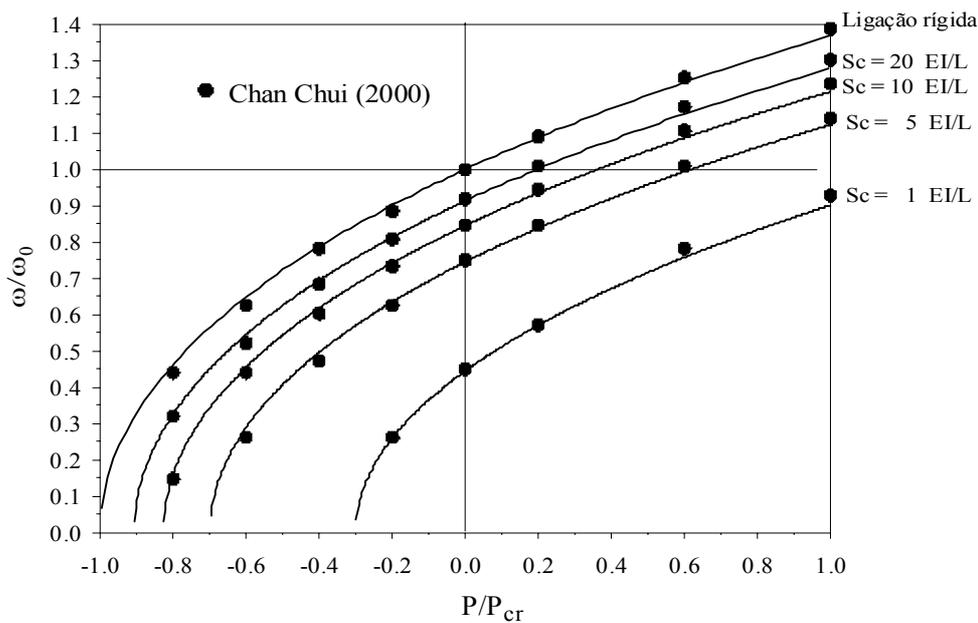


Figura 5.5: Influência da carga axial P e rigidez Sc da conexão na frequência natural ω .

Nota-se que o acréscimo de força axial modifica de forma significativa as frequências naturais da coluna. Se a força axial P é de tração, as frequências aumentam; se P for de compressão, as frequências diminuem. Quando a força P de compressão se aproxima do valor crítico a frequência natural tende a zero. Para ilustrar melhor esse fato, mostra-se na Figura 5.6 a variação do quadrado da frequência adimensional com o nível de carregamento estático. No caso de colunas, em virtude da linearidade do caminho fundamental de equilíbrio, essa relação é linear. Com base nessa relação, pode-se identificar, usando as frequências naturais da estrutura para pequenos níveis de carregamento, por extrapolação, a carga crítica da estrutura. Esse procedimento tem sido proposto na literatura como um método de ensaio não destrutivo para se avaliar a capacidade de carga de certas estruturas.

Convém salientar que em várias estruturas práticas, tais como torres, a conexão na base apresenta o comportamento de uma ligação semi-rígida, sendo, como mostram estes resultados, a avaliação de sua rigidez um dado importante para avaliar a resposta e segurança da estrutura.

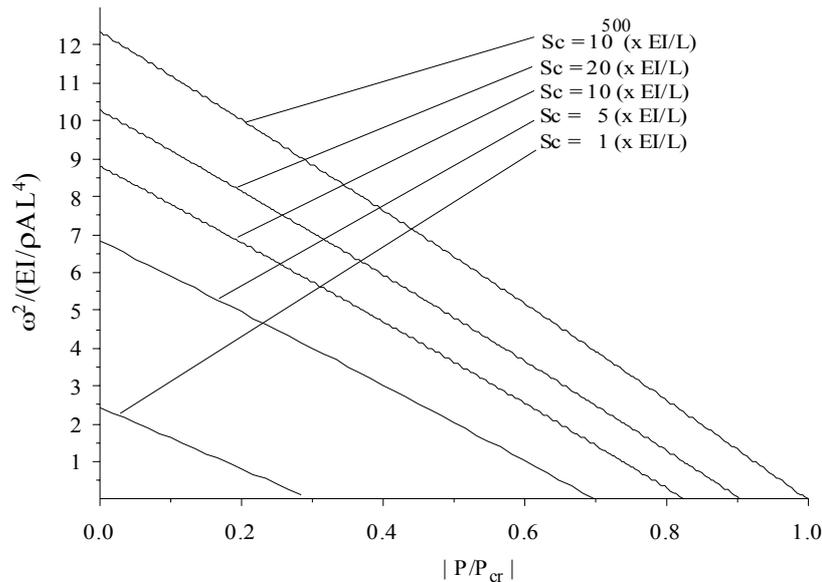


Figura 5.6: Influência da carga axial P e rigidez Sc da conexão no quadrado da frequência natural.

Considere agora, como ilustrado na Figura 5.7, uma coluna com ligações semi-rígidas nas duas extremidades e submetida a uma força axial P na extremidade livre a translação.

O objetivo inicial deste exemplo é analisar a variação da frequência natural da coluna com a rigidez Sc da ligação e verificar a influência da malha de elementos finitos nos resultados. Dessa forma é possível obter também a frequência da estrutura para os casos extremos de Sc , ou seja, a coluna bi-apoiada ($Sc = 0$) e biengastada ($Sc \rightarrow \infty$).

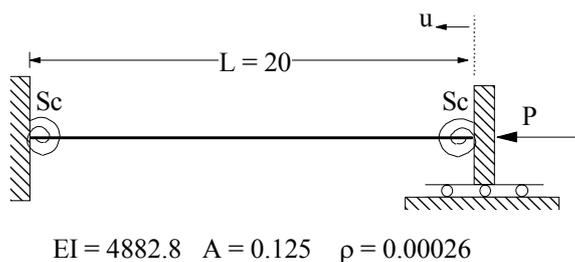


Figura 5.7: Coluna com ligações semi-rígidas nas extremidades.

Inicialmente, consideram-se duas malhas formadas por 10 e 30 elementos finitos de mesmo tamanho, sendo os elementos com ligações semi-rígidas localizados nas extremidades e de rigidez $Sc = 0$, simulando, portanto, uma coluna bi-apoiada. Os resultados obtidos dessas duas modelagens são comparados àqueles de uma coluna biapoiada discretizada com 10 elementos padrão de pórtico

plano de mesmo comprimento. Pode-se observar, através da Figura 5.8, que as frequências naturais calculadas para a coluna biapoiada modelada com elementos semi-rígidos com $Sc = 0$ não apresentam bons resultados, mesmo para uma malha mais refinada (30 elementos). Observa-se que para a barra descarregada o resultado é excelente, mas a discrepância cresce a medida que se aumenta a força compressiva.

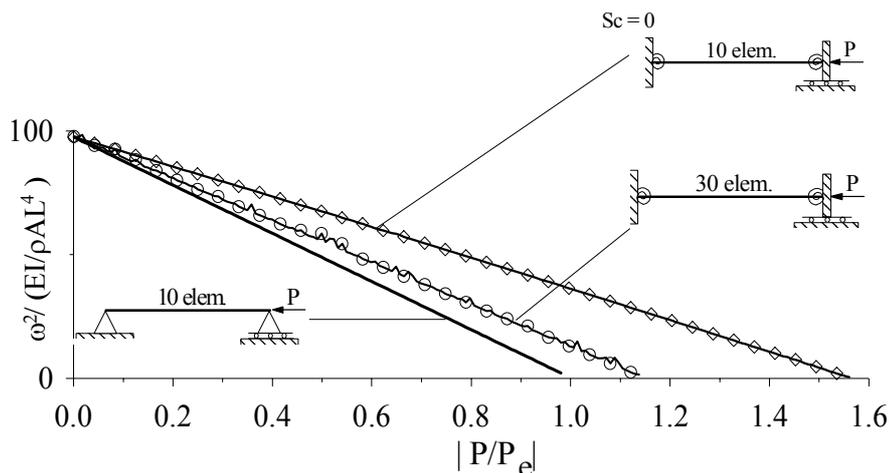


Figura 5.8: Influência da malha e da rigidez da ligação Sc nas frequências da coluna.

Nenhum comentário foi encontrado na literatura sobre ligações semi-rígidas a respeito dessa sensibilidade. Como base na análise das matrizes do sistema discretizado, verificou-se que a diminuição do comprimento do elemento semi-rígido diminui essa sensibilidade. A Figura 5.9 apresenta o novo modelo adotado para a coluna: 10 elementos padrão de pórtico plano de mesmo comprimento ligados a dois elementos semi-rígidos de comprimento reduzido L_{SR} .

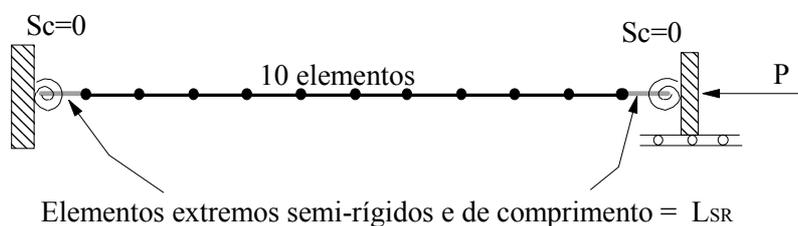


Figura 5.9: Modelo da coluna com 10 elementos padrão de pórtico plano iguais e 2 elementos extremos semi-rígidos com comprimento L_{SR} .

Um estudo foi então realizado para verificar que comprimento L_{SR} deveria ser adotado. Os resultados desse estudo são apresentados na Figura 5.10, que mostra que a medida que o comprimento do elemento semi-rígido diminui a resposta tende à solução exata da coluna bi-apoiada ($Sc = 0$).

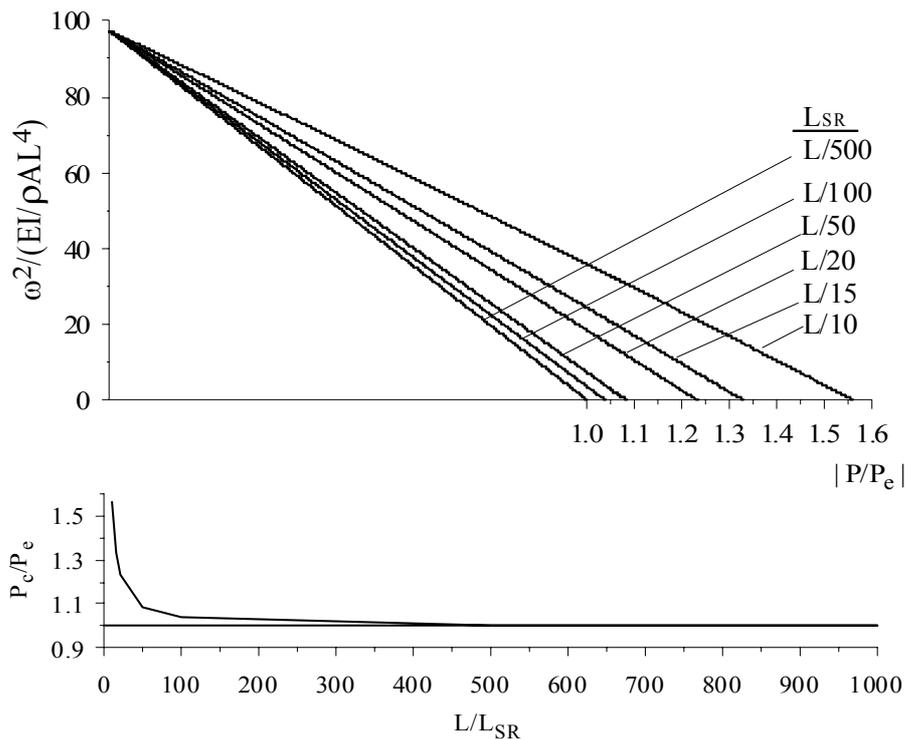


Figura 5.10: Sensibilidade ao comprimento L_{SR} do elemento com ligações semi-rígidas.

Com o modelo ilustrado na Figura 5.9 e adotando-se para o elemento semi-rígido $L_{SR} = L/500$ chegou-se às respostas apresentadas na Figura 5.11, onde é apresentada a variação da frequência natural com carregamento P para diferentes valores da rigidez da ligação S_c . Para $S_c = 0$ a estrutura se torna instável para um carregamento de compressão $P = P_e$ ($\pi^2 EI/L^2$), que é o valor analítico da carga crítica de compressão de Euler para a coluna bi-apoiada; para $S_c \rightarrow \infty$ a estrutura perde a estabilidade quando $P = 4 P_e$, que é o valor analítico da carga crítica da coluna bi-engastada. Em todos os exemplos mostrados a seguir sempre se usou um valor de L_{SR} suficientemente pequeno para se garantir a precisão dos resultados.

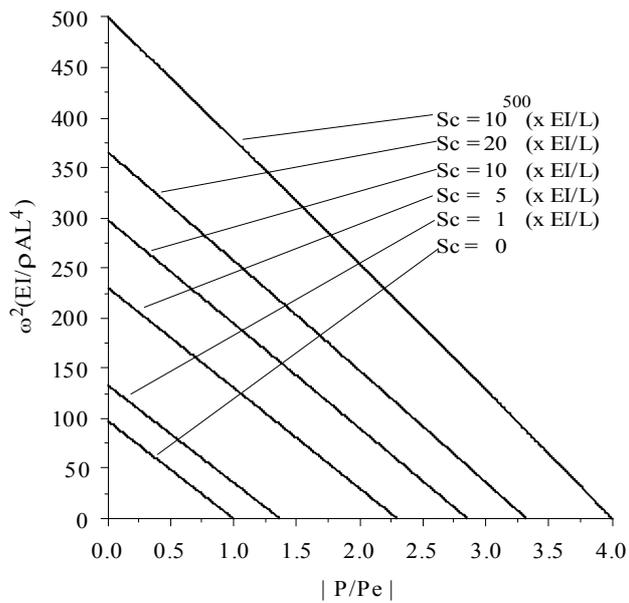


Figura 5.11: Relações frequência versus carga.

A Tabela 5.1 indica que as frequências naturais obtidas para esses valores extremos de rigidez das ligações, e considerando $P = 0$, apresentam boa concordância com os valores analíticos extraídos da literatura.

	Análítico (Paz, 1997)	Presente trabalho
Biapoiada	97.409	97.502
Biengastada	500.565	500.607

Tabela 5.1: Frequências naturais da coluna para valores extremos de Sc e para a força axial $P = 0$.

Através de uma análise não-linear estática, são obtidas as trajetórias de equilíbrio mostradas na Figura 5.12, sendo u o deslocamento na direção axial, do ponto localizado na extremidade direita da coluna.

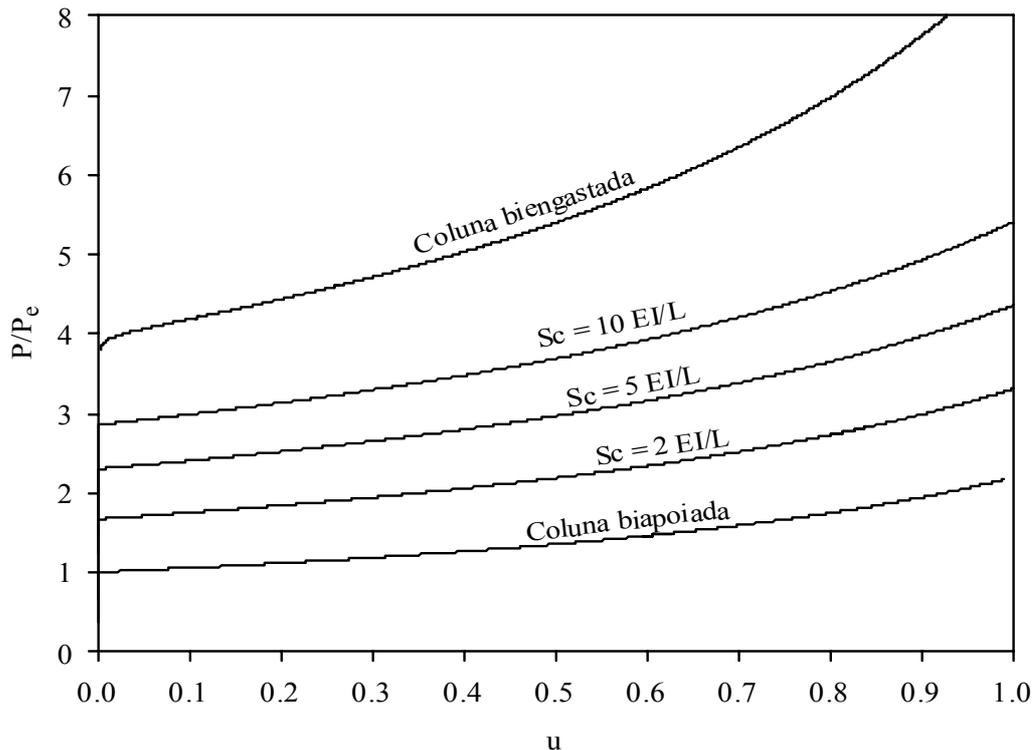


Figura 5.12: Trajetórias de equilíbrio da coluna com diferentes valores de Sc .

Superpondo-se os valores obtidos para a carga crítica através da análise estática (Figura 5.12) com os valores de carga que levaram a frequência natural da coluna a zero (Figura 5.11) e comparando esses resultados com os fornecidos por Chan e Chui (2000), pode-se, através da Figura 5.13, mais uma vez verificar a eficiência do procedimento adotado no presente trabalho.

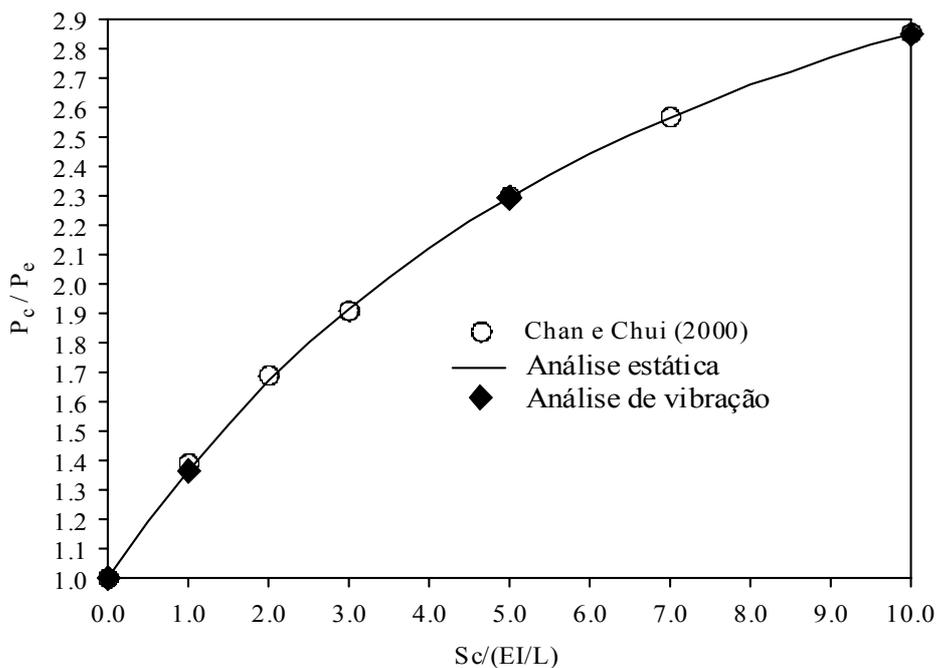


Figura 5.13: Trajetórias de equilíbrio da coluna com diferentes valores de Sc .

5.2.2

Arco senoidal sob carregamento distribuído

5.2.2.1

Arco abatido: $z_0 = 20$ mm

A Figura 5.14 mostra o mesmo arco para o qual foi realizada análise estática apresentada no capítulo 3. Aqui ele é modelado com 16 elementos finitos com a mesma projeção horizontal L_e e mais 2 elementos extremos com ligações semi-rígidas de comprimento $L_{SR}=L_e/10$.

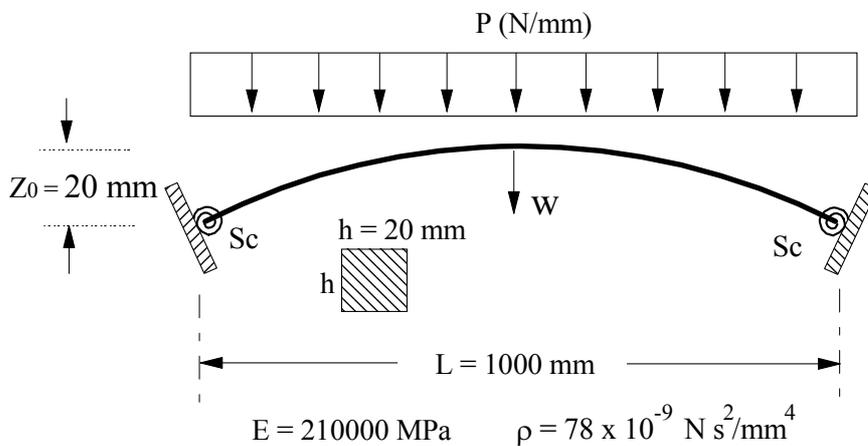


Figura 5.14: Arco senoidal sob carregamento distribuído.

A Figura 5.15 mostra os modos de vibração associados às 3 primeiras frequências naturais do arco para três condições de apoio: arco biapoiado, biengastado e com rigidez intermediária (ligações semi-rígidas) de $Sc = 5 EI/L$.

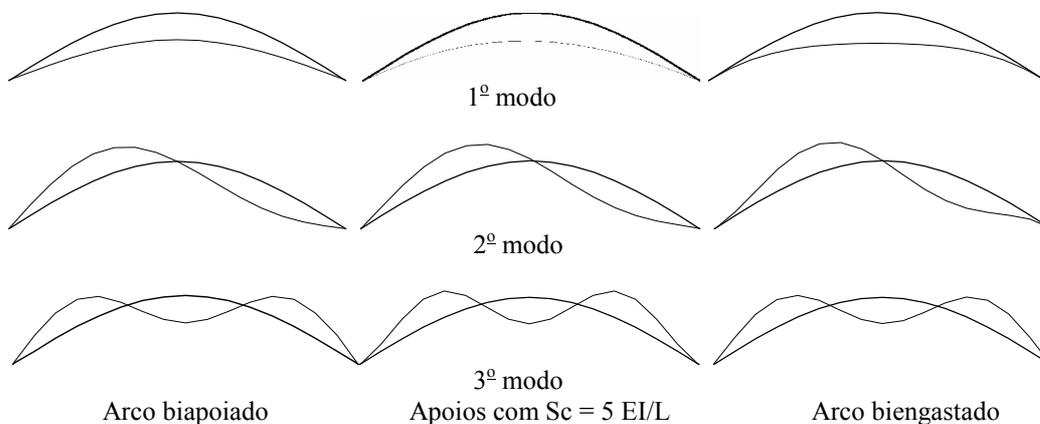


Figura 5.15: Modos de vibração.

Sendo esse um arco bastante abatido, observa-se que o primeiro modo de vibração é sempre simétrico, independente do valor de Sc . Adiante será visto que esta característica pode se modificar com a variação da altura z_0 do arco.

A Figura 5.16 exibe a variação das 3 primeiras freqüências naturais em função da rigidez das ligações, representadas pelo fator γ que pode assumir valores reais entre 0 (rótula perfeita) e 1 (ligação perfeitamente rígida). O parâmetro de rigidez Sc é dado em função de γ por : $Sc = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{3EI}{L}$.

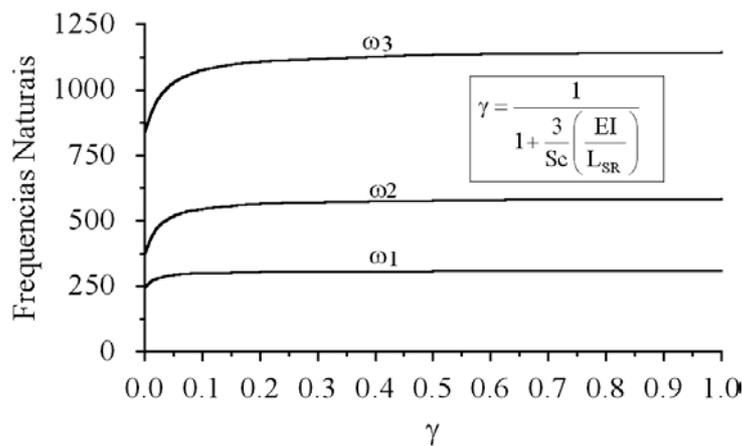


Figura 5.16: Variação das freqüências naturais com o parâmetro de rigidez da ligação γ .

Neste caso as freqüências estão sempre bem espaçadas, crescendo a medida que γ cresce, tendendo assintoticamente aos valores obtidos para um arco engastado. É interessante notar que a influência da ligação é maior para as freqüências mais altas. Isto se deve ao fato de, para modos mais altos, haver uma maior influência da energia de flexão das molas na rigidez efetiva do arco.

Em situações práticas podem existir pequenas diferenças entre os apoios que podem ocorrer durante a montagem ou mesmo durante a vida útil da estrutura. Para se estudar o efeito dessa classe de imperfeições, considera-se que a rigidez do apoio direito Sc_2 seja diferente da rigidez do apoio esquerdo Sc_1 . A imperfeição é definida através do parâmetro α_{imp} como mostra a Figura 5.17.

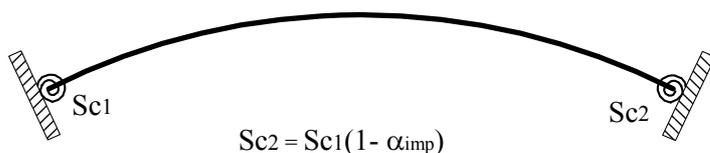


Figura 5.17: Imperfeição de apoio: $Sc = 5 EI/L$.

A Tabela 5.2 mostra a variação das 3 primeiras frequências com o parâmetro α_{imp} .

α_{imp}	ω_1	ω_2	ω_3
0.1	268.251	435.393	909.632
0.2	267.403	432.919	906.596
0.3	266.464	430.286	903.416
0.4	265.418	427.480	900.079
0.5	264.246	424.488	896.577

Tabela 5.2: Variação das 3 primeiras frequências naturais com o parâmetro imperfeição do apoio α_{imp} .

Observa-se que há uma pequena redução no valor das frequências devido à diminuição da rigidez do apoio direito. Entretanto uma maior sensibilidade pode ser observada quando se considera arcos menos abatidos e o efeito do carregamento estático.

Para se estudar o efeito do carregamento estático em arcos, o problema se torna numericamente mais complexo que no caso da coluna, onde a influência da carga axial aparece somente na matriz de rigidez geométrica. Sendo o caminho de equilíbrio do arco eminentemente não-linear, deve-se introduzir o carregamento estático através do processo incremental-iterativo de solução não-linear e calcular a cada incremento as frequências naturais e modos de vibração em torno da configuração deformada. Com base nesse procedimento, obtém-se a Figura 5.18 que mostra a variação da primeira frequência natural com a carga para diversos valores da rigidez Sc . Estes resultados devem ser analisados conjuntamente com os da Figura 3.11, onde se estuda a influência de Sc no caminho não-linear de equilíbrio do arco.

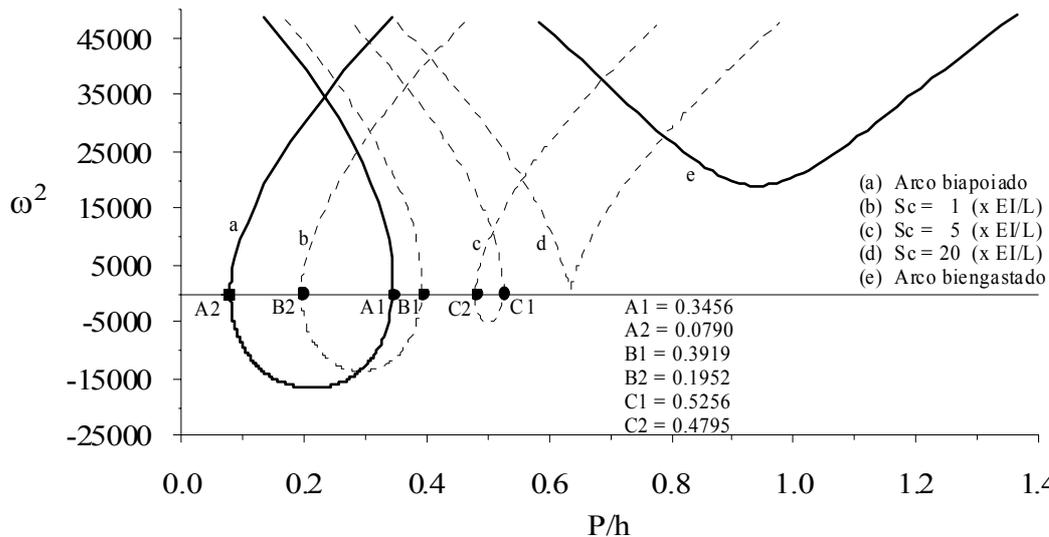


Figura 5.18: Variação da primeira frequência natural com o parâmetro de rigidez das ligações.

Nota-se a grande influência do carregamento estático nas frequências de vibração do arco. Essa influência torna-se mais marcante a medida que Sc decresce, ocorrendo um decréscimo acentuado no valor da frequência mínima e uma maior variação com o nível de carregamento. Isto porque a medida que Sc decresce, diminui a rigidez efetiva do arco e aumenta a não-linearidade da solução. Verifica-se que para os arcos, a relação carga-quadrado da frequência já não é mais linear, como no caso da coluna. Isto em virtude da não-linearidade do caminho de equilíbrio. Nota-se também que para pequenos valores de Sc , o quadrado da frequência se torna negativo, o que leva a frequências imaginárias. Segundo o critério dinâmico de estabilidade (Seydel, 1988), isso ocorre quando a configuração de equilíbrio é instável. Assim, pode-se identificar a partir da relação carga-frequências os trechos estáveis e instáveis dos caminhos de equilíbrio. No presente caso, os trechos instáveis correspondem ao trecho do caminho de equilíbrio entre os dois pontos limites observados na Figura 3.11. Os valores das cargas limites são também apresentados na Figura 5.18.

Cabe aqui ressaltar que a literatura técnica descreve várias estruturas metálicas em arco, em particular coberturas que utilizam arcos abatidos, que sofreram perda de estabilidade sob cargas estáticas ou dinâmicas em virtude da deterioração nos apoios. Um dos motivos mais frequentes é a corrosão. Nestes casos há um decréscimo lento no valor de Sc com, como mostram os resultados aqui apresentados, mudanças acentuadas na rigidez global da estrutura e em suas características dinâmicas. Mudanças estas que só podem ser detectadas e

quantificadas através de uma análise detalhada do comportamento não linear da estrutura. Os resultados também ressaltam a importância de se avaliar corretamente a rigidez das ligações no cálculo dessas estruturas.

5.2.2.2

Estudo do parâmetro geométrico z_0

No Capítulo 3 foram estudadas as trajetórias de equilíbrio para diferentes valores da altura z_0 (Figura 3.14) e considerando o arco senoidal com as características originalmente propostas por Bergan (1980). Aqui é feita a análise do parâmetro z_0 em relação aos modos de vibração e à variação das frequências naturais considerando-se as mesmas alturas. A Figura 5.19 mostra os dois primeiros modos de vibração para diferentes valores da altura do arco z_0 , mantendo-se o vão constante. Nota-se que para pequenos valores de z_0 o primeiro modo é sempre simétrico e o segundo assimétrico, estando as frequências bem espaçadas. A medida que z_0 cresce, as frequências se aproximam (ver Figura 5.19b) e a partir de um certo valor limite a frequência do modo assimétrico torna-se inferior à do modo simétrico, havendo uma inversão da forma do primeiro modo, como mostram as Figuras 5.19c e 5.19d.

Isto pode ser mais bem observado na Figura 5.20 onde se mostra a variação das duas menores frequências do arco em função de z_0 . Nota-se que, enquanto a frequência associada ao modo simétrico cresce linearmente com z_0 , a frequência do modo assimétrico se mantém quase que constante. Para z_0 aproximadamente igual a 31.4 mm, tem-se que as duas primeiras frequências são praticamente coincidentes. Cabe ressaltar que em estruturas com acentuado comportamento não-linear este fato ocorre com frequência, dando origem a diversos fenômenos de ressonância interna.

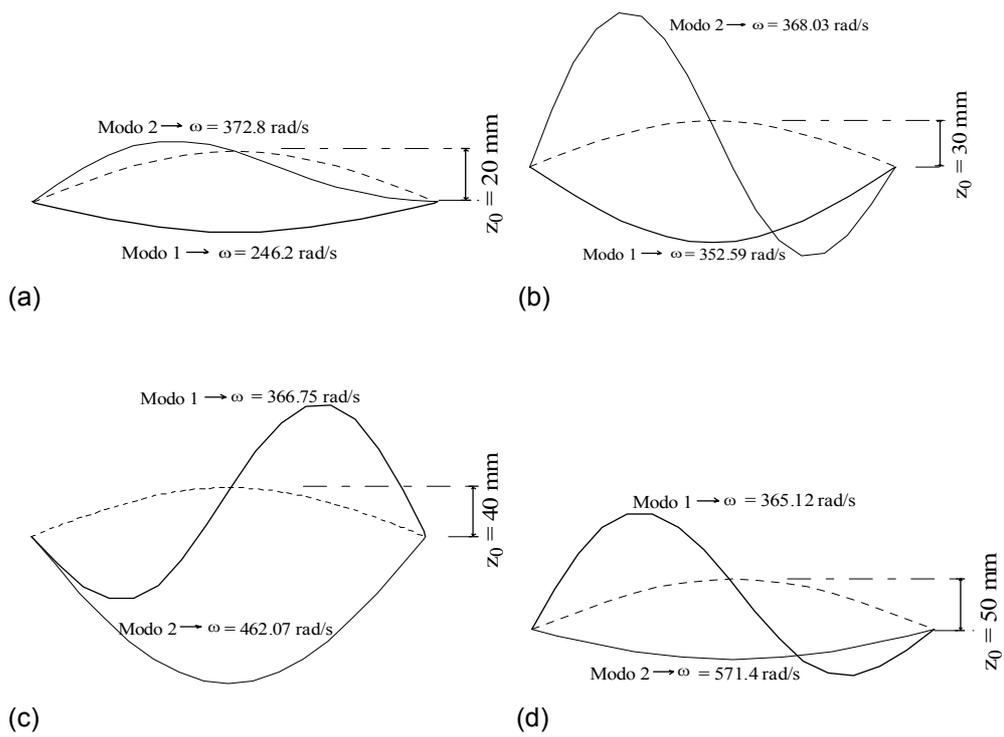


Figura 5.19: Modos de vibração para diferentes valores da altura z_0 .

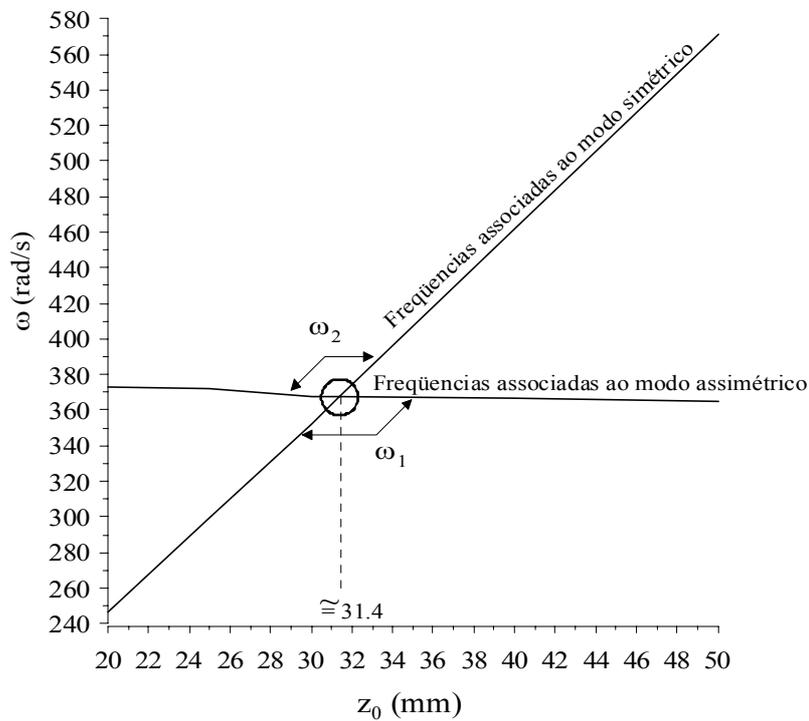


Figura 5.20: Variação das duas menores freqüências do arco em função de z_0 .

Na Figura 5.21 mostra-se a variação da primeira frequência natural considerando-se o arco perfeitamente simétrico e com uma imperfeição inicial bastante pequena que leva a uma pequena assimetria da estrutura. Nota-se que ambos os modelos levam aos mesmos resultados para pequenos valores de z_0 . À medida que z_0 cresce, passa a ocorrer uma bifurcação no modo assimétrico ao longo do caminho de equilíbrio. Nota-se nestes gráficos que todo o caminho pós-crítico localizado entre os dois pontos de bifurcação é instável, o mesmo ocorrendo com o caminho fundamental.

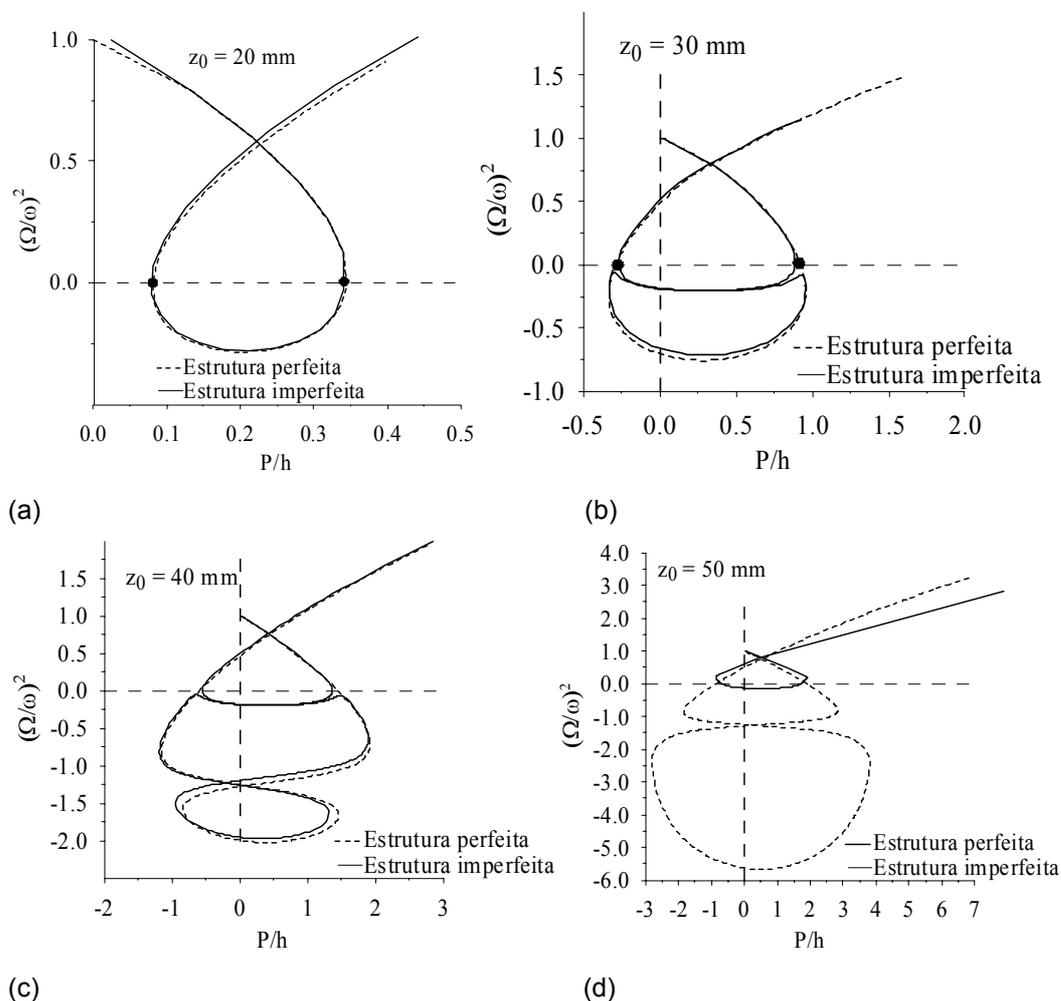


Figura 5.21: Variação da relação frequência vs. carregamento para diversos valores da altura z_0 : Estrutura perfeita e com pequena imperfeição inicial em um modo assimétrico.

Na Figura 5.22 mostra-se a variação das duas primeiras frequências naturais do arco perfeito com o nível de carregamento ao longo da trajetória de equilíbrio. Nota-se que a segunda menor frequência também é bastante afetada pelo nível de carregamento. Para valores altos de z_0 o quadrado da frequência se torna negativo

para ambos os modos indicando a importância de ambos os modos nos processos de perda de estabilidade do arco. Essas informações obtidas do modelo estrutural com um elevado nível de discretização são essenciais para o desenvolvimento de modelos discretos de baixa dimensão. O uso de modelos com poucos graus de liberdade (usualmente um ou dois) têm sido a prática usual na análise de vibrações não-lineares, isto por permitir o uso eficiente de diversos métodos de análise que se tornam impraticáveis para sistemas de grande dimensão e uma análise paramétrica mais detalhada do problema. Entretanto, para se aferir a confiabilidade desses necessita-se de modelos mais elaborados como os apresentados nesta tese.

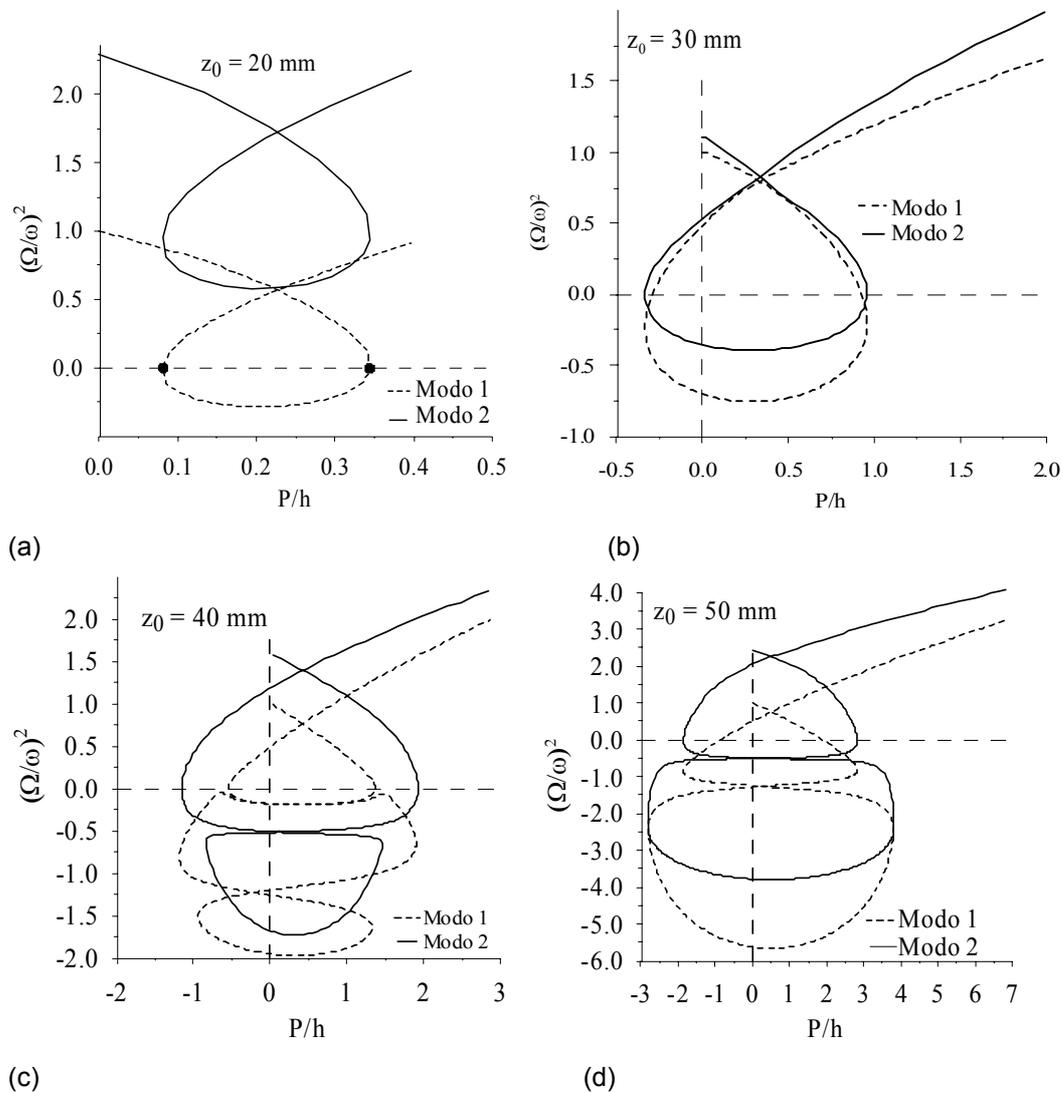


Figura 5.22: Variação da relação freqüência x carregamento com a altura z_0 . Freqüências associadas aos dois primeiros modos de vibração da estrutura perfeita.

As Figuras 5.23 e 5.24 exibem, respectivamente, a trajetória de equilíbrio e a variação da frequência com o carregamento para um arco com $z_0 = 31.4$ mm, na vizinhança do ponto onde há coincidência das frequências naturais. Nota-se que para esta geometria também há uma quase coincidência do ponto limite com o ponto de bifurcação, mostrando que é o mesmo mecanismo que gera a bifurcação por perda de simetria e a mudança da forma modal.

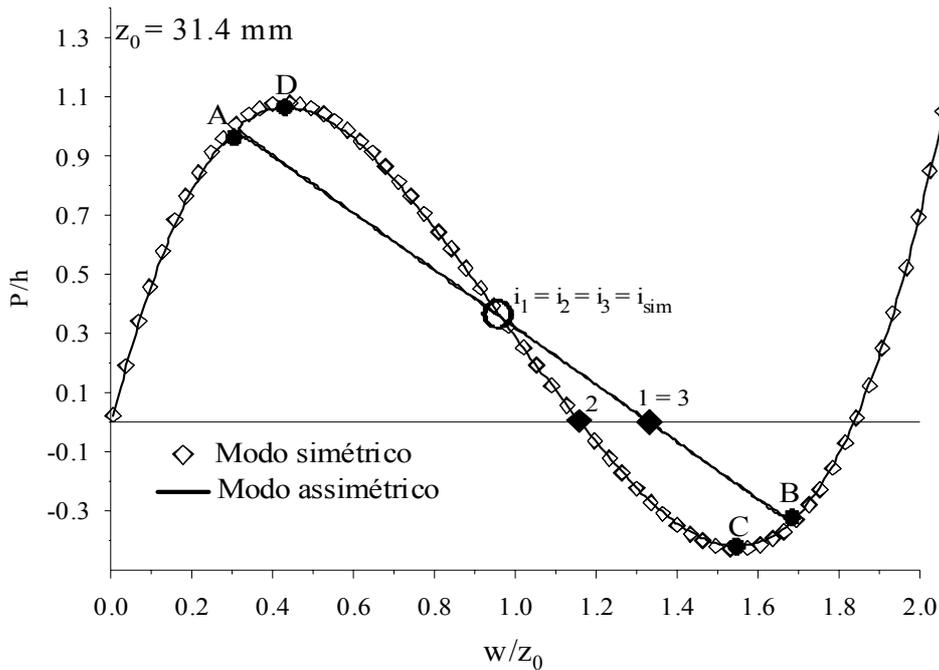


Figura 5.23: Trajetória de equilíbrio: $z_0 = 31.4$ mm.

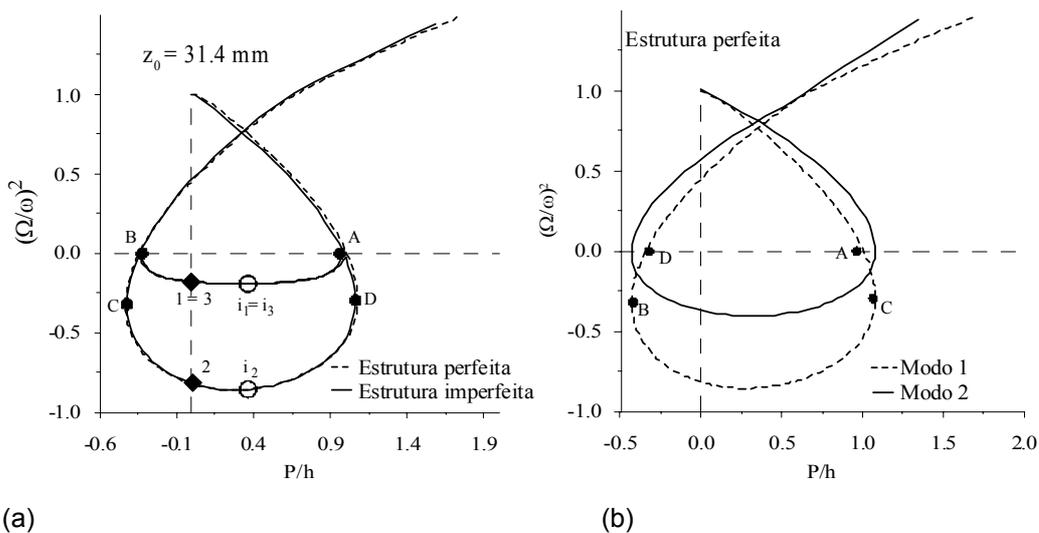


Figura 5.24: Freqüências naturais vs. carregamento: $z_0 = 31.4$ mm.

A seguir, na Figura 5.25, são mostradas as configurações deformadas do arco na vizinhança dos diferentes pontos críticos (pontos limites e pontos de bifurcação) ao longo do caminho de equilíbrio. Na Figura 5.26 mostram-se as configurações instáveis associadas ao caminho fundamental (i_2) e ao caminho pós-crítico (i_1 e i_3).

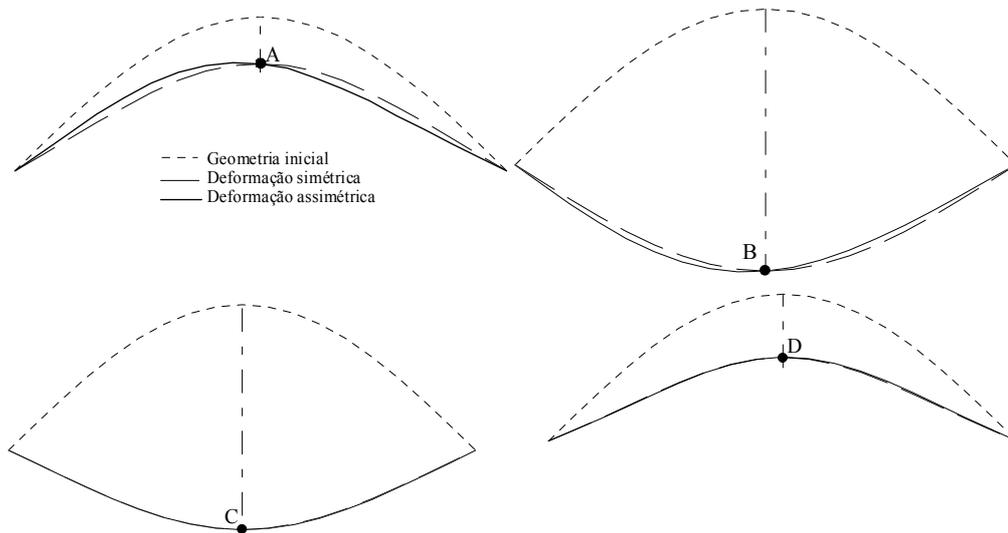


Figura 5.25: Configurações deformadas: $z_0 = 31.4$ mm.

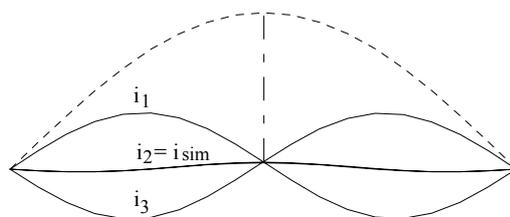


Figura 5.26: Configurações deformadas: $z_0 = 31.4$ mm.

Tem sido uma prática comum em análises numéricas por elementos finitos se utilizar condições de simetria para reduzir o número de graus de liberdade. Essa prática tem algumas implicações quando se estuda problemas de instabilidade. Nas Figuras 5.27 e 5.28 são comparados os resultados obtidos a partir de dois modelos diferentes usados para modelar o modo simétrico, isto é, o caminho fundamental de equilíbrio: (a) um modelo utilizando arco completo sem imperfeições e (b) um modelo utilizando metade do arco e restringindo a rotação e

o deslocamento horizontal no nó correspondente ao topo do arco. Observa-se que os dois modelos apresentam a mesma trajetória de equilíbrio, como mostra a Figura 5.28, porém há diferenças nas curvas que relacionam o quadrado da frequência com o carregamento e , portanto, na definição das regiões estáveis e instáveis ao longo do caminho fundamental de equilíbrio. Enquanto no modelo completo a frequência se torna nula no ponto de bifurcação, no modelo incompleto esta se torna nula no ponto relativo ao ponto limite, já que neste modelo a bifurcação é impedida pela restrição de simetria. Esta diferença se torna ainda maior para valores mais altos de z_0 .

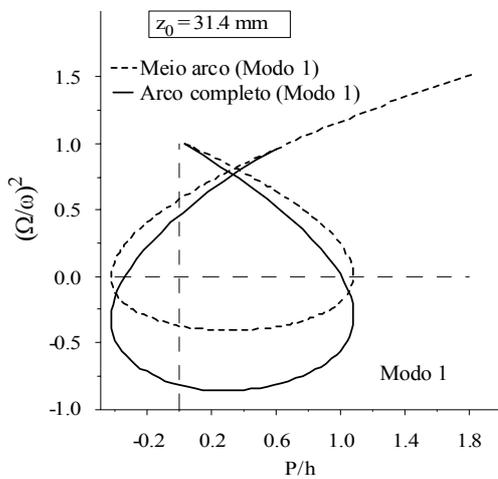


Figura 5.27: Frequências naturais x carregamento: comparação entre as frequências naturais dos dois modelos.

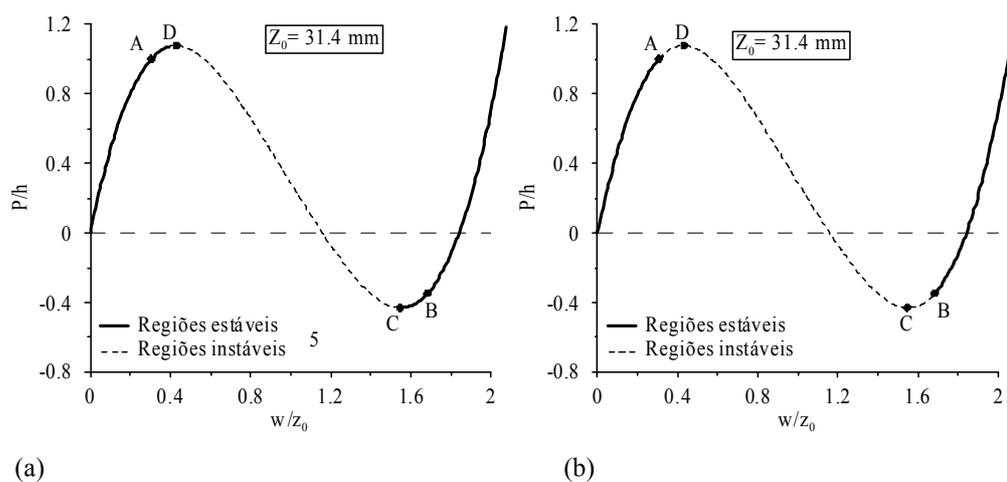


Figura 5.28: Estabilidade do arco simétrico $z_0 = 31.4$ mm: Modelo: (a) metade do arco, (b) arco completo.

Na Figura 5.30 mostra-se a variação do primeiro modo de vibração ao longo dos trechos estáveis do caminho de equilíbrio. As configurações correspondentes a esses modos são apresentadas na Figura 5.29.

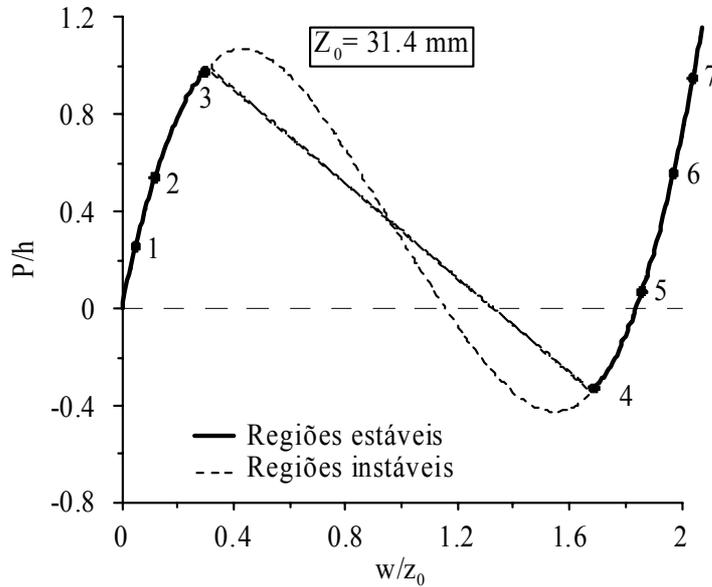


Figura 5.29: Arco $z_0 = 31.4 \text{ mm}$ – trajetória assimétrica.

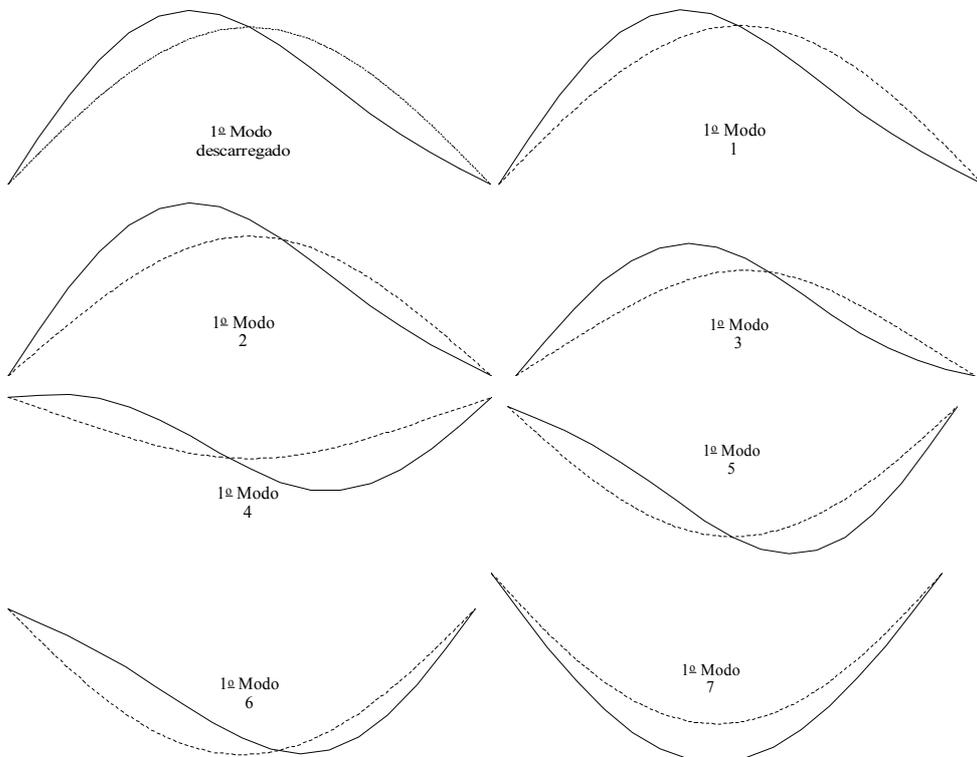


Figura 5.30: Variação do 1º modo de vibração (linha contínua) com o nível de carregamento representado em torno da configuração deformada (linha pontilhada).

5.2.3

Pórtico em L

Na Seção 3.3 foi apresentada uma análise estática paramétrica detalhada desta família de pórticos. Na presente seção, pretende-se dar ênfase ao estudo das frequências naturais e modos de vibração do pórtico em L. As características físicas e geométricas são apresentadas na Figura 5.31. Nestas análises, a ligação semi-rígida é representada por um elemento híbrido de comprimento $L_{sr} = L/1000$.

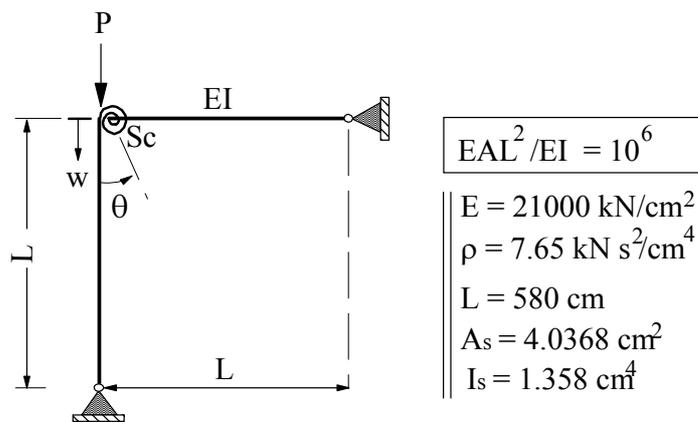


Figura 5.31: Pórtico em L com ligação semi-rígida entre as barras.

Como já visto na Seção 3.3, os pórticos em L geralmente apresentam um caminho fundamental de equilíbrio seguido de uma bifurcação assimétrica, caracterizada por uma dada inclinação inicial do caminho de equilíbrio pós-crítico. Foi também observado que o aumento da rigidez estrutural promove um aumento no valor da carga crítica do pórtico mas, por outro lado, torna mais forte a inclinação inicial do caminho pós-crítico e aumenta, portanto, a sensibilidade a imperfeições. Essa característica pode ser mais uma vez ilustrada pela Figura 5.32, que mostra a variação da trajetória de equilíbrio com a rigidez da ligação para os casos estudados neste item.

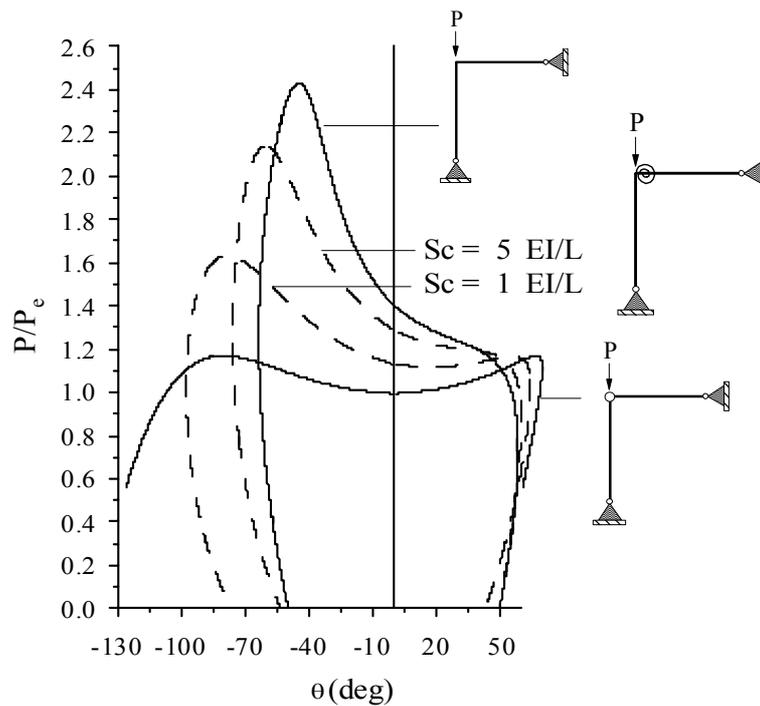


Figura 5.32: Pórtico em L: trajetórias de equilíbrio x rigidez das ligações.

A Figura 5.33 exibe a variação do quadrado da primeira frequência natural com o carregamento para diversos valores do parâmetro Sc . Nota-se que o trecho relativo ao caminho fundamental de equilíbrio é praticamente linear, aparecendo uma pequena não-linearidade próxima ao ponto de bifurcação, isto em virtude das perturbações utilizadas para se obter numericamente os dois ramos do caminho pós-crítico. A partir dos resultados verifica-se que o ramo direito do caminho pós-crítico é instável e o ramo esquerdo é estável até o ponto limite.

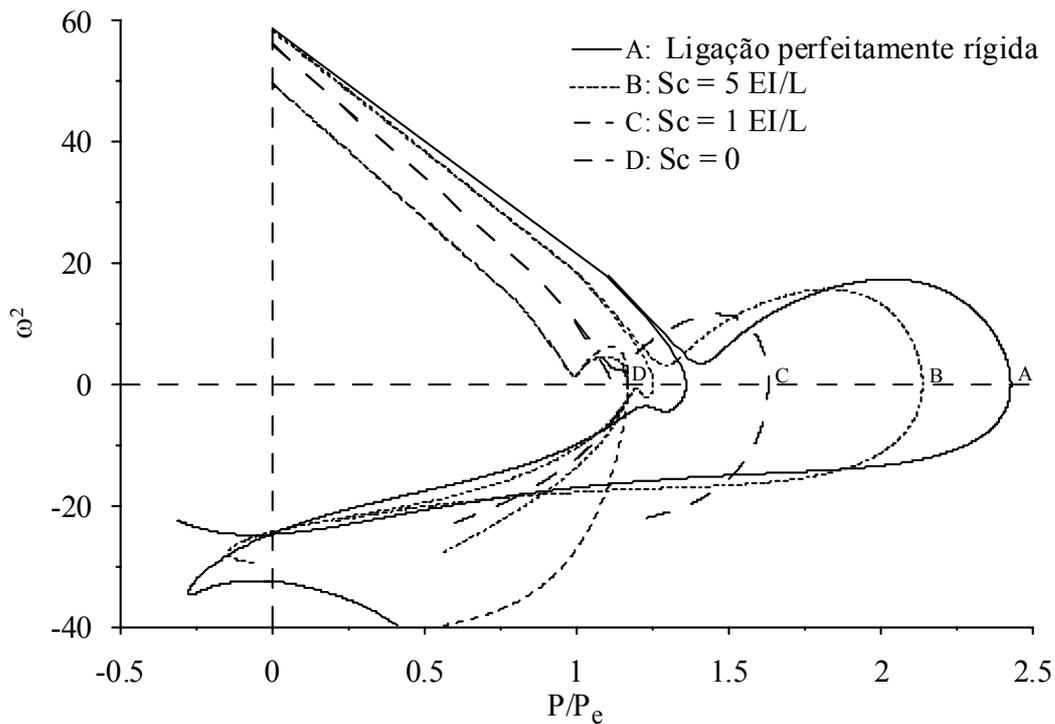


Figura 5.33: L-Frame: relação 1ª frequência x carga vertical x rigidez das ligações.

A variação das três primeiras frequências da estrutura descarregada com Sc é mostrada na Tabela 5.1

Sc	ω_1	ω_2	ω_3
∞	7.67	13.25	34.56
5 EI/L	7.64	11.53	34.52
1 EI/L	7.49	9.82	34.36
0	7.04	8.92	33.95

Tabela 5.1: Variação das 3 primeiras frequências naturais com o parâmetro Sc em torno da configuração de influência.

À medida que a rigidez da ligação se aproxima de zero, ou seja, a ligação se aproxima de uma rótula perfeita, as duas primeiras frequências se aproximam. Nota-se que, dentre as três frequências analisadas, a segunda frequência é a mais influenciada pela rigidez da ligação. Isto pode ser explicado, analisando-se os modos de vibração apresentados na Figura 5.36 que exibe os três primeiros modos de vibração para $Sc = 5EI/L$ e $Sc \rightarrow \infty$. Nota-se que a variação do ângulo entre as barras com Sc é bem maior para o segundo modo, levando a uma maior contribuição da mola na rigidez total do sistema.

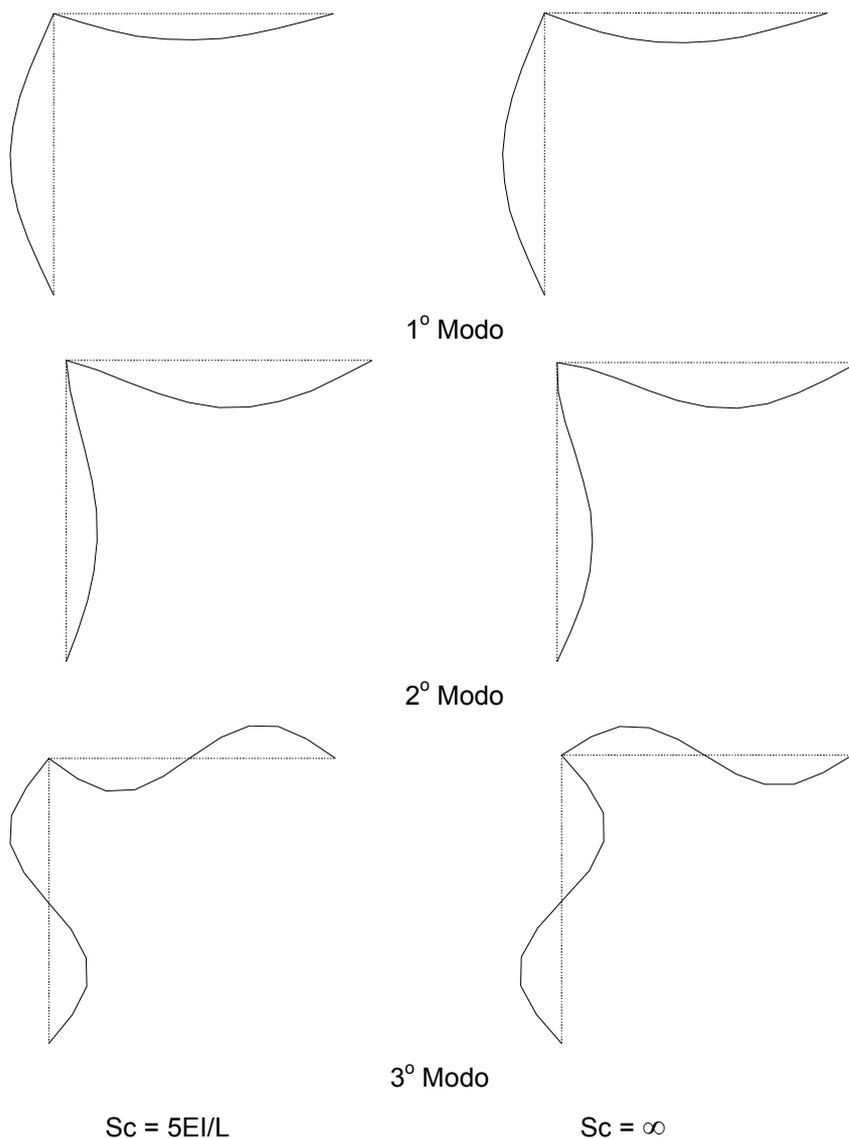
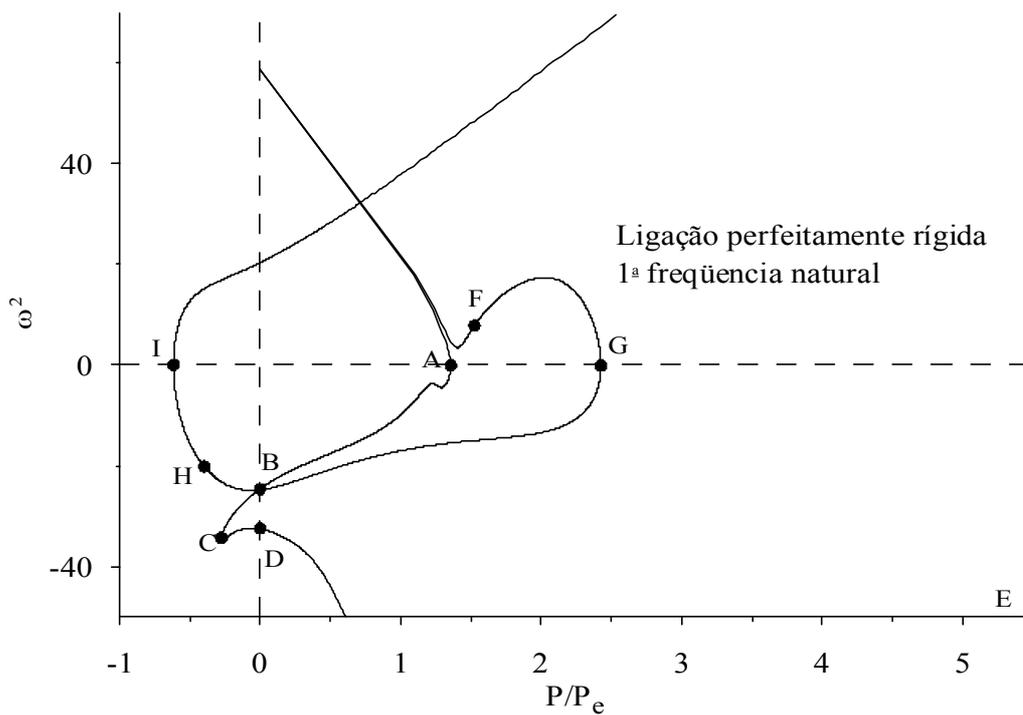
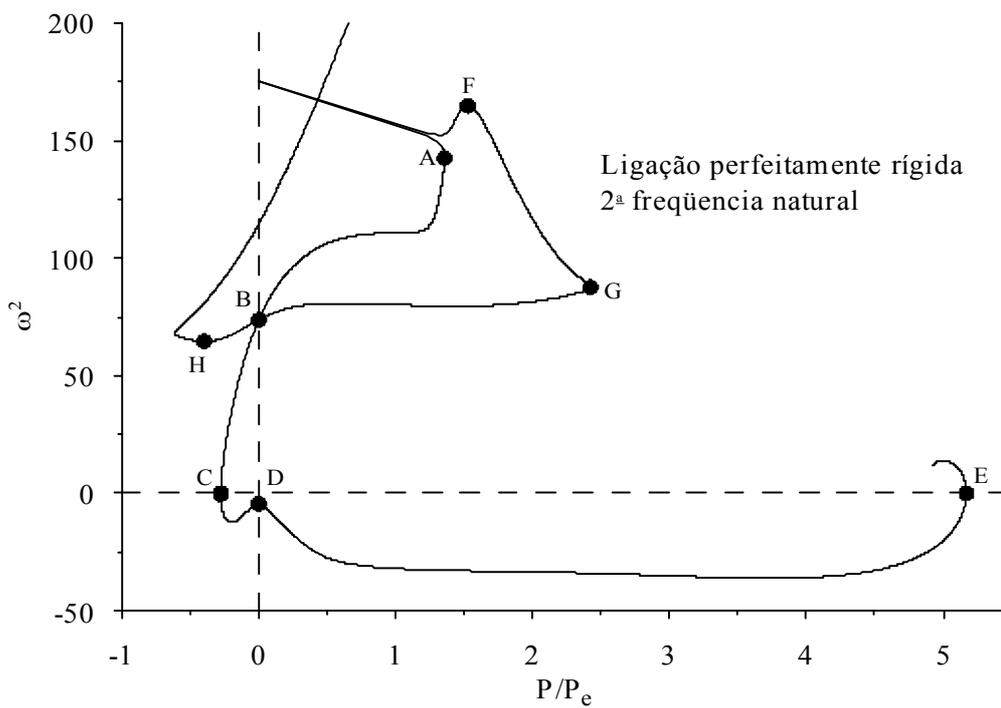


Figura 5.34: Pórtico em L, $Sc = 5EI/L$: modos de vibração para o pórtico descarregado.

Para se entender o comportamento estático e dinâmico em estágios pós-críticos avançados, são mostradas na Figura 5.35, para o pórtico com ligação perfeitamente rígida e carga concentrada, as curvas de variação das duas primeiras frequências naturais com o nível de carregamento até se alcançar grandes deslocamentos e rotações. Os resultados mostram que, como no caso do arco, o carregamento afeta de forma marcante ambas as frequências. Sabendo-se que as regiões da trajetória onde o equilíbrio é estável possuem todas as frequências naturais com valores reais e que as regiões correspondentes a valores negativos de ω^2 são instáveis (frequência natural com valor imaginário), pode-se destacar as configurações estáveis e as instáveis como mostra a Figura 5.36. Estes resultados revelam mais um ramo de equilíbrio estável associado a grandes deslocamentos.



(a) primeira frequência natural



(b) segunda frequência natural

Figura 5.35: Pórtico em L: relação frequências x carga vertical – Ligação perfeitamente rígida.

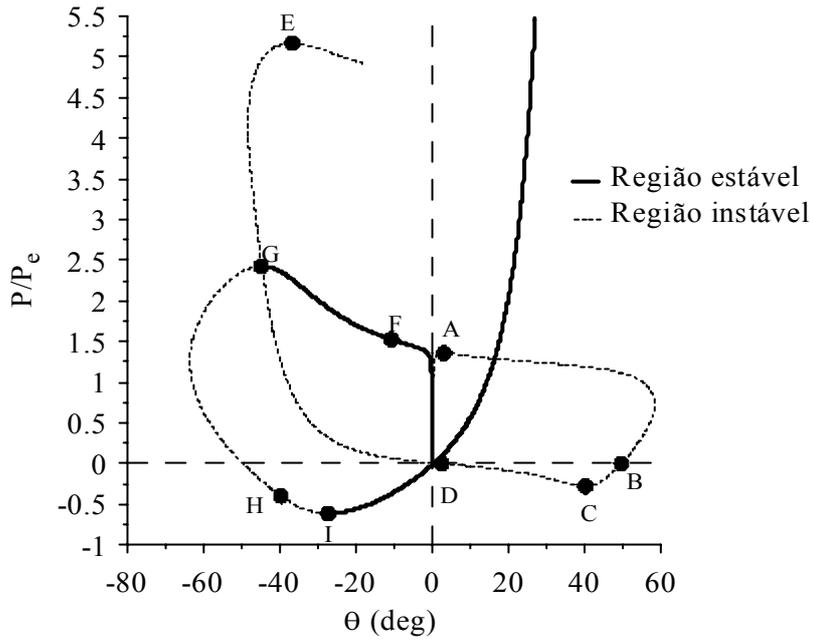
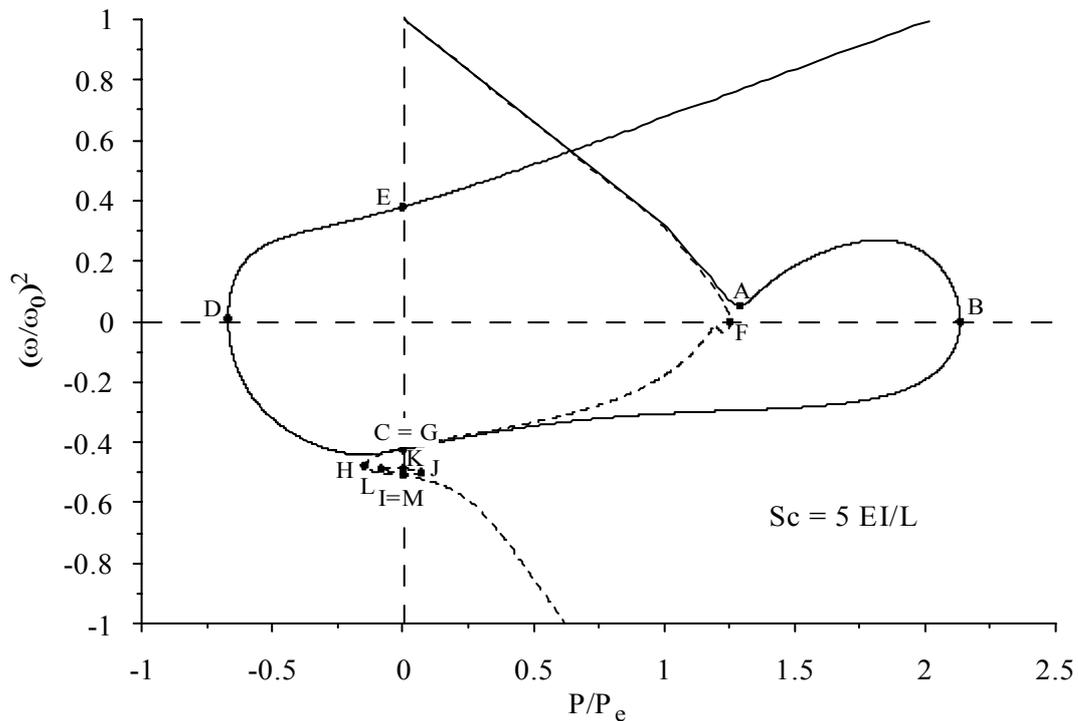
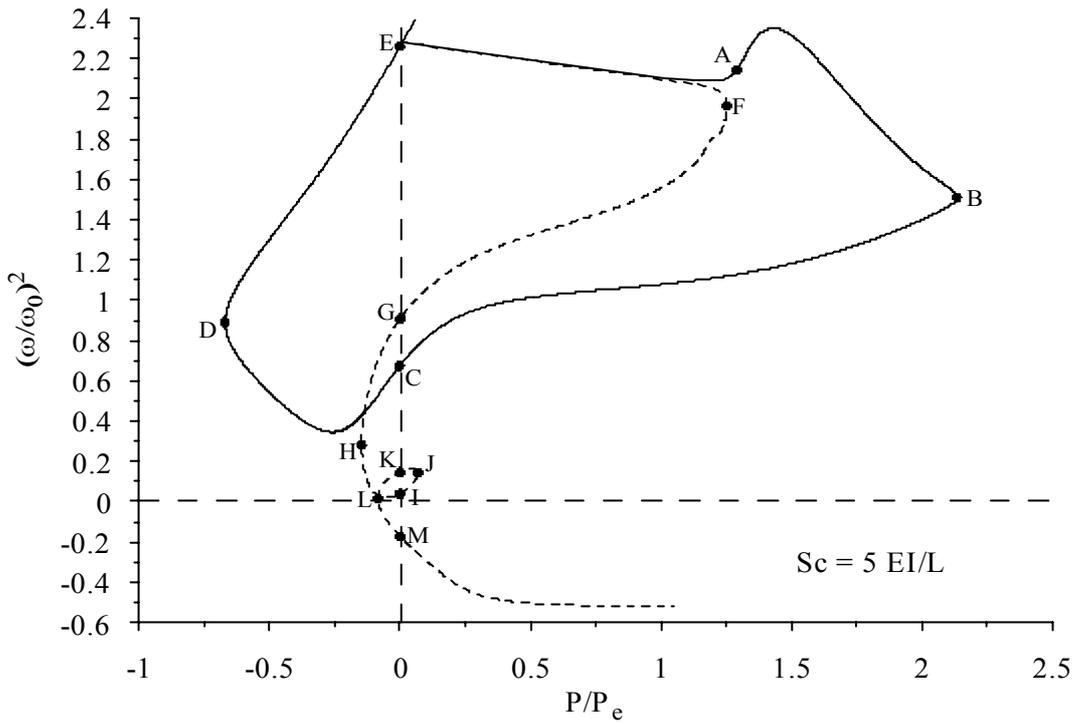


Figura 5.36: Trajetória de equilíbrio.

Em seguida, as Figuras 5.37, 5.38 e 5.39 apresentam os resultados de um estudo semelhante para o pórtico com uma ligação semi-rígida com $Sc = 5EI/L$.



(a) primeira frequência natural



(b) segunda frequência natural

Figura 5.37: L-Frame $Sc = 5EI/L$: relação frequência x carga vertical: Ligação semi-rígida $Sc=5EI/L$.

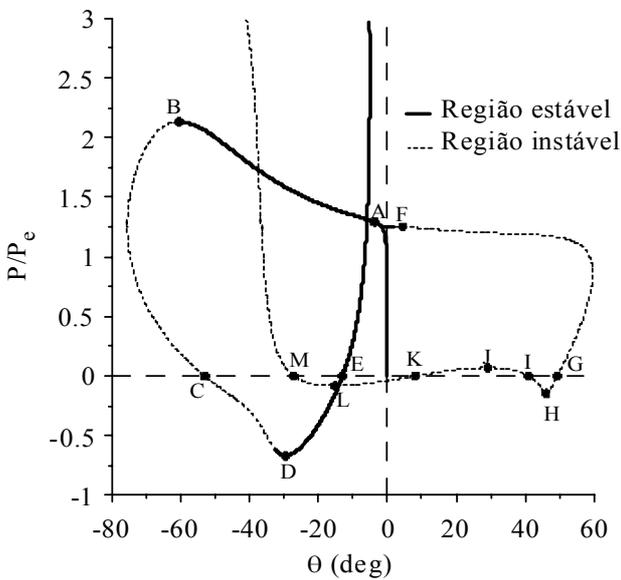


Figura 5.38: L-Frame $Sc = 5EI/L$: trajetória de equilíbrio: rotação θ no topo da coluna.

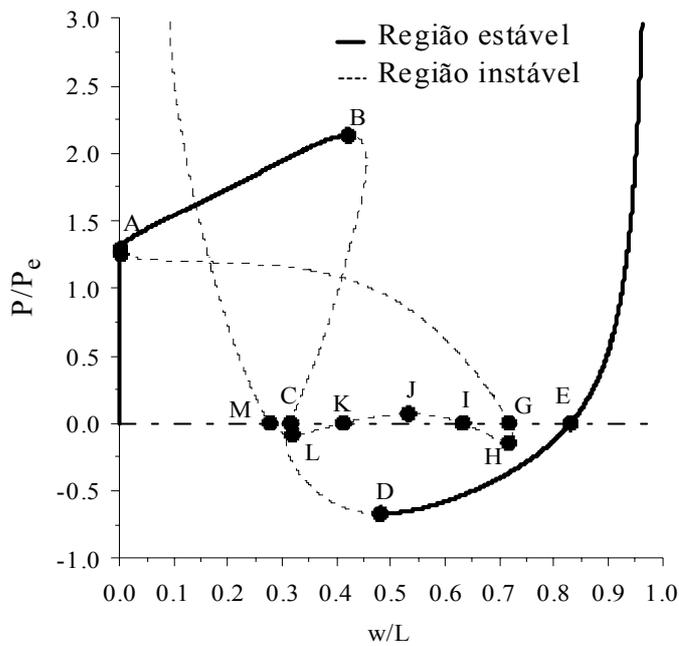


Figura 5.39: Pórtico em L, $Sc = 5EI/L$: trajetória de equilíbrio: deslocamento w no topo da coluna.

As Figuras 5.41 e 5.42 exibem a variação do 1º modo de vibração ao longo dos trechos estáveis do caminho de equilíbrio. As configurações analisadas estão indicadas na Figura 5.40.

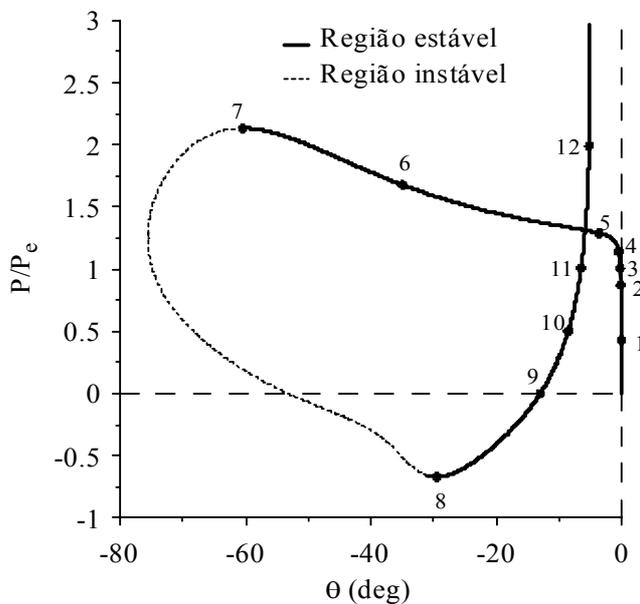


Figura 5.40: Pórtico em L, $Sc = 5EI/L$: trajetória de equilíbrio.

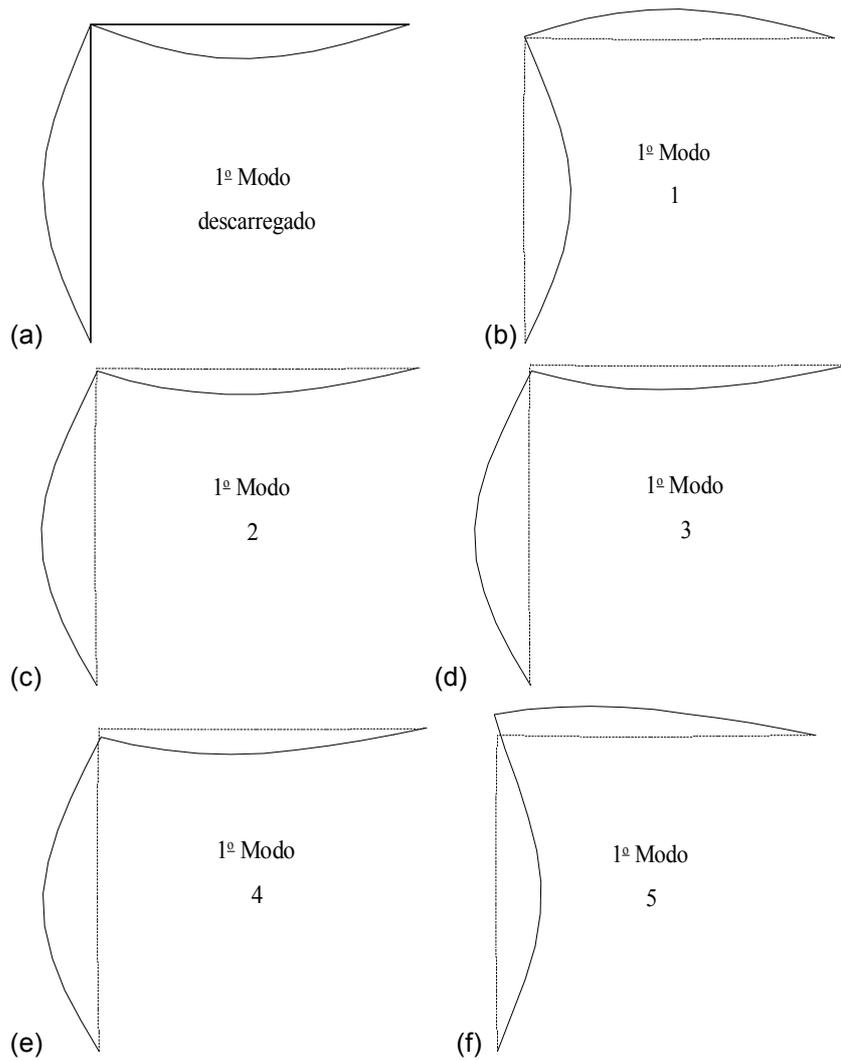


Figura 5.41: L-Frame $Sc = 5EI/L$: Variação do 1º modo de vibração com a configuração de equilíbrio: caminho de equilíbrio fundamental.

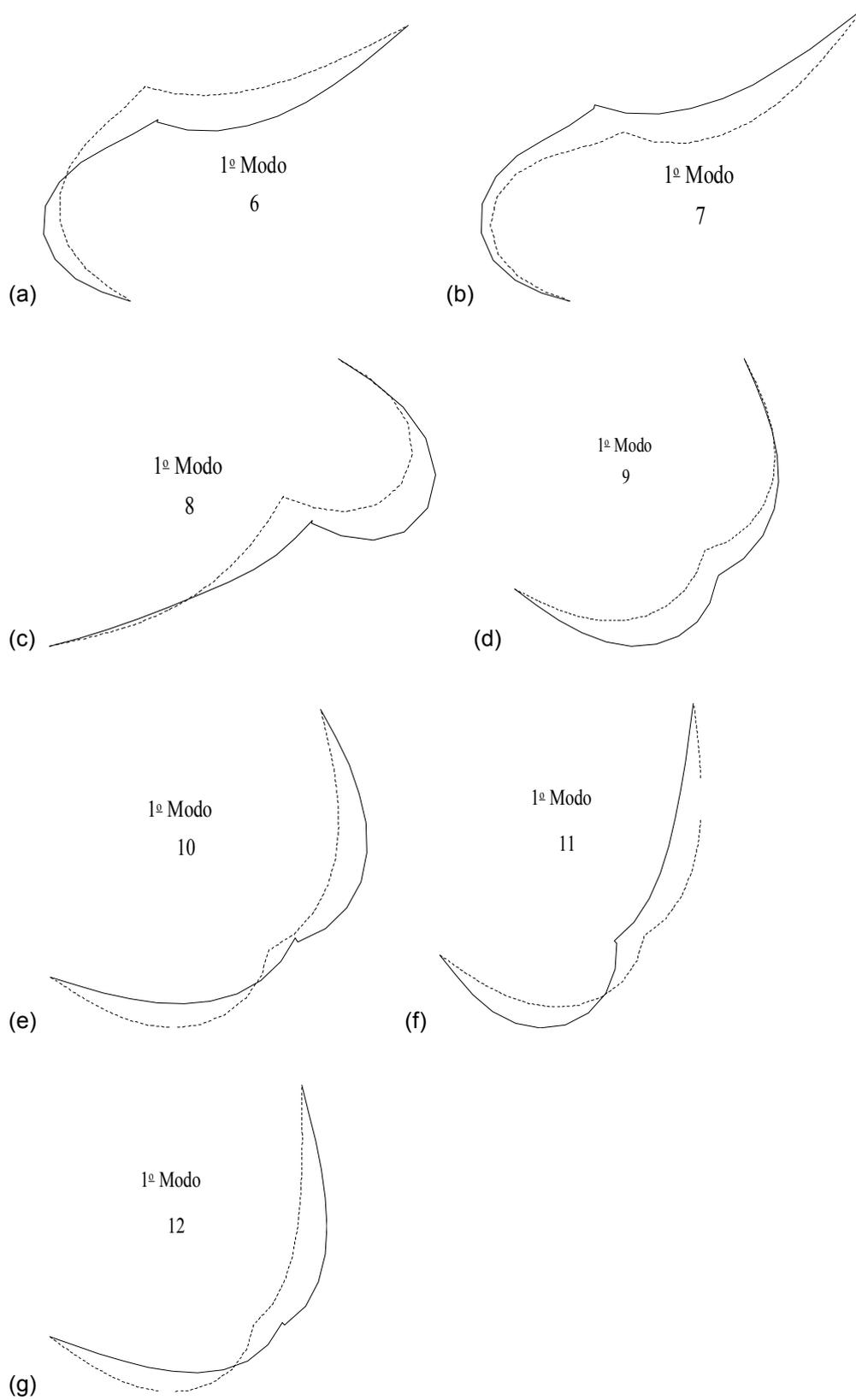


Figura 5.42: L-Frame $S_c = 5EI/L$: Variação do 1º modo de vibração (linha contínua) em torno da configuração deformada (linha pontilhada) na região estável da trajetória de equilíbrio pós-crítico

Usualmente, tem-se carga ao longo do vão das vigas em pórticos planos. Nesses casos, a resposta do sistema é semelhante ao de um pórtico carregamento pontual sobre a viga. Assim, tem-se que o seu comportamento é influenciado pelas características do caminho pós-crítico. Para se analisar esse problema, considera-se agora o pórtico sujeito a um carregamento distribuído, como mostra a Figura 5.43.

A variação das freqüências naturais com o nível de carregamento é fornecido na Figura 5.44.

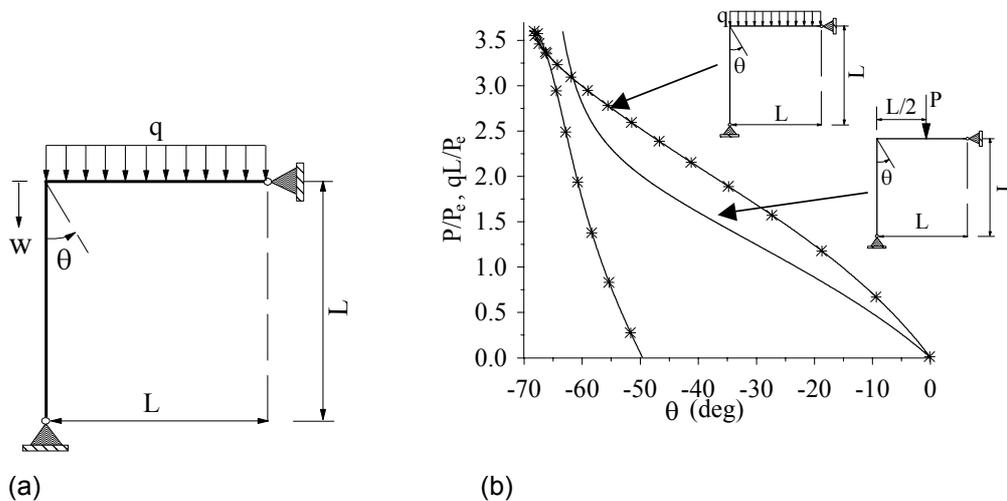


Figura 5.43: Pórtico em L com carregamento distribuído.

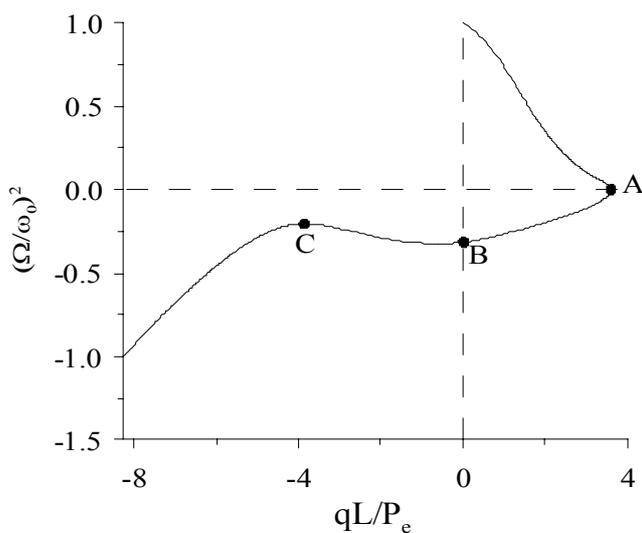


Figura 5.44: variação da relação de freqüências $(\Omega/\omega)^2$ com o nível de carregamento distribuído.

Da mesma forma que foi feito anteriormente, pode-se através desta curva conhecer as regiões estáveis e instáveis do caminho de equilíbrio.

A Figura 5.45 exibe a trajetória de equilíbrio em relação aos deslocamentos θ e w no topo da coluna, indicando as regiões de equilíbrio estável e instável.

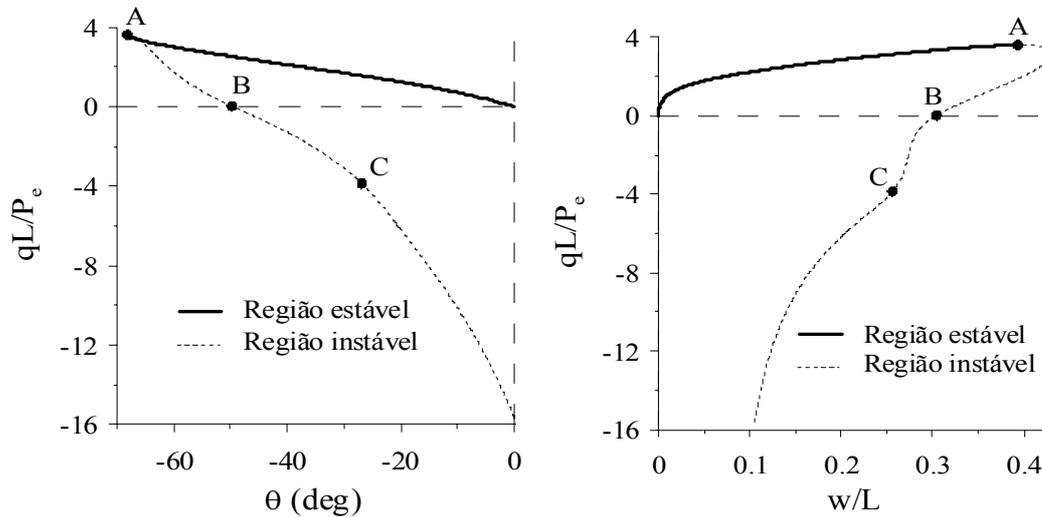


Figura 5.45: Trajetórias de equilíbrio do pórtico em L com carga distribuída.

A Figura 5.46 exibe as configurações deformadas do pórtico nas configurações A, B e C correspondentes às indicadas na Figura 5.45.

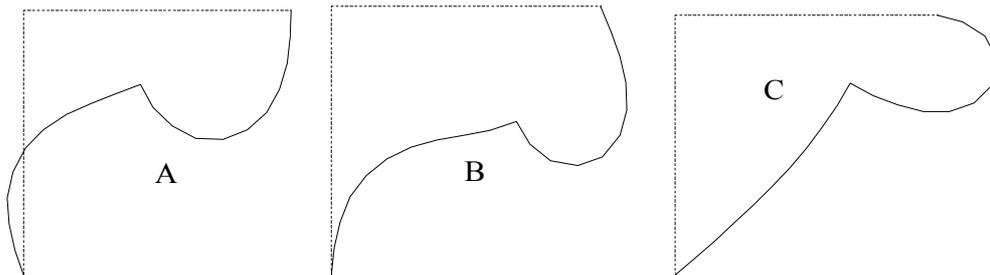


Figura 5.46: Configurações deformadas associadas aos pontos correspondentes da trajetória de equilíbrio.

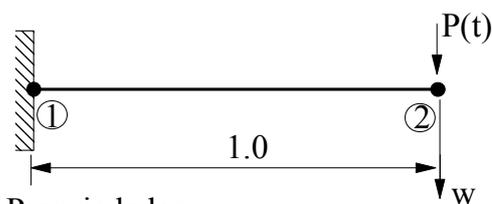
5.3.

EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO DOS ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

5.3.1

Viga engastada-livre

Inicialmente, para validar a implementação dos métodos de integração explícitos e implícitos, é feita uma análise dinâmica linear de uma viga engastada e livre, submetida a um pulso senoidal vertical aplicado na sua extremidade livre, conforme mostrado na Figura 5.47.



Propriedades

$$EI = 3.1941 \quad P(t) = \sin(\pi t/T), \quad 0 < t < T$$

$$\rho A = 1.0 \quad P(t) = 0, \quad t < T$$

Figura 5.47: Viga em balanço submetida a um pulso senoidal.

Pode-se observar através da Figura 5.48a que, ao se utilizar o Método Newmark para a integração numérica, e um passo de tempo constante $\Delta t = 0.05$ s, obtém-se resultados idênticos aos fornecidos por Smith e Griffiths (1999). Na Figura 5.48b são comparadas as respostas fornecidas por alguns métodos de integração implementados neste trabalho. Como esperado, os métodos explícitos (MDC e Runge-Kutta) precisaram de incrementos de tempo menores para apresentar os mesmos resultados do método implícito (Newmark).

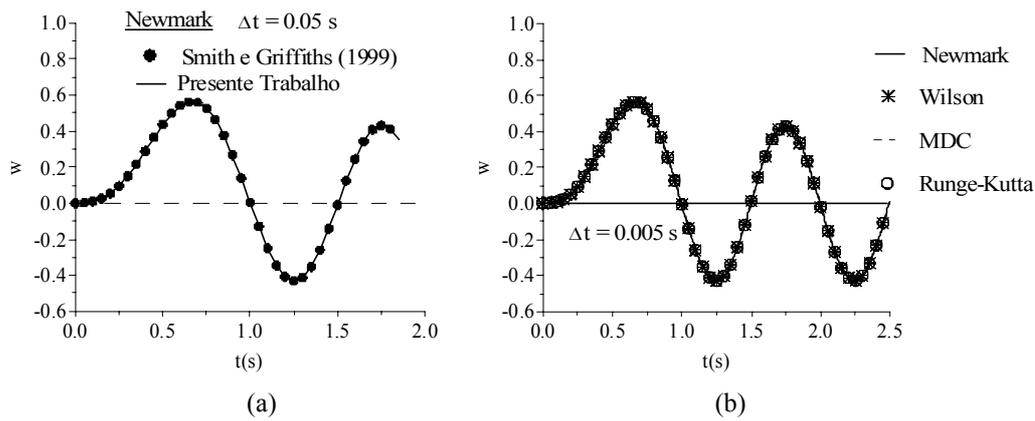
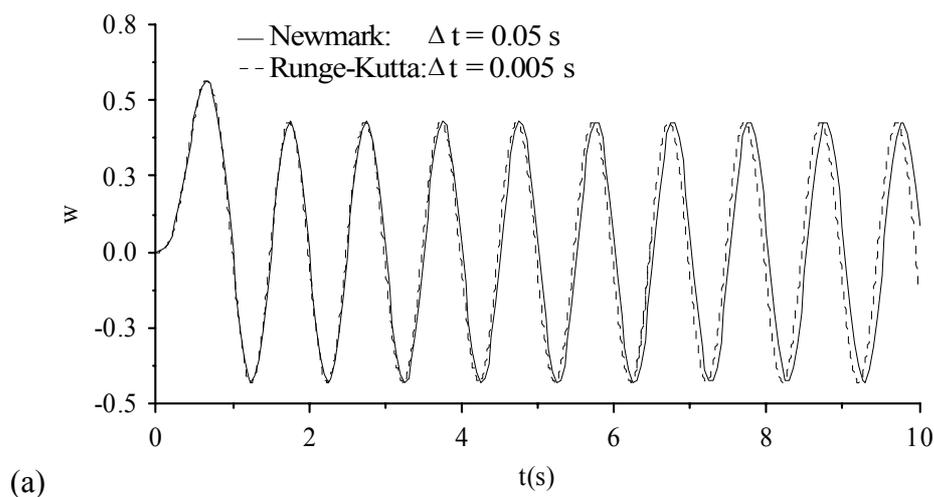
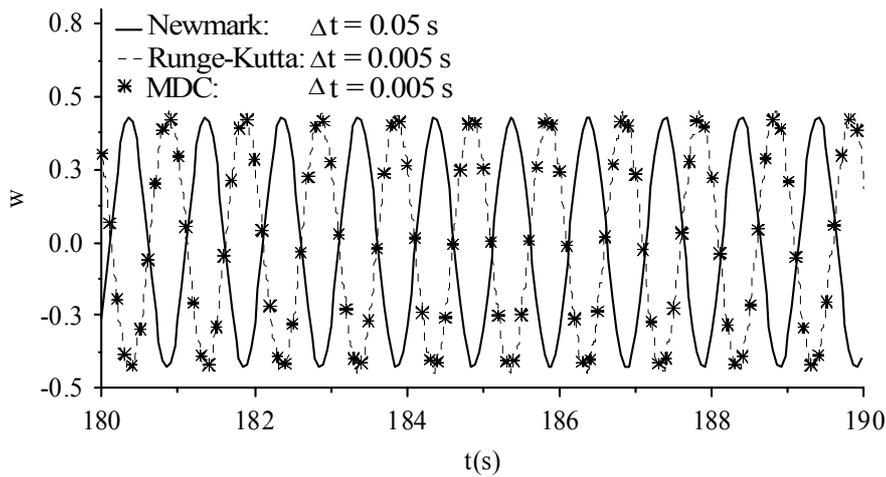


Figura 5.48: Comparação dos métodos de integração direta.

Na literatura técnica para fins de comparação entre diversos métodos de integração numérica e eficiência de algoritmos, apresentam-se apenas os primeiros ciclos da resposta transiente, o mesmo se observa em trabalhos sobre métodos numéricos para análise de vibrações não-lineares de sistemas estruturais complexos. Entretanto, na análise de vibrações não-lineares envolvendo problemas de ressonância e perda de estabilidade, necessita-se integrar as equações de movimento por um período relativamente longo de tempo até se obter a resposta permanente. A fim de observar a convergência dos métodos nestes casos, o mesmo problema foi resolvido para períodos de tempo mais longos. As Figuras. 5.49a e 5.49b mostram o comportamento do sistema estrutural em estudo no intervalo de 0 a 10 segundos, e de 180 a 190 segundos.





(b)
 Figura 5.49: Análise da convergência dos métodos.

Observa-se que, apesar das amplitudes das respostas serem semelhantes para todos os métodos e, além disso, permanecerem constantes durante toda a análise, à medida que se aumenta o tempo de integração da resposta, aumenta-se a defasagem entre as soluções obtidas pelos diferentes métodos. Mais especificamente, pode-se afirmar que ocorreu um “adiantamento” do Método Newmark em relação aos métodos explícitos (MDC e Runge-Kutta). Reduzindo-se o intervalo Δt para o método de Newmark, chega-se ao mesmo resultado obtido pelos métodos explícitos (Figura 5.50).

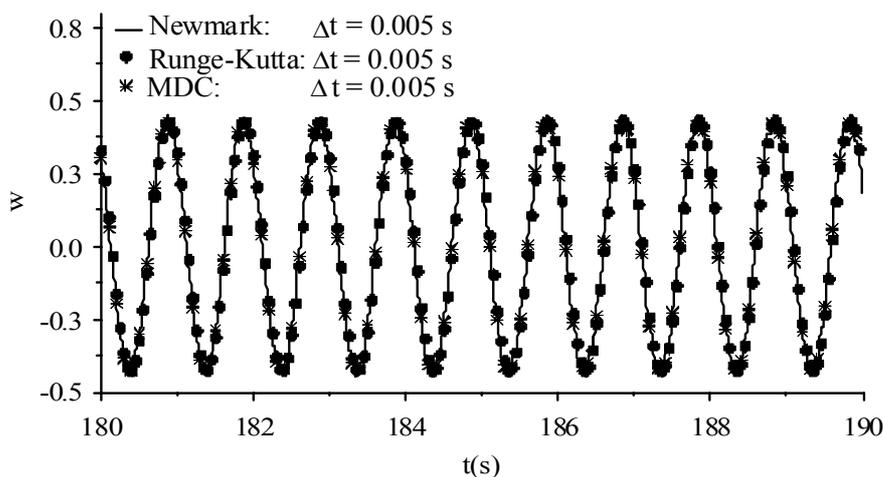


Figura 5.50: Análise da convergência dos métodos: redução de Δt .

Na Figura 5.51 são observadas as respostas dos dois métodos implícitos (Newmark e Wilson- θ) para intervalos de tempo maiores.

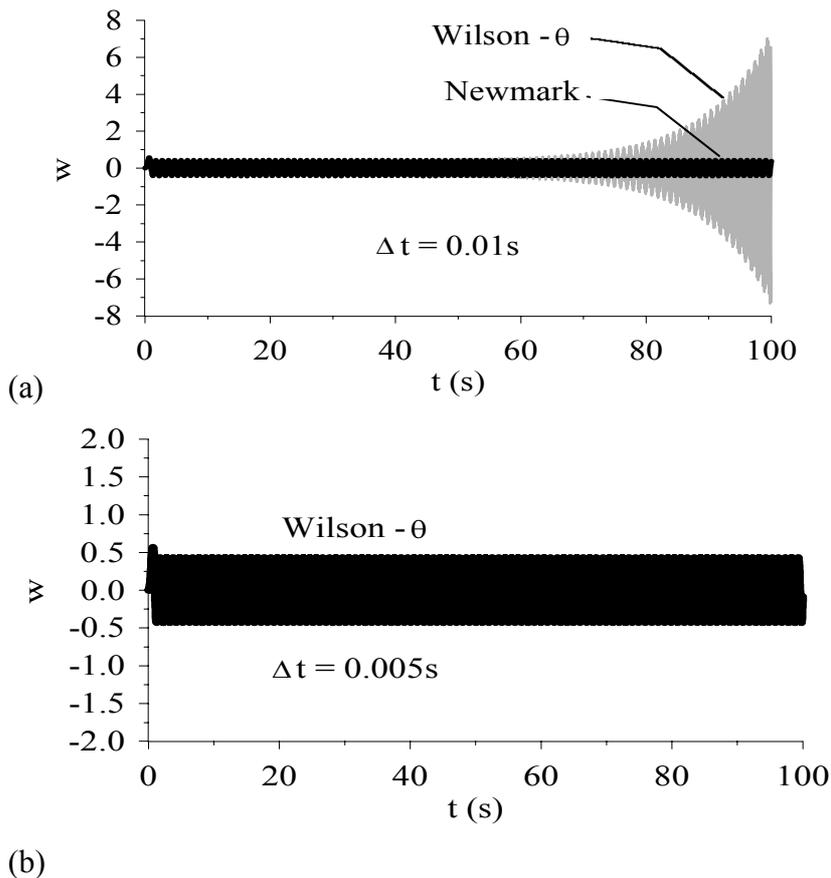


Figura 5.51: Comparação dos Métodos de Newmark e de Wilson- θ .

Ao utilizar para o Método de Wilson- θ um incremento de tempo constante $\Delta t = 0.01s$, que se mostrou adequado para o Método de Newmark, nota-se que ocorreu um aumento progressivo da amplitude da resposta, caracterizando assim uma divergência da solução. Essa divergência, entretanto, foi atenuada quando o passo de tempo foi reduzido. No exemplo estrutural em questão, portanto, foi observada uma maior eficiência do Método de Newmark em relação ao Método de Wilson- θ .

5.3.2

Pórtico de Williams

A Figura 5.52 mostra o sistema estrutural a ser analisado nesta seção. Trata-se de um pórtico abatido biengastado conhecido como o pórtico de Williams (Williams, 1964). Essa estrutura é frequentemente utilizada para validar modelos

e formulações não-lineares. É analisado aqui o caso em que esse pórtico é submetido a uma carga súbita, conforme indicado na figura. Pretende-se mais uma vez avaliar a implementação dos métodos de integração direta (Newmark e Wilson- θ), só que agora considerando a análise dinâmica não-linear. É feita ainda uma avaliação do método adaptativo implementado, verificando o comportamento da resposta em intervalos de tempo prolongados.

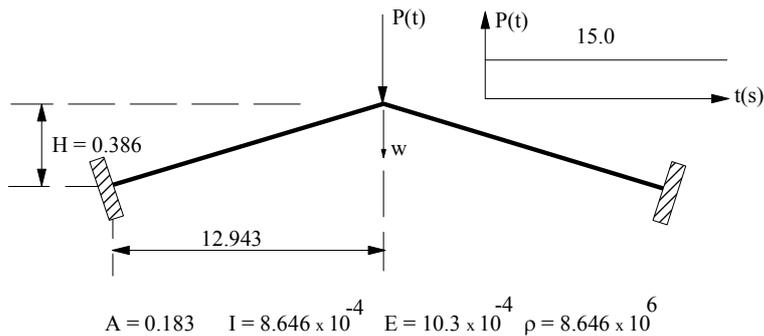


Figura 5.52: Pórtico de Williams.

Na Figura 5.53 são comparados os resultados obtidos no presente trabalho, utilizando-se Newmark, com os fornecidos por Chan e Chui (2000).

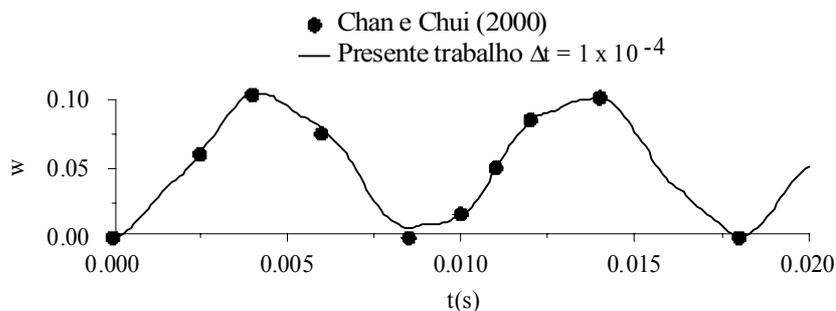


Figura 5.53: Análise comparativa da resposta.

Com o objetivo de observar o comportamento do método em um intervalo de tempo bem mais longo, executou-se a análise mostrada na Figura 5.54.

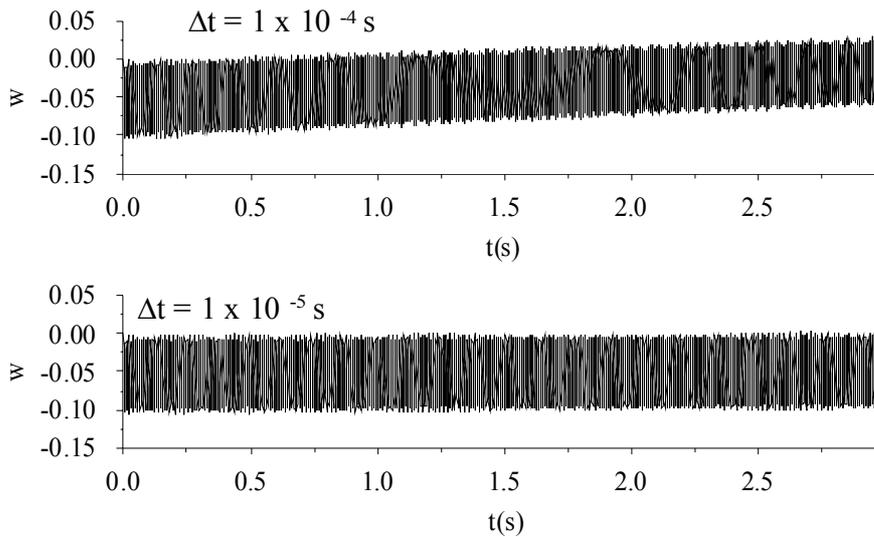
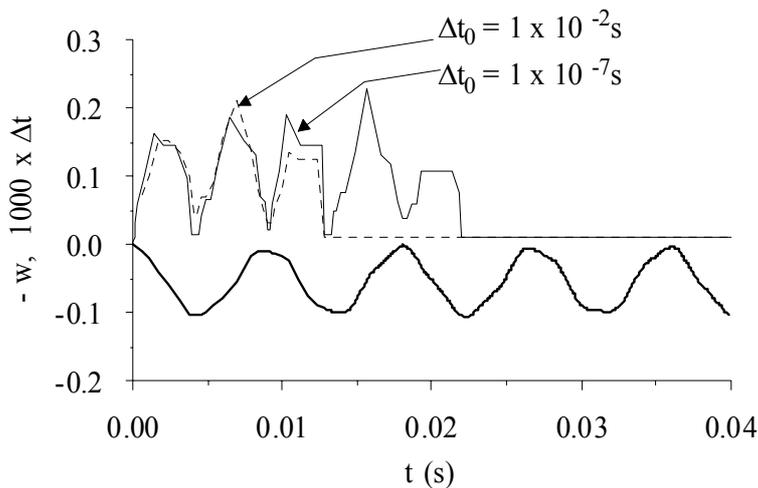


Figura 5.54: Análise da resposta num tempo estendido: Δt constante.

Observe que, para se obter tal resposta com incremento constante de tempo, foi necessário um passo de tempo $\Delta t = 10^{-5}$ s. Para o valor menor de $\Delta t = 10^{-4}$ s, nota-se a presença de um erro acumulado que faz com que haja um deslocamento da trajetória para cima.

Em seguida a análise é refeita utilizando-se a estratégia adaptativa para métodos da família de Newmark. A Figura 5.55 fornece as respostas obtidas para dois valores iniciais de Δt bem diferentes.



$$\Delta t_0 = 1 \times 10^{-2} \text{ s} \rightarrow \Delta t_{\text{méd}} = 1.29 \times 10^{-5} \text{ s}$$

$$\Delta t_0 = 1 \times 10^{-7} \text{ s} \rightarrow \Delta t_{\text{méd}} = 1.06 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Figura 5.55: Estratégia adaptativa: análise da resposta com Δt variável.

Observa-se que o incremento de tempo varia nos primeiros instantes e tende a um valor constante. Para os dois valores iniciais o comportamento da variação e o valor dos intervalos médios obtidos são bem próximos. Entretanto, nota-se que para um valor inicial elevado, a média dos intervalos avaliados é ligeiramente maior.

Na Figura 5.56 pode ser observada a eficiência dos métodos de integração da família Newmark acoplados à estratégia adaptativa, onde é apresentada a resposta obtida para um intervalo de 4 segundos e um passo inicial de tempo relativamente grande, $\Delta t = 10^{-2}$ s. Com esse valor inicial, a estratégia adaptativa produziu variações nos passos de tempo tais que o incremento médio durante a execução foi $\Delta t_{\text{médio}} = 1.29 \times 10^{-5}$ s.

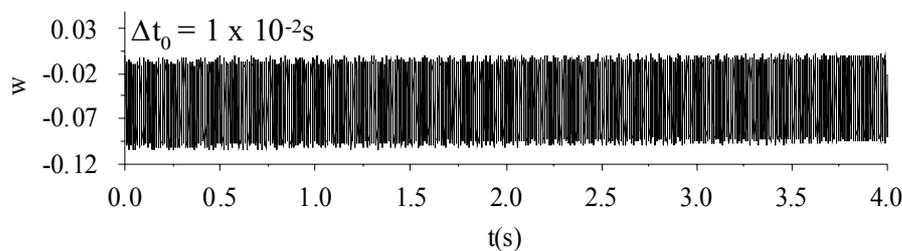
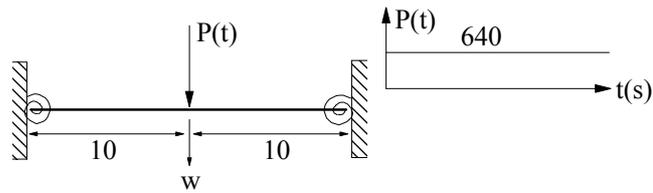


Figura 5.56: Estratégia adaptativa: resposta para um Δt inicial igual a 10^{-2} s.

5.3.3

Barras com ligações semi-rígidas

Com o objetivo de validar as implementações dos algoritmos de integração para a análise dinâmica não-linear de pórticos com ligações semi-rígidas, analisa-se nesta seção uma viga com duas ligações semi-rígidas nas suas extremidades, submetida a um carregamento instantâneo invariável no tempo, conforme mostrado na Figura 5.57.



Propriedades

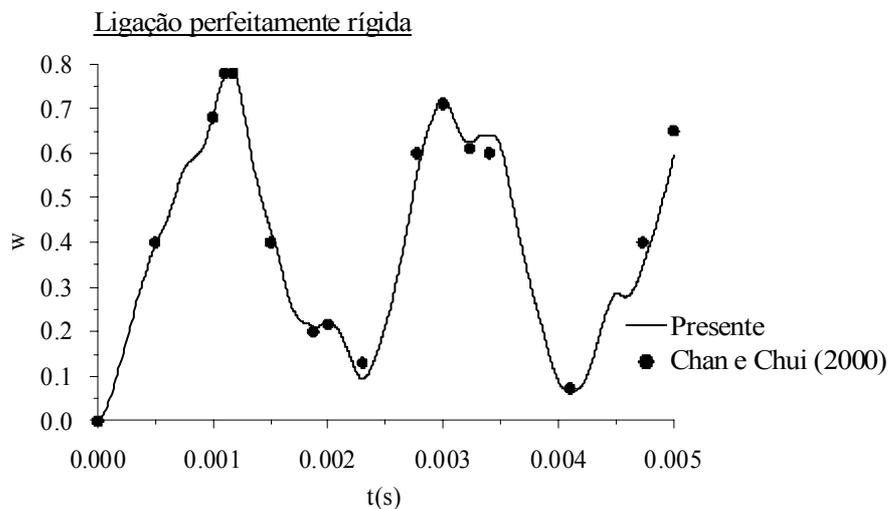
$$E = 3.0 \times 10^7 \quad A = 0.125$$

$$\rho = 26 \times 10^{-5} \quad I = 1.6276 \times 10^{-4}$$

Figura 5.57: Viga com ligações semi-rígidas.

Este é um exemplo clássico que já foi investigado por vários pesquisadores, tais como Mondkar e Powel (1977), Yang e Saigal (1984), e Chan e Chui (2000). Da mesma forma que Chan e Chui (2000), a viga é modelada no presente trabalho usando-se uma malha de 10 elementos finitos e resolvida pelo método de Newmark com passo de tempo constante $\Delta t = 10^{-6}$ s.

A resposta obtida no presente trabalho é apresentada juntamente com a fornecida por Chan e Chui (2000) na Figura 5.59 para 3 casos de ligação: ligação perfeitamente rígida, ligação semi-rígida com $Sc = 10 EI/L$ e $Sc = 1 EI/L$.



(a) Ligação perfeitamente rígida.

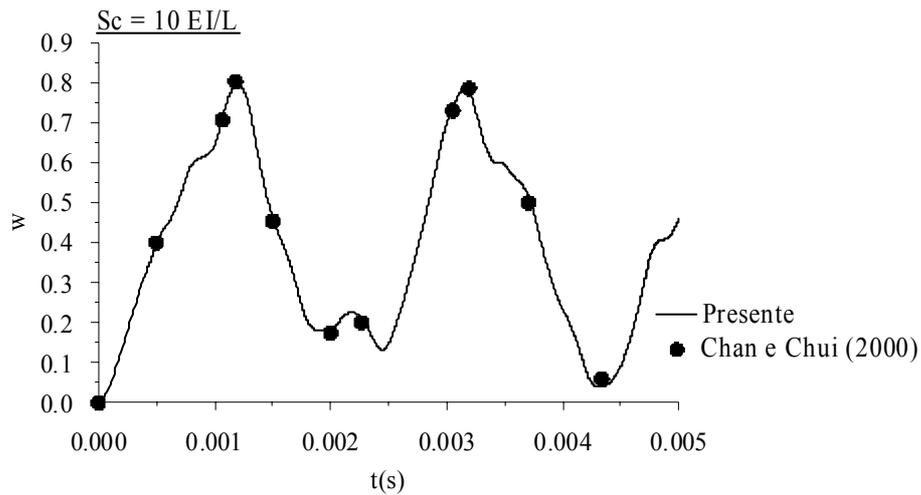
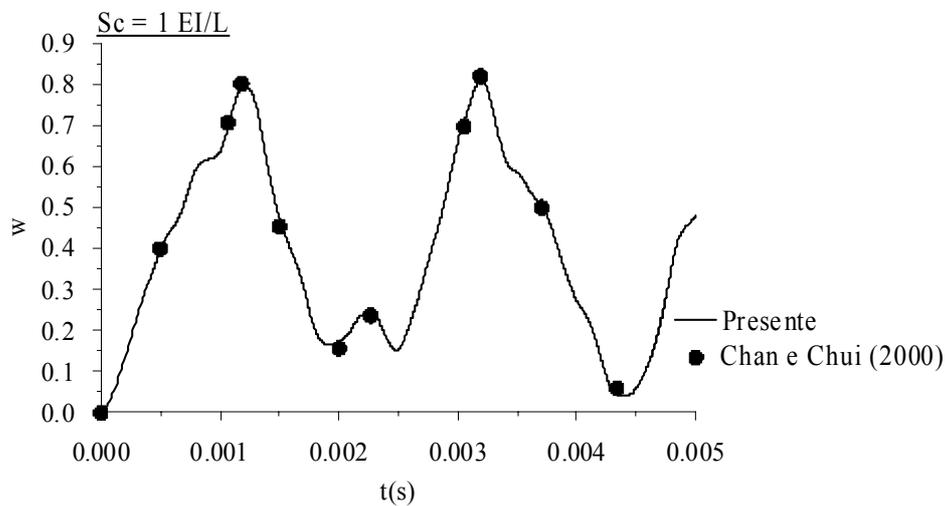
(b) $Sc = 10EI/L$ (c) $Sc = 1EI/L$

Figura 5.58: Viga com ligações semi-rígidas: resposta transiente.

Pode-se observar que os resultados obtidos no presente trabalho para a resposta transiente da estrutura praticamente coincidem com os fornecidos por Chan e Chui (2000). Isto dá uma boa indicação da eficiência das implementações aqui realizadas.

5.4.

EXEMPLOS NUMÉRICOS DE ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR

O objetivo deste item não é analisar com profundidade a dinâmica não linear dos sistemas estruturais em estudo, mas mostrar as potencialidades das ferramentas numéricas desenvolvidas na presente tese na análise das vibrações não-lineares e instabilidade dinâmica de estruturas. Para isto são novamente analisados o arco senoidal e o pórtico em L por apresentarem grande não-linearidade e perda de estabilidade sob certas cargas dinâmicas.

5.4.1

Arco senoidal

Nesta seção, será novamente estudado o arco senoidal já analisado nas seções 3.2.3 e 5.2.3. Serão considerados agora os dois tipos de carregamento ilustrados na Figura 5.59, a saber: (a) um carregamento de magnitude constante aplicado de forma súbita e (b) uma carga harmônica senoidal. Considera-se adicionalmente um amortecimento viscoso proporcional à massa e à rigidez, $\mathbf{C} = \alpha_m \mathbf{M} + \alpha_k \mathbf{K}$ definido pelos coeficientes de Rayleigh, α_m e α_k , que são calculados a partir da taxa de amortecimento crítico $\xi = 0,25$. A resposta dinâmica é obtida através do método de integração de Newmark para valores de intervalos de tempo Δt controlados pela estratégia adaptativa apresentada na seção 4.4.3.1.

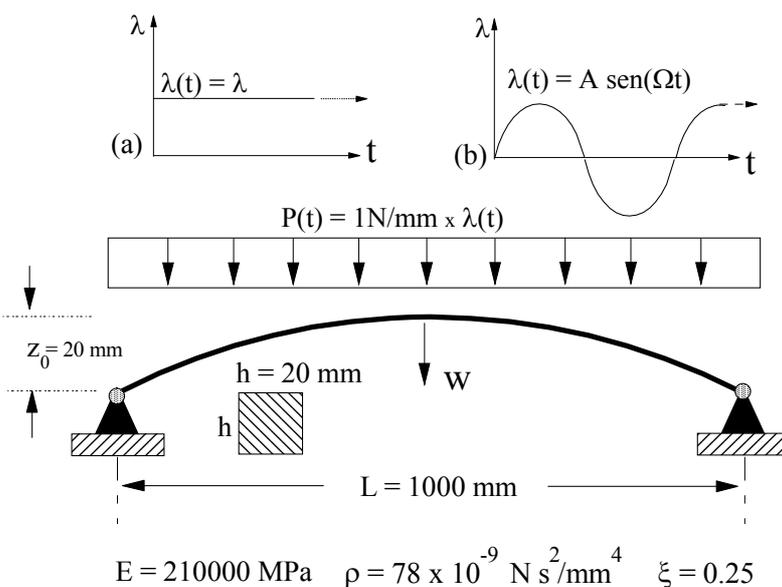
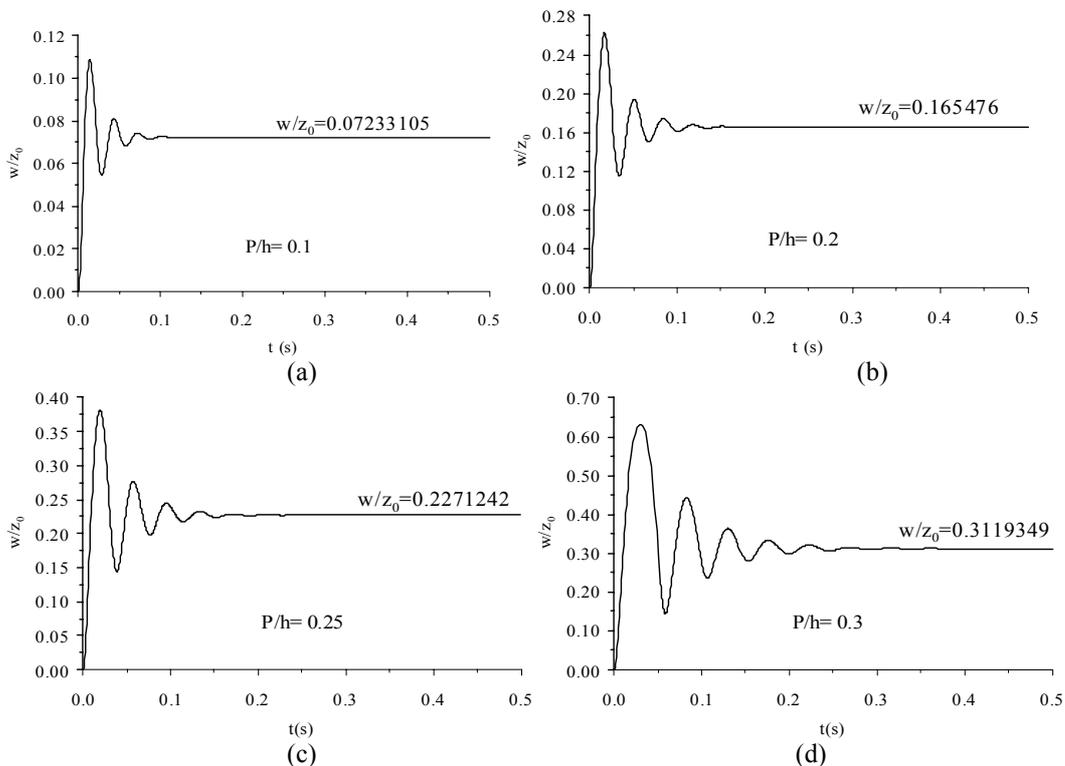


Figura 5.59: Arco senoidal abatido: análise dinâmica não-linear

Inicialmente, considera-se o arco submetido a uma carga de magnitude constante e de duração infinita, aplicada subitamente. Na Figura 5.60 mostra-se a resposta no tempo para níveis crescentes de carregamento. Logo após a aplicação da carga o arco apresenta uma resposta transiente com oscilações de grande amplitude no interior do vale potencial pré-flambagem e, a seguir, a resposta converge para uma posição de equilíbrio compatível com o nível de carregamento, como mostram as Figuras 5.60a-5.60e. Entretanto, para um nível de carregamento crítico inferior à carga limite, o arco escapa do vale potencial pré-flambagem e a resposta converge para uma solução pós-crítica estável com o arco assumindo uma configuração invertida. Esse fenômeno é conhecido como um salto dinâmico ou *snap-through*. A Figura 5.60f mostra, para uma carga levemente superior à carga de instabilidade dinâmica, a resposta no tempo onde se observa claramente a divergência da resposta durante o primeiro ciclo da resposta transiente. Este fenômeno é típico dessa classe de estruturas e pode ocorrer na presença de diversos tipos de carregamento dinâmico.



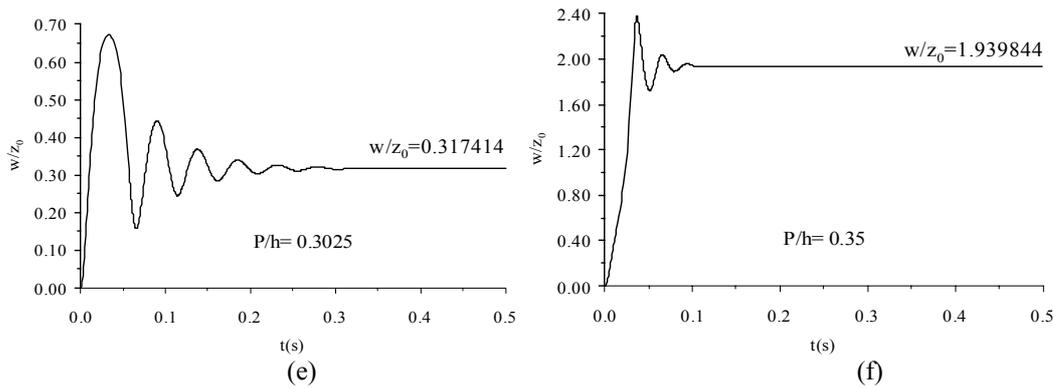


Figura 5.60: Resposta no tempo do arco senoidal para diferentes níveis de carregamento.

Na Figura 5.61 são mostrados os resultados obtidos para as configurações finais de equilíbrio associadas a cada nível de carregamento, sendo estes resultados comparados com aqueles obtidos na análise estática. Nota-se que os resultados das análises estática e dinâmica se superpõem, como era esperado, sendo que na análise dinâmica a perda de estabilidade ocorre para um nível de carregamento inferior ao obtido pela análise estática. Após a ocorrência do salto dinâmico, os resultados voltam a se superpor na região da trajetória que correspondente à concavidade invertida do arco. Esta concordância mostra que a metodologia aqui empregada é capaz de descrever processos de perda de estabilidade dinâmica com variações bruscas da resposta no tempo.

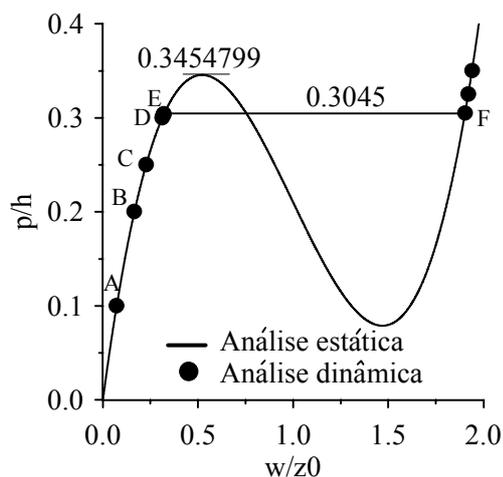


Figura 5.61: Superposição das análises dinâmica e estática.

A mesma análise é realizada para o arco com $z_0 = 50$ mm, considerando neste caso dois tipos de carregamento: (a) um carregamento distribuído uniforme,

semelhante ao do exemplo anterior, e (b) um carregamento não simétrico, semelhante ao usado no capítulo 3 (Figura 3.12) definido por $\alpha_{imp} = 0.5$. A resposta para diferentes níveis de carregamento é mostrada na Figura 5.62, para o caso de carregamento uniforme, onde se observa um comportamento semelhante ao caso anterior.

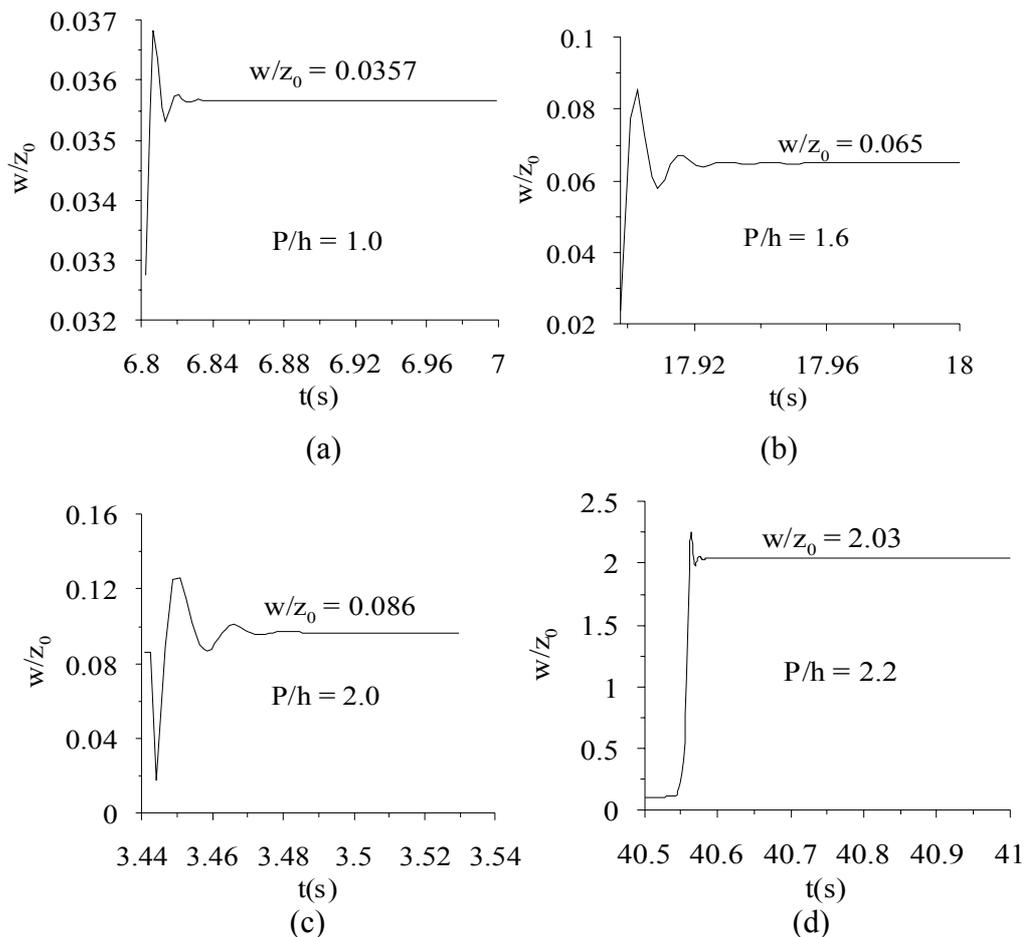


Figura 5.62: Resposta no tempo do arco senoidal sob carregamento uniforme para diferentes níveis de carregamento ($z_0=50\text{mm}$).

A Figura 5.63 superpõe a solução obtida pela análise dinâmica do sistema estrutural amortecido e trajetória de equilíbrio estático da estrutura. Observa-se que, para o caso de carregamento uniforme, a perda de estabilidade se dá para uma carga levemente inferior à carga de bifurcação estática. Quando se considera a assimetria do carregamento, nota-se que a carga crítica dinâmica é bem inferior ao valor da carga crítica estática. A sensibilidade da carga crítica à perda de simetria do carregamento é bastante importante do ponto de vista estrutural, já que

carregamentos assimétricos neste tipo de estrutura podem ocorrer em várias situações práticas, como é o caso de coberturas submetidas a cargas de vento.

A seguir, considera-se o arco submetido simultaneamente a uma carga estática de valor $P/h=1$ e a um carregamento harmônico com frequência de excitação igual a do arco submetido ao nível de carregamento estático aqui considerado. Os resultados obtidos para a resposta permanente são apresentados na Figura 5.64 para valores crescentes da magnitude do carregamento. Inicialmente o arco vibra em torno da configuração de equilíbrio estático, mas como no caso anterior, ao atingir um certo valor crítico, escapa do vale potencial pré-flambagem (Figura 5.64a) e passa a vibrar em torno de uma configuração pós-flambagem (Figura 5.64b). Para pequenos valores de carregamento o plano fase se mostra perfeitamente simétrico, denotando uma resposta harmônica quase linear. A medida que o carregamento cresce, o plano fase perde a simetria denotando a não-linearidade da resposta.

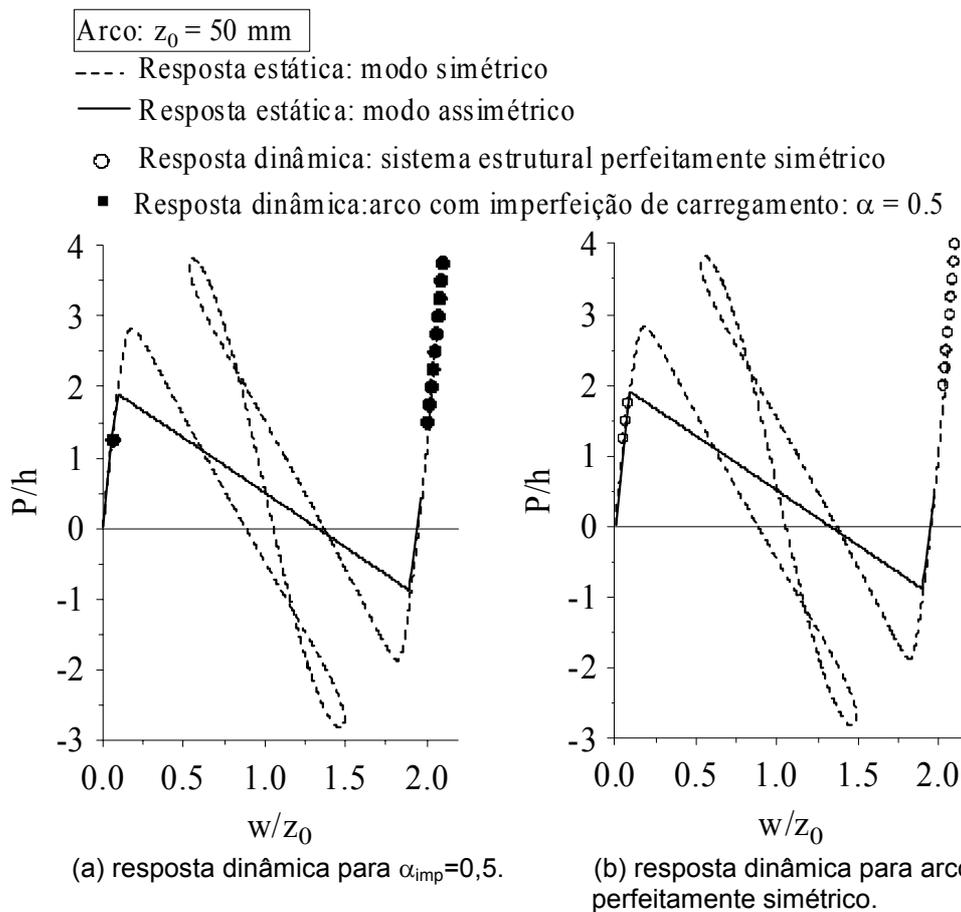


Figura 5.63: Resposta estática e dinâmica para diferentes níveis de carregamento.

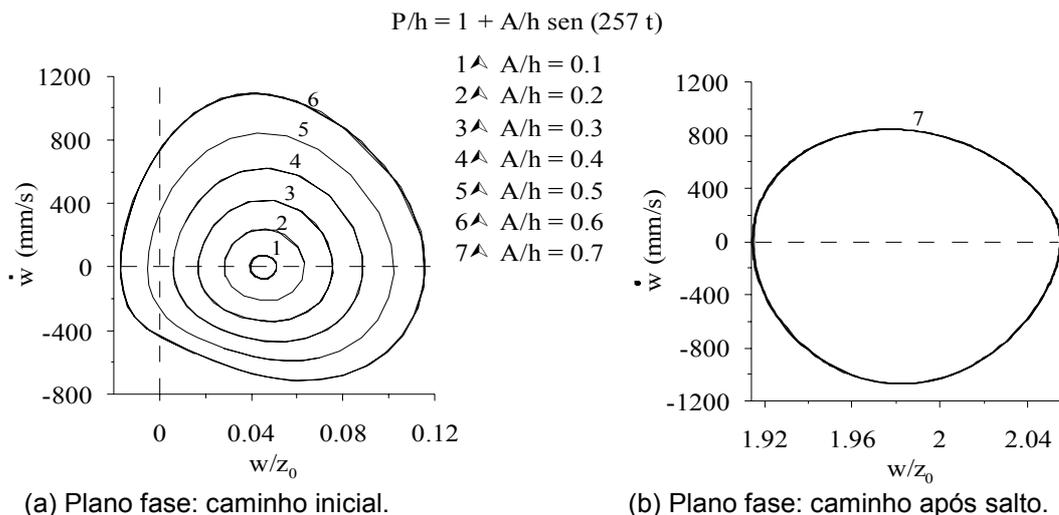


Figura 5.64: Resposta dinâmica para diferentes níveis de carregamento.

Para se analisar o problema de ressonância em estruturas com comportamento não-linear, estuda-se inicialmente o arco com $z_0 = 20$ mm submetido a uma carga harmônica senoidal. Ao contrário de modelos de baixa dimensão, onde diversas técnicas numéricas, tais como métodos de perturbação, podem ser empregados para se obter as curvas de ressonância não-linear com relativa facilidade, para sistemas estruturais com um número elevado de graus de liberdade este problema se torna bastante oneroso do ponto de vista computacional. No presente estudo, obtém-se, para diferentes valores de frequência de excitação, a resposta do sistema após a integração de um determinado número de ciclos que seja suficiente para se definir o estado permanente, e obtém-se para cada frequência de excitação a amplitude máxima e mínima da resposta permanente, como ilustrado na Figura 5.65, que exibe o diagrama de fase associado à relação de frequências $\Omega/\omega = 0.72$ e amplitude de excitação $A/h = 0.5$.MPa, bem como a sua correspondente situação no espectro de resposta. Crescendo e decrescendo a frequência no intervalo analisado, obtém-se a curva de ressonância desejada.

A Figura 5.66 exibe a variação do deslocamento adimensionalizado w/z_0 pela relação de frequência Ω/ω_a , obtida para várias amplitudes, sendo que $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = 238.4$ rad/s é a primeira frequência natural amortecida do sistema. Na Figura 5.67 mostram-se os mesmos dados, apresentando agora no eixo vertical a magnitude da resposta. Observa-se que, à medida que cresce a magnitude da excitação, o pico da curva de ressonância se desloca

acentuadamente para a esquerda, indicando uma grande não-linearidade com perda de rigidez (*softening*). Este comportamento é compatível com o tipo de não-linearidade observada na resposta estática do sistema. Para $A/h=0.4$ já se observa o início do dobramento da curva ressonância, típico de sistemas não-lineares, na região de baixas frequências o que leva a existência de mais de uma resposta permanente para o mesmo valor de frequência. Quando a magnitude da excitação atinge o valor $A/h=0.5$, nota-se um crescimento acentuado das amplitudes na região de baixas frequências até que o arco perde a estabilidade e muda de concavidade. Antes de ocorrer o salto, observam-se outras bifurcações associadas a duplicação de período. Uma resposta típica desta região é aquela ilustrada na Figura 5.65 e cuja resposta no tempo é apresentada na Figura 5.68. Os pontos destacados na Figura 5.69a correspondem aos pontos da seção de Poincaré da resposta que indicam claramente a duplicação de período. A Figura 5.69b mostra a região onde ocorre a duplicação de período.

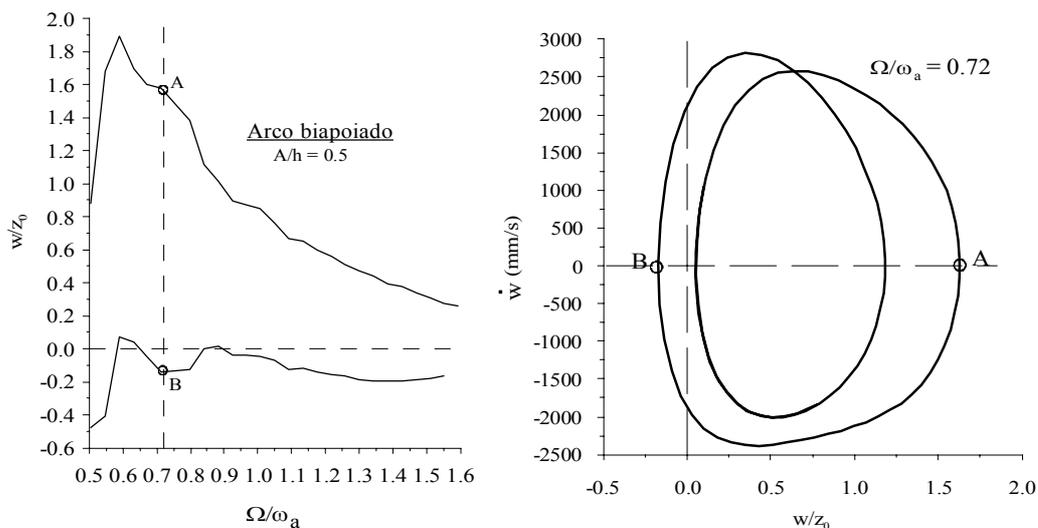


Figura 5.65: Diagrama de fase associado à relação de frequência $\Omega/\omega = 0.72$, indicando os valores de amplitude máxima e mínima.

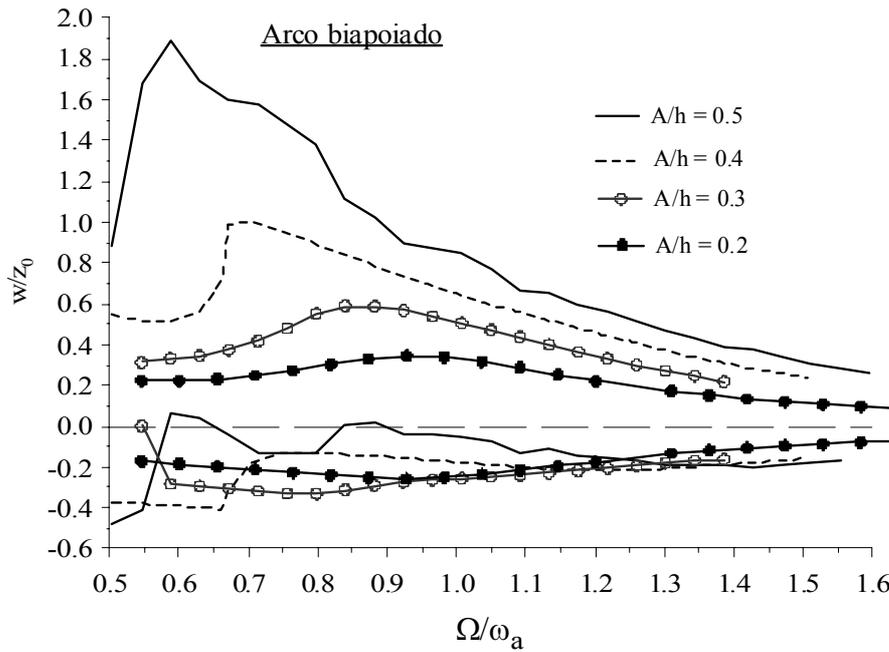


Figura 5.66: Variação dos limites máximos e mínimos da resposta permanente com a relação de frequências e amplitude de carregamento harmônico

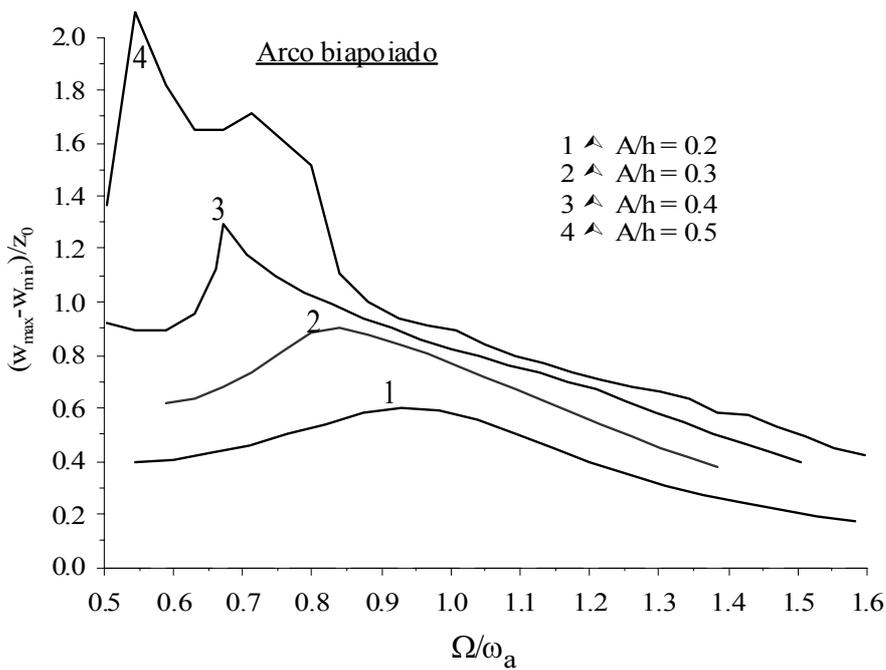


Figura 5.67: Variação do espectro de resposta com a amplitude da carga harmônica A/h .

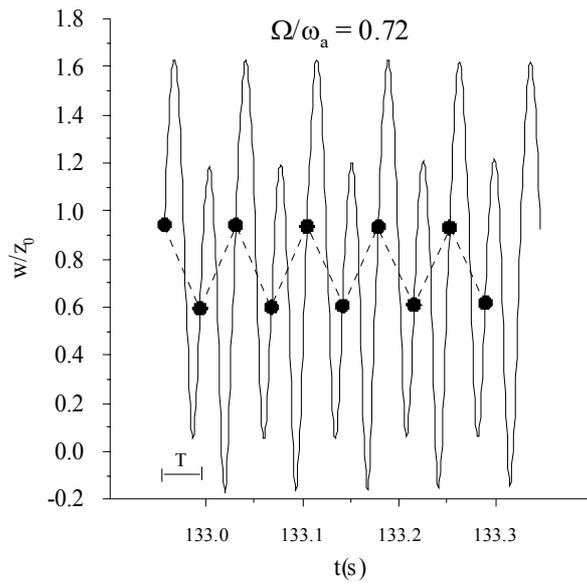
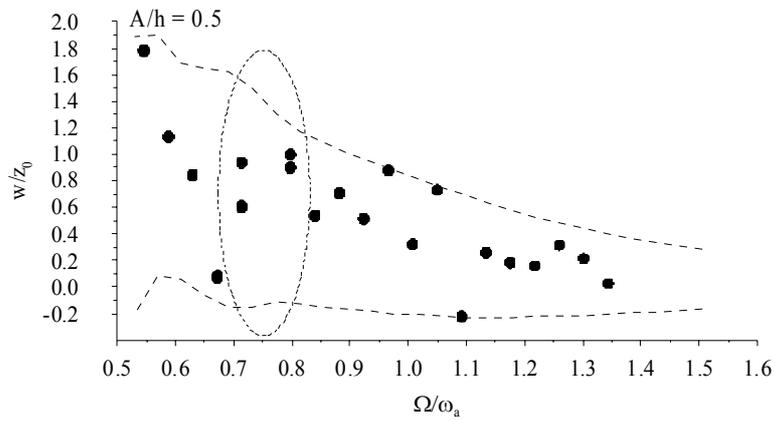
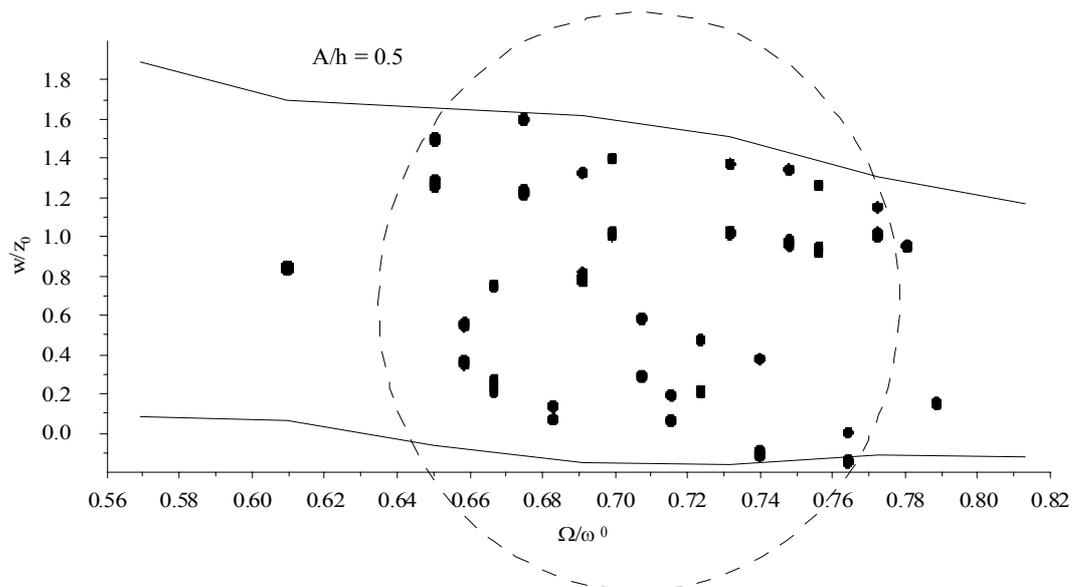


Figura 5.68: Resposta no tempo: duplicação de período.



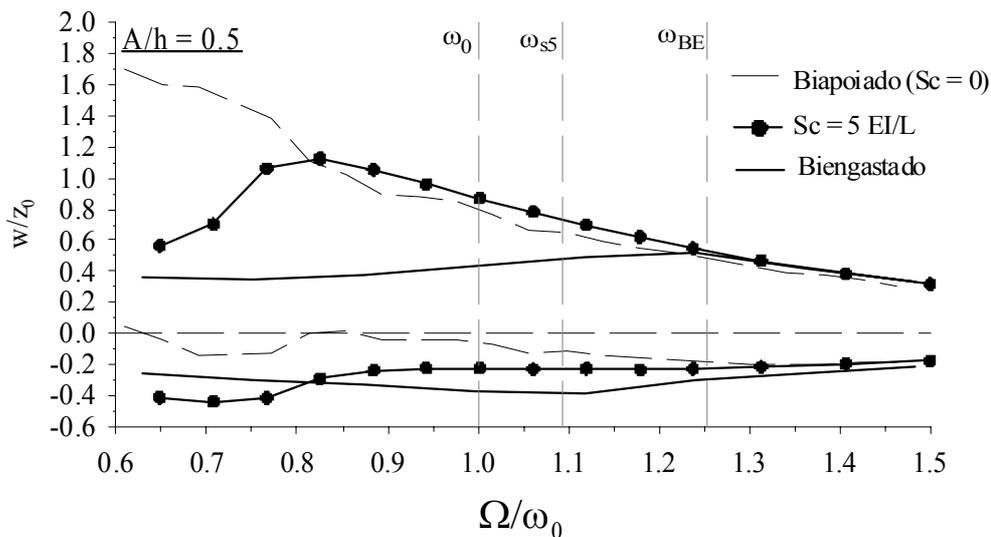
(a)



(b)

Figura 5.69: Coordenadas de Poincaré: duplicação de períodos.

Com o objetivo de observar a influência da rigidez das ligações na frequência de ressonância do arco, é mostrada na Figura 5.70 o espectro de resposta para três situações de apoio: arco biapoiado, apoios com ligação semi-rígida ($Sc = 5EI/L$) e arco biengastado, para uma magnitude de excitação de $A/h=0.5$. Para o arco biengastado a resposta praticamente exibe um comportamento semelhante ao de um sistema linear com o pico de ressonância coincidindo com a frequência natural do arco. À medida que Sc decresce, aumenta acentuadamente o grau de não-linearidade do sistema o que se reflete no grande deslocamento do pico de resposta na direção das baixas frequências. Novamente, os resultados apresentados reforçam a importância das condições de apoio e da estimativa correta da rigidez das ligações em sistemas não-lineares. Os resultados também ressaltam que variações na rigidez das ligações podem levar a estruturas a situações inesperadamente perigosas.



$\omega_0 = 246.2$ rad/s : Menor frequência natural do arco biapoiado,

$\omega_{s5} = 268.9$ rad/s : Menor frequência natural do arco com $Sc = 5EI/L$,

$\omega_{BE} = 308.5$ rad/s : Menor frequência natural do arco biengastado.

Figura 5.70: Variação do espectro de frequências com a rigidez dos apoios.

Considera-se agora o arco com a altura crítica $z_0 = 31.4$ mm. Utilizando o mesmo procedimento descrito anteriormente obtém-se as curvas apresentadas na Figura 5.71. Na Figura 5.72 mostram-se as deformadas correspondentes a amplitude máxima e mínima da resposta permanente do arco quando submetido a uma excitação harmônica de amplitude $A/h = 1.2$ e diferentes frequências de

excitação. Nota-se que, para valores altos da frequência, o arco vibra exibindo uma configuração simétrica. A medida que a frequência decresce o arco passa a exibir configurações com crescente assimetria. Esse processo se intensifica até que o arco perde a estabilidade e passa a vibrar em uma configuração simétrica invertida.

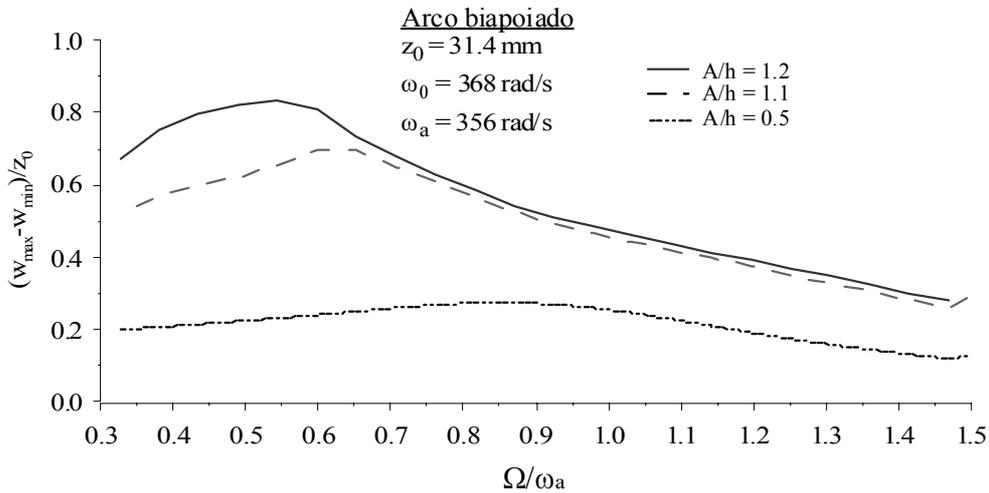


Figura 5.71: Espectro de resposta: Arco $z_0=31.4 \text{ mm}$.

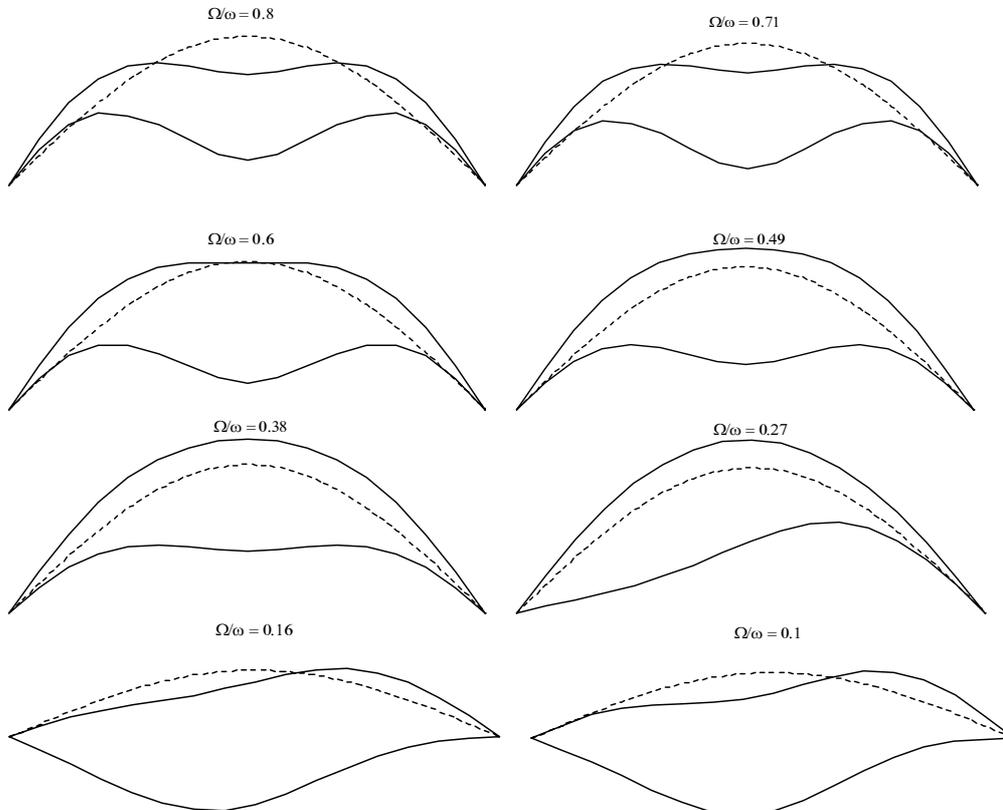


Figura 5.72: Deformadas no estado permanente do arco $z_0 = 31.4 \text{ mm}$, quando submetido a uma excitação harmônica de amplitude $A/h = 1.2$ e diferentes frequências de excitação.

5.4.2

Pórtico em L

Dando continuidade ao estudo paramétrico da seção 3.3 e ao estudo de vibrações da seção 5.2.3, pretende-se analisar aqui o comportamento do pórtico em L quando submetido a carregamento dinâmico. Neste estudo, considera-se um amortecimento viscoso proporcional à massa e à rigidez, $\mathbf{C} = a_m \mathbf{M} + a_k \mathbf{K}$, definido pelos coeficientes de Rayleigh, a_m e a_k , que são calculados a partir da taxa de amortecimento crítico $\xi = 0,4$. A resposta dinâmica é obtida através do método de integração de Newmark para valores de intervalos de tempo Δt controlados pela estratégia adaptativa da seção 4.4.3.1.

Inicialmente, considera-se o pórtico mostrado na Figura 5.73, com uma ligação semi-rígida entre as barras definida pelo parâmetro de rigidez $S_c = EI/L$.

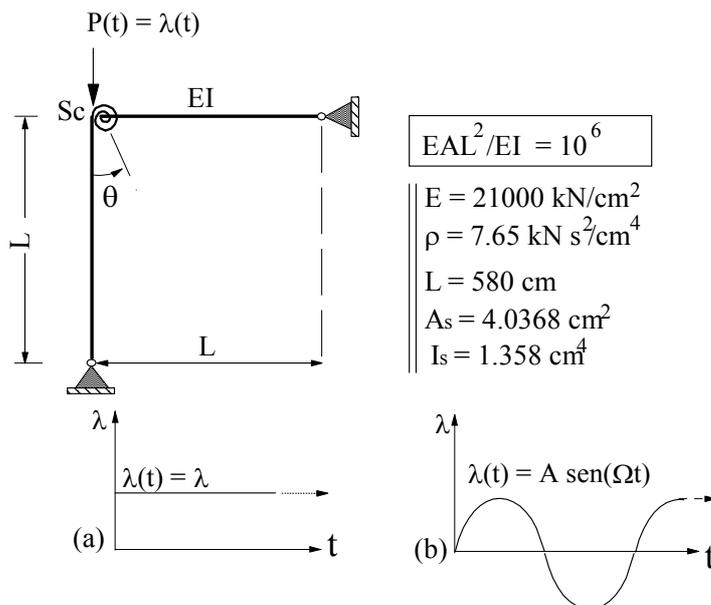


Figura 5.73: Pórtico em L com ligação semi-rígida.

Analisa-se então o comportamento do pórtico submetido a uma carga de magnitude constante e duração infinita, aplicada subitamente (Figura 5.73a). A Figura 5.74 exibe a resposta no tempo para diferentes níveis de carregamento. Como no caso do arco, o pórtico exibe grandes amplitudes na fase transiente e converge para uma configuração estática correspondente ao nível do carregamento aplicado.

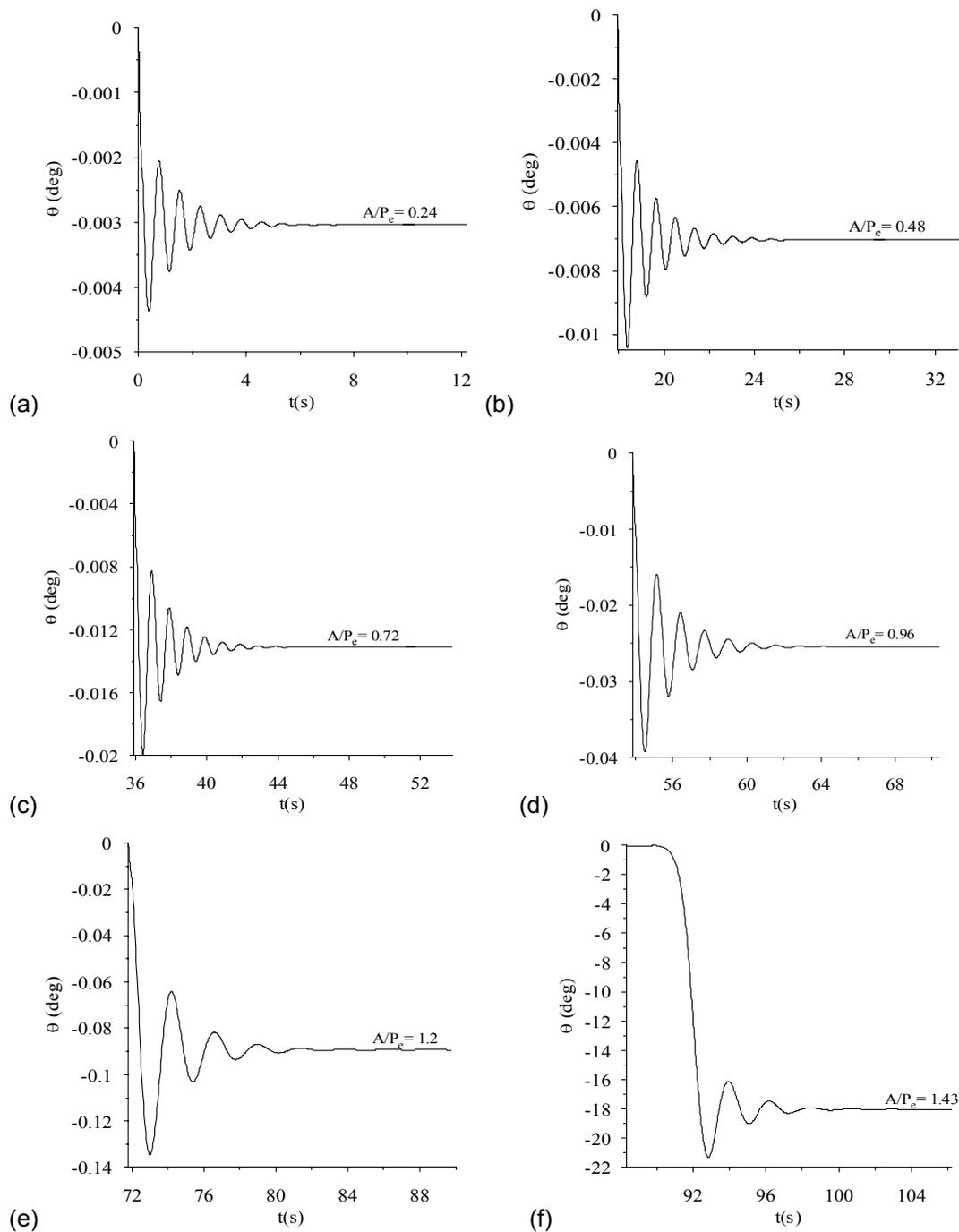


Figura 5.74: Resposta no tempo para diferentes níveis de carregamento do pórtico em L com ligação semi rígida dada por $Sc = 5EI/L$.

Na Figura 5.75 são mostrados os deslocamentos obtidos pela integração numérica do sistema dinâmico amortecido correspondentes a cada nível de carregamento aplicado, juntamente com a trajetória de equilíbrio obtida na análise não-linear estática. Observa-se que não houve perda de estabilidade nesse exemplo. Isso é explicado pelo fato das configurações pós-críticas instáveis para

cada nível de carregamento estarem associadas a configurações com grandes deslocamentos, como mostrado anteriormente. Assim, não se atinge a fronteira de estabilidade do vale potencial, durante a resposta transiente.

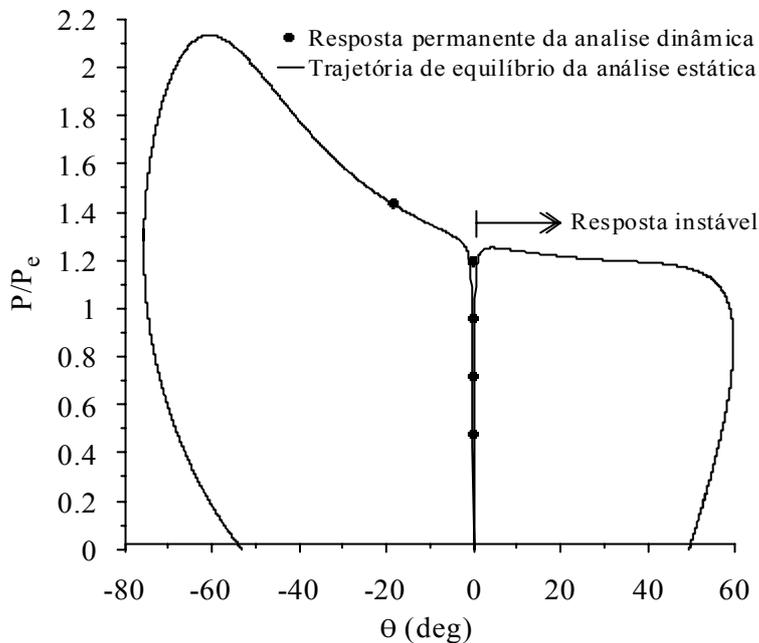


Figura 5.75: Superposição das análises dinâmica e estática.

Considerando agora o carregamento harmônico e utilizando o mesmo procedimento descrito para o exemplo do arco senoidal, obtém-se o espectro de resposta para o pórtico em L com a ligação perfeitamente rígida entre viga e coluna.

A Figura 5.76 exibe a variação da amplitude ($\theta_{\max} - \theta_{\min}$) com a razão de freqüências Ω/ω_a . Nota-se neste caso que a influência da não-linearidade é bastante pequena, fato explicado pela linearidade do caminho fundamental da estrutura perfeita. Na Figura 5.77, mostram-se os planos fase da resposta permanente para $A/P_e=0.4$ e diferentes valores da freqüência da excitação.

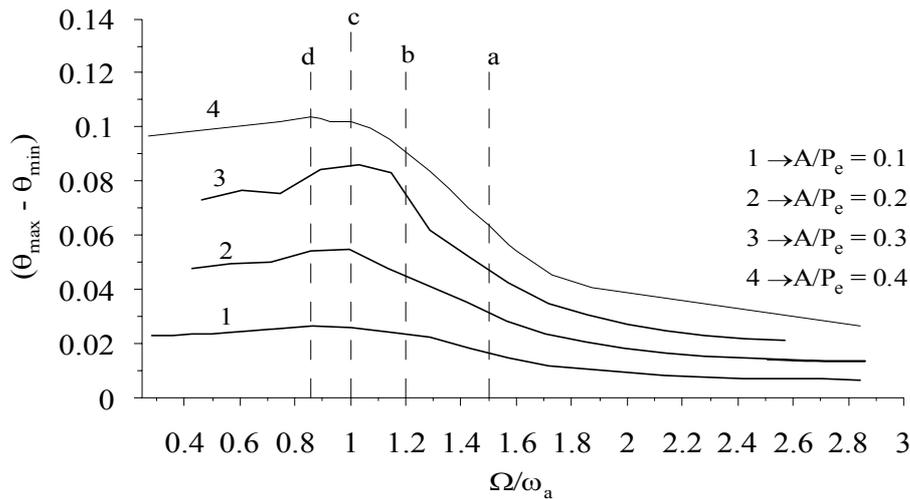


Figura 5.76: Espectro de resposta do pórtico em L com ligação perfeitamente rígida submetido a carregamento harmônico concentrado no topo da coluna.

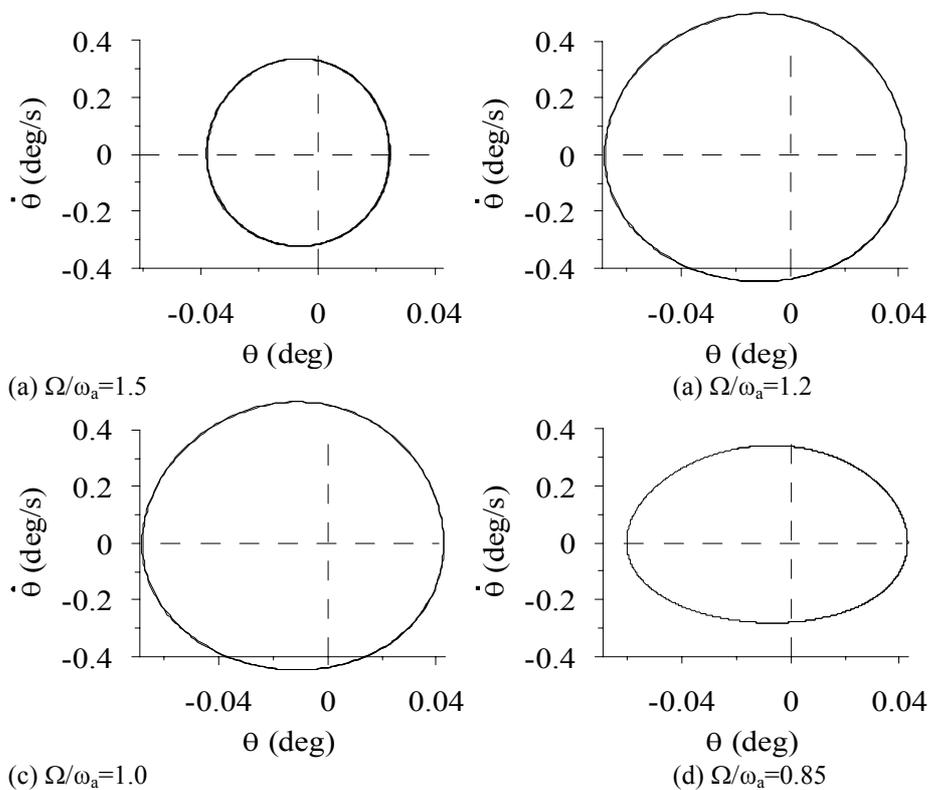


Figura 5.77: Planos fase para $A/P_e = 0.4$.

A seguir, o mesmo estudo é feito para o pórtico em L, porém considerando o carregamento distribuído, como indica a Figura 5.78. Neste caso, ao contrário do anterior, se observa um comportamento semelhante ao do arco com grande não-linearidade do tipo *softening*. Como mostrado anteriormente, o caminho de equilíbrio deste pórtico apresenta uma grande não-linearidade, similar ao do

pórtico com grandes imperfeições iniciais. Assim mostra-se a influência do tipo de carregamento na não-linearidade da resposta dinâmica.

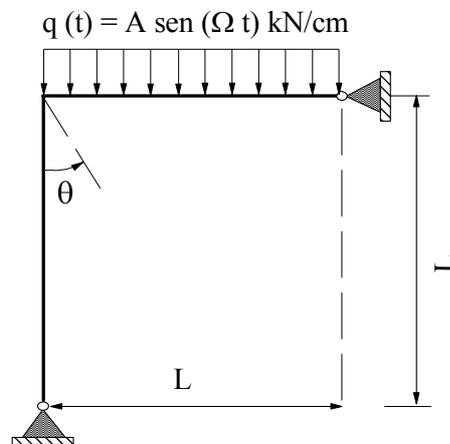


Figura 5.78: Pórtico em L submetido a carregamento harmônico distribuído.

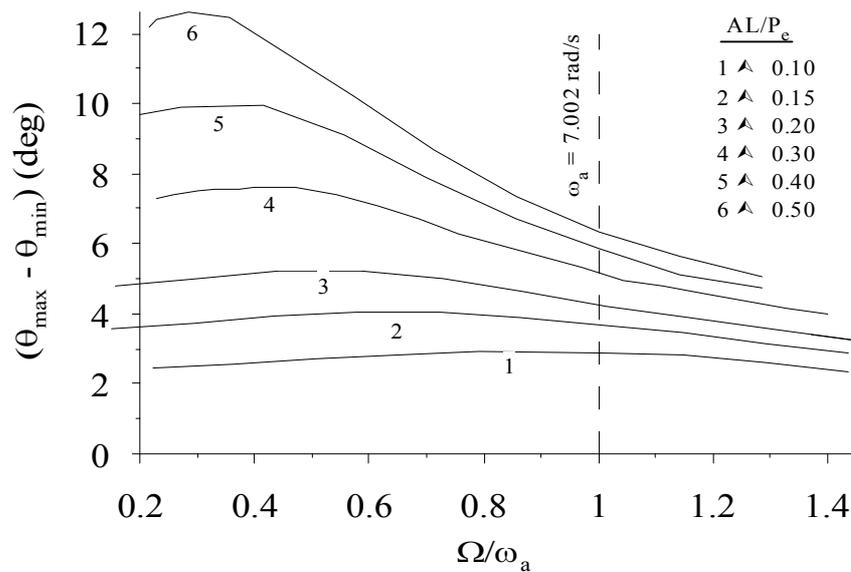


Figura 5.79: Espectro de respostas do pórtico em L com carga harmônica distribuída ao longo da viga.