

2

PROBLEMA ESTRUTURAL ESTÁTICO NÃO-LINEAR

2.1

INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem o objetivo de fornecer os fundamentos para a obtenção da trajetória de equilíbrio de sistemas estruturais esbeltos através do método dos elementos finitos (MEF). Sabe-se que um dos passos importantes para se resolver um problema estrutural não-linear, a partir de uma abordagem numérica aproximada, é obter, através dos princípios básicos da mecânica, a equação ou o conjunto de equações algébricas não-lineares que governa o estado de equilíbrio do sistema. Portanto, outra etapa importante da análise é introduzida e envolve, invariavelmente, a solução da equação ou conjunto de equações algébricas não-lineares. Ao contrário do problema estrutural com características lineares, cuja solução pode ser obtida por procedimentos algébricos simples e diretos, a solução do problema não-linear normalmente só pode ser alcançada através do emprego de procedimentos numéricos especiais. Dos métodos usualmente adotados, os que são considerados mais eficientes procuram resolver passo a passo as equações não-lineares; em particular, merecem destaque os esquemas que combinam procedimentos incrementais e iterativos.

Na próxima seção é apresentada a formulação do elemento finito não-linear de viga-coluna adotado na discretização dos problemas estruturais estáticos e dinâmicos do presente trabalho. Na Seção 2.3 são introduzidas modificações na relação força-deslocamento do elemento finito proposto para que ele incorpore os efeitos devido à flexibilidade (ou semi-rigidez) das conexões estruturais. Por fim, na Seção 2.4, é apresentada a metodologia de solução não-linear usada, que tem a característica de automatizar e controlar o processo incremental-iterativo de solução do conjunto de equações que definem o equilíbrio do sistema.

2.2

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO NÃO-LINEAR

Duas abordagens têm sido propostas para descrever o movimento de corpos sólidos: as do tipo Euleriana e Lagrangiana. Na formulação Euleriana, as coordenadas espaciais, isto é, aquelas associadas ao corpo deformado, são empregadas como as coordenadas de referência. Já na formulação Lagrangiana, as coordenadas materiais, ou seja, aquelas associadas ao corpo antes de sua deformação, são utilizadas como as coordenadas de referência.

A formulação Lagrangiana é particularmente apropriada para análises não-lineares do tipo passo-a-passo, onde o interesse está centrado na história de deformação de cada ponto do corpo durante o processo de carregamento. Já a formulação Euleriana tem sido amplamente adotada na análise de problemas de mecânica dos fluidos, onde a atenção está focada no movimento do material ao longo de um volume específico de controle. Posto isso, o presente trabalho restringe-se a formulações do tipo Lagrangiana, tendo-se em vista ainda que a maioria das formulações de elementos finitos com não-linearidade geométrica encontradas na literatura baseiam-se nesse tipo de referencial.

Com a abordagem Lagrangiana, três tipos de configurações podem ser concebidos em termos de um sistema estacionário de coordenadas Cartesianas: a configuração inicial, a última configuração deformada t e a configuração deformada corrente $t + \Delta t$. Por hipótese, assume-se que todas as variáveis de estado, tais como tensões, deformações e deslocamentos, juntamente com a história de carregamento, são conhecidas na configuração t . A partir daí, a questão principal passa a ser a formulação de um processo incremental para determinar todas essas variáveis de estado para o corpo na configuração $t + \Delta t$, considerando que o carregamento externo atuando na configuração t tenha sofrido um pequeno acréscimo de valor. O passo que caracteriza o processo de deformação do corpo de t para $t + \Delta t$ é tipicamente referido como um passo incremental.

Dependendo de qual configuração anterior é selecionada como referência para a obtenção do estado de equilíbrio do corpo na configuração deformada corrente,

$t + \Delta t$, dois tipos de referenciais Lagrangianos podem ser identificados: o referencial Lagrangiano atualizado (RLA), onde a última configuração t de equilíbrio é selecionada como o estado de referência, e o referencial Lagrangiano total (RLT), que utiliza a configuração inicial indeformada para o mesmo propósito.

Para o RLT, os deslocamentos são medidos em relação à configuração inicial indeformada (Figura 2.1) e para o RLA, os deslocamentos são medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga (Figura 2.2).

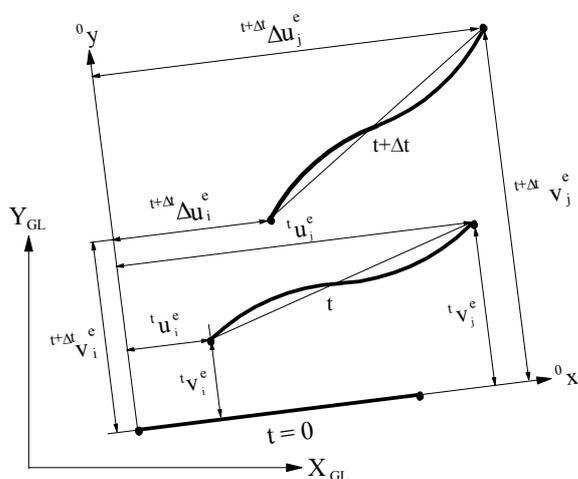


Figura 2.1: Referencial Lagrangiano total (RLT).

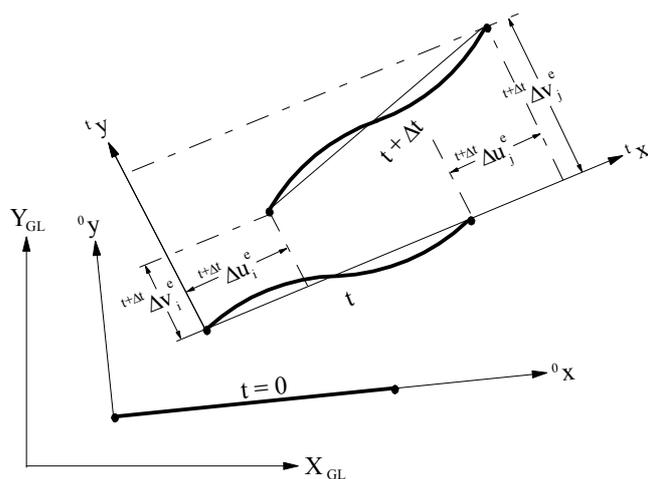


Figura 2.2: Referencial Lagrangiano atualizado (RLA).

É importante destacar que devido aos eventuais deslocamentos de corpo rígido ocorridos durante o processo incremental, cujas influências não são perfeitamente consideradas, bem como devido à utilização de funções de interpolação simplificadas, a tendência é que os resultados obtidos se afastem do comportamento real à medida que a configuração deformada distancia-se da configuração original. Este problema é menos sentido quando se utiliza o referencial Lagrangiano atualizado (RLA), pois neste tipo de abordagem a configuração de referencia é a obtida no incremento anterior ao que se deseja obter a configuração deformada, não havendo, portanto, grande distanciamento entre as duas configurações.

A teoria a ser apresentada a seguir fundamenta-se nos trabalhos de Yang e Kuo (1994) e Alves (1995), e Galvão (2000). Nesse último são encontradas várias formulações geometricamente não-lineares, para a modelagem de sistemas estruturais planos formados por barras. A análise do desempenho computacional dessas formulações é fornecida nos artigos de Galvão e Silveira (2000) e Silveira *et al.* (2000). Entretanto, merece destaque, do ponto de vista de desempenho na solução de problemas fortemente não-lineares, tempo de processamento e eficiência na obtenção das configurações pós-críticas mais complicadas, aquela formulação desenvolvida por Galvão (2000) que utiliza as relações cinemáticas não-lineares sugeridas por Yang e Kuo (1994) e os conceitos de energia propostos por Alves (1995). Essa formulação será brevemente descrita nas próximas seções.

Serão apresentadas primeiramente as relações deformação-deslocamento não-lineares do elemento finito considerado; em seguida, serão definidas a expressão da energia potencial total do sistema na forma incremental e as equações de equilíbrio não-lineares; e finalmente, a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas do elemento finito adotado.

2.2.1

Relações deformação-deslocamento

As seguintes componentes de deformação axial e transversal, baseadas no tensor de Green-Lagrange, e já expressas separando-se as parcelas lineares das não-lineares, são adotadas:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta \eta_{xx} \quad (2.1)$$

$$\Delta \epsilon_{xy} = \Delta e_{xy} + \Delta \eta_{xy} \quad (2.2)$$

onde para cada parcela se escreve:

$$\Delta e_{xx} = \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial x} \quad \Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right] \quad \Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right] \quad (2.4)$$

sendo $\Delta \bar{u}$ o deslocamento axial de um ponto distante y da linha neutra da seção.

Aceitando-se a hipótese da teoria de barras de Bernoulli de que as seções transversais inicialmente planas permanecem planas após a deformação, escreve-se:

$$\Delta \bar{u} = \Delta u - y \frac{d\Delta v}{dx} \quad (2.5)$$

onde a primeira parcela, Δu , é consequência dos esforços extensionais atuantes e é constante ao longo da seção; a segunda parcela, $y(d\Delta v/dx)$, é devido aos esforços de flexão, e varia linearmente com a distância à linha neutra. Substituindo-se então (2.5) em (2.3) e (2.4), chega-se a:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \quad (2.6a)$$

$$\Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} + y^2 \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.6b)$$

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d\Delta v}{dx} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] = 0 \quad (2.6c)$$

$$\Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} + y \left(\frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) \right] \quad (2.6d)$$

No caso do RLA, é indispensável que se defina para o elemento finito considerado o estado de tensões, ou de deformações, na última configuração de equilíbrio obtida no processo de solução incremental, ou seja, na configuração t . Nessa configuração, as forças iniciais resultantes axiais tP , cisalhantes tQ , e momento fletor tM , podem ser definidas por:

$${}^tP = \int_A {}^t\tau_{xx} dA; \quad {}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA; \quad e \quad {}^tM = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \quad (2.7)$$

e de acordo com a Figura 2.3, tem-se que:

$${}^tM = -M_i + \frac{(M_i + M_j)}{L} x \quad {}^tQ = -\frac{(M_i + M_j)}{L} \quad (2.8)$$

Para um elemento de pórtico plano cuja hipótese de Bernoulli tenha sido adotada, apenas a tensão axial $\Delta^t\tau_{xx}$ pode ser obtida diretamente da lei constitutiva: $\Delta^t\tau_{xx} = E \Delta e_{xx}$. Yang e Kuo (1994) sugerem que a tensão cisalhante incremental $\Delta^t\tau_{xy}$ seja determinada considerando-se como hipótese inicial a seção transversal simétrica em relação aos eixos x e z . Dessa forma, chega-se à seguinte expressão:

$$\Delta^t\tau_{xy} = S_{xy}^l + S_{xy}^n \quad (2.9)$$

onde as parcelas linear e não-linear do incremento da tensão cisalhante são dadas por (Yang e Kuo, 1994):

$$S_{xy}^l = \frac{E}{2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \quad \text{e} \quad S_{xy}^n = \frac{E}{2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \quad (2.10)$$

sendo h igual a altura da seção transversal do elemento de viga.

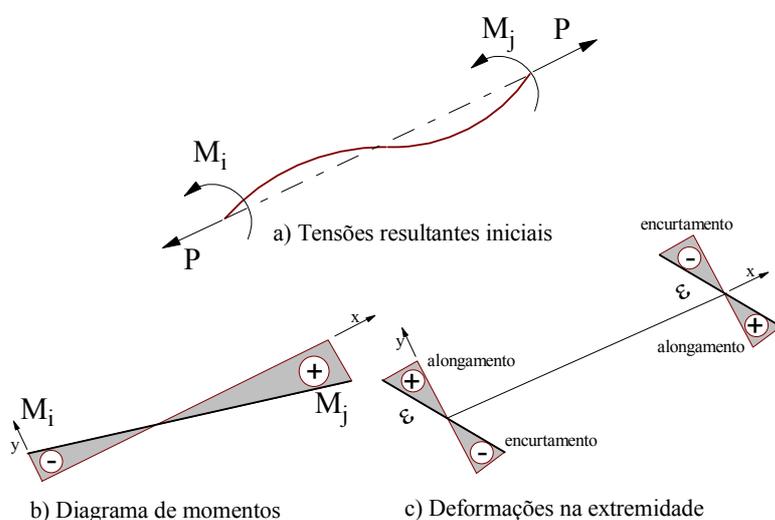


Figura 2.3: Deformação inicial: configuração de equilíbrio t.

2.2.2

Incremento da energia potencial total

O incremento na energia potencial total de um sistema estrutural pode ser definido, na configuração de equilíbrio $t+\Delta t$, de acordo com a seguinte expressão:

$$\Delta \Pi = \Delta D + \Delta V \quad (2.11)$$

sendo o incremento de energia interna de deformação, ΔD , já introduzindo as parcelas axial e cisalhante da deformação, dado por:

$$\Delta D = \iint_{\text{Vol}} \left({}^t\tau_{xx} \Delta \varepsilon_{xx} + 2 {}^t\tau_{xy} \Delta \varepsilon_{xy} \right) dA dx + \iint_{\text{Vol}} \left(\frac{E}{2} \Delta \varepsilon_{xx}^2 + 2 \Delta {}^t\tau_{xy} \Delta \varepsilon_{xy} \right) dA dx \quad (2.12)$$

Já o incremento da energia potencial das forças externas, ΔV , é definido por:

$$\Delta V = - \int_S F_i \Delta u_i dS = - \left[\int_S {}^t F_i \Delta u_i dS + \int_S \Delta F_i \Delta u_i dS \right] \quad (2.13)$$

Assumindo aqui que as deformações incrementais são pequenas de forma que as parcelas não-lineares destas podem ser desprezadas, e seguindo a sugestão de Alves (1993), pode-se reescrever o funcional de energia da seguinte forma:

$$\Delta \Pi = U_L + U_\tau + U_0 - \left[\int_S {}^t F_i \Delta u_i dS + \int_S \Delta F_i \Delta u_i dS \right] \quad (2.14)$$

onde, através das Equações (2.6)-(2.9), define-se:

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{{}^t\text{Vol}} E \Delta e_{xx}^2 d\text{Vol} \quad (2.15a)$$

$$U_\tau = \frac{1}{2} \int_0^L P \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[{}^t M \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left[{}^t Q \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \right] dx \quad (2.15b)$$

$$U_0 = \int_{\text{Vol}} \left({}^t\tau_{xx} \Delta e_{xx} + 2 {}^t\tau_{xy} \Delta e_{xy} \right) d\text{Vol} \quad (2.15c)$$

Note que a Equação (2.15c) pode ser associada ao trabalho realizado pelas tensões atuantes no elemento, na configuração de equilíbrio t , quando o elemento

sofre o incremento de deformação. Esse trabalho, portanto, deve ser igual ao daquele realizado pelas forças externas atuantes em t , ou seja:

$$U_0 = \int_S^t F_i \Delta u_i dS \quad (2.16)$$

e assim consegue-se reescrever o incremento da energia potencial, $\Delta\Pi$, da seguinte forma:

$$\Delta\Pi = U_L + U_\tau - \int_S \Delta F_i \Delta u_i dS \quad (2.17)$$

2.2.3

Elemento finito

O elemento de viga-coluna adotado é o esquematizado na Figura 2.4. Trata-se de um segmento reto, limitado pelos nós i e j , que se deforma no plano de definição da estrutura. Cada elemento define um sistema local de coordenadas xy , rotacionado em relação a um sistema global de coordenadas XY de um certo ângulo α .

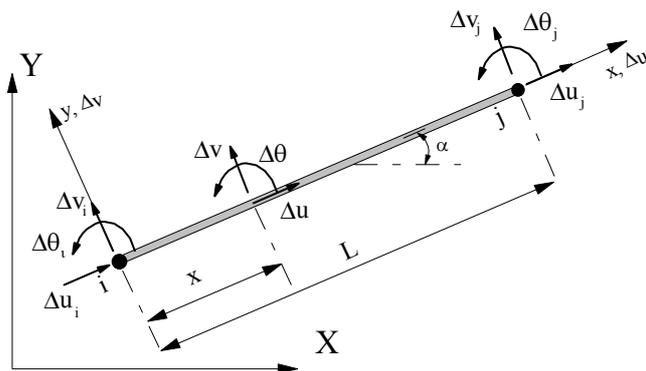


Figura 2.4: Elemento de viga-coluna adotado.

Para aproximar o deslocamento axial incremental Δu é adotada uma função linear, enquanto para a componente transversal Δv , admitindo-se $\Delta\theta = d\Delta v/dx$, adota-se uma função do terceiro grau. Dessa forma, escreve-se:

$$\Delta u = a_0 + a_1 x \quad (2.18a)$$

$$\Delta v = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (2.18b)$$

onde a_0 , a_1 , b_0 , b_1 , b_2 , b_3 e b_4 são constantes a serem determinadas através das condições de contorno do elemento, isto é: em $x = 0$, $\Delta u = \Delta u_1$, $\Delta v = \Delta v_1$ e $\Delta\theta_1 = d\Delta v_1/dx$; e em $x = L$, $\Delta u = \Delta u_2$, $\Delta v = \Delta v_2$ e $\Delta\theta_2 = d\Delta v_2/dx$. Dessas condições chega-se às expressões para Δu e Δv em termos dos seus valores nodais:

$$\Delta u = H_1 \Delta u_1 + H_2 \Delta u_2 \quad (2.19a)$$

$$\Delta v = H_3 \Delta v_1 + H_4 \Delta\theta_1 + H_5 \Delta v_2 + H_6 \Delta\theta_2 \quad (2.19b)$$

onde H_1 , H_2 ,... e H_6 são as funções de interpolação:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L}; \text{ e } H_2 = \frac{x}{L} \quad (2.20a)$$

$$H_3 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; H_4 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; H_5 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \text{ e } H_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.20b)$$

Matricialmente, tem-se que os deslocamentos Δu e Δv , e a rotação $\Delta\theta$ de um dado ponto do elemento, a uma distância x do nó i (Figura 2.4), são dadas por:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}^e \quad (2.21)$$

onde $\Delta \mathbf{d}^T = \{\Delta u \ \Delta v \ \Delta\theta\}$ e $\Delta \mathbf{u}^{eT} = \{\Delta u_i \ \Delta v_i \ \Delta\theta_i \ \Delta u_j \ \Delta v_j \ \Delta\theta_j\}$; \mathbf{H} é uma matriz que contém as funções de forma em (2.20).

2.2.4

Matriz de rigidez e vetor das forças internas

Com a substituição das Equações (2.19a,b) nas relações cinemáticas (2.6), e em seguida estas nas expressões (2.15), chega-se, de acordo com Alves (1993), à energia potencial total em função dos deslocamentos e forças nodais, ou seja:

$$\Delta\bar{\Pi} = \Delta\mathbf{u}^{eT} \left[\frac{1}{2} \mathbf{K}_L^e + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\tau^e \right] \Delta\mathbf{u}^e + \Delta\mathbf{u}^{eT} {}^t\mathbf{F}_i^e - \Delta\mathbf{u}^{eT} {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r^e \quad (2.22)$$

onde as componentes das matriz de rigidez linear \mathbf{K}_L^e e matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_τ^e são obtidas diretamente da energia interna de deformação através da diferenciação de U_L e U_τ , respectivamente:

$$k_{L(i,j)} = \frac{\partial^2 U_L}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (2.23a)$$

$$k_{\tau(i,j)} = \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (2.23b)$$

Em (2.22), tem-se ainda que ${}^t\mathbf{F}_i$ caracteriza o vetor das forças internas do elemento genérico considerado na configuração de equilíbrio t ; λ é um fator de carga e \mathbf{F}_r um vetor de cargas nodais de referência.

Levando-se em conta então a contribuição de todos os elementos finitos, sem esquecer que o somatório dos vetores e das matrizes deve ser efetuado em relação a um referencial comum ($\mathbf{K} = \sum \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{R}^e$, \mathbf{R}^e sendo a matriz de rotação do elemento), chega-se a uma expressão semelhante à (2.22) para todo o sistema estrutural. Do princípio da energia potencial total estacionária, tem-se que a condição de equilíbrio do sistema na configuração $t+\Delta t$ é dada por:

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau] \Delta \mathbf{U} + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (2.24a)$$

ou,

$${}^{\Delta t}\mathbf{F}_i + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r \quad (2.24b)$$

sendo:

$${}^{\Delta t}\mathbf{F}_i = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau]\Delta\mathbf{U} \quad (2.25)$$

definido como o incremento das forças internas da estrutura. Observe portanto que o vetor das forças internas na configuração de equilíbrio $t+\Delta t$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$, é obtido neste trabalho de forma incremental, ou seja, calculando a cada incremento o acréscimo nas forças internas.

Procurando-se eliminar os modos espúrios de deformação decorrentes de deslocamentos e rotações de corpo rígido, Yang e Kuo (1994) propõem que a seguinte equação seja utilizada para o incremento das forças internas num dado elemento genérico 'e':

$${}^{\Delta t}\mathbf{F}_i^e = \mathbf{K}^e \Delta\mathbf{u}_N^e \quad (2.26)$$

com $\Delta\mathbf{u}_N^e$ sendo o vetor de *deslocamentos naturais incrementais* do elemento, no sistema local, e é definido como:

$$\Delta\mathbf{u}_N^{eT} = [0 \quad 0 \quad \theta_{ci} \quad \delta \quad 0 \quad \theta_{cj}] \quad (2.27)$$

onde, da Figura 2.5, chega-se às expressões dos deslocamentos que provocam deformação no elemento:

$$\delta = {}^{t+\Delta t}L - {}^tL; \quad \theta_{ci} = \Delta\theta_i - \psi; \quad \theta_{cj} = \Delta\theta_j - \psi \quad (2.28)$$

sendo $\psi = \tan^{-1}[v/({}^tL + U)]$, com $v = \Delta v_i - \Delta v_j$, a rotação de corpo rígido que o elemento sofre. Assim, através das relações anteriores, chega-se a uma expressão incremental força-deslocamento do elemento, ou seja:

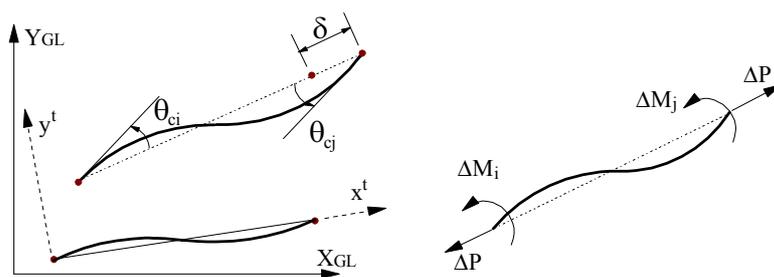
$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L + P/L & M_i/L & M_j/L \\ M_i/L & K_{ii} & K_{ij} \\ M_j/L & K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{Bmatrix}, \quad (2.29a)$$

onde

$$K_{ii} = K_{jj} = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} + \frac{4P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right) \quad (2.29b)$$

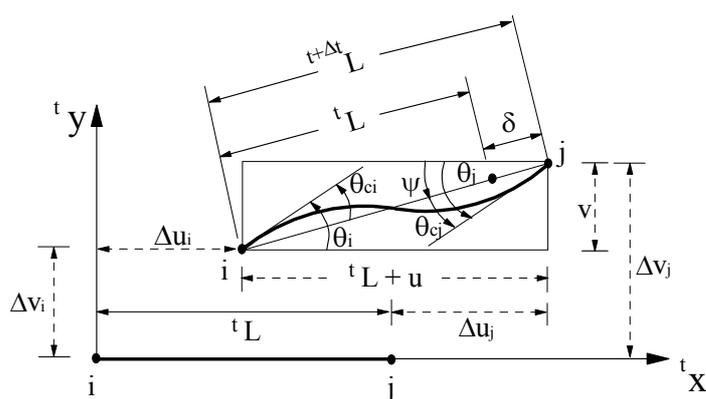
$$K_{ij} = K_{ji} = \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} + \frac{2P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right) \quad (2.29c)$$

Por fim, o vetor das forças internas de todo o sistema estrutural deve ser obtido somando-se os esforços internos absorvidos por cada elemento, devidamente transformados para o sistema global de referência.



a) Deslocamentos naturais incrementais.

b) Esforços relacionados com δ , θ_i e θ_j



c) Geometria deformada

Figura 2.5: Cálculo das forças internas.

2.3

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO HÍBRIDO NÃO-LINEAR

Habitualmente, procedimentos padrões de análise não-linear para pórticos são baseados na hipótese de que as conexões nodais são ideais. Daí, duas idealizações extremas para as ligações são utilizadas: perfeitamente rígidas ou rotuladas. Modelos com conexões ideais simplificam o procedimento de análise, mas freqüentemente não representam o comportamento real dos sistemas estruturais. Em geral, conexões nodais de pórticos planos estão sujeitas à influência de momentos fletores e forças axiais e cisalhantes. Os efeitos destas últimas podem, em geral, ser negligenciados, de modo que apenas os momentos fletores são de interesse prático.

Há muitas maneiras de incorporar a flexibilidade da conexão nodal na análise discreta não-linear de pórticos. Um dos modos mais simples é a obtenção das matrizes de rigidez tomando-se como base a relação final de força-deslocamento do elemento de viga-coluna no sistema de coordenadas locais. Pretende-se então nesta seção apresentar de forma sucinta as modificações necessárias na relação força-deslocamento (2.29) para levar em consideração o efeito da flexibilidade da conexão numa análise não-linear.

Como mostrado por Pinheiro (2003), uma ligação semi-rígida pode ser modelada como um elemento de mola inserido no ponto de interseção entre a viga e a coluna, tal qual exemplificam as Figuras 2.6 e 2.7. Para a grande maioria das estruturas em aço, os efeitos das forças axial e cisalhante na deformação da conexão são pequenos se comparados com aqueles provocados pelo momento fletor. Por essa razão, apenas a deformação rotacional do elemento de mola é considerada em análises práticas. Por simplicidade de cálculo, o elemento de mola da conexão possui, por hipótese, tamanho desprezível, como mostrado pela Figura 2.7 (Chan e Chui, 2000).

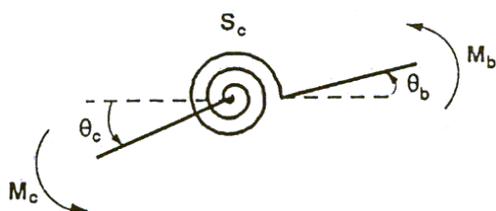


Figura 2.6: Elemento de mola simulando uma conexão.

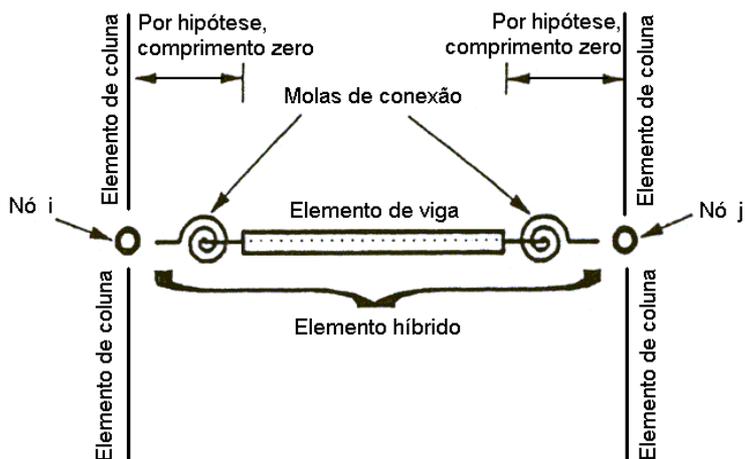


Figura 2.7: Modelo do elemento de pórtico semi-rígido idealizado.

Devido à flexibilidade de uma ligação semi-rígida, as rotações da extremidade da articulação conectada ao pilar e da extremidade conectada à viga são, em geral, diferentes e conhecidas como rotação da conexão θ_c e rotação da viga θ_b , respectivamente. Considerando a condição de equilíbrio dos momentos na conexão, obtém-se (Figura 2.6):

$$M_c + M_b = 0 \quad (2.30)$$

onde,

$$M_c = S_c(\theta_c - \theta_b) \quad (2.31a)$$

$$M_b = -M_c = S_c(\theta_b - \theta_c) \quad (2.31b)$$

em que M_c e M_b são os momentos na conexão e na viga, respectivamente, atuando no elemento de mola, e S_c é a rigidez da conexão. As equações (2.31a) e (2.31b) podem ser rearranjadas sob uma forma incremental matricial, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_c \\ \Delta M_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c \\ -S_c & S_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_c \\ \Delta \theta_b \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

sendo ΔM_c e ΔM_b os momentos nodais incrementais na conexão e na viga, respectivamente, $\Delta \theta_c$ e $\Delta \theta_b$ as rotações nodais incrementais correspondentes àqueles momentos e S_c a rigidez tangente da conexão, que é obtida fazendo-se:

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \quad (2.33)$$

onde M é o momento atuando na ligação e ϕ_c a rotação relativa (isto é, a rotação da mola ou deformação rotacional), definido como sendo

$$\phi_c = \theta_c - \theta_b \quad (2.34)$$

Da Equação (2.32), a matriz de rigidez tangente do elemento de mola pode ser descrita através:

$$\mathbf{K}_{s_c} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c \\ -S_c & S_c \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

A configuração deformada do elemento híbrido com molas nas extremidades é mostrada na Figura 2.8a. A rotação da ligação é definida como a diferença entre os ângulos de rotação do lado conectado ao nó global e o lado conectado ao elemento de viga-coluna, como já mostrado matematicamente pela Equação (2.34).

Com as molas de conexão adicionadas às extremidades da viga-coluna, a matriz de rigidez convencional do elemento deve ser modificada de tal modo a levar em consideração o efeito das ligações semi-rígidas. A matriz de rigidez resultante pode, então, ser utilizada nas análises posteriores.

Considerando agora as seções internas da viga-coluna conectadas às molas, a relação de rigidez do elemento, também na forma incremental, é dada por

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix}, \quad (2.36)$$

sendo os subscritos ‘i’ e ‘j’ referidos aos nós extremos i e j do elemento de viga-coluna. Os termos K_{ij} são as componentes de rigidez à flexão desse mesmo elemento, cujos valores são, para uma análise de primeira ordem, $4EI/L$ para K_{ii} e K_{jj} e $2EI/L$ para K_{ij} e K_{ji} . No caso de uma solução não-linear, tais valores dependem da formulação utilizada (Galvão, 2000; Pinheiro, 2003).

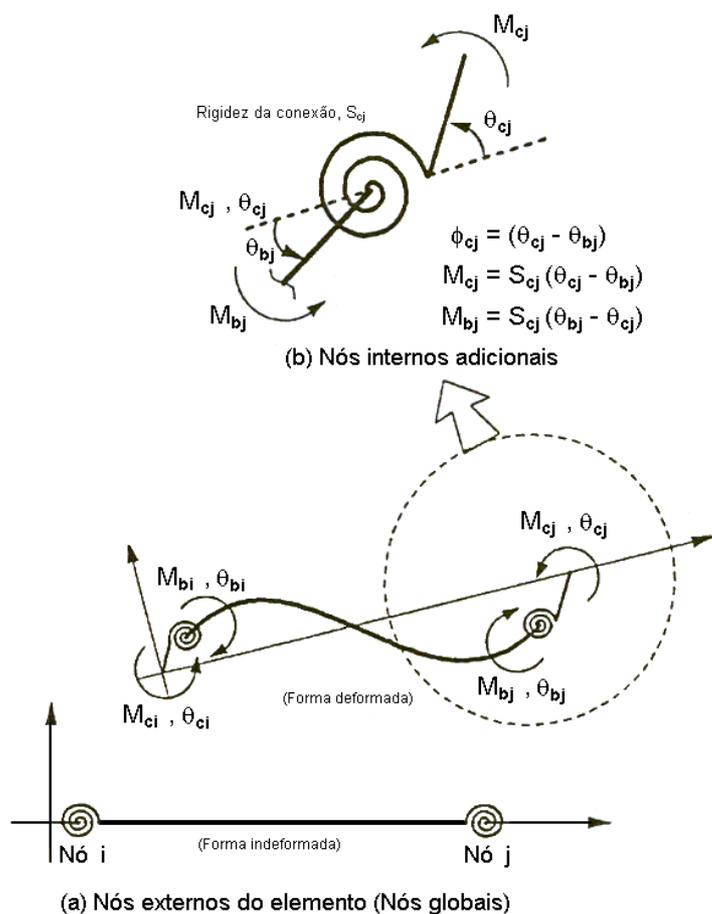


Figura 2.8: Elemento de viga-coluna com molas de conexão (Chan e Chui, 2000).

Combinando a Equação (2.36) com as componentes de rigidez das molas das duas extremidades do elemento, encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} & 0 \\ 0 & K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

onde S_{ci} e S_{cj} são as componentes de rigidez tangentes das molas de conexão e $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ são, de acordo com a Figura 2.9, as rotações incrementais das duas extremidades do elemento tomando-se como base um eixo paralelo ao último sistema de referência, ou seja, na última configuração de equilíbrio.

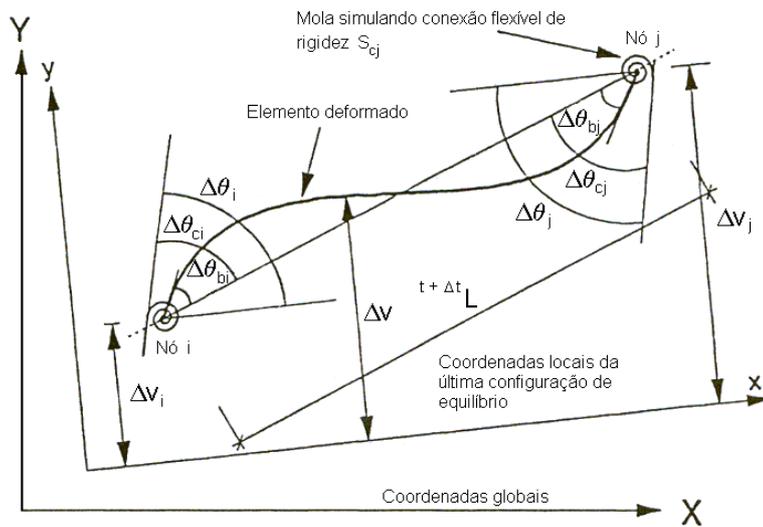


Figura 2.9: Rotações e deflexões laterais de uma elemento deformado com molas nas extremidades simulando conexões flexíveis (Pinheiro, 2003).

Efetuando-se a multiplicação matricial, assumindo-se que as cargas são aplicadas apenas nos nós globais, e que dessa forma tanto ΔM_{bi} quanto ΔM_{bj} sejam iguais a zero, chega-se a, já organizando-se matricialmente:

$$\begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

enquanto as equações restantes, também organizadas matricialmente, ficam:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

O vetor que contém os valores de $\Delta\theta_{bi}$ e $\Delta\theta_{bj}$ pode ser obtido a partir de (2.38) através da expressão:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

Substituindo-se então equação anterior em (2.39), encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{jj} & -K_{ij} \\ -K_{ji} & S_{ci} + K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

onde $\beta = (S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji}K_{ij}$. Para um elemento de viga-coluna, pode-se ainda determinar algumas relações entre os esforços cisalhantes e os momentos incrementais. Essas relações, de acordo com a Figura 2.10, valem:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{ci} \\ M_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

em que ΔM_i e ΔM_j são os momentos incrementais, ΔQ_i e ΔQ_j são as forças cisalhantes incrementais nos nós do elemento híbrido e L é o comprimento do elemento de viga-coluna na configuração t de equilíbrio utilizada como referência, cujo sobrescrito esquerdo t foi omitido por questões de clareza.

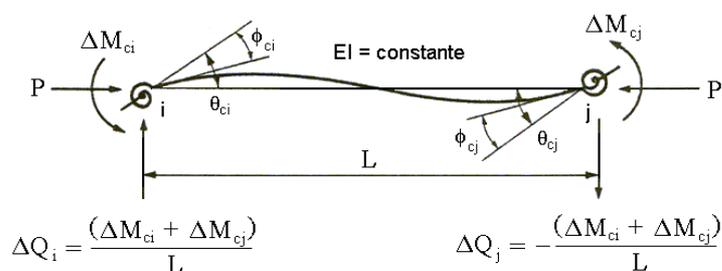


Figura 2.10: Notações para deslocamentos e forças nodais do elemento de pórtico plano com ligações semi-rígidas.

Combinando então (2.41) e (2.42), encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{jj} & -K_{ij} \\ -K_{ji} & S_{ci} + K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Da Figura 2.9, pode-se ainda obter as relações entre os incrementos de rotação da conexão em relação aos eixos locais e os incrementos de rotação obtidos em relação ao último sistema de coordenadas, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

onde Δv_i e Δv_j são os deslocamentos laterais incrementais projetados sobre a última configuração de equilíbrio de ambos os nós do elemento e L o comprimento do mesmo.

De posse de (2.44), pode-se obter a matriz de rigidez elástica para o elemento híbrido de viga-coluna substituindo-se a equação anterior em (2.43), o que fornece:

$$\begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{jj} & -K_{ij} \\ -K_{ji} & S_{ci} + K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

cuja expressão final é:

$$\begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ke_{1,1} & Ke_{1,2} & Ke_{1,3} & Ke_{1,4} \\ Ke_{2,1} & Ke_{2,2} & Ke_{2,3} & Ke_{2,4} \\ Ke_{3,1} & Ke_{3,2} & Ke_{3,3} & Ke_{3,4} \\ Ke_{4,1} & Ke_{4,2} & Ke_{4,3} & Ke_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

onde:

$$Ke_{1,1} = S_{ci} - \frac{S_{ci}^2 (S_{cj} + K_{jj})}{\beta} \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{Ke}_{1,2} = -\mathbf{Ke}_{1,4} = \frac{S_{ci}}{L} + \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj} - S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta L} \quad (2.47b)$$

$$\mathbf{Ke}_{1,3} = \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj}}{\beta} \quad (2.47c)$$

$$\mathbf{Ke}_{2,1} = -\mathbf{Ke}_{4,1} = \frac{S_{ci}}{L} + \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci} - S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta L} \quad (2.47d)$$

$$\mathbf{Ke}_{2,2} = \mathbf{Ke}_{4,4} = \frac{S_{ci} + S_{cj}}{L^2} + \frac{S_{cj}S_{ci}(K_{ji} + K_{ij}) - S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii}) - S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta L^2} \quad (2.47e)$$

$$\mathbf{Ke}_{2,3} = -\mathbf{Ke}_{4,3} = \frac{S_{cj}}{L} + \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj} - S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta L} \quad (2.47f)$$

$$\mathbf{Ke}_{2,4} = \mathbf{Ke}_{4,2} = \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii}) + S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj}) - S_{cj}S_{ci}(K_{ji} + K_{ij})}{\beta L^2} - \frac{(S_{ci} + S_{cj})}{L^2} \quad (2.47g)$$

$$\mathbf{Ke}_{3,1} = \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci}}{\beta} \quad (2.47h)$$

$$\mathbf{Ke}_{3,2} = -\mathbf{Ke}_{3,4} = \frac{S_{cj}}{L} + \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci} - S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta L} \quad (2.47i)$$

$$\mathbf{Ke}_{3,3} = S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta} \quad (2.47j)$$

Além disso, reagrupando-se esta última na matriz de rigidez completa do elemento, que possui dimensão 6, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta P_j \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Ke}_{2,2} & \mathbf{Ke}_{2,1} & 0 & \mathbf{Ke}_{2,4} & \mathbf{Ke}_{2,3} \\ 0 & \mathbf{Ke}_{1,2} & \mathbf{Ke}_{1,1} & 0 & \mathbf{Ke}_{1,4} & \mathbf{Ke}_{1,3} \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Ke}_{4,2} & \mathbf{Ke}_{4,1} & 0 & \mathbf{Ke}_{4,4} & \mathbf{Ke}_{4,3} \\ 0 & \mathbf{Ke}_{3,2} & \mathbf{Ke}_{3,1} & 0 & \mathbf{Ke}_{3,4} & \mathbf{Ke}_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

Com base na formulação de elemento finito não-linear apresentada na Seção 2.2, pode-se obter uma relação final de força-deslocamento já se levando em

consideração o efeito da semi-rigidez presente nas conexões nodais, que pode ser formulada como sendo

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L + P/L & M_i/L & M_j/L \\ M_i/L & K_{ii}^* & K_{ij}^* \\ M_j/L & K_{ji}^* & K_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix}, \quad (2.49)$$

onde os termos ΔP , ΔM_i e ΔM_j denotam a força axial incremental e os momentos nodais incrementais, respectivamente. Como também já definidos, δ , $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ mensuram o incremento de deformação axial e as rotações nodais incrementais, respectivamente. Os valores de P , M_i e M_j denotam a força axial e os momentos nodais na última configuração de equilíbrio, respectivamente. Por fim, os termos presentes na matriz de rigidez são definidos como

$$K_{ii}^* = S_{ci} - \frac{S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta} \quad (2.50a)$$

$$K_{ij}^* = \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj}}{\beta} \quad (2.50b)$$

$$K_{ji}^* = \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci}}{\beta} \quad (2.50c)$$

$$K_{jj}^* = S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta} \quad (2.50d)$$

onde $\beta = (S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji}K_{ij}$, sendo S_{ci} e S_{cj} os valores de semi-rigidez de ambas as conexões que, numa análise incremental-iterativa, podem ser atualizados utilizando-se um dos modelos constitutivos representativos da ligação (ver Apêndice B). Já K_{ii} , K_{ij} , K_{ji} e K_{jj} representam os termos da formulação não-linear utilizada e são dados pelas Equações (2.29b e 2.29c):

2.4

METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NÃO-LINEAR

De um modo geral, a condição de equilíbrio de um sistema estrutural com características não-lineares pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (2.51)$$

onde, como já mencionado, \mathbf{F}_i é vetor das forças internas da estrutura, função dos deslocamentos dos pontos nodais da estrutura \mathbf{U} , e λ é o parâmetro de carregamento proporcional e é responsável pelo escalonamento de \mathbf{F}_r , que é um vetor de referência e de magnitude arbitrária, ou seja, apenas a sua direção é importante.

Para se obter as diversas configurações de equilíbrio do sistema e assim poder traçar a chamada trajetória não-linear de equilíbrio, deve-se resolver a equação (2.51) de forma incremental. Isso significa que para uma seqüência de incrementos do parâmetro de carga $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3, \dots$, deve ser calculada uma seqüência de incrementos de deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{U}_1, \Delta\mathbf{U}_2, \Delta\mathbf{U}_3, \dots$. Entretanto, como \mathbf{F}_i é uma função não-linear dos deslocamentos, a solução estimada do problema (solução predita: $\Delta\lambda^0, \Delta\mathbf{U}^0$), para cada passo de carga, não deve satisfazer *a priori* a equação anterior. Como conseqüência, defini-se uma força residual \mathbf{g} , ou também chamada força desequilibrada, dada por:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) \quad (2.52)$$

que deve ser aplicada novamente ao sistema estrutural. Os vários algoritmos existentes, que utilizam abordagem incremental-iterativa, apresentam como passo fundamental a avaliação dessas forças residuais, em particular das forças internas da estrutura. Dessa forma, uma nova estimativa para os deslocamentos é gerada pela relação:

$$\mathbf{K} \delta\mathbf{U} = \mathbf{g} \quad (2.53)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural e $\delta\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos residuais, ou seja, é o valor estimado para se corrigir o incremento de deslocamentos da solução predita $\Delta\mathbf{U}$.

Em vários trabalhos (Crisfield, 1991 e 1997) essa estimativa da correção de $\Delta\mathbf{u}$ não é obtida de uma maneira direta através da solução de (2.53). Nestes os deslocamentos residuais são definidos como a soma de duas componentes, ou seja:

$$\delta\mathbf{U} = \delta\mathbf{U}_g + \delta\lambda \delta\mathbf{U}_r \quad (2.54)$$

onde $\delta\lambda$ é um parâmetro que, a fim de tornar mais eficiente o processo de correção, deve ser avaliado no ciclo iterativo para também “corrigir” o incremento de carga; $\delta\mathbf{u}_g$ e $\delta\mathbf{u}_r$ são obtidos através das relações: $\delta\mathbf{U}_g = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}$ e $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r$. Observe que esses vetores de deslocamentos podem ser obtidos de forma imediata, pois \mathbf{K} , \mathbf{g} e \mathbf{F}_r são conhecidos. A definição de $\delta\lambda$ em (2.54) vai depender de uma equação de restrição a ser imposta adicionalmente ao problema não-linear.

Uma das estratégias usada nesse trabalho para se chegar ao valor de $\delta\lambda$ é baseada no emprego da técnica denominada *comprimento de arco constante* (Crisfield, 1991; Rocha, 2000), que consiste em adicionar à Equação (2.51) a seguinte restrição:

$$\Delta\mathbf{U}^T \Delta\mathbf{U} + \Delta\lambda^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (2.55)$$

onde Δl é o comprimento de arco da trajetória de equilíbrio. A adição de (2.55) ao sistema permite que se faça ajuste no parâmetro de carga λ durante o ciclo iterativo, e dessa forma ultrapassar possíveis pontos críticos existentes nos caminhos primários e secundários.

Após a realização de uma série de iterações que leve o resíduo a ser tão pequeno quanto se queira, e isso é feito através de algum critério de convergência (Apêndice A), um novo estado de equilíbrio é estabelecido. A iteração representada

pelo superescrito k deve, portanto, fornecer os subincrementos (ou correções) $\delta\lambda^k$ e $\delta\mathbf{u}^k$, e após essa iteração os incrementos de carga e deslocamento são novamente avaliados fazendo:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad \text{e} \quad \Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k \quad (2.56)$$

Num contexto computacional, é vantajoso introduzir a equação de restrição seguindo as duas etapas de solução apresentadas a seguir:

1. A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, é selecionado um incremento de carga, definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda^0$, procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema (Equação (2.56), por exemplo). Após a seleção de $\Delta\lambda^0$, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{u}^0$ através da equação:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \quad (2.57)$$

sendo $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r$ o vetor dos deslocamentos tangenciais. As aproximações $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$ caracterizam a chamada **solução incremental predita**.

2. Na segunda etapa de solução, procura-se, através de iterações do tipo Newton, corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o intuito de restaurar o equilíbrio da estrutura o mais rápido possível. Se as iterações realizadas envolvem não só os deslocamentos \mathbf{U} , mas também o parâmetro de carga λ , então uma equação adicional de restrição é requerida. A forma dessa equação de restrição é o que distingue as várias técnicas de solução (ver Apêndice A).

A Figura 2.11 fornece um esquema de solução incremental-iterativa para o sistema com um grau de liberdade, onde os parâmetros de carga e o deslocamento são atualizados seguindo a restrição de comprimento de arco cilíndrico (Crisfield, 1991).

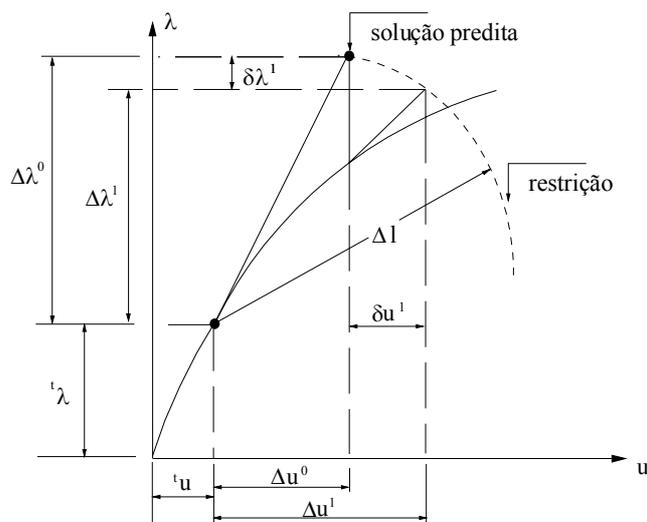
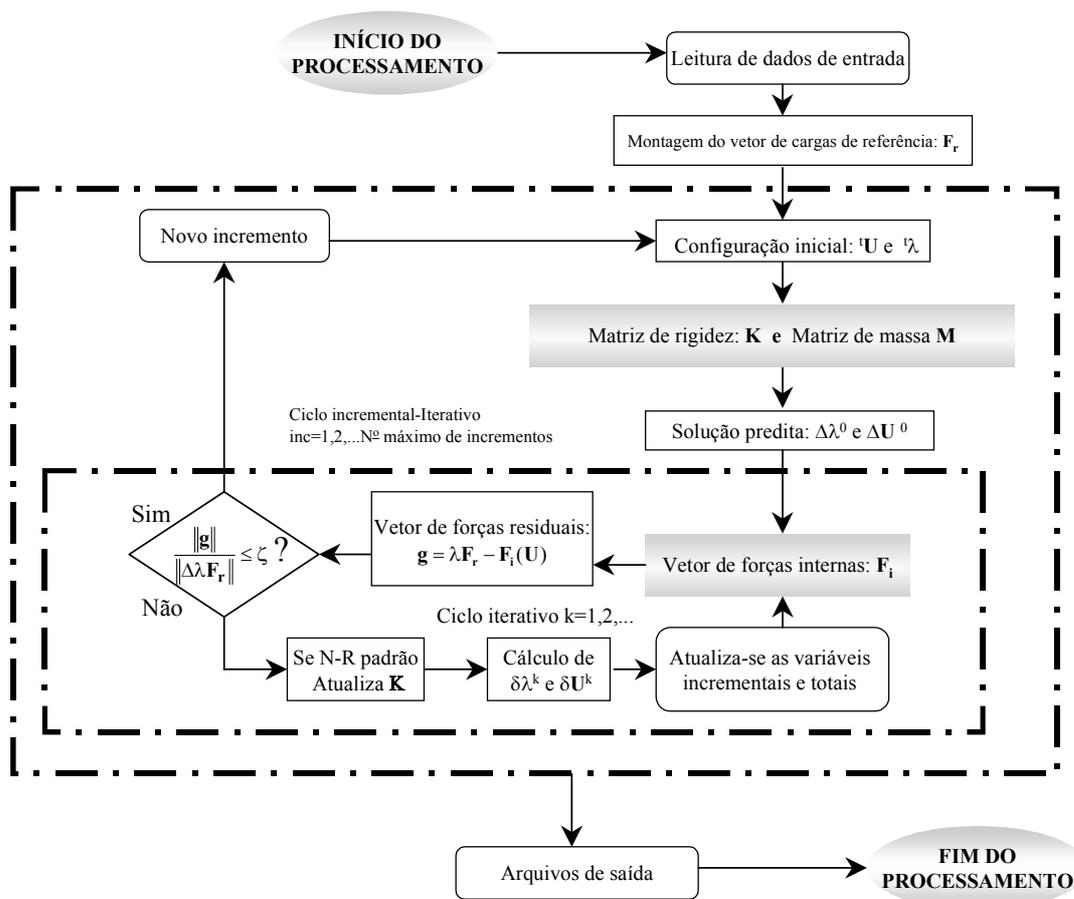


Figura 2.11: Solução para um incremento de carga.

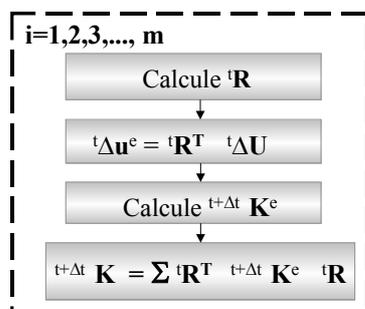
A seguir, com o propósito de fornecer um resumo dos procedimentos computacionais utilizados, são mostrados na Tabela 2.1 e Figura 2.12, os passos básicos envolvidos na implementação computacional da metodologia de solução numérica apresentada.

-
1. Configuração inicial: ${}^t\mathbf{U}$ e ${}^t\lambda$
 2. Definição da solução predita: $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$
 3. Iterações: $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$
 4. Verifica a convergência: $\zeta_1 = \|\mathbf{g}^{(k-1)}\| / \|\Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\| \leq \zeta$?
Sim: pare o ciclo de iterações, siga para o passo 7;
Não: calcule $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$
 5. Atualização das variáveis:
 - i. incrementais: $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
 - ii. totais: ${}^{t+\Delta t}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
 6. Retorne ao passo 3
 7. Faça novo incremento de carga e recomece o processo
-

Tabela 2.1: Algoritmo de solução não-linear.



MATRIZ DE RIGIDEZ



onde:

- t e t+Delta t : última configuração de equilíbrio e configuração corrente.
- R: matriz de rotação elementar atualizada na configuração t.
- R_a: matriz de rotação elementar atualizada na última iteração .
- Delta U: vetor de deslocamentos incrementais no sistema global.
- K: matriz de rigidez o sistema global.
- F_i: vetor de forças internas no sistema global.

VETOR DE FORÇAS INTERNAS

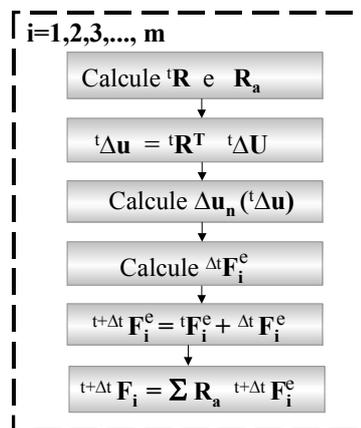


Figura 2.12: Fluxograma da metodologia de solução não-linear.