

4

PROBLEMA ESTRUTURAL DINÂMICO NÃO-LINEAR

4.1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, a definição das equações diferenciais ordinárias de movimento, caracterizando o equilíbrio dinâmico do sistema estrutural, bem como as expressões das matrizes de massa e de amortecimento são mostradas na Seção 4.2. Em seguida, na Seção 4.3, são apresentados o problema de vibração livre e os procedimentos usados neste trabalho para se calcular as frequências naturais e os modos de vibração. Por fim, a Seção 4.4 fornece uma descrição detalhada dos métodos de integração explícitos e implícitos, bem como das estratégias de adaptatividade do incremento de tempo. Juntos, esses procedimentos são usados na solução dos problemas estruturais dinâmicos lineares e não-lineares.

4.2

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações diferenciais que governam a resposta dinâmica de um sistema estrutural podem ser obtidas utilizando-se o *Teorema dos Deslocamentos Virtuais*. Portanto, impondo-se o equilíbrio ao elemento finito apresentado na Figura 4.1, chega-se à seguinte relação, já adotando-se uma notação matricial:

$$\int_0^L \left[\delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}^T c(x) \dot{\mathbf{u}} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \right] dx = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_e(t) \quad (4.1)$$

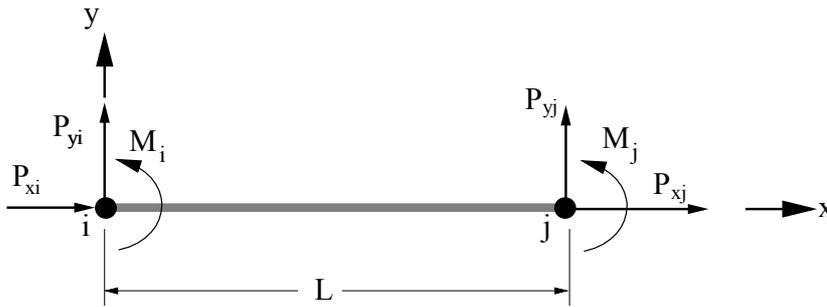


Figura 4.1: Elemento finito de viga-coluna adotado.

onde $\delta \mathbf{u}$ são os deslocamentos virtuais e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ as deformações virtuais correspondentes; $\boldsymbol{\sigma}$ são as tensões no elemento em equilíbrio com \mathbf{F}_e , que são as forças externas aplicadas, função da variável tempo, t ; ρ é a massa por unidade de volume e finalmente $c(x)$ representa o coeficiente de amortecimento viscoso distribuído ao longo comprimento L do elemento.

O campo de deslocamentos \mathbf{u} e suas duas primeiras derivadas no tempo, velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ ($d\mathbf{u}/dt$) e aceleração $\ddot{\mathbf{u}}$ ($d^2\mathbf{u}/dt^2$), podem ser aproximados através das funções de forma $\mathbf{H}(x)$ (Equação (2.20)), e dos parâmetros nodais incrementais $\mathbf{u}^e(t)$, $\dot{\mathbf{u}}^e(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}}^e(t)$, dependentes no tempo, como segue:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{H}(x) \mathbf{u}^e(t) \quad (4.2a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{H}(x) \dot{\mathbf{u}}^e(t) \quad (4.2b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{H}(x) \ddot{\mathbf{u}}^e(t) \quad (4.2c)$$

Pode-se considerar as relações anteriores como uma separação local de variáveis (Cook et All, 1989). Através da aproximação dos deslocamentos (4.2a), avalia-se as deformações no elemento através da expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = \mathbf{B}(x) \mathbf{u}^e(t) \quad (4.3)$$

onde \mathbf{B} é definida como a matriz deformação-deslocamento e é obtida diferenciando-se e combinando-se de forma apropriada as linhas da matriz \mathbf{H} .

Com a substituição das Equações (4.2a), (4.2b), (4.2c) e (4.3) em (4.1), chega-se à forma aproximada e discreta desta última, em qualquer instante t , ou seja:

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \left[\int_0^L \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx \ddot{\mathbf{u}}^e + \int_0^L c(x) \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx \dot{\mathbf{u}}^e + \int_0^L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dx - \mathbf{F}_e \right] = 0 \quad (4.4)$$

Observe que, ao tentar satisfazer a equação anterior, e sabendo que a variação dos deslocamentos $\delta \mathbf{u}$ é arbitrária, chega-se à equação de movimento na forma matricial clássica, do elemento finito considerado:

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_e^e(t) \quad (4.4)$$

onde o primeiro termo do lado esquerdo da equação corresponde às forças de inércia do elemento, sendo \mathbf{M}^e a matriz de massa consistente do elemento, que é definida por:

$$\mathbf{M}^e = \int_0^L \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx, \quad (4.5)$$

O segundo termo caracteriza as forças dependentes da velocidade e do amortecimento; sendo a matriz \mathbf{C}^e chamada de matriz de amortecimento viscoso consistente e sua expressão é dada por:

$$\mathbf{C}^e = \int_0^L c(x) \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx \quad (4.6)$$

Finalmente, \mathbf{F}_i^e representa o vetor das forças internas, onde para o elemento finito adotado, e para problemas não-lineares, é calculado na forma incremental conforme apresentado no Capítulo 2, Equação (2.26).

Na prática, a determinação do coeficiente $c(x)$ em (4.5) é extremamente complicada ou até mesmo inviável. É adotada então neste trabalho a metodologia

usual de se contornar essa dificuldade: avalia-se a matriz de amortecimento através de uma matriz proporcional às matrizes de massa e de rigidez, ou seja, $\mathbf{C}^e = a_m \mathbf{M}^e + a_k \mathbf{K}^e$, onde a_m e a_k são os coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh. Seus valores são obtidos a partir do fator de amortecimento ξ , definido pelo usuário, e de duas frequências naturais distintas ω_i e ω_j , conforme expressões a seguir (Chopra, 1995):

$$a_m = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad \text{e} \quad a_k = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (4.7)$$

Finalmente, de acordo com as relações anteriores e somando-se a contribuição de cada elemento finito usado na modelagem do problema, escreve-se a equação que define a equilíbrio dinâmico de um dado sistema estrutural de acordo com:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_e \quad (4.8)$$

4.2.1

Considerações sobre a matriz de massa

Uma componente genérica m_{ij} da matriz de massa é conhecida como coeficiente de influência de massa e representa a força atuante no grau de liberdade i devido à aplicação de uma aceleração unitária em j e nula nos demais graus de liberdade. O método mais simples de se avaliar a matriz de massa de um elemento finito é o conhecido como o *método da massa concentrada (lumped mass method)*, em que se supõe as propriedades inerciais concentradas nos nós do elemento. Desse modo, para o elemento de viga-coluna da Figura 4.1, a matriz de massa concentrada \mathbf{M}^L é dada por uma matriz diagonal cujas componentes não-nulas são representadas pelo vetor:

$$\mathbf{M}_{ii}^L = [m/2 \quad m/2 \quad I_M \quad m/2 \quad m/2 \quad I_M] \quad (4.9)$$

onde o momento de inércia de massa I_M de uma barra uniforme de comprimento $L/2$ e massa $m/2 = \rho AL/2$ é dado por:

$$I_M = \frac{\rho AL^2}{24} \quad (4.10)$$

Assim, (4.9) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{M}_{ii}^L = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{L^2}{12} & 1 & 1 & \frac{L^2}{12} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Evidentemente, a grande vantagem do *método da massa concentrada* é o fato da matriz de massa ser diagonal. Por outro lado, uma abordagem utilizando a matriz de massa consistente, dada pela equação (4.5), oferece maior precisão da resposta do sistema e, portanto, uma convergência mais rápida quando se utiliza um processo iterativo de solução. Além disso, as relações entre energia potencial e energia cinética são obtidas de forma consistente (Cook et al, 1989).

A matriz de massa consistente do elemento de viga-coluna adotado (Figura 4.1) é obtida diretamente através da Equação (4.5).

Ao se analisar o elemento finito com ligações semi-rígidas (elemento híbrido, Figura 2.10), no que diz respeito à definição da matriz de massa consistente, pode-se partir da seguinte aproximação dos deslocamentos transversais na forma incremental (Chan e Chui, 2000):

$$\Delta v = \begin{bmatrix} H_1^2 H_2 L & -H_1 H_2^2 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3-2H_1)H_1 & (3-2H_2)H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta v_j \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

onde:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad H_2 = \frac{x}{L} \quad (4.13)$$

Combinando-se (4.12), (2.41) e (2.42), chega-se ao campo de deslocamento Δv em função dos deslocamentos nodais, isto é:

$$\Delta v = \begin{bmatrix} H_1^2 H_2 L & -H_1 H_2^2 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (3-2H_1)H_1 & (3-2H_2)H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

expressão esta que pode ser reorganizada da seguinte forma:

$$\Delta v = \mathbf{H}_{sr} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

onde a matriz \mathbf{H}_{sr} , que contém as funções de forma específicas para o elemento com ligações semi-rígidas, é dada por:

$$\mathbf{H}_{sr} = \left(\begin{bmatrix} H_1^2 H_2 L & -H_1 H_2^2 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (3-2H_1)H_1 & 0 & (3-2H_2)H_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Substituindo então \mathbf{H}_{sr} na expressão (4.5) chega-se à matriz de massa consistente (4x4) referentes aos deslocamentos indicados em (4.15). Os demais termos da matriz de massa consistente 6x6 do elemento com ligações semi-rígidas são idênticos aos da matriz de massa do elemento convencional.

4.2.2

Equações do movimento para o problema linear

Para um sistema estrutural com comportamento linear-elástico, o vetor das forças internas \mathbf{F}_i , para os tipos de elementos finitos adotados, pode ser obtido simplesmente fazendo-se:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_L \mathbf{U} \quad (4.17)$$

onde \mathbf{K}_L é a matriz de rigidez linear do sistema e \mathbf{U} os deslocamentos nodais.

As forças externas são variáveis conhecidas do problema a ser resolvido. Com o objetivo de facilitar para o usuário do programa computacional a definição destas forças, adotou-se neste trabalho, a utilização de um vetor de referências semelhante ao utilizado no processo de solução do problema não-linear estático. Assim, define-se $\mathbf{F}_e(t) = \lambda(t) \mathbf{F}_r$, em que $\lambda(t)$ é o parâmetro de carga variável no tempo e \mathbf{F}_r , como já definido, é o vetor de cargas de referência.

Portanto, a resposta dinâmica de um sistema estrutural com características lineares pode ser obtida resolvendo-se o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_L \mathbf{U} = \lambda(t) \mathbf{F}_r \quad (4.19)$$

Geralmente, \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K}_L são constantes e simétricas; \mathbf{M} e \mathbf{K}_L são matrizes positivo definidas, \mathbf{C} é positivo semi-definida e λ uma função contínua do tempo.

Resolver o sistema de equações (4.19) consiste em se encontrar a resposta da estrutura no instante t , satisfazendo as condições iniciais do problema,

$$\mathbf{U}(t = 0) = {}^0\mathbf{U} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{U}}(t = 0) = {}^0\dot{\mathbf{U}} \quad (4.20)$$

onde ${}^0\mathbf{U}$ e ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ são, respectivamente, os vetores de deslocamento e velocidade iniciais. A aceleração em $t = 0$ é obtida diretamente de:

$${}^0\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^{-1}[\lambda(0) \mathbf{F}_r - \mathbf{C} {}^0\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{K}_L {}^0\mathbf{U}] \quad (4.21)$$

Na Seção 4.4 serão apresentados vários procedimentos de solução da Equação (4.19).

4.2.3

Equações do movimento para o problema não-linear geométrico

Para o caso do sistema estrutural com comportamento não-linear elástico, as equações de movimento podem ser representadas, genericamente, como segue:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda(t) \mathbf{F}_r \quad (4.22)$$

onde agora o vetor das forças internas \mathbf{F}_i depende não-linearmente dos deslocamentos \mathbf{U} . Observe, entretanto, que este vetor pode ser calculado, para cada passo de tempo, e para os elementos finitos considerados, seguindo a abordagem incremental apresentada no Capítulo 2.

O algoritmo de solução adotado na solução da Equação (4.22) será apresentado adiante, na Seção 4.4.2.

4.3

ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE

O conhecimento das frequências naturais e modos de vibração de uma estrutura é de fundamental importância para o entendimento das vibrações livres e forçadas. Outra importante função de uma análise de frequências é o estudo da estabilidade de estruturas com caminhos de equilíbrio complicados. Se uma configuração de equilíbrio apresenta pelo menos uma frequência de valor imaginário, esta configuração é instável. Se uma configuração apresenta uma frequência nula, esta configuração corresponde a um ponto crítico. Este fato torna, portanto, bastante útil a obtenção de curvas que relacionam o quadrado da frequência natural com o nível de carregamento.

4.3.1

Equação característica

Costuma-se geralmente resolver os problemas de vibração livre desconsiderando inicialmente os efeitos de amortecimento. Nesse caso, a equação do movimento assume a seguinte forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema estrutural, que pode ou não ser dependente das forças internas no elemento. Supondo então que os deslocamentos na equação anterior possam ser substituídos por funções senoidais do tipo $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 \sin(\omega t)$, chega-se à seguinte equação característica do problema de autovalor:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (4.24)$$

onde ω é a frequência natural do sistema.

Para problemas não-lineares, na presença de forças axiais, a rigidez do elemento finito e conseqüentemente a rigidez do sistema estrutural, se modificam.

Esse efeito pode incluído na análise através da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_τ . Assim, o problema de autovalor pode ser redefinido da seguinte forma:

$$\left| [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau] - \omega^2 \mathbf{M} \right| = 0 \quad (4.25)$$

onde as matrizes de rigidez \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_τ para o elemento finito de pórtico plano convencional ou híbrido (ligações semi-rígidas) é obtida conforme mostrado no Capítulo 2.

4.3.2

Algoritmo de solução do problema de autovalor

A solução do problema de autovalor definido pela Equação (4.24) pode ser obtida de forma direta utilizando, por exemplo, o método de Jacobi (Brebbia e Ferrante, 1986; Demmel e Vaselec, 1989).

Entretanto, ao se incorporar a não-linearidade geométrica na análise, esta solução deixa de ser obtida de forma direta, já que a montagem da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_τ depende dos esforços internos atuantes no elemento. Faz-se necessário, portanto, o conhecimento da configuração de equilíbrio do sistema sob determinado carregamento, para que em seguida se possam avaliar esses esforços internos.

O algoritmo adotado neste trabalho para se calcular as frequências naturais, após cada nova configuração de equilíbrio do sistema, é apresentado na Figura 4.2.

Observe que a solução do problema de autovalor é obtida através da inclusão da sub-rotina FREQNAT, logo após a verificação da convergência do processo iterativo. Assim, a cada nova configuração de equilíbrio do sistema estrutural, os deslocamentos e os esforços internos obtidos são utilizados em FREQNAT para avaliar a matriz de rigidez e, logo em seguida, as frequências naturais e os modos de vibração. Na Figura 4.3 é mostrada a organização da sub-rotina FREQNAT.

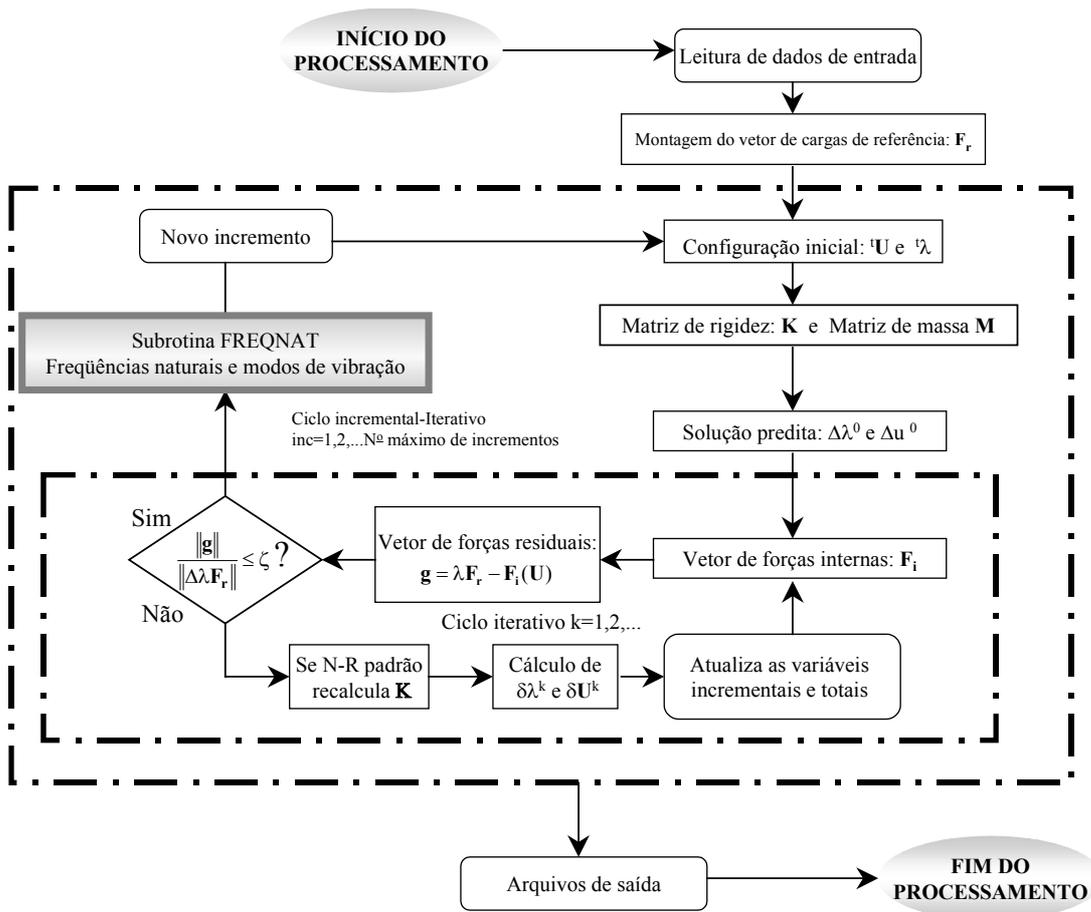


Figura 4.2: Algoritmo de solução não-linear.

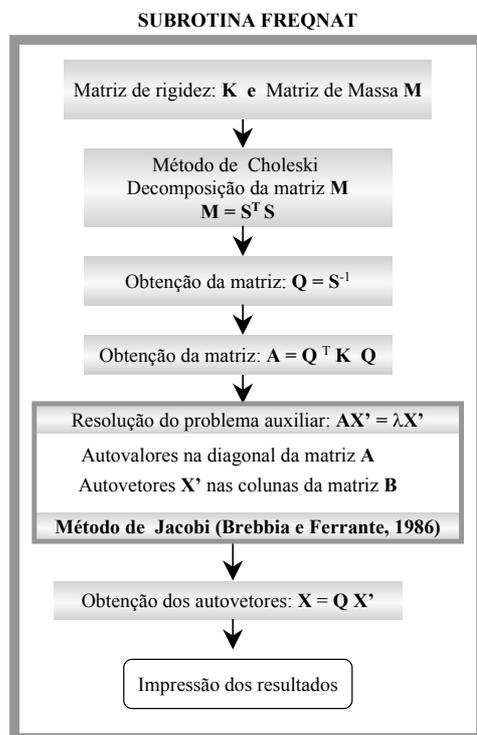


Figura 4.3: Algoritmo adotado para cálculo das frequências (Sub-rotina FREQNAT).

4.4

ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO

Os métodos de integração encontrados na literatura podem ser divididos em dois grupos: métodos explícitos e métodos implícitos (Dokainish e Subbaraj, 1988, Subbaraj e Dokainish, 1989). Esses métodos apresentam vantagens e desvantagens, que podem ser comparadas através do maior intervalo de tempo que pode ser utilizado para produzir a resposta com a eficiência desejada, bem como através da sua estabilidade numérica.

Um método de integração baseia-se geralmente em duas idéias básicas e essenciais:

- (i) as equações do movimento são discretizadas no tempo e o equilíbrio do sistema é imposto em instantes separados por intervalos de tempo;
- (ii) ao longo de cada intervalo de tempo, um determinado comportamento é adotado para se determinar a variação do deslocamento, da velocidade e da aceleração.

Nas próximas seções serão apresentados, de forma detalhada, os métodos explícitos e implícitos que foram implementados no programa de análise estrutural dinâmica linear e não-linear desenvolvido neste trabalho.

4.4.1

Métodos explícitos e implícitos

A principal característica dos métodos explícitos é a obtenção da solução do problema dinâmico no tempo $t+\Delta t$ considerando-se o equilíbrio do sistema no instante t , enquanto que para os métodos implícitos, algumas condições de equilíbrio precisam ser satisfeitas em $t+\Delta t$.

Os métodos explícitos têm a vantagem de exigir um menor número de operações nos cálculos envolvidos, o que os tornaria mais econômicos computacionalmente. Os métodos implícitos requerem usualmente a solução de um sistema de equações não-lineares em cada passo de tempo e a solução do problema é obtida através de sucessivas soluções de sistemas de equações

algébricas lineares (para cada instante de tempo), utilizando em geral algoritmos iterativos do tipo Newton-Raphson.

Em geral, os métodos implícitos são incondicionalmente estáveis, ou seja, não têm restrição com relação ao tamanho do incremento de tempo para efeito de estabilidade do algoritmo, e dessa forma, o tamanho do incremento de tempo é ditado pela precisão desejada e não pela estabilidade do algoritmo. Já os métodos explícitos são sempre condicionalmente estáveis e os incrementos de tempo requeridos por esses métodos, para que seja atendida a condição de estabilidade, são muito pequenos. Ao contrário dos algoritmos implícitos, o tamanho do incremento de tempo nos algoritmos explícitos é governado, em geral, pela estabilidade e não pela precisão do algoritmo, visto que o incremento de tempo requerido para estabilidade é tão pequeno que se torna suficiente para que se obtenha uma resposta precisa.

Os métodos explícitos são particularmente bem sucedidos em problemas dinâmicos de curta duração ou problemas de propagação de ondas, tais como estruturas sujeitas a carregamentos explosivos ou impactos de alta velocidade.

Os métodos explícitos mais tradicionalmente empregados na solução de problemas estruturais dinâmicos são os *métodos da diferença central e de Runge-Kutta*. Com relação aos métodos implícitos, destacam-se os *métodos da família de Newmark*

4.4.1.1

Método da diferença central

O método da diferença central é um dos métodos mais utilizados em programas de análise dinâmica. Esse método explícito é baseado nas seguintes fórmulas de diferenças centrais:

$${}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U} \right); \quad {}^{t-\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^t\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t/2}\mathbf{U} \right) \quad (4.26a,b)$$

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t/2}\mathbf{U} \right) \quad (4.26c)$$

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} - {}^{t-\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} \right) \quad (4.26d)$$

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U} = \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} + {}^t\mathbf{U} \right); \quad {}^{t-\Delta t/2}\mathbf{U} = \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \right) \quad (4.26e,f)$$

onde $t-\Delta t$, t e $t+\Delta t$ são 3 instantes de tempo sucessivos. Das equações anteriores pode-se tirar:

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2\Delta t} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \right) \quad (4.27a)$$

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - 2 {}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \right) \quad (4.27b)$$

Será considerada inicialmente solução do problema estrutural dinâmico linear. Levando-se então (4.27a) e (4.27b) na equação diferencial de equilíbrio dinâmico (4.19) e, em seguida, reagrupando-se os termos, chega-se a:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \lambda(t) \mathbf{F}_r - \left(\mathbf{K} + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) {}^t\mathbf{U} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \quad (4.28)$$

do qual se deseja obter os deslocamentos ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$.

Nota-se em (4.28) que ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ é função de ${}^t\mathbf{U}$ e ${}^{t-\Delta t}\mathbf{U}$, o que torna necessário um procedimento especial para iniciar o processo de solução. Esse procedimento pode ser facilmente alcançado conhecendo-se ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$, de onde pode-se calcular ${}^{-\Delta t}\mathbf{U}$, através de (4.27a) e (4.27b), ou seja:

$${}^{-\Delta t}\mathbf{U} = {}^0\mathbf{U} - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0\ddot{\mathbf{U}} \quad (4.29)$$

Conforme observado em (4.28), os deslocamentos no instante de tempo $t+\Delta t$ são calculados através dos parâmetros obtidos da configuração de equilíbrio do instante anterior t . Isso caracteriza um método explícito de integração. Note também que esse esquema de integração não requer a fatorização da matriz de rigidez efetiva na solução incremental. Entretanto, mesmo se uma matriz de massa diagonal for adotada (*método da massa concentrada*), e se a matriz de amortecimento não for diagonal, haverá necessidade da fatorização da matriz de massa efetiva $\hat{\mathbf{M}} = (1/\Delta t^2)\mathbf{M} + (1/2\Delta t)\mathbf{C}$.

Uma alternativa para contornar esse problema é apresentada por Dokainish e Subbaraj (1988), em que, substituindo ${}^t\dot{\mathbf{U}} = 1/2\Delta t ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U})$ pela aproximação ${}^t\dot{\mathbf{U}} = 1/\Delta t ({}^t\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U})$, chega ao seguinte sistema explícito:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1} [\Delta t^2 ({}^t\lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{K} {}^t\mathbf{U}) - \Delta t \mathbf{C} ({}^t\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U})] + 2 {}^t\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \quad (4.30)$$

No presente trabalho, entretanto, foi implementado o procedimento geral utilizando-se a expressão (4.28), conforme mostrado na tabela abaixo.

a. Cálculos iniciais:

1. Monte a matriz de massa \mathbf{M} , a matriz de rigidez \mathbf{K} , e a matriz de amortecimento proporcional \mathbf{C} ;
2. Inicialize ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$;
3. Selecione um intervalo de tempo Δt ;
4. Calcule as constantes de integração:
 $a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}$; $a_1 = \frac{1}{2\Delta t}$; $a_2 = 2a_0$; $a_3 = \frac{1}{a_2}$
5. Calcule ${}^{-\Delta t}\mathbf{U} = {}^0\mathbf{U} - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^0\ddot{\mathbf{U}}$;
6. Monte a matriz de massa efetiva: $\hat{\mathbf{M}} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$;
7. Triangularize a matriz de massa efetiva $\hat{\mathbf{M}}$.

b. Para cada passo de tempo Δt :

1. Calcule o carregamento efetivo em t :

$$\hat{\mathbf{F}} = {}^t\lambda \mathbf{F}_r - (\mathbf{K} + a_2 \mathbf{M}) {}^t\mathbf{U} - (a_0 \mathbf{M} - a_1 \mathbf{C}) {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}$$

2. Avalie os deslocamentos no instante $t+\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{M}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}}$$

3. Avalie velocidades e acelerações no instante t :

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = a_1 ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U})$$

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = a_0 ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - 2 {}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U})$$

Tabela 4.1: Método da diferença central.

4.4.1.2

Método de Runge-Kutta

Uma forma de se resolver problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias de ordem elevada é reduzir o problema a um sistema de equações de primeira ordem. Por exemplo, a equação de segunda ordem dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} = r(x) \quad (4.31)$$

pode ser reduzida ao seguinte sistema de duas equações de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = z(x) \quad (4.32a)$$

$$\frac{dz}{dx} = r(x) - q(x)z(x) \quad (4.32b)$$

Dessa maneira, pode-se substituir, ou reduzir, um problema com uma equação diferencial ordinária de ordem N por um problema de N de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, ou seja:

$$\frac{dv_i(x)}{dx} = f_i(x, v_1, \dots, v_N) \quad i = 1, \dots, N \quad (4.33)$$

onde f_i são funções conhecidas.

Para a solução do problema através de uma aproximação linear, como ilustrada na Figura 4.4, poderia ser adotado o *método de Euler*, que baseia-se na seguinte fórmula:

$${}^{n+1}\mathbf{v} = {}^n\mathbf{v} + \Delta x \mathbf{f}({}^n\mathbf{x}, {}^n\mathbf{v}) \quad (4.34)$$

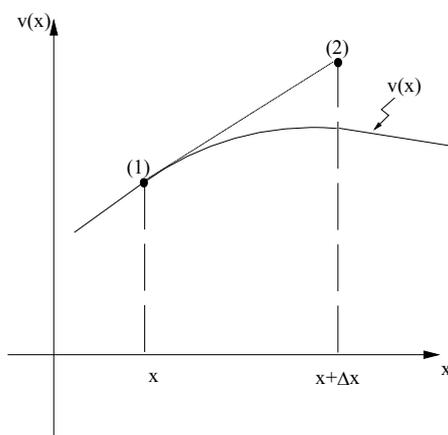


Figura 4.4: Representação gráfica do método de Euler (aproximação linear).

O método de Euler é conceitualmente importante. Entretanto, na prática, não é recomendável, pois, devido a sua aproximação grosseira, seriam necessários intervalos Δt muito pequenos para se obter soluções aceitáveis.

O *método de Runge-Kutta* consiste em se propagar a solução em um intervalo, combinando informações de vários passos obtidos pelo método de Euler em uma expansão do problema em série de Taylor na ordem que se desejar. Nos problemas de engenharia governados por equações diferenciais, em geral utiliza-se o *método de Runge-Kutta de quarta ordem*. Trata-se de um método clássico que é freqüentemente recomendado pelos matemáticos em função da sua exatidão (Dokainish e Subbaraj, 1989).

No método Runge-Kutta de quarta ordem, para cada passo Δt , é necessário que se calculem os parâmetros desejados em quatro situações distintas: uma vez para o ponto inicial, duas vezes para o ponto central e uma vez no ponto final do intervalo (Figura 4.5). A partir dos cálculos nesses pontos indicados, o valor final da função (mostrado como um ponto cheio) é calculado.

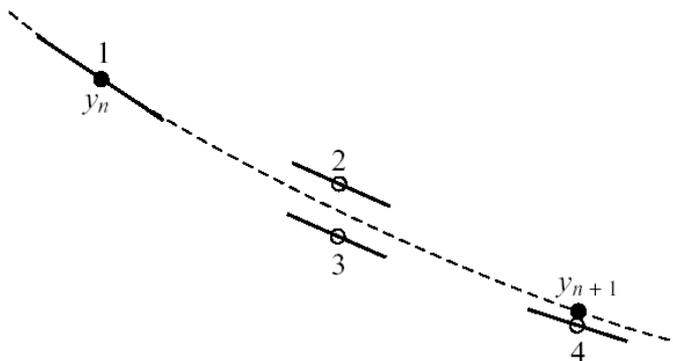


Figura 4.5: Idéia básica do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Esse método, portanto, envolve a seguinte seqüência de cálculos:

$$\mathbf{A}_1 = \Delta x \mathbf{f} \left({}^n x, {}^n \mathbf{v} \right) \quad (4.35a)$$

$$\mathbf{A}_2 = \Delta x \mathbf{f} \left({}^n x + \frac{\Delta x}{2}, {}^n \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1 \right) \quad (4.35b)$$

$$\mathbf{A}_3 = \Delta x \mathbf{f} \left({}^n x + \frac{\Delta x}{2}, {}^n \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_2 \right) \quad (4.35c)$$

$$\mathbf{A}_4 = \Delta x \mathbf{f} \left({}^n x + \Delta x, {}^n \mathbf{v}_n + \mathbf{A}_3 \right) \quad (4.35d)$$

Esses quatro parâmetros são então combinados na seguinte expressão, que define a expressão geral do método de Runge-Kutta de quarta ordem:

$${}^{n+1}\mathbf{v} = {}^n\mathbf{v} + \frac{1}{6} \mathbf{A}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{A}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{A}_3 + \frac{1}{6} \mathbf{A}_4 \quad (4.36)$$

Desse modo, o método requer a avaliação da função conhecida \mathbf{f} e, por conseguinte, os parâmetros \mathbf{A}_i , em quatro pontos diferentes para cada passo Δx .

Tratando-se agora especificamente do problema de dinâmica estrutural em questão, representado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem dado em (4.19) ou (4.22), a redução da ordem do sistema é feita da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \quad (4.37a)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial t} = \mathbf{M}^{-1} [\lambda(t) \mathbf{F}_r - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{K} \mathbf{U}] \quad (4.37b)$$

portanto, para se utilizar o procedimento fornecido por (4.35-4.36), basta definir os parâmetros do método como é mostrado abaixo:

$${}^n \mathbf{x} = t \quad \text{e} \quad \Delta x = \Delta t; \quad (4.38.a)$$

$$\mathbf{f}^T = [\dot{u}_1 \ddot{u}_1 \dot{u}_2 \ddot{u}_2 \dots \dot{u}_m \ddot{u}_m]; \quad (4.38b)$$

$$\mathbf{v}^T = [u_1 \dot{u}_1 u_2 \dot{u}_2 \dots u_m \dot{u}_m] \quad (4.38c)$$

onde m é o número de graus de liberdade do sistema estrutural a ser resolvido.

4.4.1.3

Método de Newmark

O método de Newmark (Newmark,1959) é o mais popular dos métodos de integração implícitos. Sua concepção é baseada na variação linear da aceleração ao longo do intervalo de integração. A variação da resposta de um sistema estrutural durante um intervalo de tempo Δt , considerando a aceleração linear, é ilustrado na Figura 4.6.

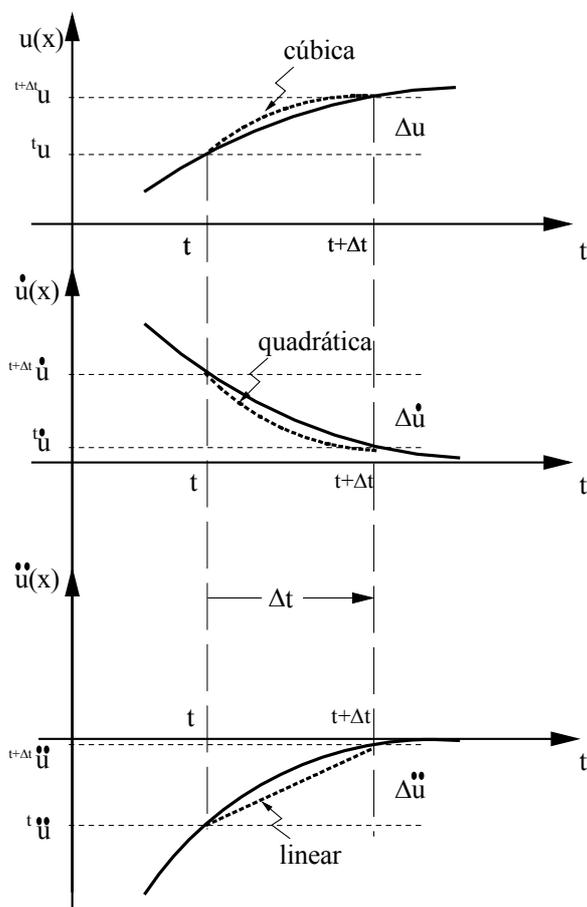


Figura 4.6: Aceleração linear.

De acordo com esse processo de integração, a expressão para a velocidade no final de cada intervalo é dada por:

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \frac{\Delta t}{2}({}^t\ddot{U} + {}^{t+\Delta t}\ddot{U}) \quad (4.39)$$

Para se obter ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ em função de parâmetros do instante anterior, utiliza-se a seguinte expansão em série de Taylor.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + {}^t\ddot{\mathbf{U}}\frac{\Delta t^2}{2} + {}^t\dddot{\mathbf{U}}\frac{\Delta t^3}{6} + {}^t\mathbf{U}^{iv}\frac{\Delta t^4}{24} + \dots \quad (4.40)$$

onde, de acordo com a hipótese de variação linear da aceleração, escreve-se:

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t}({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} - {}^t\ddot{\mathbf{U}}) \quad \text{e} \quad {}^t\mathbf{U}^{iv} = 0 \quad (4.41)$$

Assim, a Equação (4.40) é redefinida da seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + {}^t\ddot{\mathbf{U}}\frac{\Delta t^2}{3} + {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\frac{\Delta t^2}{6} \quad (4.42)$$

As expressões (4.39) e (4.42) são as fórmulas de Newmark para a variação linear da aceleração no intervalo de tempo considerado. Através do emprego dos parâmetros β e γ nessas expressões, cujos valores determinam a eficiência e estabilidade do algoritmo, chega-se às fórmulas gerais do método de Newmark, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + (1-\gamma){}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t + \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\Delta t \quad (4.43a)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right){}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 \quad (4.43b)$$

onde, para $\beta = 1/6$ e $\gamma = 1/2$, as relações acima correspondem ao método da aceleração linear. Newmark (1959) propôs os valores de $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ para se ter um algoritmo incondicionalmente estável com aceleração constante no intervalo, sendo esta definida pela média das acelerações nos instantes extremos do intervalo.

Para o problema linear, a resposta do sistema estrutural no instante $t+\Delta t$ pode ser avaliada resolvendo-se a seguinte equação de movimento:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (4.44)$$

De (4.46a), (4.46b) e (4.47), chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} \right] {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r + \\ & \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} {}^t\mathbf{U} + \left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t} - 1 \right) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] - \\ & \mathbf{M} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t^2} {}^t\mathbf{U} + \frac{1}{\beta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

ou, de uma forma mais compacta:

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}} \quad (4.46)$$

onde a matriz de rigidez efetiva e o vetor de forças nodais efetivo são dados por:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} \quad (4.47a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}} = & {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r + \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} {}^t\mathbf{U} + \left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t} - 1 \right) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \\ & - \mathbf{M} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t^2} {}^t\mathbf{U} + \frac{1}{\beta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \end{aligned} \quad (4.47b)$$

Um resumo dos procedimentos do método Newmark para problemas estruturais lineares é apresentado no algoritmo presente na Tabela 4.2.

a. Cálculos iniciais:

1. Monte a matriz de massa \mathbf{M} , a matriz de rigidez \mathbf{K} e a matriz de amortecimento proporcional \mathbf{C} ;
2. Inicialize ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$;
3. Selecione um intervalo de tempo Δt ;
4. Calcule as seguintes constantes de integração:

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}; a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}; a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}; a_3 = \left(\frac{1}{2\beta \Delta t} - 1 \right);$$

$$a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1; a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right); a_6 = \Delta t(1 - \gamma); a_7 = \Delta t \gamma$$
5. Monte a matriz de rigidez efetiva: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$;
6. Triangularize a matriz $\hat{\mathbf{K}}$.

b. Para cada passo de tempo Δt :

1. Calcule o carregamento efetivo em $t+\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{F}} = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r + \mathbf{M}(a_0 {}^t\mathbf{U} + a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C}(a_1 {}^t\mathbf{U} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}})$$
 2. Avalie os deslocamentos no instante $t+\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}}$$
 3. Avalie velocidades e acelerações no instante $t+\Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = a_0 ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_6 {}^t\ddot{\mathbf{U}} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$$
-

Tabela 4.2: Método de Newmark para problemas estruturais dinâmicos lineares.

4.4.1.4

Método de Wilson- θ

O esquema de integração implícito conhecido como método Wilson- θ é uma extensão do método da aceleração linear. O método Wilson- θ , entretanto, considera variação linear da aceleração em um intervalo entre t e $t+\theta\Delta t$, como mostrado na Figura 4.7, onde $\theta \geq 1$. Quando $\theta = 1$ o problema se reduz ao método da aceleração linear. De acordo com a literatura pesquisada (Bathe, 1995; Subbaraj e Dokainish, 1989), para haver estabilidade incondicional dessa estratégia de solução é necessário utilizar $\theta \geq 1.37$.

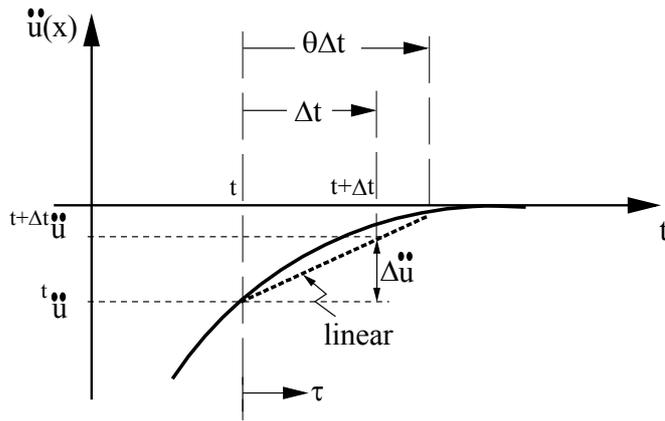


Figura 4.7: Idéia básica do método de Wilson- θ .

Fazendo τ ser o incremento no tempo, tal que $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$, tem-se a seguinte variação linear para a aceleração:

$${}^{t+\tau}\ddot{U} = {}^t\ddot{U} + \frac{\tau}{\theta\Delta t}({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^t\ddot{U}) \quad (4.48)$$

Integrando-se duas vezes a equação anterior, chega-se a:

$${}^{t+\tau}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \tau {}^t\ddot{U} + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^t\ddot{U}) \quad (4.49a)$$

$${}^{t+\tau}U = {}^tU + \tau {}^t\dot{U} + \frac{\tau^2}{2} {}^t\ddot{U} + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^t\ddot{U}) \quad (4.49b)$$

Observe então que no instante $t+\theta\Delta t$, ou seja, $\tau = \theta\Delta t$, as duas equações anteriores se tornam:

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \frac{\theta\Delta t}{2}({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} + {}^t\ddot{U}) \quad (4.50a)$$

$${}^{t+\theta\Delta t}U = {}^tU + \theta\Delta t {}^t\dot{U} + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} + 2 {}^t\ddot{U}) \quad (4.50b)$$

Dessas equações pode-se chegar aos valores de ${}^{t+\theta\Delta t}\dot{U}$ e ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U}$ em termos de ${}^{t+\theta\Delta t}U$, ou seja:

$${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - \frac{6}{\theta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} - 2 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \quad (4.51a)$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = \frac{3}{\theta\Delta t}({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - 2 {}^t\dot{\mathbf{U}} - \frac{\theta\Delta t}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} \quad (4.51b)$$

Para se obter os deslocamentos, as velocidades e as acelerações no instante $t+\theta\Delta t$, o equilíbrio do sistema estrutural deve ser considerado nesse instante. Assim, escreve-se:

$$\mathbf{M} {}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} {}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\theta\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (4.52)$$

onde o parâmetro de carga é extrapolado linearmente através da expressão:

$${}^{t+\theta\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \theta ({}^{t+\Delta t}\lambda - {}^t\lambda) \quad (4.53)$$

Substituindo então as expressões de ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ e ${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$, Equações (4.51a) e (4.51b), em (4.52), chega-se a uma equação onde os deslocamentos podem ser obtidos no instante $t+\theta\Delta t$, ${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U}$, ou seja:

$$\left[\mathbf{K} + \frac{3}{\theta\Delta t} \mathbf{C} + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \mathbf{M} \right] {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} = [{}^t\lambda + \theta({}^{t+\Delta t}\lambda - {}^t\lambda)] \mathbf{F}_r + \mathbf{C} \left[\frac{3}{\theta\Delta t} {}^t\mathbf{U} + 2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\theta\Delta t}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] + \mathbf{M} \left[\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} {}^t\mathbf{U} + \frac{6}{\theta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} + 2 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \quad (4.54)$$

que, como na seção anterior, pode ser simplificada de acordo com:

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}} \quad (4.55)$$

onde agora a matriz de rigidez efetiva e o vetor de forças nodais efetivo são dados por:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{3}{\theta\Delta t} \mathbf{C} + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \mathbf{M} \quad (4.56a)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = [\lambda + \theta(\lambda - \lambda)] \mathbf{F}_r + \mathbf{C} \left[\frac{3}{\theta \Delta t} {}^t \mathbf{U} + 2 {}^t \dot{\mathbf{U}} + \frac{\theta \Delta t}{2} {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] + \mathbf{M} \left[\frac{6}{(\theta \Delta t)^2} {}^t \mathbf{U} + \frac{6}{\theta \Delta t} {}^t \dot{\mathbf{U}} + 2 {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] \quad (4.56b)$$

Note que através do vetor de deslocamento ${}^{t+\theta\Delta t} \mathbf{U}$ obtido da solução de (4.55), chega-se, para o instante $t+\theta\Delta t$, na aceleração ${}^{t+\theta\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}$ usando-se a Equação (2.51a). Com esse vetor calculado e fazendo-se $\tau = \Delta t$ em (4.48), (4.49a) e (4.49b), obtém-se, por fim, nos valores de ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}$, ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}$ e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ procurados. A Tabela 4.3 apresenta de forma resumida o algoritmo de Wilson- θ para os problemas estruturais lineares.

a. Cálculos iniciais:

1. Monte a matriz de massa \mathbf{M} , a matriz de rigidez \mathbf{K} , e a matriz de amortecimento proporcional \mathbf{C} ;
2. Inicialize ${}^0 \mathbf{U}$, ${}^0 \dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0 \ddot{\mathbf{U}}$;
3. Selecione um intervalo de tempo Δt ;
4. Calcule as seguintes constantes de integração:

$$a_0 = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2}; a_1 = \frac{3}{\theta \Delta t}; a_2 = 2a_1; a_3 = \frac{\theta \Delta t}{2};$$

$$a_4 = \frac{a_0}{\theta}; a_5 = -\frac{a_2}{\theta}; a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}; a_7 = \frac{\Delta t}{2}; a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$$
5. Monte a matriz de rigidez efetiva: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$;
6. Triangularize $\hat{\mathbf{K}}$.

b. Para cada passo de tempo Δt :

1. Calcule o carregamento efetivo em $t+\theta\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{F}} = [\lambda + \theta(\lambda - \lambda)] \mathbf{F}_r + \mathbf{M} (a_0 {}^t \mathbf{U} + a_2 {}^t \dot{\mathbf{U}} + 2 {}^t \ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C} (a_1 {}^t \mathbf{U} + 2 {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t \ddot{\mathbf{U}})$$
 2. Avalie os deslocamentos no instante $t+\theta\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\theta\Delta t} \mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}}$$
 3. Avalie deslocamentos, velocidades e acelerações no instante $t+\Delta t$:

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = a_4 ({}^{t+\theta\Delta t} \mathbf{U} - {}^t \mathbf{U}) + a_5 {}^t \dot{\mathbf{U}} - a_6 {}^t \ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_7 ({}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + {}^t \ddot{\mathbf{U}})$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + \Delta t {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_8 ({}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + 2 {}^t \ddot{\mathbf{U}})$$
-

Tabela 4.3: Método de Wilson- θ para problemas estruturais dinâmicos lineares.

4.4.2

Considerações sobre a análise dinâmica não-linear

Os algoritmos de integração explícitos e implícitos apresentados nas seções anteriores podem ser empregados na obtenção da resposta dinâmica não-linear de sistemas estruturais governada pela Equação (4.22). Entretanto, alguns cuidados devem ser tomados na busca pelo equilíbrio dinâmico do sistema, pois o vetor das forças internas F_i é uma função não-linear dos deslocamentos da estrutura.

Na realidade, todos os ingredientes para a obtenção da solução de (4.22) já foram apresentados, quais sejam:

- (i) a formulação incremental usada no Capítulo 2;
- (ii) a estratégia de solução não-linear também discutida no Capítulo 2, que é baseada num esquema incremental-iterativo; e, por fim,
- (iii) os algoritmos de integração apresentados neste capítulo, em particular, os esquemas implícitos.

Basta, portanto, coordenar e organizar esses procedimentos para se chegar ao algoritmo apresentado na Tabela 4.4 (Subbaraj e Dokainish, 1989), onde foram agrupados os métodos Newmark e Wilson- θ em um mesmo procedimento para análise de problemas estruturais dinâmicos não-lineares.

Esse foi o algoritmo de solução adotado no presente trabalho para a obtenção da resposta dinâmica não-linear de sistemas estruturais. No capítulo de exemplos e nas conclusões serão feitas considerações adicionais sobre a sua performance e eficiência computacional.

a. Procedimentos iniciais:

1. Calcule a matriz de massa \mathbf{M} ;
2. Inicialize ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$.

b. Para cada passo de tempo Δt :

1. Avalie a matriz de rigidez tangente \mathbf{K} ;
2. Avalie a matriz de amortecimento proporcional \mathbf{C} ;
3. Calcule as seguintes constantes de integração:

i. Método de Newmark:

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}; a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}; a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}; a_3 = \left(\frac{1}{2\beta \Delta t} - 1 \right); a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1;$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right); a_6 = a_0; a_7 = -a_2; a_8 = -a_3; a_9 = \Delta t(1 - \gamma);$$

$$a_{10} = \Delta t \gamma$$

Obs. Faça $\theta = 1$ (recurso para se obter o vetor de carregamento efetivo para os dois métodos através de uma mesma expressão).

ii. Método de Wilson- θ :

$$a_0 = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2}; a_1 = \frac{3}{\theta \Delta t}; a_2 = 2a_1; a_3 = 2; a_4 = 2; a_5 = \frac{\theta \Delta t}{2}; a_6 = \frac{a_0}{\theta};$$

$$a_7 = -\frac{a_2}{\theta}; a_8 = 1 - \frac{3}{\theta}; a_9 = \frac{\Delta t}{2}; a_{10} = \frac{\Delta t^2}{6}$$

4. Monte a matriz de rigidez efetiva:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$$

5. Calcule o vetor de carregamento efetivo:

$$\hat{\mathbf{F}} = [{}^t\lambda + \theta({}^{t+\Delta t}\lambda - {}^t\lambda)] \mathbf{F}_r + \mathbf{M} (a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C} (a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) - {}^t\mathbf{F}_i$$

6. Avalie os deslocamentos nodais incrementais:

$$\hat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}}$$

7. Processo iterativo para obtenção do equilíbrio dinâmico: $k = 1, 2, \dots$

i. Calcule as aproximações para acelerações, velocidades e deslocamentos:

$${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^k = a_0 \Delta \mathbf{U}^k - a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^k = a_1 \Delta \mathbf{U}^k - a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} - a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^k$$

ii. Calcule o vetor de forças internas:

$${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{F}_i^{k+1} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{k+1}$$

iii. Calcule o vetor de forças residuais:

$${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{R}^{k+1} = [{}^t\lambda_t + \theta({}^{t+\Delta t}\lambda - {}^t\lambda)]\mathbf{F}_r - (\mathbf{M} {}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^k + \mathbf{C} {}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^k + {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{F}_i^k)$$

iv. Calcule a correção dos deslocamentos incrementais:

$$\widehat{\mathbf{K}} \delta \mathbf{U}^{k+1} = {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{R}^{k+1}$$

v. Atualize os deslocamentos incrementais:

$$\Delta \mathbf{U}^{k+1} = \Delta \mathbf{U}^k + \delta \mathbf{U}^{k+1}$$

vi. Verifique a convergência:

$$\frac{|\Delta \mathbf{U}^{k+1}|}{|{}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^{k+1}|} \leq \text{fator de tolerância?}$$

Não: volte ao passo 7.

Sim: continue, vá para vii.

vii. Avalie os deslocamentos, velocidades e acelerações no instante $t+\Delta t$; vá para c.

c. Para o próximo instante:

1. Avalie o vetor de forças internas: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \Delta t \mathbf{F}_i$;
2. Selecione um novo intervalo de tempo Δt (*estratégia adaptativa*);
3. Volte ao passo b.

Tabela 4.4: Métodos de Newmark e de Wilson- θ para problemas estruturais dinâmicos não-lineares.

4.4.3

Adaptatividade no tempo

Com o objetivo de se melhorar a precisão e a eficiência de um algoritmo de integração no tempo, busca-se aqui um procedimento adaptativo que selecione, no final de cada passo do processo incremental, o maior incremento de tempo possível para o próximo passo, e que mantenha o grau de precisão desejado para a resposta.

De acordo com Bergan e Mollestad (1985), alguns critérios devem ser seguidos para garantir a boa performance de um algoritmo de adaptação no tempo. Dentre estes critérios estão:

- (i) os ajustes no incremento de tempo devem ser feitos tomando-se como referência o incremento de tempo inicial escolhido. É necessário que o incremento de tempo inicial seja menor do que um determinado valor crítico de forma que o algoritmo seja capaz de gerar as soluções iniciais e que essas possam ser utilizadas como base para os ajustes no incremento de tempo durante a simulação;
- (ii) o incremento de tempo deve permanecer constante durante o regime permanente, de forma que não ocorram modificações desnecessárias que possam comprometer tanto a estabilidade quanto a precisão do algoritmo;
- (iii) todos os parâmetros de entrada e de controle do algoritmo adaptativo devem ser simples de forma que o usuário possa prescrevê-los com facilidade;
- (iv) o critério de erro adotado deve ter um custo computacional mínimo de forma a não comprometer o desempenho do algoritmo;
- (v) o algoritmo deve reagir de forma imediata a mudanças súbitas no comportamento da estrutura;
- (vi) o incremento de tempo não deve ser alterado desnecessariamente.

Baseado no trabalho de Bergan e Mollestad (1985), Jacob (1990) apresentou a implementação computacional de uma estratégia adaptativa para algoritmos implícitos, com aplicações em estruturas complacentes em águas profundas. As principais características dessa estratégia são apresentadas a seguir:

(i) a determinação do intervalo de tempo pode variar ao longo da análise de acordo com a composição modal da resposta e com o comportamento não-linear do sistema estrutural;

(ii) a determinação das reavaliações da matriz de rigidez tangente, de modo a minimizar as ocorrências de cálculo, montagem e decomposição de matrizes efetivas globais durante o processo de integração.

Uma estratégia adaptativa baseada na proposta de Jacob (1990) foi implementada no presente trabalho, para os métodos da família de Newmark, na solução dos problemas lineares e não-lineares.

A estratégia adaptativa que monitora o erro de truncamento no método de Runge-Kutta de quarta ordem, apresentada em Press et. al. (1992), foi também usada aqui na solução dos problemas dinâmicos lineares.

4.4.3.1

Estratégia adaptativa para métodos da família de Newmark

Esta estratégia adaptativa tem como características principais a seleção automática do intervalo de tempo a ser utilizado no próximo passo de tempo e a determinação automática do disparo da reavaliação de rigidez do sistema, quando necessário. O conceito de frequência dominante é utilizado para ajustar o intervalo de tempo à composição modal da resposta. O comportamento não-linear é levado em conta tanto na seleção do intervalo de tempo quanto no disparo da reavaliação da rigidez, através de considerações heurísticas que são incorporadas ao processo.

Bergan e Mollestad (1985) apresentaram a seguinte expressão para a frequência dominante no instante $t+\Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\omega = \sqrt{\frac{{}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}^T \mathbf{K} {}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}}{{}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}^T \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}}} \quad (4.57)$$

onde ${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}$ é o incremento de deslocamentos entre os instantes de tempo t e $t+\Delta t$; \mathbf{K} é a matriz de rigidez tangente e \mathbf{M} é a matriz de massa.

A expressão (4.57) pode, entretanto, não fornecer resultados coerentes para a frequência dominante em instantes próximos a situações de amplitude máxima e mínima. De acordo com Jacob (1990), para contornar esse problema define-se inicialmente uma norma “média” dos deslocamentos em cada instante de tempo através da seguinte expressão: $\|^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}\|^* = \|^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}\|/\Delta t$, e, assim, obtém-se o máximo e mínimo histórico para esse valor, respectivamente, $\|\Delta\mathbf{U}\|_{\max}^*$ e $\|\Delta\mathbf{U}\|_{\min}^*$, sendo que a determinação do mínimo histórico é iniciada apenas após o instante em que o primeiro máximo local é detectado. Em seguida, duas estratégias complementares são utilizadas:

- (i) o primeiro critério verifica se $\|^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}\|^*$ é menor do que a fração do máximo histórico: $\|^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}\|^* < \|\Delta\mathbf{U}\|_{\max}^*/\varepsilon$, onde ε é um valor adotado que pode estar na faixa $5 \leq \varepsilon \leq 20$;
- (ii) o segundo critério verifica se $\|^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}\|^*$ está contido no intervalo definido por: $\left[\|\Delta\mathbf{U}\|_{\min}^*, \left(\|\Delta\mathbf{U}\|_{\max}^* - \|\Delta\mathbf{U}\|_{\min}^* \right) / \varepsilon \right]$.

Em situações em que ambos os critérios são satisfeitos, considera-se que a magnitude das quantidades envolvidas no cálculo da frequência característica é relativamente pequena, e a qualidade do valor obtido poderia ser prejudicada por problemas numéricos. Assim, para essa situação, mantém-se o valor do intervalo de tempo do instante anterior. Em situações normais, quando os dois critérios não impedem o cálculo de uma nova frequência dominante, utiliza-se, adicionalmente, o seguinte artifício para filtrar as componentes de alta frequência:

$${}^{t+\Delta t}\omega = \frac{{}^{t+\Delta t}\omega + {}^t\omega}{2} \quad (4.58)$$

Após a determinação da frequência dominante, o período de tempo correspondente pode ser avaliado através de:

$$T^* = \frac{2\pi}{t+\Delta t \omega^*} \quad (4.59)$$

A idéia dessa estratégia adaptativa é determinar um novo intervalo de tempo tomando-se uma fração λ do período característico T^* , ou seja:

$$\Delta t^* = \frac{T^*}{\lambda} \quad (4.60)$$

de modo a permitir a integração adequada dos modos que definem a composição da resposta.

O parâmetro λ é determinado de modo a permitir que o comportamento não-linear do problema seja levado em conta. Isso é feito controlando-se a variação do parâmetro λ através da monitoração do processo iterativo. Assim, se o número de iterações N_{it} do último passo de solução for menor que um determinado número ótimo de iterações N_{ot} (fornecido pelo usuário, e o valor típico $N_{ot} = 3$), deve-se reduzir o valor de λ dividindo-o por um fator ζ definido pelo usuário (valor típico é $\zeta = 1.05$). Caso contrário, se o N_{it} for maior que N_{ot} , deve-se aumentar o valor de λ multiplicando-o pelo fator ζ . Jacob (1990) ainda sugere que o valor de λ deve ser limitado por dois valores extremos λ_{min} e λ_{max} , (valores típicos são: $\lambda_{min} = 50$ e $\lambda_{max} = 500$).

A utilização pura e simples do intervalo de tempo obtido em (4.60) pode ocasionar variações na resposta do problema que podem ser pequenas ou grandes e bruscas (Jacob, 1990). Para evitar essas alterações são introduzidas regras heurísticas de modo a determinar quando e como a alteração do intervalo de tempo deve ser feita. Desse modo, é definido o seguinte parâmetro de controle:

$$\xi = \frac{\Delta t^*}{{}^n\Delta t} \quad (4.61)$$

sendo Δt^* a estimativa para o novo intervalo de tempo e ${}^n\Delta t$ o incremento de tempo dado no passo anterior do processo de solução.

Quatro parâmetros ajustáveis ξ_{\min} , ξ_1 , ξ_2 e ξ_{\max} , cujos valores típicos são $\xi_{\min} = 0.5$, $\xi_1 = 0.625$, $\xi_2 = 1.6$ e $\xi_{\max} = 1.8$, controlam o processo de acordo com as seguintes regras:

- (i) o valor do novo intervalo de tempo ${}^{n+1}\Delta t$ não pode ser menor que ξ_{\min} e nem maior que ξ_{\max} ;
- (ii) se a variação de Δt for muito pequena, deve-se manter o intervalo anterior, isto é, se o valor de ξ estiver entre ξ_1 e ξ_2 , mantém-se o intervalo, ${}^{n+1}\Delta t = {}^n\Delta t$; caso contrário, se a variação for suficientemente grande, e ξ for menor ou igual a ξ_1 ou for maior ou igual a ξ_2 , considera-se como novo valor do intervalo de tempo ${}^{n+1}\Delta t = \Delta t^*$.

Por fim, dois critérios foram usados neste trabalho para disparar automaticamente a reavaliação da rigidez do sistema estrutural durante o processo de solução, seguindo ainda sugestão de Jacob (1990). O primeiro critério dispara a reavaliação da rigidez toda vez que houver uma grande variação no valor do intervalo de tempo; o segundo critério está vinculado à monitoração do processo iterativo, e dispara a reavaliação sempre que o número de iterações do processo N_{it} exceder um número ótimo de iterações, determinado pelo usuário através do parâmetro N_{ot} .

4.4.3.2

Estratégia adaptativa para o método Runge-Kutta

Para o método de Runge-Kutta de quarta ordem, a técnica mais indicada para se controlar a variação do incremento de tempo Δt é o chamado “*step-doubling*” (Press *et. al.*, 1992).

Nessa técnica é necessário que, para cada incremento Δt , sejam realizados 3 cálculos pelo método de Runge-Kutta: uma vez considerando-se Δt um passo inteiro de tempo e em seguida como dois meio passos calculados de forma independente. Observe que cada um dos três cálculos por Runge-Kutta requer 4 cálculos (equações 4.35a - 4.35d). Descontando os valores iniciais, tem-se um total de 8 cálculos. A Figura 4.8 pretende ilustrar esta observação.

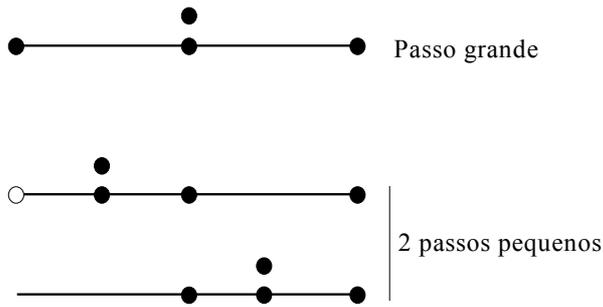


Figura 4.8: Utilização do método de Runge-Kuta com a divisão do intervalo de cálculo “Step-doubling” (Press *et. al.*, 1992).

Considerando-se um avanço do instante t para $t+2\Delta t$, pode-se exprimir a solução exata através de $v = v(t + 2\Delta t)$. A aproximação desta expressão, considerando-se que para se atingir este intervalo foi necessário apenas um passo de tempo igual a $2\Delta t$, pode ser obtida expandindo-se a solução em torno de v_1 da seguinte forma:

$$v(t + 2\Delta t) = v_1 + (2\Delta t)^5 \phi + O(\Delta t^6) + \dots \quad (4.62a)$$

Se, por outro lado, considera-se que foram necessários 2 passos iguais a Δt , obtém-se a seguinte aproximação em torno de v_2 :

$$v(t + 2\Delta t) = v_2 + 2 \Delta t^5 \phi + O(\Delta t^6) + \dots \quad (4.62b)$$

onde, na série de Taylor, $\phi = \frac{v^5(x)}{5!}$.

Um conveniente indicador de erro de truncamento é dado pela diferença entre estas duas estimativas, ou seja:

$$\Delta \equiv v_2 - v_1 = (2\Delta t)^5 \phi - 2(\Delta t)^5 \phi = 30(\Delta t)^5 \phi = 15 (2 \Delta t^5 \phi) \quad (4.63)$$

sendo este o valor a ser respeitado para se obter a precisão determinada, devendo-se, para isso, ajustar o intervalo Δt .

Combinando (4.62b) e (4.63) pode-se escrever:

$$v(t + 2\Delta t) = v_2 + \frac{\Delta}{15} + O(\Delta t^6) \quad (4.64)$$

Esta estimativa tem a precisão de quinta ordem, portanto, uma ordem acima que a do método original, entretanto, maior ordem de solução nem sempre significa maior precisão. Deve-se, portanto, usar Δ como estimativa de erro, mas é necessário algum dado adicional de precisão.

Para se obter a relação entre a estimativa de erro Δ e o próximo intervalo de tempo Δt . De acordo com (4.63), a variação de Δ é proporcional à variação de Δt^5 , assim, considerando-se que um passo ${}^n\Delta t$ produz um erro ${}^n\Delta$, um passo ${}^{n+1}\Delta t$ produziria um erro estimado por:

$${}^{n+1}\Delta t = {}^n\Delta t \left| \frac{{}^{n+1}\Delta}{{}^n\Delta} \right|^{0.2} \quad (4.65)$$

Definindo ζ como sendo o valor desejado para o erro, pode-se reescrever (4.65) na forma:

$${}^{n+1}\Delta t = {}^n\Delta t \left| \frac{\zeta}{{}^n\Delta} \right|^{0.2} \quad (4.66)$$

Deste modo, se a estimativa de erro ${}^n\Delta$ for maior que o erro requerido ζ , a equação impõe um aumento do próximo passo, e se, pelo contrário, ${}^n\Delta$ for menor que ζ , o próximo passo deve diminuir.