

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Kaio Gabriel Nunes**

**Estudo numérico das respostas mecânicas de  
estruturas com características auxéticas**

**Projeto de Graduação**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia  
Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Anderson Pereira

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2022

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e sabedoria para chegar até aqui.

Agradeço à minha família, principalmente aos meus pais, Vitor e Kátia, por sempre me incentivarem em meus estudos, e por proporcionarem as melhores condições de ensino ao longo de toda a minha vida.

Agradeço aos meus amigos de longa data, Emerson, João Vitor, Leonardo e Pedro, por todos os momentos de descontração da rotina de estudos.

Agradeço à minha namorada, Beatriz, pela paciência e pelo apoio nos últimos anos, e por me acompanhar dentro e fora da faculdade.

Agradeço aos meus colegas de curso, principalmente ao Rômulo, pela parceria ao longo de todos os anos de curso.

Agradeço ao meu orientador, Anderson, por ter me auxiliado ao longo deste projeto.

Agradeço a todos os professores e funcionários da PUC-Rio pela dedicação, seja ao ensinar, aconselhar ou permitir um ambiente limpo e agradável diariamente para o conforto dos alunos.

## **RESUMO**

### **Estudo numérico das respostas mecânicas de estruturas com características auxéticas**

O coeficiente de Poisson é uma propriedade que mensura a relação entre as deformações ortogonais que ocorrem em um material sólido quando submetido a um estado de tensão uniaxial. Materiais que possuem coeficiente de Poisson negativos são classificados como auxéticos, podendo se contrair ou expandir transversalmente de acordo com a aplicação da carga. Visto isso, o seguinte estudo tem como objetivo simular computacionalmente uma estrutura composta por microestruturas com características auxéticas, avaliando seu coeficiente de Poisson obtido a partir da análise linear elástica de sua estrutura. Por meio do uso do software em CAD 3D, SolidWorks, as geometrias foram modeladas de maneira paramétrica de modo a se ajustarem a diferentes configurações, para que pudessem ser simuladas pelo método de elementos finitos. Os resultados obtidos neste estudo verificaram o comportamento auxético das estruturas analisadas em simulação numérica, visto que os valores dos coeficientes de Poisson para as diferentes geometrias foram negativos.

Palavras chaves: Auxético. Microestrutura. Coeficiente de Poisson Negativo. Elementos Finitos. SolidWorks.

## **ABSTRACT**

### **Numerical analysis of mechanical properties of structures with auxetic behaviour**

The Poisson's ratio is a property that mensurates the relation between the orthogonal strains which occur in a solid material when it is under uniaxial stress condition. In this way, materials that possess negative Poisson's ratio are classified as auxetic, and they can contract or expand transversely depending on the load direction. So, the following article has the objective to present a computational simulation of a microstructure composition with auxetic behavior, evaluating its Poisson's ratio obtained by the linear elastic analysis of its structure. Through the CAD 3D software, SolidWorks, the geometries were modeled in a parametric way that adjusts their selves to different configurations, so they could be simulated by the finite element method. The results obtained in this study verifies the auxetic behavior of the structures analyzed in numerical simulation, since the values of the Poisson's ratio for the different geometries were negative.

Key-words: Auxetic. Microstructure. Negative Poisson's Ratio. Finite Elements. Solidworks.

## Sumário

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | Introdução.....                                      | 9  |
| 1.1 | Motivação.....                                       | 9  |
| 1.2 | Objetivo.....  | 10 |
| 2   | Materiais Auxéticos.....                             | 12 |
| 3   | Microestrutura reentrante.....                       | 14 |
| 3.1 | Modelo bidimensional.....                            | 14 |
| 3.2 | Modelo tridimensional.....                           | 15 |
| 4   | Modelagem 3D.....                                    | 17 |
| 4.1 | Célula unitária.....                                 | 17 |
| 4.2 | 1/4 da célula unitária.....                          | 21 |
| 4.3 | Arranjo.....   | 23 |
| 5   | Análise de elementos finitos.....                    | 25 |
| 5.1 | Simulação computacional.....                         | 25 |
| 5.2 | Pequenos deslocamentos vs grandes deslocamentos..... | 27 |
| 6   | Validação dos resultados.....                        | 29 |
| 7   | Resultados.....                                      | 36 |
| 8   | Conclusão.....                                       | 47 |
| 9   | Referências Bibliográficas.....                      | 48 |

## Lista de figuras

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Principais estratégias em obter microestruturas otimizadas 1) otimização topológica, 2) densidade variável, 3) combinação de diferentes microestruturas, retirado de [13]. ..... | 9  |
| Figura 2 – Aplicações bélicas de materiais auxéticos, retirado de [17]. .....   | 10 |
| Figura 3 – Microestrutura hexagonal reentrante tridimensional, retirado de [15]. ....   | 11 |
| Figura 4 – Comportamento dos materiais auxéticos, retirado de [1]. .....  | 12 |
| Figura 5 – Ilustração das respostas de um material com (a) coeficiente de Poisson positivo, (b) coeficiente de Poisson negativo, ao ser comprimido na direção y, retirado de [14]. .....    | 13 |
| Figura 6 – Microestrutura hexagonal reentrante 2D, retirado de [1]. .....   | 14 |
| Figura 7 – Arranjo reentrante e sua célula unitária 3D, retirado de [15]. .....   | 16 |
| Figura 8 – Esboço em 2D da geometria principal da microestrutura. ....  | 17 |
| Figura 9 – Recurso de ressalto extrudado aplicado ao esboço. ....   | 18 |
| Figura 10 – Corpo após recurso de corte extrudado. ....   | 19 |
| Figura 11 – Recurso de padrão circular aplicado ao corpo. ....  | 19 |
| Figura 12 – Microestrutura reentrante modelada. ....  | 20 |
| Figura 13 – 1/4 da microestrutura reentrante modelada. ....   | 22 |
| Figura 14 – Arranjo composto por células unitárias auxéticas .....  | 23 |
| Figura 15 – Interface do SolidWorks Simulation. ....  | 25 |
| Figura 16 – Restrições impostas à microestrutura. ....  | 26 |
| Figura 17 – Força imposta à microestrutura. ....  | 26 |
| Figura 18 – Malha construída para a microestrutura. ....  | 27 |
| Figura 19 – Modelo bidimensional modelado. ....   | 29 |
| Figura 20 – ¼ do modelo reentrante bidimensional. ....  | 30 |
| Figura 21 – Arranjo composto pelo modelo reentrante bidimensional. ....   | 30 |
| Figura 22 – Deslocamento do eixo X para o modelo bidimensional. ....  | 31 |
| Figura 23 – Deslocamento do eixo y para o modelo bidimensional. ....  | 31 |
| Figura 24 – ¼ do modelo reentrante bidimensional deformado. ....  | 33 |
| Figura 25 – Arranjo composto pela microestrutura reentrante bidimensional deformado. ....   | 33 |
| Figura 26 – Exibição das três condições de contorno estudadas. ....   | 35 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 27 – Deslocamento no eixo X do modelo tridimensional.....                  | 36 |
| Figura 28 – Deslocamento no eixo Y do modelo tridimensional.....                  | 37 |
| Figura 29 – Deslocamento no eixo Z do modelo tridimensional. ....                 | 37 |
| Figura 30 – Modelo em 1/4 da célula unitária deformado. ....                      | 39 |
| Figura 31 – Deslocamento no eixo x para o modelo em 1/4 da célula unitária 3D.... | 40 |
| Figura 32 – Deslocamento no eixo y para o modelo em 1/4 da célula unitária 3D.... | 40 |
| Figura 33 – Deslocamento no eixo z para o modelo em 1/4 da célula unitária 3D.... | 41 |
| Figura 34 – Arranjo deformado após simulação.....                                 | 43 |
| Figura 35 – Deslocamento no eixo x para o arranjo tridimensional.....             | 43 |
| Figura 36 – Deslocamento no eixo y para o arranjo tridimensional.....             | 44 |
| Figura 37 – Deslocamento no eixo z para o arranjo tridimensional.....             | 44 |

## Lista de tabelas

|  |    |
|--|----|
| Tabela 1 – Variações das microestruturas em função de seu ângulo. ....   | 21 |
| Tabela 2 – Variações dos modelos em 1/4 em função de seu ângulo. ....  | 22 |
| Tabela 3 – Variações dos arranjos em função de seu ângulo. ....  | 24 |
| Tabela 4 – Resultado para os coeficientes de Poisson em função do ângulo $\theta$ , para a célula unitária bidimensional. .... | 32 |
| Tabela 5 – Resultado para o coeficiente de Poisson validado. ....  | 34 |
| Tabela 6 – Deformações axiais e transversais em função dos ângulos, para o modelo tridimensional. ....                         | 38 |
| Tabela 7 – Coeficiente de Poisson em função do ângulo, para o modelo tridimensional. ....                                      | 39 |
| Tabela 8 – Deformações axiais e transversais em função dos ângulos, para a célula unitária em 1/4. ....                        | 42 |
| Tabela 9 – Coeficiente de Poisson em função do ângulo, para a célula unitária em 1/4. ....                                     | 42 |
| Tabela 10 – Deformações axiais e transversais em função dos ângulos, para o arranjo tridimensional. ....                       | 45 |
| Tabela 11 – Coeficiente de Poisson em função do ângulo, para o arranjo tridimensional. ....                                    | 45 |
| Tabela 12 – Resultados de coeficiente de Poisson para cada uma das três condições de contorno em função de seu ângulo. ....    | 46 |



# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

O emprego de materiais auxéticos na indústria abre caminhos para a produção de materiais funcionais de menor peso e estrutura otimizada, que pode levar a uma produção mais acelerada e diminuir o consumo de materiais em estruturas mais robustas [13]. A Figura 1 abaixo apresenta os principais métodos de se obter microestruturas otimizadas.

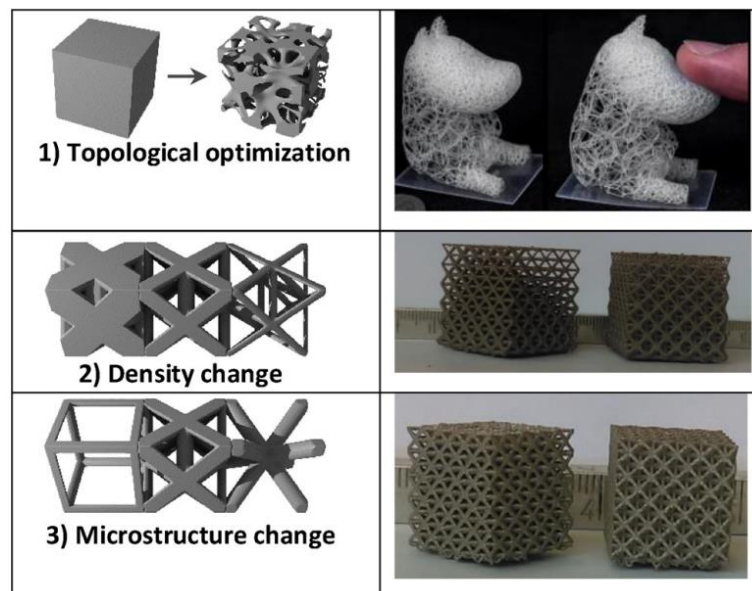


Figura 1 – Principais estratégias em obter microestruturas otimizadas 1) otimização topológica, 2) densidade variável, 3) combinação de diferentes microestruturas, retirado de [13].

De acordo com Imbalzamo et al. [2], materiais auxéticos compostos por polímeros, metais e cerâmicas tem sido desenvolvidos e estudados durante anos, de proporções de escala micro a macro, por se tratarem de estruturas de alta resistência em relação ao baixo peso que alcançam.

Como aplicação, a indústria militar e bélica é uma das beneficiadas por essa tecnologia, pela necessidade de sistemas de defesa que possam absorver localmente a energia, e que possam irradiá-la de maneira rápida e eficiente [3]. Equipamentos como coletes e capacetes a prova de balas são um dos focos dessa indústria, pois estruturas convencionais são pesadas e limitam a mobilidade humana, trazendo mais exposição ao risco. A Figura 2 ilustra algumas aplicações de materiais auxéticos na indústria militar.

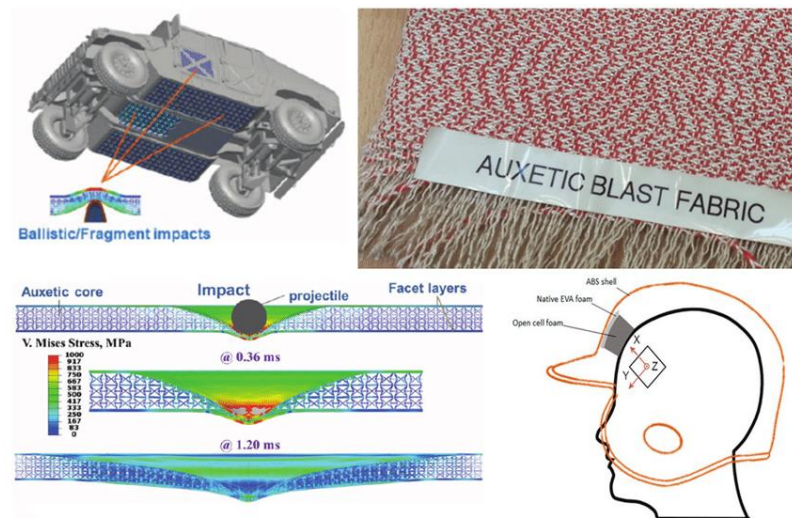


Figura 2 – Aplicações bélicas de materiais auxéticos, retirado de [17].

## 1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é avaliar numericamente um arranjo de microestruturas auxéticas, a partir da análise de sua célula unitária. A microestrutura escolhida para análise neste estudo foi o modelo hexagonal reentrante tridimensional, ilustrado pela Figura 3 a seguir, que tem seu caráter auxético definido por seus parâmetros geométricos.

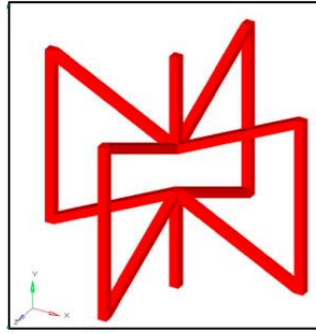


Figura 3 – Microestrutura hexagonal reentrante tridimensional, retirado de [15].

O estudo terá como finalidade a obtenção do coeficiente de Poisson da microestrutura para diferentes parâmetros de entrada da célula unitária mencionada acima, e como ela se comportará em cada condição com a alteração de suas características, a partir de deformações estruturais transversais e longitudinais, que serão avaliadas ao fim do projeto.

## 2 Materiais Auxéticos

Os materiais classificados como auxéticos são aqueles que possuem como característica o coeficiente de Poisson negativo, ou seja, estruturas que em presença de carregamento por tração se expandem transversalmente, e por compressão se contraem transversalmente [1]. Este comportamento é exemplificado na Figura 4.

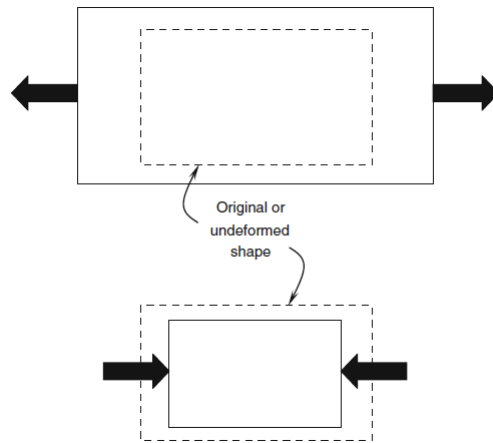


Figura 4 – Comportamento dos materiais auxéticos, retirado de [1].

Por uma questão de intuitividade se tratando de materiais ordinários, foi introduzido um sinal negativo na equação para que o coeficiente se tornasse positivo, visto que as deformações citadas acima ocorrem em sentidos opostos [1]. Temos a seguinte expressão para o coeficiente de Poisson:

$$\nu = - \frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}} \quad (1)$$

O comportamento auxético do material tem relação direta com suas propriedades mecânicas, visto que materiais auxéticos possuem maior tenacidade a fratura e melhor absorção de vibração e energia [1], entre outras capacidades comparado a um material convencional. A Figura 5 representa a diferença entre os dois materiais.

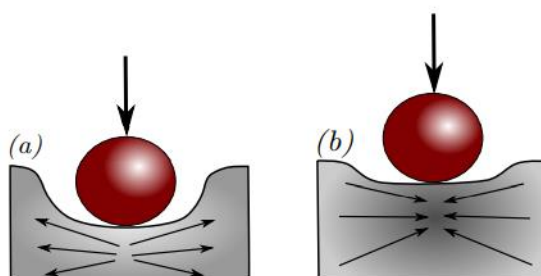


Figura 5 – Ilustração das respostas de um material com (a) coeficiente de Poisson positivo, (b) coeficiente de Poisson negativo, ao ser comprimido na direção  $y$ , retirado de [14].

Além disso, fatores como geometria e alguns parâmetros da célula unitária também contribuem para o caráter auxético, maximizando sua capacidade de absorção de energia, que combinado a propriedades do material podem aumentar sua performance em aplicações que necessitam de tecnologias de alto desempenho, como a indústria balística, por exemplo [2].

### 3 Microestrutura reentrante

#### 3.1 Modelo bidimensional

De acordo com Lim [1], o caráter auxético é altamente dependente da geometria da microestrutura a ser estudada, sendo uma importante etapa do projeto a escolha por uma microestrutura que corresponda às expectativas esperadas ao fim do estudo.

Dessa forma, para este projeto foi escolhida a microestrutura de modelo hexagonal reentrante (Gibson e Ashby 1996). O modelo base tem sua forma bidimensional composta por uma estrutura em forma de colmeia hexagonal, como mostrado na Figura 6.

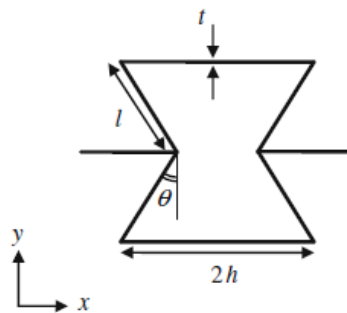


Figura 6 – Microestrutura hexagonal reentrante 2D, retirado de [1].

Tendo como referência a Figura 6, o que define as características auxéticas da microestrutura é seu ângulo  $\theta$ . A geometria é definida como auxética quando seu parâmetro  $\theta$  é positivo, e definida como convencional quando  $\theta$  é negativo [1]. De acordo com a Figura 6,  $h$  é o comprimento médio da base,  $l$  o comprimento do lado inclinado, e  $t$  a espessura da estrutura.

Master e Evans [18] propuseram uma expressão para o cálculo do coeficiente de Poisson que depende apenas da geometria da célula unitária 2D e das propriedades mecânicas do material utilizado. A expressão é representada de acordo com a Equação 2 a seguir.

$$v_{12} = \frac{-\sin(\theta) \cos(\theta) \left[ \frac{1}{K_f} + \frac{1}{K_h} + \frac{1}{K_s} \right]}{\left( \frac{h}{l} + \sin(\theta) \right) \left[ \frac{\sin^2(\theta)}{K_f \cos(\theta)} + \frac{\sin^2(\theta)}{K_h \cos(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{K_s} \right]} \quad (2)$$

Sendo que  $K_f$ ,  $K_h$  e  $K_s$  são as constantes que carregam os termos de propriedade mecânica do material. Seguem suas equações:

$$K_f = \frac{Ebt^3}{l^3} \quad (3)$$

$$K_s = \frac{Ebt}{l} \quad (4)$$

$$K_s = \frac{Gbt}{l} \quad (5)$$

Nas Equações 3, 4 e 5 exibidas anteriormente,  $E$  representa o módulo de elasticidade do material, e  $G$  representa o módulo de cisalhamento.

### 3.2 Modelo tridimensional

Visto que microestruturas auxéticas bidimensionais possuem coeficiente de Poisson negativo apenas nos dois eixos ortogonais  $x$  e  $y$ , é preciso analisar um modelo tridimensional da microestrutura hexagonal reentrante capaz de fornecer um caráter auxético também no terceiro eixo,  $z$ , possibilitando que as deformações das três direções principais sejam analisadas [15].

A estrutura geométrica a ser estudada neste projeto pode ser descrita como um par ortogonal da microestrutura hexagonal reentrante exposta na Figura 6. Ao ser utilizado em forma de par, é possível agora analisar o coeficiente de Poisson negativo em todas as três direções.

Na Figura 7 é esquematizado a estrutura resultante tridimensional ao se espelhar ortogonalmente a geometria em 2D vista anteriormente. Ao lado, temos um arranjo composto pela microestrutura replicada nos três eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

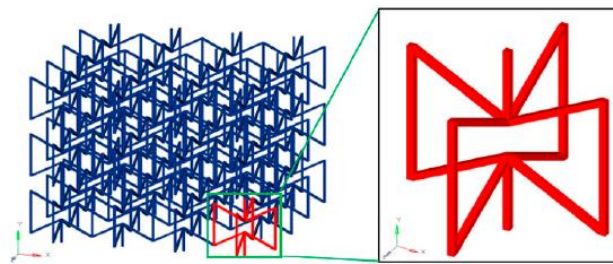


Figura 7 – Arranjo reentrante e sua célula unitária 3D, retirado de [15].



## 4 Modelagem 3D

Para a modelagem da microestrutura reentrante tridimensional, foi utilizado o software de design em CAD 3D, SolidWorks [7]. O software tem como base a computação paramétrica para modelagem de corpos sólidos, ou seja, são criadas formas tridimensionais a partir de operações geométricas elementares [16]. Em seu ambiente, a modelagem de um sólido parte de um esboço em 2D, que a partir dos diversos recursos propostos dentro do sistema, esse esboço posteriormente é transformado em um modelo tridimensional.

### 4.1 Célula unitária

A modelagem da célula unitária tridimensional foi feita partindo-se de um esboço no plano frontal, e sua forma foi baseada na estrutura de colmeia hexagonal apresentada na Figura 3. Como dimensionamento inicial, foram utilizados valores para  $\theta$ ,  $h$  e  $l$  iguais a  $30^\circ$ , 120 mm e 40 mm, respectivamente. Este esboço está representado a seguir pela Figura 8.

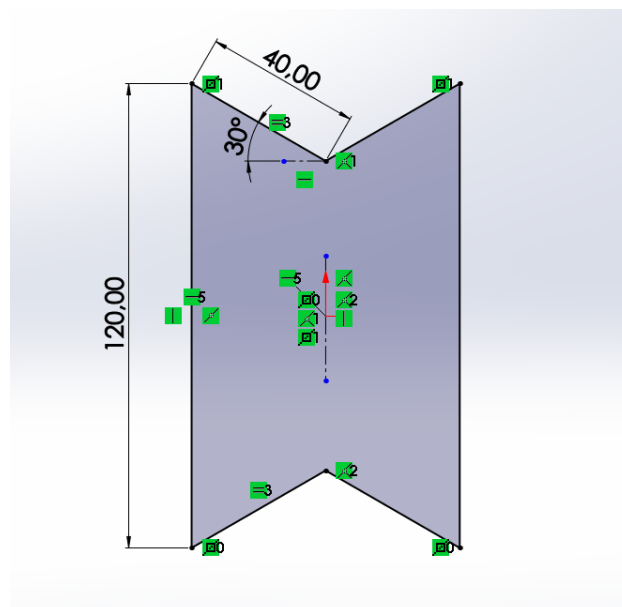


Figura 8 – Esboço em 2D da geometria principal da microestrutura.

Para a análise dos resultados, será variado o ângulo  $\theta$  na geometria acima, para que possa ser validado a característica auxética para diferentes configurações de célula unitária.

Tendo o esboço feito, pelo recurso de ressalto extrudado contido no software, é possível estabelecer a profundidade, e aplicando o recurso fino é estabelecida a espessura do modelo, expresso por  $t$ , igual a 2 mm. A Figura 9 exibe o recurso utilizado.

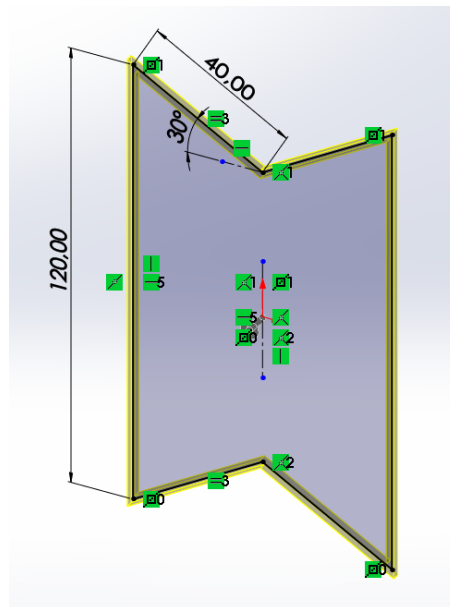


Figura 9 – Recurso de ressalto extrudado aplicado ao esboço.

O próximo passo para a obtenção da geometria desejada é dar os ajustes no contorno do corpo modelado até então, que será baseado na estrutura da Figura 7, suavizando seus cantos. Para isso, foi feito um segundo esboço, seguido de um corte extrudado para dar o acabamento à estrutura. Segue a Figura 10 com o corpo após o recurso de corte.

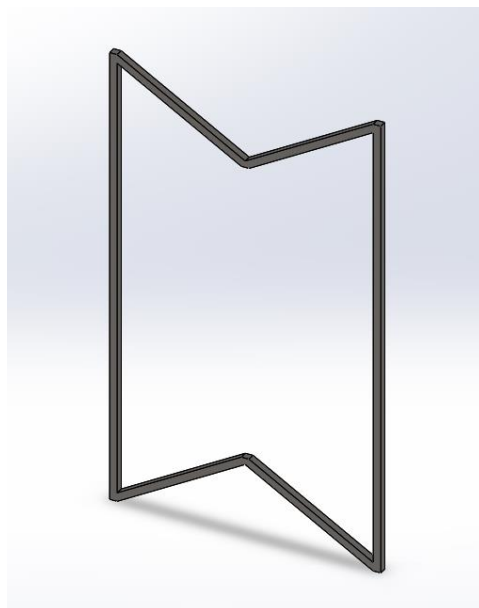


Figura 10 – Corpo após recurso de corte extrudado.

A seguir, é preciso transformar o modelo da Figura 10, bidimensional, em um modelo tridimensional. Para isso é utilizado o recurso de padrão circular, que é capaz de reproduzir a geometria modelada espelhando em 90°. A Figura 11 abaixo apresenta o recurso mencionado.

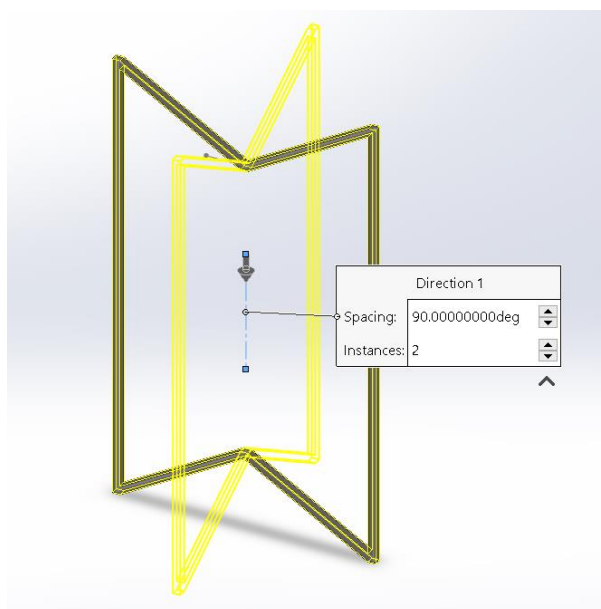


Figura 11 – Recurso de padrão circular aplicado ao corpo.

Por fim, é preciso modelar as alças que serão responsáveis pela fixação e aplicação de carga durante a simulação por elementos finitos. A Figura 12 apresenta o resultado final da modelagem da microestrutura hexagonal reentrante tridimensional, que será o objeto de estudo durante a simulação.

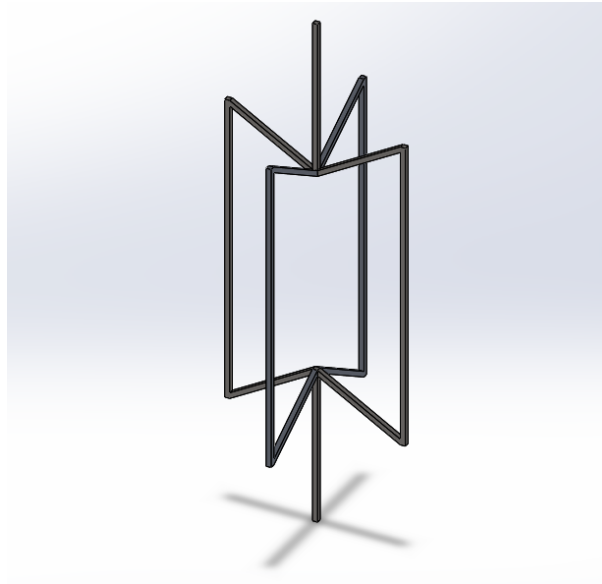


Figura 12 – Microestrutura reentrante modelada.

Neste estudo serão analisadas variações do modelo descrito acima, a partir do incremento em seu ângulo  $\theta$  de  $5^\circ$  em  $5^\circ$ . A Tabela 1 abaixo exhibe as geometrias dos cinco modelos gerados no SolidWorks.


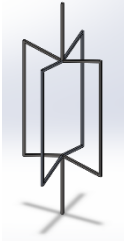



|                     |  |                     |  |
|---------------------|--|---------------------|--|
| $\theta = 10^\circ$ |   | $\theta = 15^\circ$ |  |
| $\theta = 20^\circ$ |   | $\theta = 25^\circ$ |  |
| $\theta = 30^\circ$ |  |                     |  |

Tabela 1 – Variações das microestruturas em função de seu ângulo.

## 4.2 1/4 da célula unitária

A modelagem de 1/4 da célula unitária foi feita por meio de cortes nos planos  $x$  e  $z$  da célula unitária exibida na Figura 12. Por simetria, o modelo os mesmos valores dos parâmetros apresentados anteriormente. A Figura 13 a seguir apresenta a célula unitária em 1/4 de sua geometria para  $\theta$ ,  $h$  e  $l$  iguais a  $30^\circ$ , 120 mm e 40 mm, respectivamente.

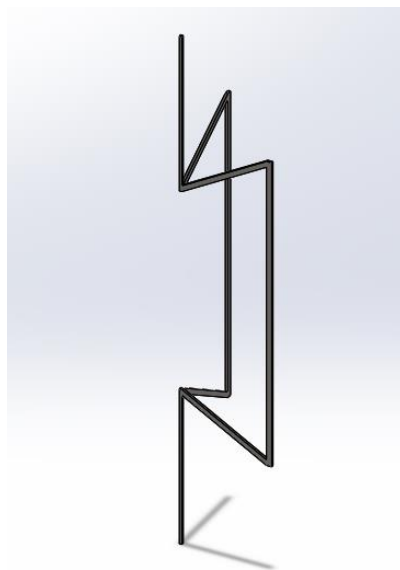


Figura 13 – 1/4 da microestrutura reentrante modelada.

Assim como no item 4.1, serão simuladas 5 variações de 1/4 da célula unitária ao alterar o ângulo da célula unitária de 5° em 5°. A Tabela 2 abaixo apresenta as cinco geometrias modeladas.

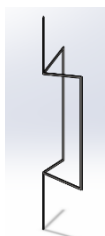
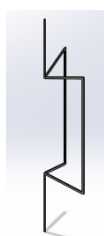
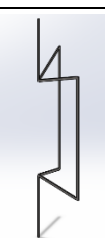
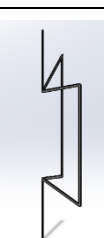

|                     |   |                     |  |
|---------------------|---|---------------------|--|
| $\theta = 10^\circ$ |  | $\theta = 15^\circ$ |  |
| $\theta = 20^\circ$ |  | $\theta = 25^\circ$ |  |
| $\theta = 30^\circ$ |  |                     |  |

Tabela 2 – Variações dos modelos em 1/4 em função de seu ângulo.

### 4.3 Arranjo

A modelagem do arranjo, composto por um conjunto de células unitárias da microestrutura hexagonal reentrante, foi feita a partir da replicação do modelo apresentado no item 4.1 deste trabalho nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O modelo é composto por 63 células unitárias, sendo 7 na direção  $x$ , 3 na direção  $y$  e 3 na direção  $z$ . A Figura 14 a seguir apresenta o arranjo auxético modelado para  $\theta$ ,  $h$  e  $l$  iguais a  $30^\circ$ , 120 mm e 40 mm, respectivamente.

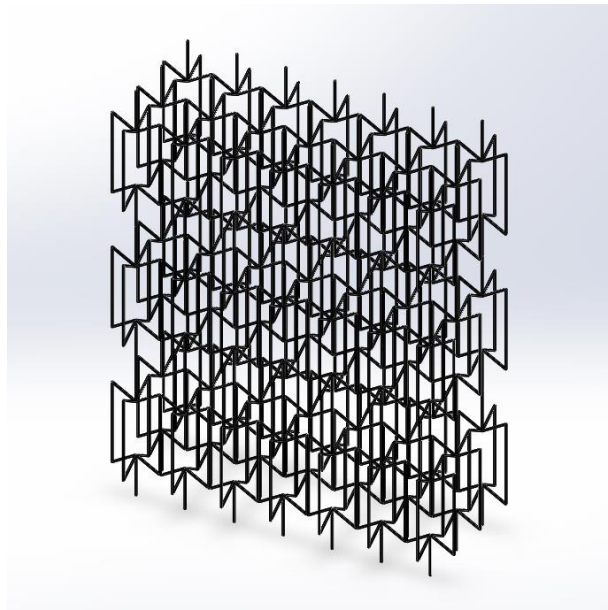


Figura 14 – Arranjo composto por células unitárias auxéticas

Assim como nos itens anteriores deste estudo, serão simuladas 5 variações de arranjo ao alterar o ângulo da célula unitária de  $5^\circ$  em  $5^\circ$ . A Tabela 3 abaixo apresenta as cinco geometrias modeladas.

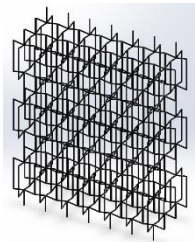
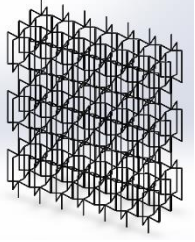
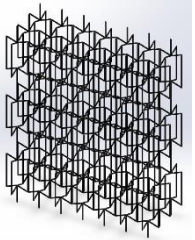
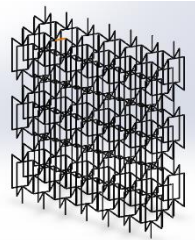
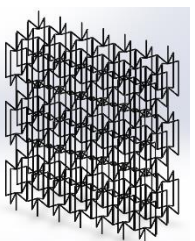
|   |   |
|---|---|
| $\theta = 10^\circ$<br>  | $\theta = 15^\circ$<br> |
| $\theta = 20^\circ$<br>  | $\theta = 25^\circ$<br> |
| $\theta = 30^\circ$<br> |   |

Tabela 3 – Variações dos arranjos em função de seu ângulo.



## 5 Análise de elementos finitos

### 5.1 Simulação computacional

Para que possa ser feita a análise estrutural do corpo modelado, verificando assim seu caráter auxético, foi utilizado o método de elementos finitos. Este método é analisado por simulação computacional, em que a estrutura modelada é subdividida em diversos elementos que caracterizam sua malha [5].

Para simulação no SolidWorks Simulation, é preciso seguir etapas na definição das condições de contorno dentro do software. A Figura 15 a seguir apresenta a interface do Simulation, com os recursos para definição de condição de contorno à esquerda.

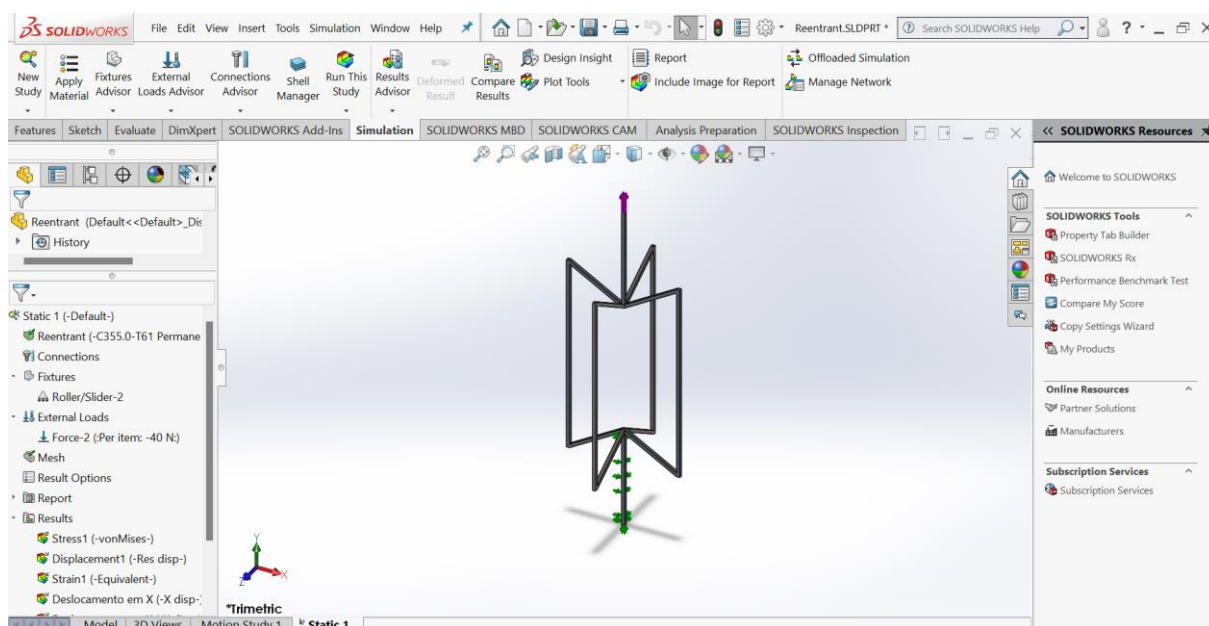


Figura 15 – Interface do SolidWorks Simulation.

Primeiramente é definido o material a ser utilizado, que para o caso deste estudo foi definido como liga de alumínio comercial, C355.0-T61, com módulo de elasticidade de 69,6 GPa e coeficiente de Poisson de 0,33. O segundo passo é definir as restrições de grau de liberdade durante a simulação, utilizando o recurso “*Fixtures*”. Foram restritos os movimentos de translação das três direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A Figura 16 apresenta as restrições aplicadas a geometria da microestrutura.

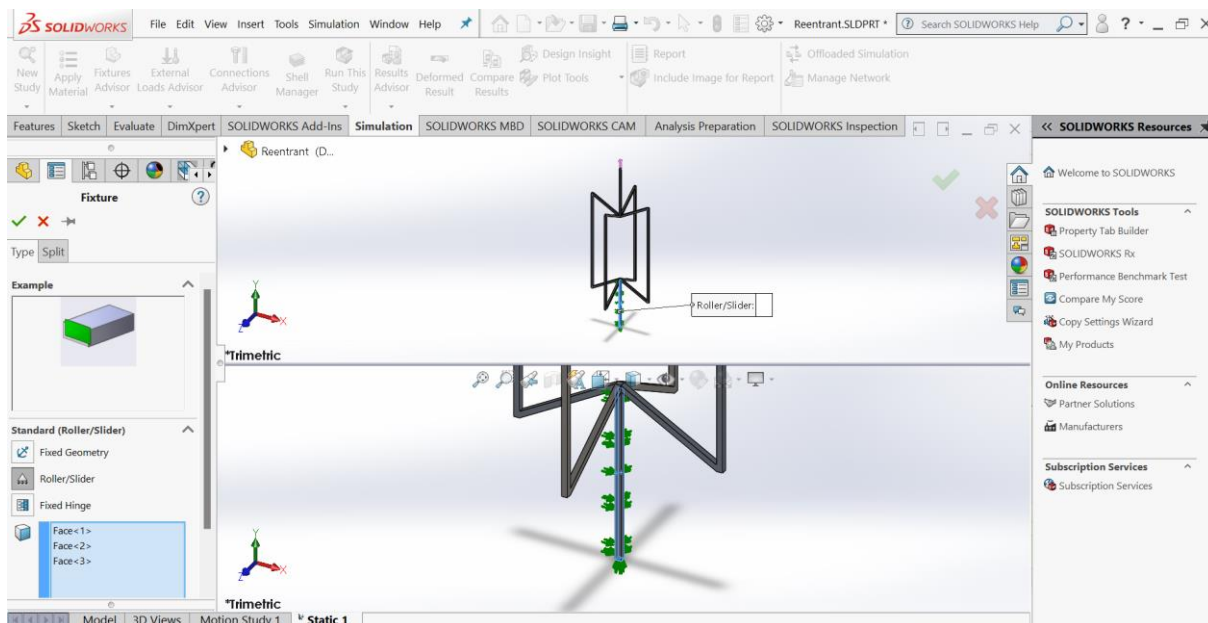


Figura 16 – Restrições impostas à microestrutura.

Seguindo adiante, o próximo passo é definir a força a ser aplicada na face superior da haste do corpo estudado, por meio do recurso “*External Loads*” do software. A Figura 17 apresenta a força aplicada.

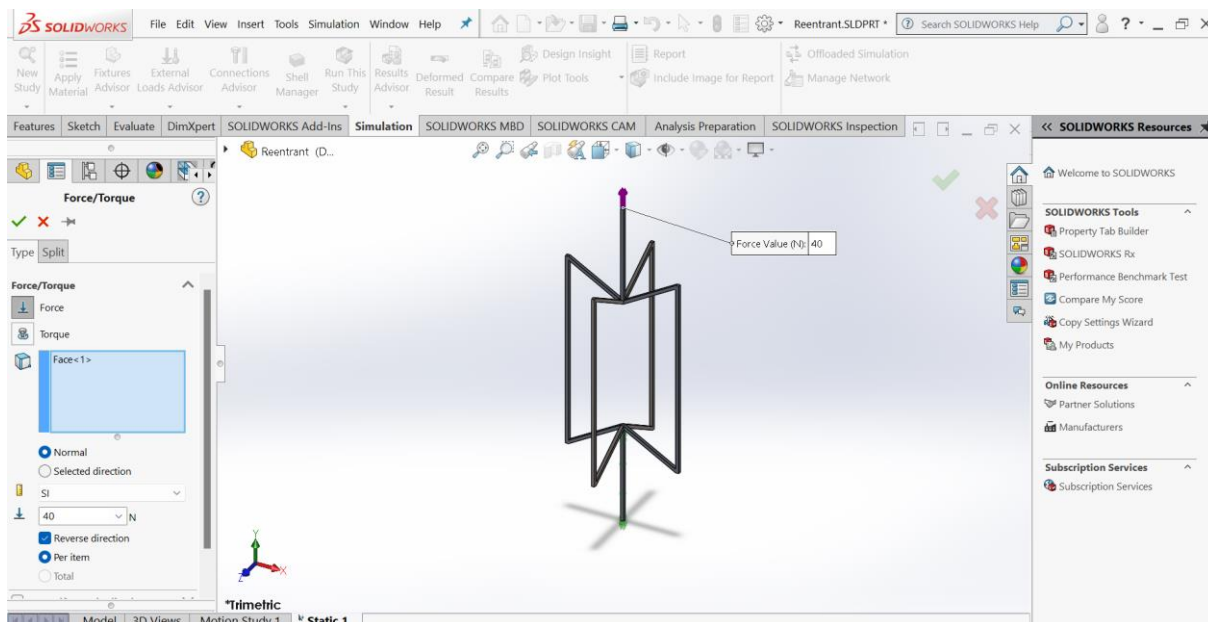


Figura 17 – Força imposta à microestrutura.

O último passo antes de seguir para a simulação é a construção da malha, que é um critério essencial na simulação por elementos finitos, visto que os fatores de restrição e força definidos acima são aplicados aos elementos da malha para produzir os resultados. A Figura 18 abaixo mostra a malha construída com seus detalhes.

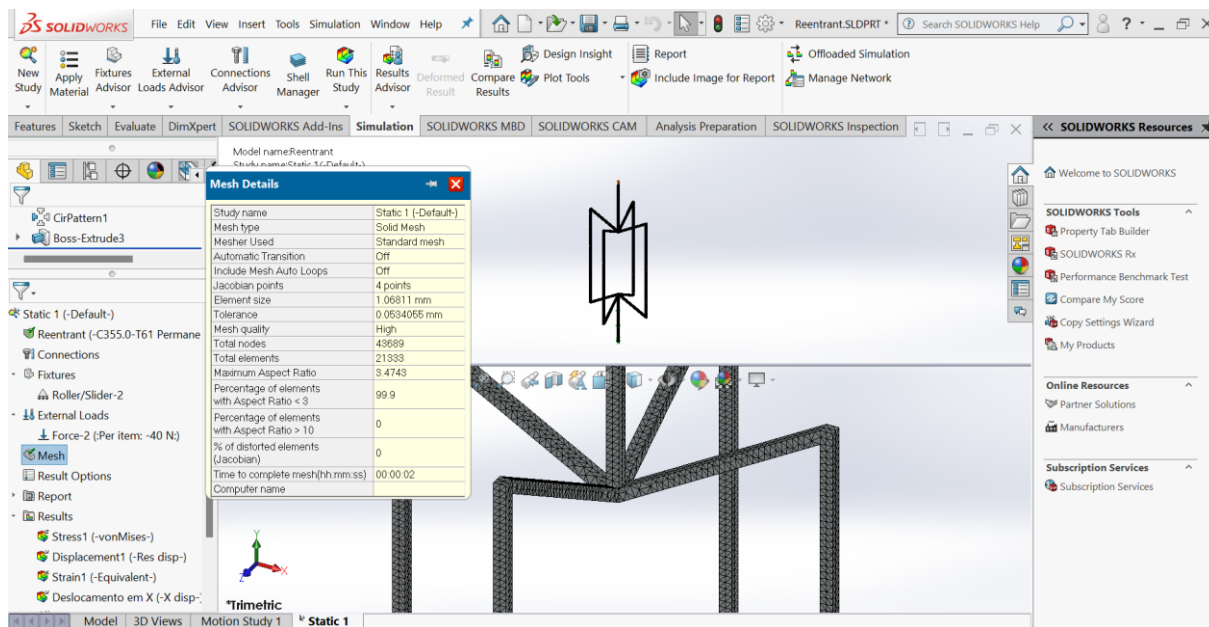


Figura 18 – Malha construída para a microestrutura.

## 5.2 Pequenos deslocamentos vs grandes deslocamentos

A solução de pequenos deslocamentos segue a teoria linear, pressupondo que a aplicação da carga total acontece de uma só vez, sem haver alteração na rigidez do corpo estudado, além de também ser assumido que as forças normais às áreas de contato não mudam de direção durante a carga [8].

De maneira oposta, a solução de grandes deslocamentos segue a teoria elasto-plástica, e é necessária em casos em que a distorção adquirida altera significativamente a rigidez do material. Assim, nesse tipo de solução a carga é aplicada gradual e uniformemente em etapas até seu valor total, e a rigidez é atualizada em cada passo [8].

Neste trabalho, durante as simulações foi utilizada a solução linear, por pequenos deslocamentos, visto que as forças aplicadas foram baixas os suficientes para manter as propriedades lineares do material, não havendo um nível de deformação que justificasse o uso de grandes deslocamentos. O modelo segue a lei de Hooke, que considera que as tensões e deformações são totalmente reversíveis quando se encontram dentro do limite elástico do material [11].

## 6 Validação dos resultados

Para a validação dos resultados, foi desenvolvido um modelo 2D da microestrutura modelada acima. O modelo bidimensional é representado pela Figura 19 abaixo.

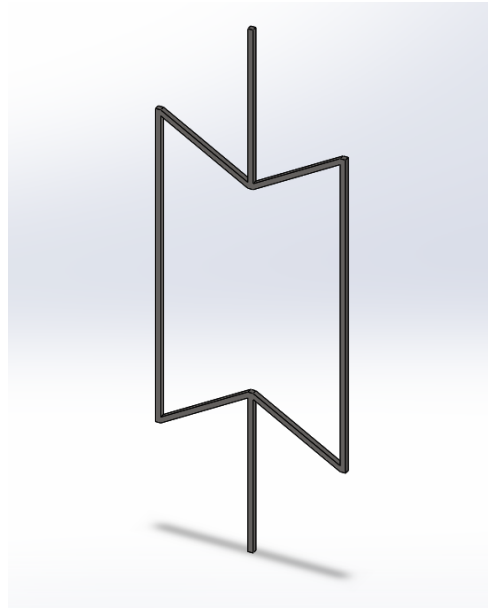


Figura 19 – Modelo bidimensional modelado.

Para obtenção do coeficiente de Poisson da geometria, foram medidos os comprimentos iniciais não deformados nos eixos  $x$  e  $y$ , e após a simulação, foram medidos novamente os comprimentos, agora deformados, para obter os deslocamentos na microestrutura. Tendo os deslocamentos e os comprimentos iniciais, pode-se calcular as deformações nas duas direções, e por fim, calcular o coeficiente de Poisson.

Dessa forma, para validar os resultados obtidos de maneira a comparar diferentes condições de contorno, foram feitas mais duas modelagens partindo do modelo padrão bidimensional exibido na Figura 19. As Figuras 20 e 21 a seguir apresentam esses modelos utilizando a configuração com ângulo  $\theta$  igual a  $30^\circ$ .

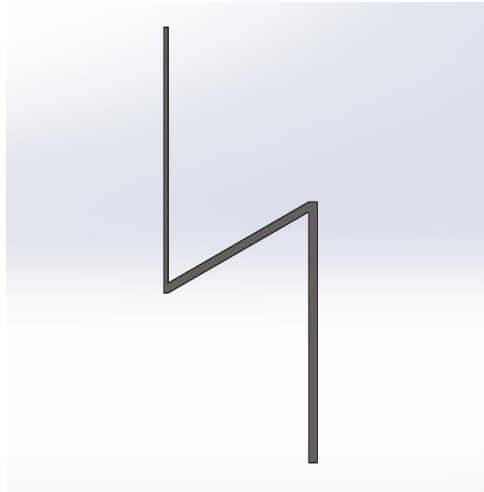


Figura 20 –  $\frac{1}{4}$  do modelo reentrante bidimensional.

Na Figura 20 é exibido o modelo com  $\frac{1}{4}$  da geometria apresentada na Figura 19, com simetria nos planos médios de  $x$  e  $y$ .

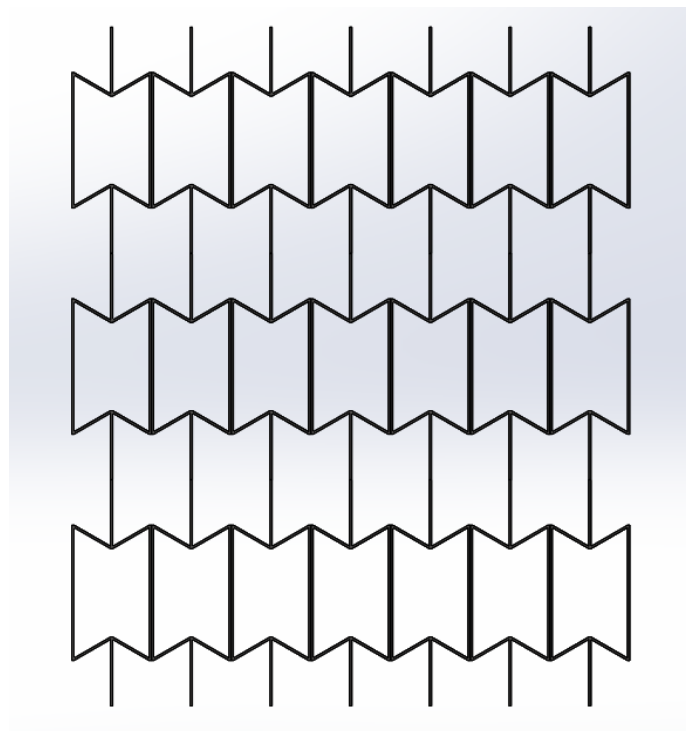


Figura 21 – Arranjo composto pelo modelo reentrante bidimensional.

Primeiramente, foi simulado o modelo 2D representado pela Figura 19 e plotados os diagramas de deslocamento nos eixos  $x$  e  $y$ . As Figuras 22 e 23 a seguir apresentam os deslocamentos simulados para o ângulo  $\theta$  igual a  $30^\circ$ .

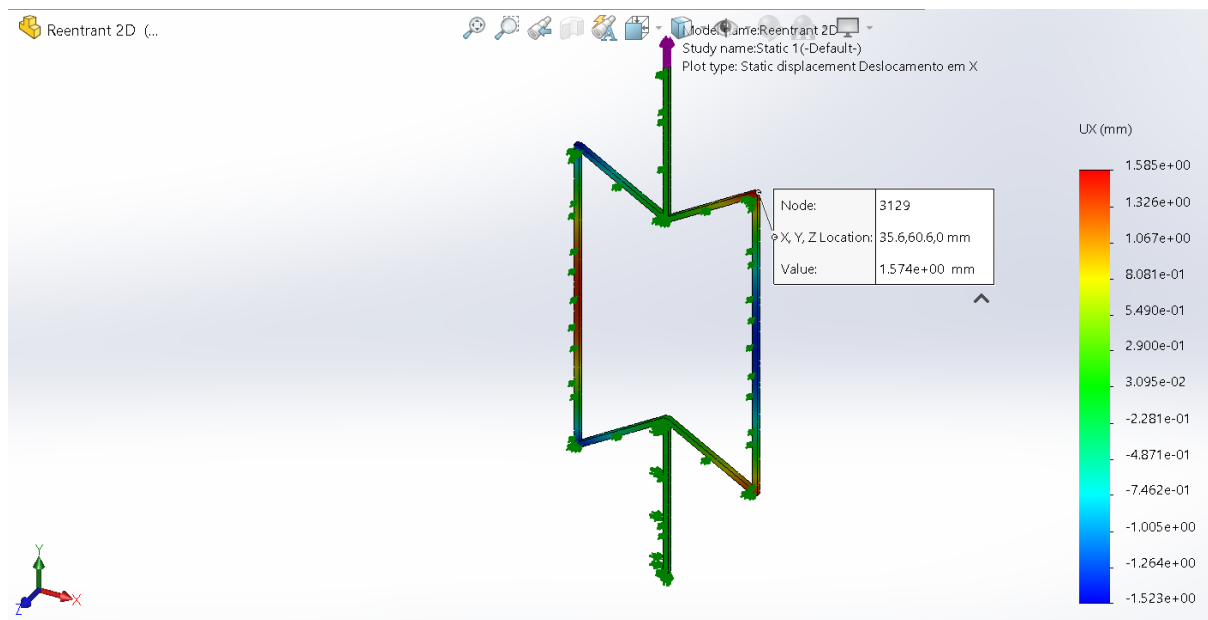


Figura 22 – Deslocamento do eixo X para o modelo bidimensional.

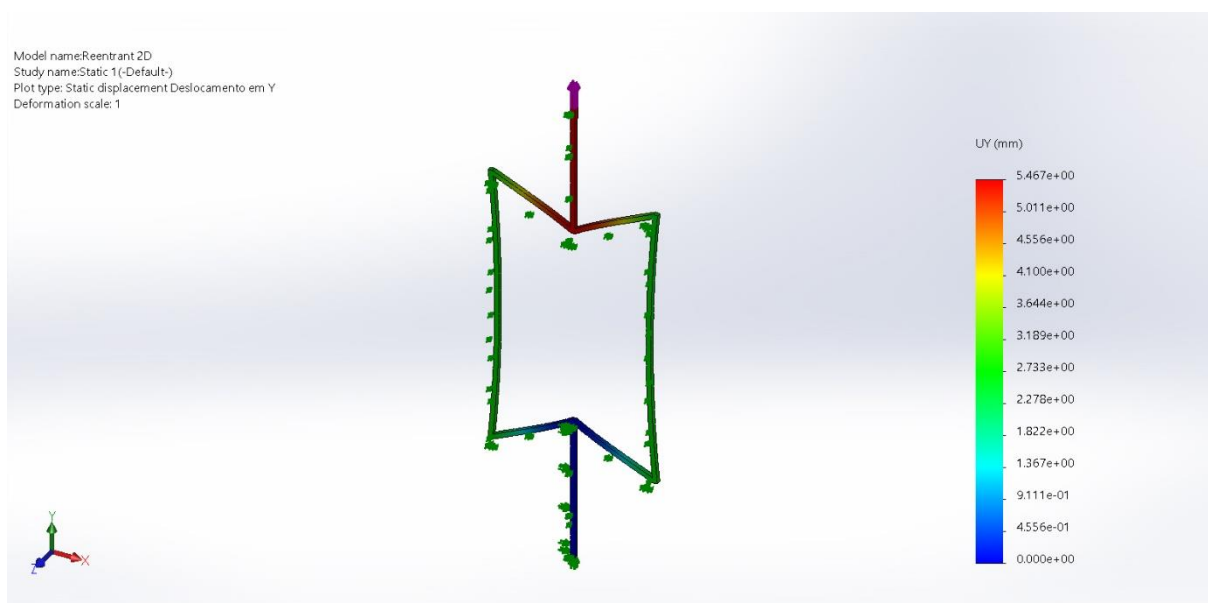


Figura 23 – Deslocamento do eixo y para o modelo bidimensional.

Para o deslocamento em  $x$ , denotado por “ $UX$ ”, foi selecionada a aresta em que o comprimento é máximo, como mostra a Figura 22. Para o deslocamento em  $y$ , denotado por “ $UY$ ”, é utilizado o valor de deslocamento máximo exibido na Figura 23, devido ao fato de o deslocamento máximo acontecer justamente na extremidade em que é aplicada a carga.

Para o cálculo das deformações nos eixos  $x$  e  $y$  foi utilizada a seguinte expressão, definida pela divisão entre a diferença de comprimento e o comprimento inicial.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (6)$$

Segue a Tabela 4 com os resultados dos coeficientes de Poisson em função dos ângulos, calculados a partir das deformações, conforme a Equação 1.

| $\theta$ [°] | $\varepsilon_x$ | $\varepsilon_y$ | $\nu$ |
|--------------|-----------------|-----------------|-------|
| 10           | 0,0152          | 0,0304          | -0,50 |
| 15           | 0,0226          | 0,0303          | -0,75 |
| 20           | 0,0301          | 0,0298          | -1,01 |
| 25           | 0,0374          | 0,0286          | -1,31 |
| 30           | 0,0442          | 0,0270          | -1,63 |

Tabela 4 – Resultado para os coeficientes de Poisson em função do ângulo  $\theta$ , para a célula unitária bidimensional.

Utilizando a mesma metodologia indicada acima, foram simulados os modelos bidimensionais com 1/4 da geometria da célula unitária e em arranjo, e os coeficientes de Poisson obtidos foram comparados e analisados para um melhor entendimento e maior precisão nos dados obtidos.

As Figuras 24 e 25 a seguir demonstram os modelos apresentados nas Figuras 20 e 21 após aplicação da carga, exibindo a estrutura deformada. Os contornos em azul mostrados nestas figuras representam suas estruturas originais sem deformações.



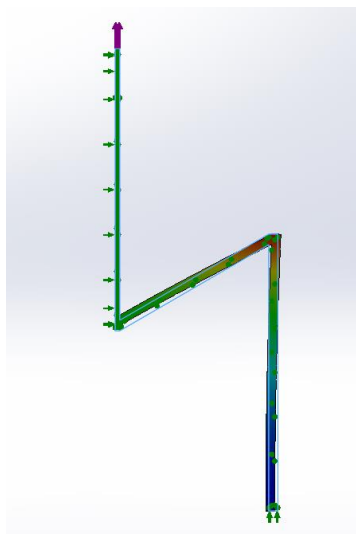


Figura 24 –  $\frac{1}{4}$  do modelo reentrante bidimensional deformado.

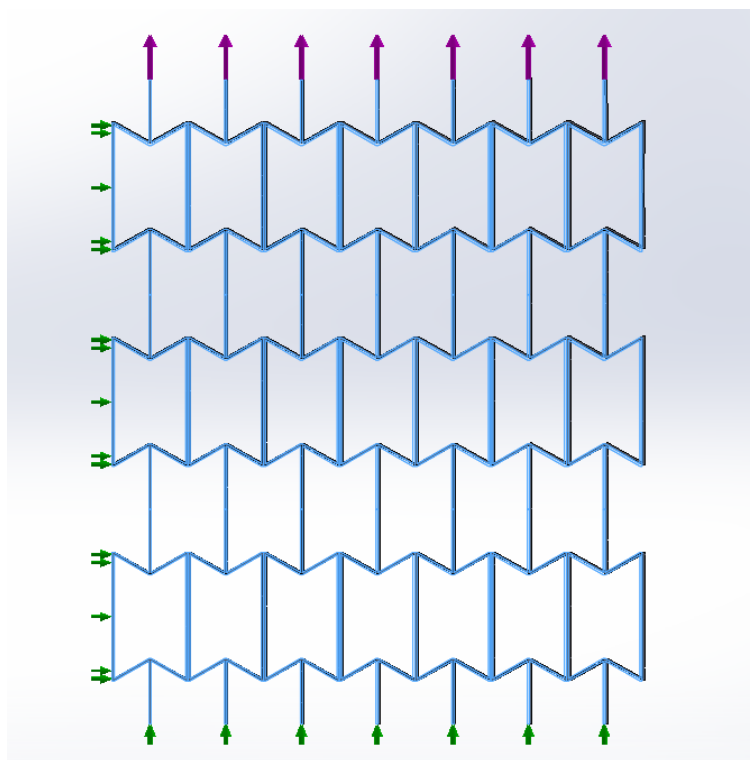


Figura 25 – Arranjo composto pela microestrutura reentrante bidimensional deformado.

Agora, para que o resultado possa ser validado, é preciso comparar os dados obtidos pelas simulações acima com o que foi obtido no texto técnico [11]. Além de obter os resultados dos coeficientes de Poisson por simulação numérica, o autor de [11] validou seu estudo de maneira analítica utilizando a Equação 3 descrita neste estudo para o cálculo teórico que analisa o coeficiente de Poisson a partir de parâmetros, como sua geometria e seu material utilizados na modelagem da célula unitária. Segue a Tabela 5 com os resultados obtidos numericamente e analiticamente pelo artigo de referência, e os resultados obtidos no presente estudo, em comparação.

| $\theta$ | $\nu$ teórico [11] | $\nu$ [11] | $\nu$ célula unitária | $\nu$ 1/4 | $\nu$ arranjo |
|----------|--------------------|------------|-----------------------|-----------|---------------|
| 10°      | -0,51              | -0,59      | -0,50                 | -0,57     | -0,48         |
| 15°      | -0,76              | -0,78      | -0,75                 | -0,82     | -0,73         |
| 20°      | -1,03              | -1,07      | -1,01                 | -1,07     | -0,99         |
| 25°      | -1,33              | -1,40      | -1,31                 | -1,36     | -1,26         |
| 30°      | -1,67              | -1,78      | -1,63                 | -1,64     | -1,59         |

Tabela 5 – Resultado para o coeficiente de Poisson validado.

Assim, considerando os valores obtidos na Tabela 5, é possível analisar que o método utilizado neste trabalho que mais se aproxima do método analítico é o que utiliza a simulação da célula unitária bidimensional inteira. Ainda, também é possível analisar que o método utilizando 1/4 da geometria apresenta uma maior proximidade com os resultados simulados pelo autor de referência [11].

No geral, os resultados obtidos se aproximam aos resultados de referência, com pequena distorção entre metodologias. Fatores como o tipo de elemento finito utilizado também influenciam na diferença entre resultados, visto que o autor [11] utilizou a geometria de elementos de viga, que simplifica a geometria tridimensional e gera uma geometria idealizada bidimensional, com a ausência de profundidade no eixo  $z$ . A fixação também pode ter contribuído para esta diferença, pois ao utilizar o elemento finito descrito acima, as restrições de movimento passam a ser pontuais, enquanto a simulação feita neste estudo tem restrições em três faces, uma em cada eixo.

A Figura 26 apresenta as três geometrias utilizadas para a validação dos resultados. Da esquerda para a direita, segue a célula unitária, 1/4 da célula unitária e o arranjo.

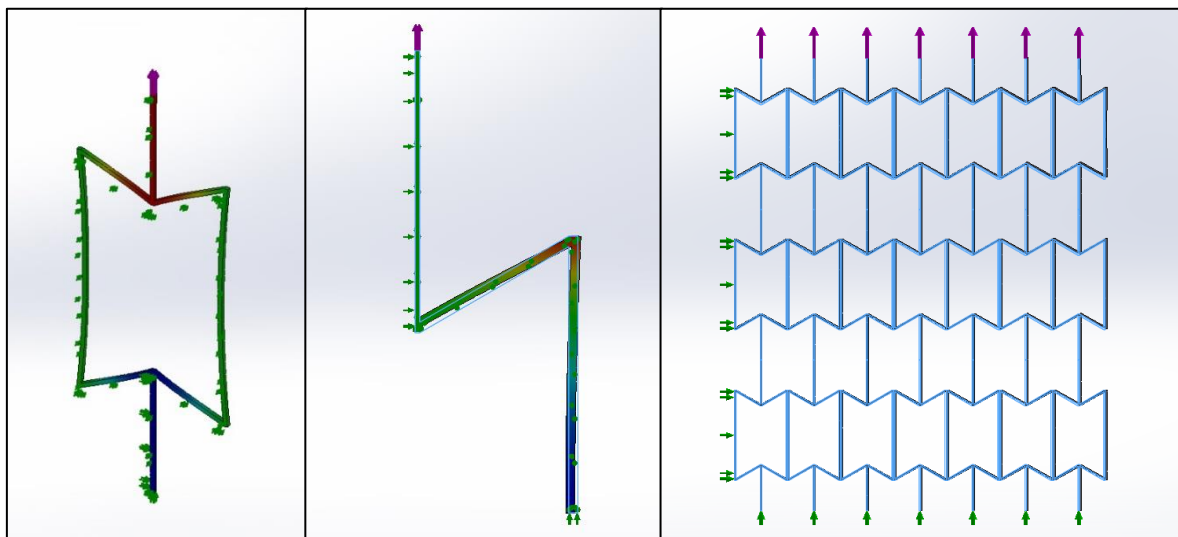


Figura 26 – Exibição das três condições de contorno estudadas.

## 7 Resultados

Tendo os resultados verificados, pode-se agora retornar à análise do modelo hexagonal reentrante tridimensional e seu arranjo. Assim como foi feito no item anterior, serão obtidos os valores de deslocamento nos eixos  $x$ ,  $y$  e também no eixo  $z$ .

Para a célula unitária, será simulada a mesma geometria apresentada na Figura 12, alterando seu ângulo  $\theta$  para que possa ser obtido os coeficientes de Poisson de todas as cinco geometrias expostas na Tabela 1.

Foram plotados os diagramas de deslocamento nas três direções mencionadas. As Figuras 27, 28 e 29 a seguir apresentam os resultados de deslocamento para a simulação com geometria de ângulo  $\theta$  igual a  $30^\circ$ .

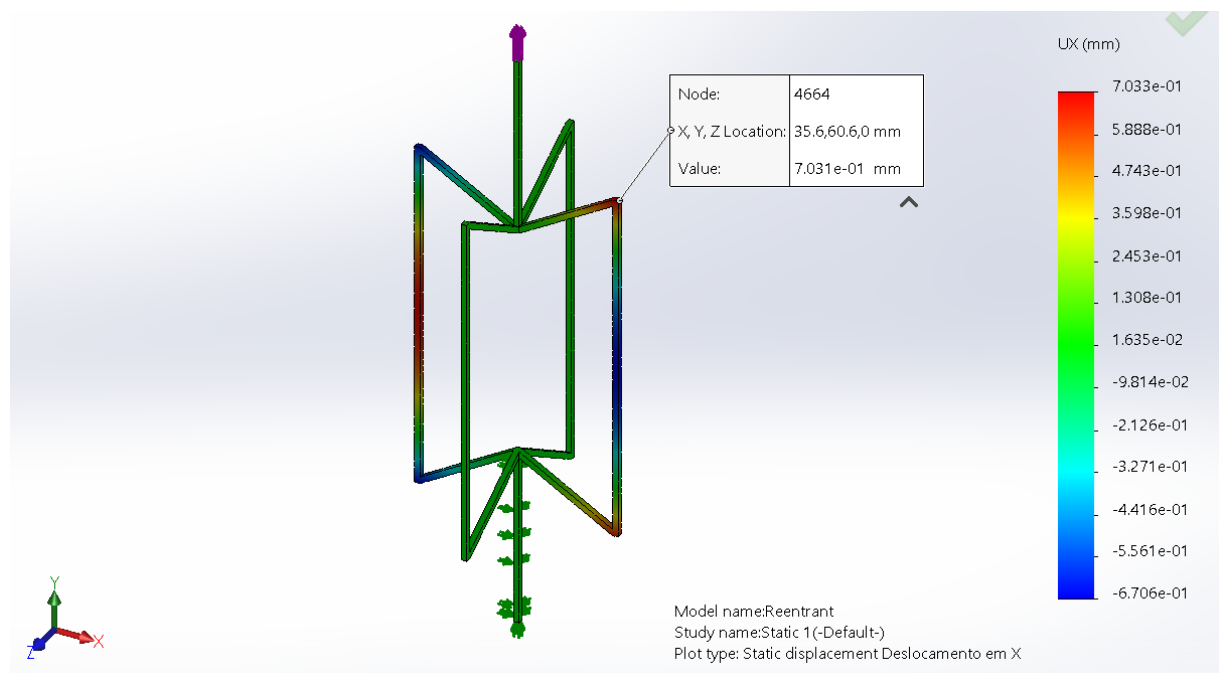


Figura 27 – Deslocamento no eixo X do modelo tridimensional.

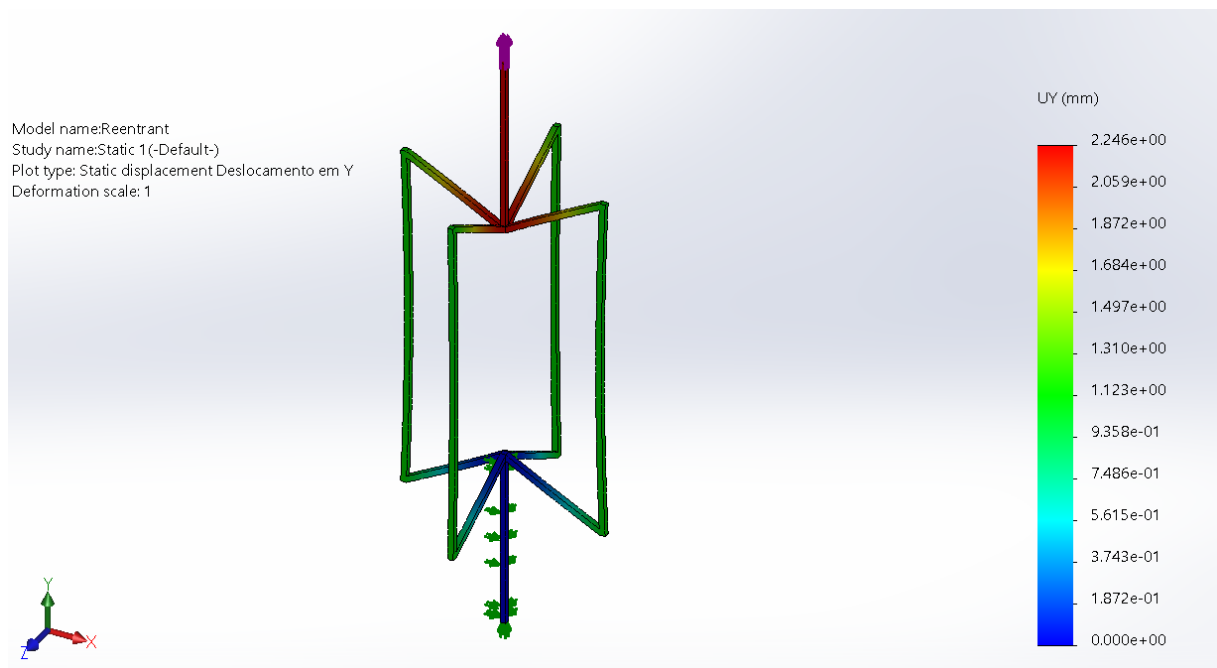


Figura 28 – Deslocamento no eixo Y do modelo tridimensional.

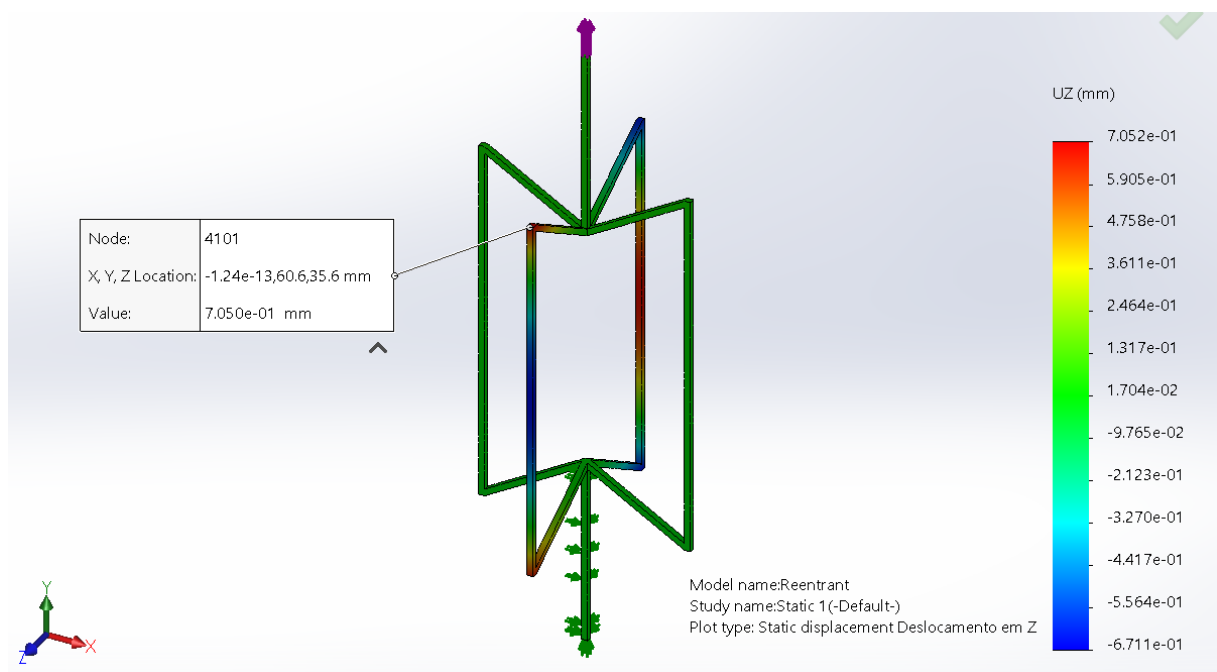


Figura 29 – Deslocamento no eixo Z do modelo tridimensional.

Devido à simetria, os deslocamentos das extremidades dos eixos  $x$  e  $z$  são equivalentes, com valores de 0,7 mm. Como as deformações máximas estão ocorrendo no centro do lado  $h$ , é necessário analisar os nós superiores de suas arestas, como mostram as Figuras 27 e 29.

Como o deslocamento máximo do eixo  $y$  ocorre justamente em sua extremidade, pode-se usar o valor 2,246 mm exibido no diagrama da Figura 28.

Tendo os deslocamentos obtidos em simulação e medindo os comprimentos iniciais da geometria tem-se todos os fatores necessários para os cálculos das deformações. Como a modelagem da microestrutura foi feita com a origem no centro de sua geometria, os resultados de deslocamento nos eixos  $x$  e  $z$ , exibidos acima, apresentam valores máximos para  $\frac{1}{2}$  do comprimento de cada eixo. Para o eixo  $y$ , sua altura segue o comprimento inteiro, visto que na extremidade oposta a aplicação de carga seu deslocamento é zero.

De acordo com a Equação 1, o coeficiente de Poisson é calculado pelas deformações transversais e axiais. Para o caso deste estudo, a deformação axial é denotada pela deformação na direção  $y$ , e a transversal as deformações em  $x$  e  $z$ , simétricas entre si. A Tabela 6 a seguir apresenta as deformações calculadas para cada variação do ângulo  $\theta$  nas direções  $x$  e  $y$ .

| $\theta$ [°] | Eixo X     |                 |              | Eixo Y     |                 |              |
|--------------|------------|-----------------|--------------|------------|-----------------|--------------|
|              | $l_0$ [mm] | $\Delta l$ [mm] | $\epsilon_x$ | $l_0$ [mm] | $\Delta l$ [mm] | $\epsilon_y$ |
| 10           | 40,39      | 0,35            | 0,0087       | 228,14     | 2,97            | 0,0130       |
| 15           | 39,64      | 0,46            | 0,0116       | 221,37     | 2,85            | 0,0129       |
| 20           | 38,59      | 0,56            | 0,0145       | 214,77     | 2,68            | 0,0125       |
| 25           | 37,25      | 0,64            | 0,0172       | 208,40     | 2,48            | 0,0119       |
| 30           | 35,64      | 0,70            | 0,0197       | 202,31     | 2,25            | 0,0111       |

Tabela 6 – Deformações axiais e transversais em função dos ângulos, para o modelo tridimensional.

A partir das deformações obtidas nas direções  $x$  e  $y$ , é calculado o coeficiente de Poisson da microestrutura em suas diferentes configurações de ângulo. A Tabela 7 abaixo apresenta os valores dos coeficientes de Poisson calculados.

| $\theta$ [°] | $\epsilon_x$ | $\epsilon_y$ | $\nu$ |
|--------------|--------------|--------------|-------|
| 10           | 0,0087       | 0,0130       | -0,67 |
| 15           | 0,0116       | 0,0129       | -0,90 |
| 20           | 0,0145       | 0,0125       | -1,16 |
| 25           | 0,0172       | 0,0119       | -1,45 |
| 30           | 0,0197       | 0,0111       | -1,78 |

Tabela 7 – Coeficiente de Poisson em função do ângulo, para o modelo tridimensional.

Para a obtenção do coeficiente de Poisson da célula unitária em 1/4 da sua geometria, apresentado na Figura 13, foi seguido o mesmo método descrito no passo a passo anterior, alterando apenas as condições de contorno de fixação. A Figura 30 exibe a célula unitária em 1/4 deformada após o fim da simulação.

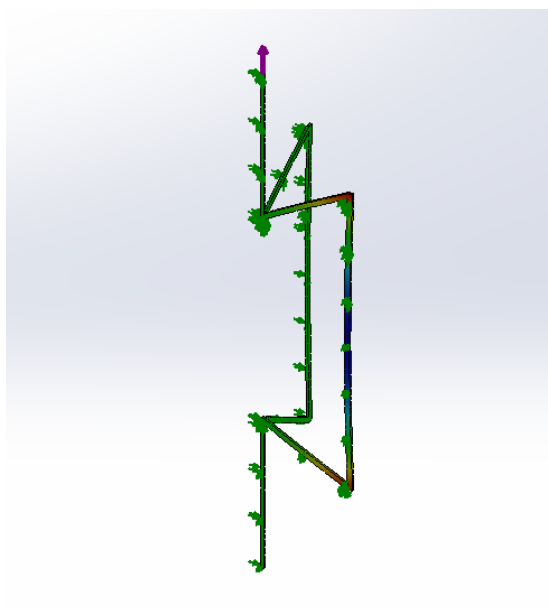


Figura 30 – Modelo em 1/4 da célula unitária deformado.

As Figuras 31, 32 e 33 a seguir apresentam os diagramas de deslocamento nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  para a simulação com a geometria de ângulo  $\theta$  igual a  $30^\circ$ .

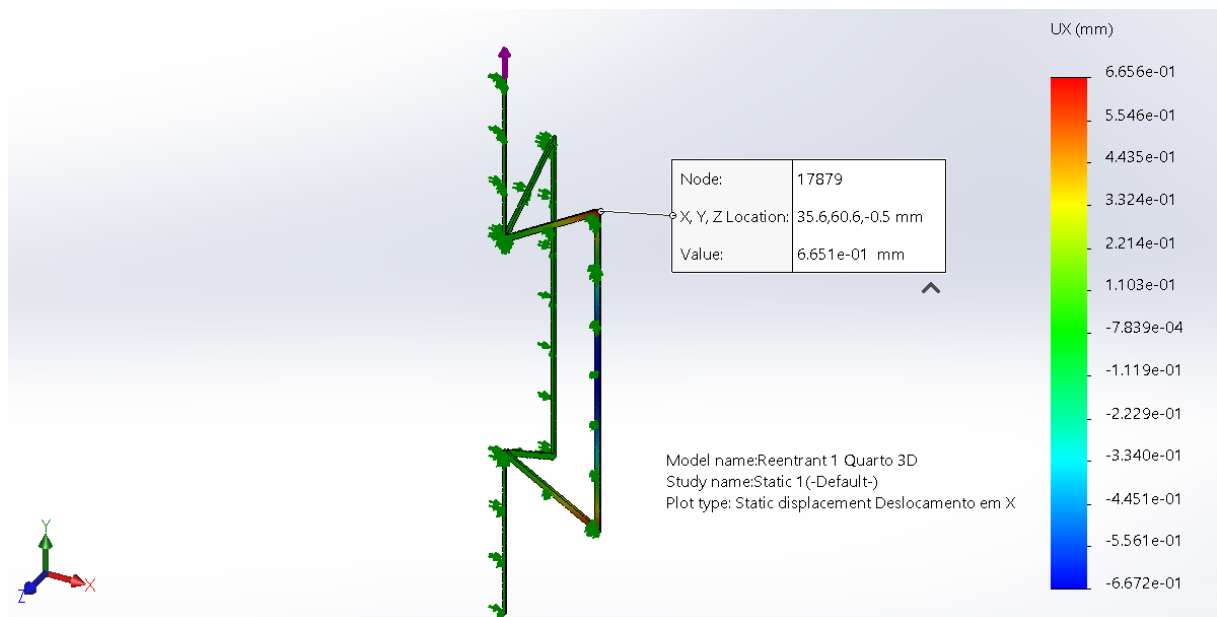


Figura 31 – Deslocamento no eixo x para o modelo em 1/4 da célula unitária 3D.

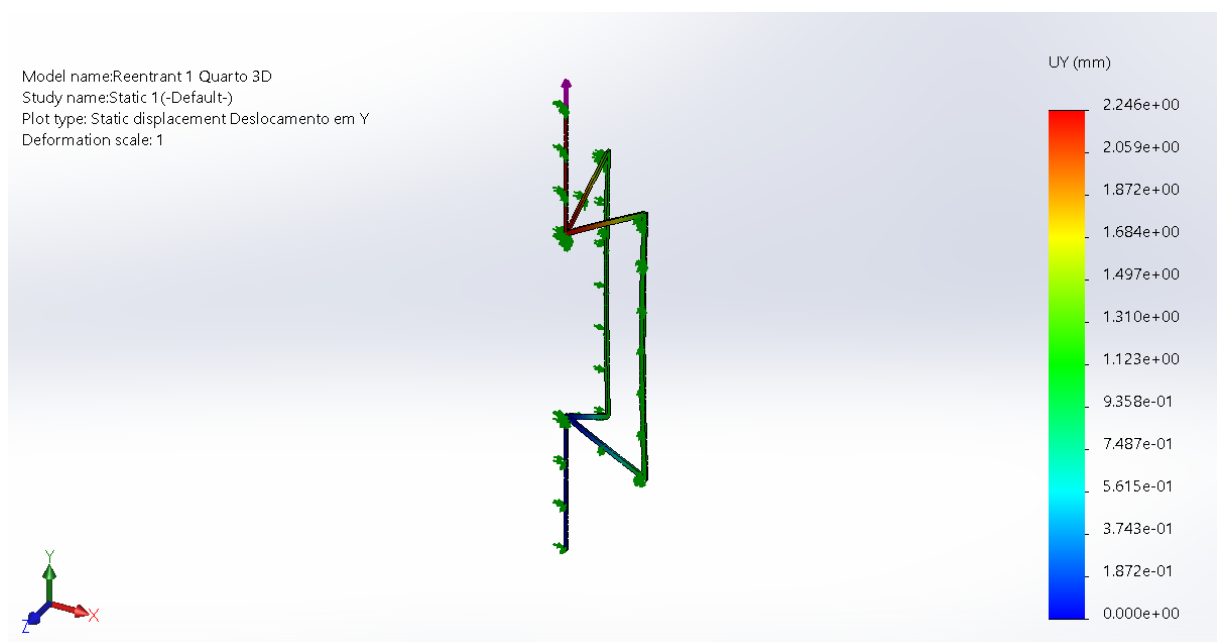


Figura 32 – Deslocamento no eixo y para o modelo em 1/4 da célula unitária 3D.



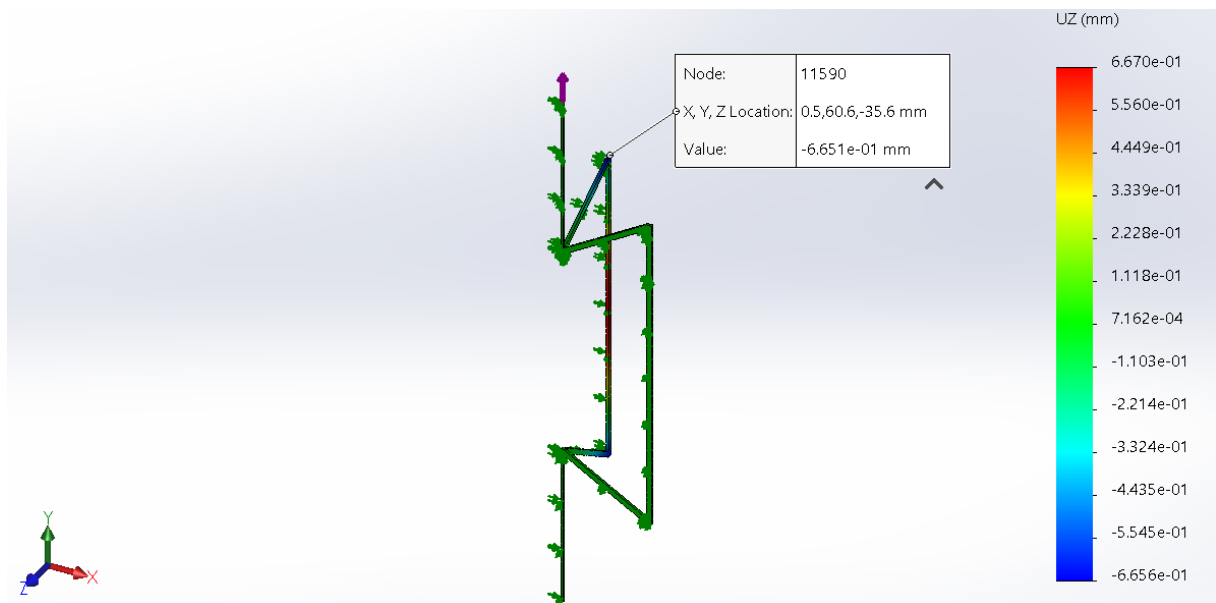


Figura 33 – Deslocamento no eixo z para o modelo em 1/4 da célula unitária 3D.

Equivalente ao que foi descrito para a célula unitária inteira, os valores de deslocamento nos eixos  $x$  e  $z$  são iguais devido a simetria, no valor de 0,6651 mm, sendo que o valor negativo apresentado na Figura 33 se deve ao fator de posição dos eixos de origem de modelagem.

O valor para o deslocamento no eixo  $y$  é de 2,246 mm, e tem seu valor máximo justamente na extremidade de aplicação da carga.

Tendo os valores de deslocamento para cada uma das cinco configurações de ângulo, é possível calcular os valores das deformações na célula unitária em 1/4 da geometria, e em seguida seus coeficientes de Poisson. A Tabela 8 a seguir apresenta as deformações calculadas para cada variação do ângulo  $\theta$  nas direções  $x$  e  $y$ .

| $\theta$ [°] | Eixo X  |                 |              | Eixo Y  |                 |              |
|--------------|---------|-----------------|--------------|---------|-----------------|--------------|
|              | lo [mm] | $\Delta l$ [mm] | $\epsilon_x$ | lo [mm] | $\Delta l$ [mm] | $\epsilon_y$ |
| 10           | 40,39   | 0,30            | 0,0075       | 228,14  | 2,98            | 0,0131       |
| 15           | 39,64   | 0,42            | 0,0105       | 221,37  | 2,85            | 0,0129       |
| 20           | 38,59   | 0,52            | 0,0134       | 214,77  | 2,69            | 0,0125       |
| 25           | 37,25   | 0,60            | 0,0161       | 208,40  | 2,48            | 0,0119       |
| 30           | 35,64   | 0,67            | 0,0187       | 202,31  | 2,25            | 0,0111       |

Tabela 8 – Deformações axiais e transversais em função dos ângulos, para a célula unitária em 1/4.

A Tabela 9 abaixo apresenta os valores dos coeficientes de Poisson calculados para cada uma das cinco geometrias da célula unitária em 1/4 de sua geometria.

| $\theta$ [°] | $\epsilon_x$ | $\epsilon_y$ | $\nu$ |
|--------------|--------------|--------------|-------|
| 10           | 0,0075       | 0,0131       | -0,57 |
| 15           | 0,0105       | 0,0129       | -0,81 |
| 20           | 0,0134       | 0,0125       | -1,07 |
| 25           | 0,0161       | 0,0119       | -1,35 |
| 30           | 0,0187       | 0,0111       | -1,68 |

Tabela 9 – Coeficiente de Poisson em função do ângulo, para a célula unitária em 1/4.

Para a obtenção do coeficiente de Poisson do arranjo, apresentado na Figura 14, foi seguido o mesmo método descrito no passo a passo anterior, alterando apenas as condições de contorno de fixação para o arranjo. A Figura 34 exibe o arranjo deformado após o fim da simulação.

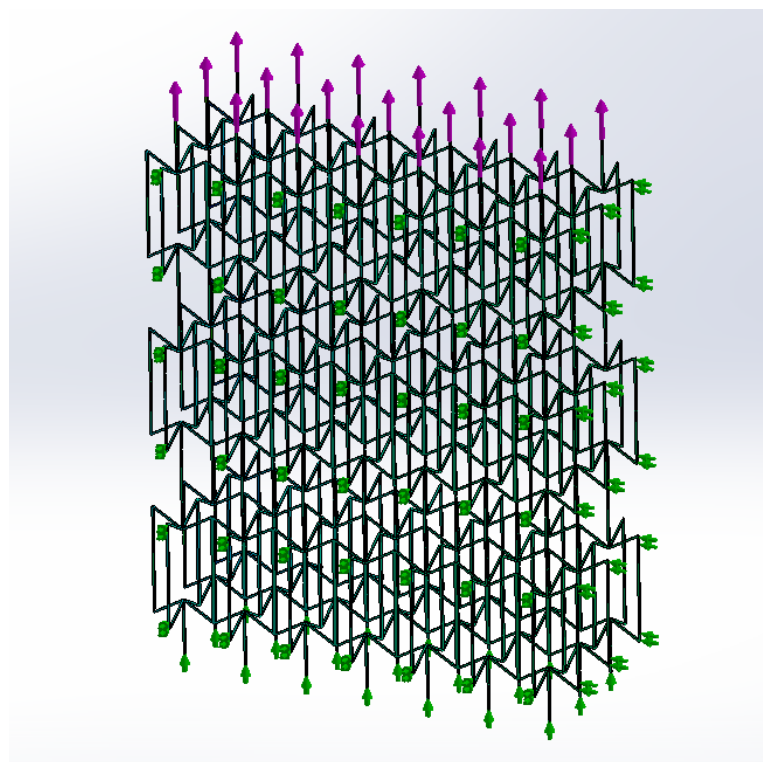


Figura 34 – Arranjo deformado após simulação.

As Figuras 35, 36 e 37 a seguir apresentam os diagramas de deslocamento nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  para a simulação com a geometria de ângulo  $\theta$  igual a  $30^\circ$ .

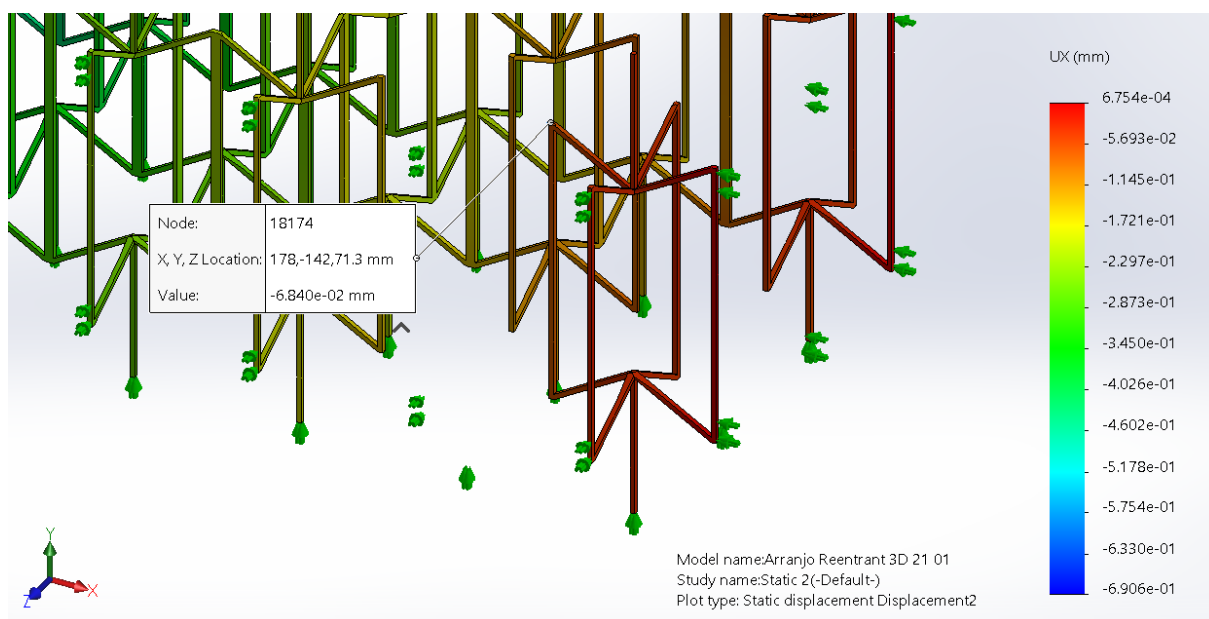


Figura 35 – Deslocamento no eixo  $x$  para o arranjo tridimensional.

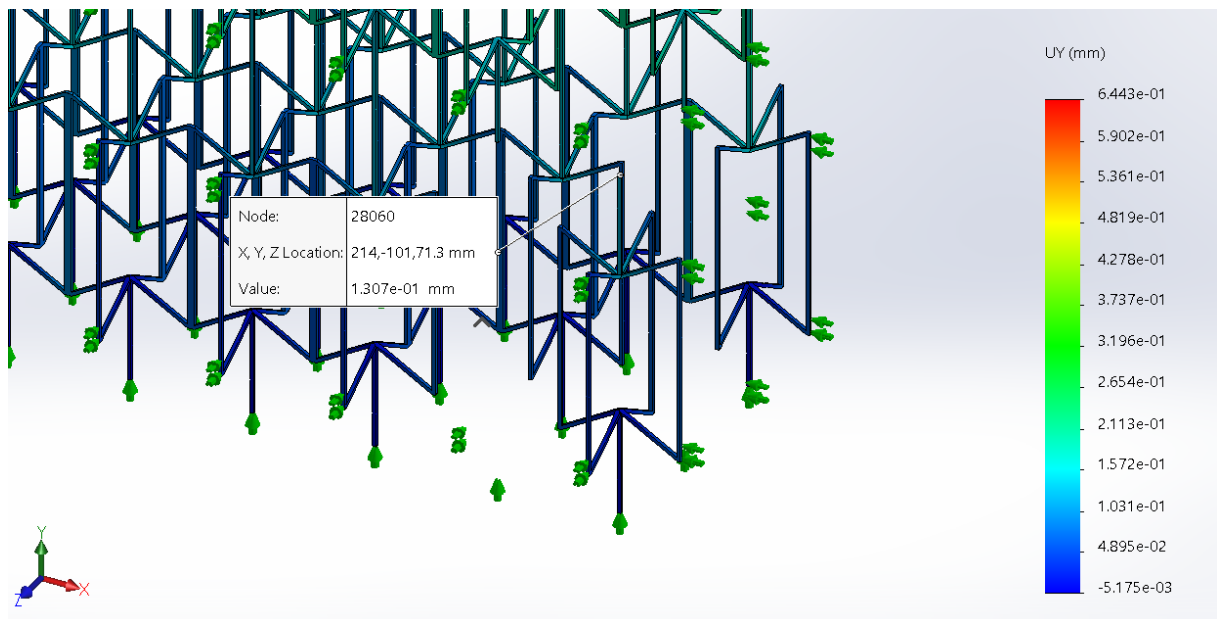


Figura 36 – Deslocamento no eixo y para o arranjo tridimensional.

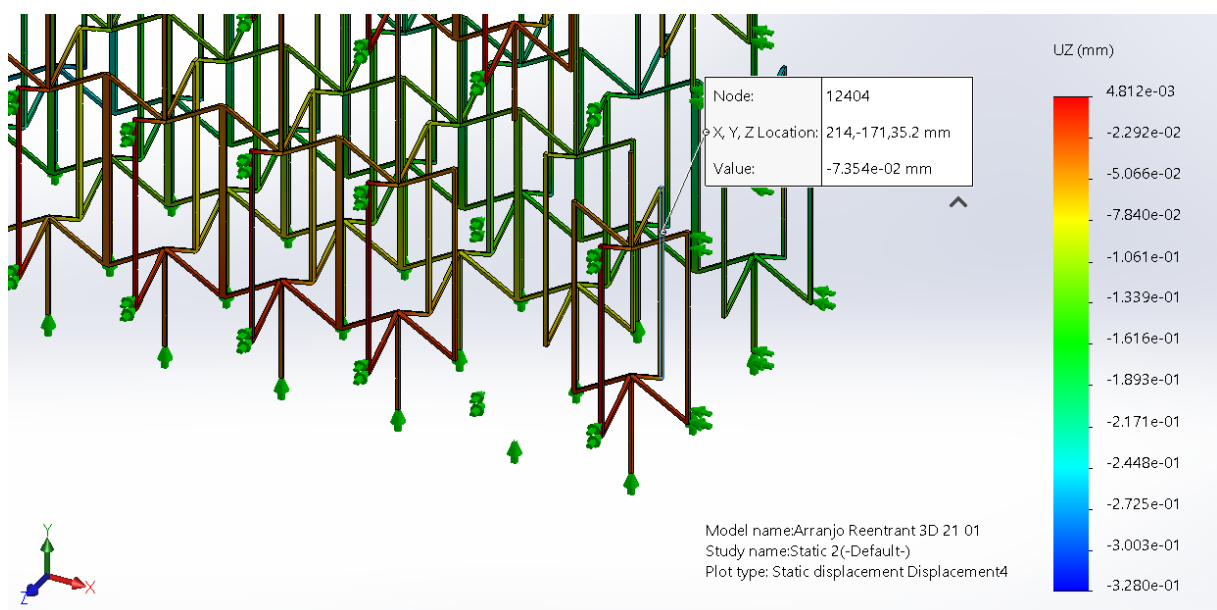


Figura 37 – Deslocamento no eixo z para o arranjo tridimensional.

Simetricamente, os deslocamentos nos eixos  $x$  e  $z$  apresentam valores de aproximadamente 0,07 mm, em módulo, visto que os valores apresentados nas Figuras 35 e 37 acima estão negativos devido às condições de sentido de eixo. O deslocamento no eixo  $y$  foi de 0,13 mm.

Diferentemente da simulação anterior envolvendo apenas a célula unitária, é preciso agora avaliar os deslocamentos em função dos seus comprimentos inteiros, devido a condição de contorno impor deslocamento zero nas extremidades opostas. Será utilizado os valores de deslocamento nos eixos  $x$  e  $y$  na obtenção das deformações axiais e longitudinais.

A Tabela 10 a seguir apresenta as deformações calculadas para cada variação do ângulo  $\theta$  nas direções  $x$  e  $y$ .

| $\theta$ [°] | Eixo X  |                 |              | Eixo Y  |                 |              |
|--------------|---------|-----------------|--------------|---------|-----------------|--------------|
|              | lo [mm] | $\Delta l$ [mm] | $\epsilon_x$ | lo [mm] | $\Delta l$ [mm] | $\epsilon_y$ |
| 10           | 80,78   | 0,060           | 0,0007       | 228,14  | 0,359           | 0,0016       |
| 15           | 79,27   | 0,084           | 0,0011       | 221,37  | 0,327           | 0,0015       |
| 20           | 77,18   | 0,104           | 0,0013       | 214,77  | 0,299           | 0,0014       |
| 25           | 74,50   | 0,084           | 0,0011       | 208,40  | 0,186           | 0,0009       |
| 30           | 71,28   | 0,070           | 0,0010       | 202,31  | 0,131           | 0,0006       |

Tabela 10 – Deformações axiais e transversais em função dos ângulos, para o arranjo tridimensional.

Assim como no modelo de célula unitária, a Tabela 11 abaixo apresenta os valores dos coeficientes de Poisson calculados em função de seus ângulos para o arranjo tridimensional.

| $\theta$ [°] | $\epsilon_x$ | $\epsilon_y$ | $\nu$ |
|--------------|--------------|--------------|-------|
| 10           | 0,0007       | 0,0016       | -0,47 |
| 15           | 0,0011       | 0,0015       | -0,71 |
| 20           | 0,0013       | 0,0014       | -0,97 |
| 25           | 0,0011       | 0,0009       | -1,27 |
| 30           | 0,0010       | 0,0006       | -1,52 |

Tabela 11 – Coeficiente de Poisson em função do ângulo, para o arranjo tridimensional.

Visto os três métodos com diferentes condições de contorno para a microestrutura hexagonal reentrante 3D, a Tabela 12 a seguir apresenta os resultados dos coeficientes de Poisson para o modelo de célula unitária inteira, célula unitária em 1/4 da geometria e arranjo.

| $\theta$ | $\nu$ célula unitária 3D | $\nu$ 1/4 3D | $\nu$ arranjo 3D |
|----------|--------------------------|--------------|------------------|
| 10°      | -0,67                    | -0,57        | -0,47            |
| 15°      | -0,90                    | -0,81        | -0,71            |
| 20°      | -1,16                    | -1,07        | -0,97            |
| 25°      | -1,45                    | -1,35        | -1,27            |
| 30°      | -1,78                    | -1,68        | -1,52            |

Tabela 12 – Resultados de coeficiente de Poisson para cada uma das três condições de contorno em função de seu ângulo.

Analisando a Tabela 12 apresentada acima, por mais que tenham sido simulados três diferentes condições de contorno para a microestrutura escolhida, os valores obtidos apresentam um padrão semelhante entre si. Pode-se observar uma maior proximidade entre os valores da célula unitária inteira e da célula unitária em 1/4 de simetria, e isso se deve ao fato de que a imposição de condições de contorno se torna mais coerente ao usar elementos com simetria, como é o caso utilizando 1/4 da célula unitária.

## 8 Conclusão

Neste trabalho foi proposto determinar o caráter auxético da microestrutura hexagonal reentrante a partir da modelagem e simulação numérica de sua estrutura, assim como de seu arranjo, ao obter um coeficiente de Poisson negativo. O caráter auxético foi determinado e verificado por meio das simulações no software SolidWorks.

Pelos resultados obtidos nas Tabelas 5 e 12 deste estudo, pode-se perceber uma relação entre o ângulo  $\theta$  e o coeficiente de Poisson da microestrutura. Ao variar o ângulo crescendo-o, o coeficiente de Poisson diminui.

Comparando os valores de mesmo ângulo e mesma geometria base dos modelos bidimensional e tridimensional, nota-se uma certa diferença entre seus coeficientes de Poisson, devido ao fato de ter sido introduzida uma forma reproduzida em 90° para a construção do modelo 3D. Como para o caso bidimensional há apenas deformação nos eixos  $x$  e  $y$ , e para o caso tridimensional há deformação também no eixo  $z$ , a carga aplicada acaba sendo dividida entre mais uma haste no modelo, o que ocasiona as diferenças visualizadas neste estudo entre os dois métodos.

Para estudos futuros, recomenda-se avaliar experimentalmente os modelos apresentados neste trabalho. Por meio de impressão 3D seria viável realizar ensaios de tração para comparar os resultados obtidos em simulação numérica com os resultados experimentais em laboratório.

## 9 Referências Bibliográficas

1. Teik-Cheng Lim, **Auxetic Material and Structure**, Springer Science+Business Media Singapore, 2015.
2. Imbalzano G, Tran P, Ngo TD, Lee PV, **Three-dimensional modelling of auxetic sandwich panels for localised impact resistance**, Journal of Sandwich Structures & Materials, 2017.
3. Royale Underhill, **Defense Applications of Auxetic Materials**, DSIAC Journal, 2014.
4. Lucas Lopes, **Avaliação numérica do comportamento de estruturas auxéticas**, Projeto de Graduação, PUC-Rio, 2020.
5. Giuseppe Mirlisenna, **Método dos Elementos Finitos: o que é?**, Blog ESSS, 2016.
6. Kusum Meena, Sarat Singamneni, **A new auxetic structure with significantly reduced stress concentration effects**, Materials & Design, Volume 173, 2019.
7. **SOLIDWORKS**, <https://www.solidworks.com/>
8. **SOLIDWORKS**, Solução de grande deslocamento, <http://help.solidworks.com>
9. Felipe Tostes, **Projeto de materiais auxéticos através de otimização topológica**, Projeto de Graduação, PUC-Rio, 2017.
10. Tobias Maconachie, Martin Leary, Bill Lozanovski, Xuezhe Zhang, Ma Qian, Omar Faruque, Milan Brandt, **SLM lattice structures: Properties, performance, applications and challenges**, Materials & Design, Volume 183, 2019.
11. Sidney Cintra, **Análise mecânica de materiais auxéticos**, Projeto de Graduação, Universidade de Brasília, 2019.
12. **Wikipedia**, <https://pt.wikipedia.org/wiki/Auxético>
13. Julien Favre, Paul Lohmuller, Boris Piotrowski, Samuel Kenzari, Pascal Laheurte, Fodil Meraghni, **A continuous crystallographic approach to generate cubic lattices and its effect on relative stiffness of architected materials**, Additive Manufacturing, Vol. 21, 2018.



14. Royale Underhill, **Auxetic Materials: Project Final Report**, Defense Research and Development Canada, 2018.
15. Wang T, Li Z, Wang L, Ma Z, Hulbert GM. **Dynamic Crushing Analysis of a Three-Dimensional Re-Entrant Auxetic Cellular Structure**. *Materials*. 2019
16. **Wikipedia**, <https://pt.wikipedia.org/wiki/SolidWorks>
17. James N, **Auxetics: Don't Pull Me, I'll Get Fatter!**, IUCr Newsletter, 2019.
18. I.G. Masters, K.E. Evans, **Models for the elastic deformation of honeycombs**, Composite Structures, Volume 35, Issue 4, 1996.