

VICTOR LANDEIRA ZYLBERBERG

RAFAEL JALKH PANTALEÃO

**APLICAÇÃO EM MATLAB PARA DETERMINAÇÃO DE
CURVAS MOMENTO-CURVATURA PARA PLASTIFICAÇÃO
DE SEÇÕES TRANSVERSAIS POR FLEXÃO PURA**

Trabalho de Conclusão de Curso

Trabalho apresentado como requisito parcial à conclusão do curso de Engenharia Civil na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Orientador: **Luiz Fernando Martha.**

Rio de Janeiro
Dezembro de 2021



Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer a todos os professores que participaram da nossa trajetória acadêmica desde o ciclo básico até o ciclo profissional da universidade Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, em especial ao professor Luiz Fernando Martha que nos guiou durante a concepção e realização deste TCC.

Agradecemos também aos familiares e amigos presentes em nossas vidas por proporcionar conforto, diversão e zelo nos momentos difíceis de nossas vidas. A companhia de cada um de vocês foi fundamental e somos extremamente gratos por cada momento vivido.

VICTOR LANDEIRA ZYLBERBERG

RAFAEL JALKH PANTALEÃO



Resumo

O objetivo do projeto é desenvolver uma ferramenta gráfica interativa em MATLAB para geração de curvas que relacionam momento versus rotação relativa de uma ligação semirrígida para simular plastificação de seções transversais de vigas solicitadas à flexão. O programa tem uma interface gráfica ativa em que uma seção transversal pode ser selecionada dentro de uma família de seções transversais parametrizadas. O usuário preenche os valores dos parâmetros que definem a seção transversal selecionada. O material é caracterizado por uma relação tensão-deformação (normais) do tipo elastoplástica perfeita (escoamento de tensão contínua). O usuário informa o módulo de elasticidade da fase elástica do material e sua tensão de escoamento. O programa gera uma curva de classificação da seção transversal selecionada. Essa curva relaciona o momento fletor resistente da seção com a curvatura da viga, o que inclui a fase do comportamento elástico-linear da seção, passando pela fase de plastificação parcial, até a fase final de plastificação da seção. A curva é definida baseada na hipótese de manutenção de seção transversal plana, considerando equilíbrio entre tensões normais e momento fletor e a relação tensão-deformação do material. O usuário também define um comprimento característico da ligação semirrígida para associar curvatura da viga com a rotação relativa da ligação. A curva que relaciona momento fletor com rotação relativa da ligação semirrígida pode ser exportada pelo programa em um arquivo em formato texto simples. Essa curva pode ser importada por outros programas, como por exemplo o Ftool, para analisar modelos estruturas com ligações semirrígidas.

Palavras-chave: MATLAB, ferramenta gráfica, momento, rotação relativa, ligação semirrígida, plastificação, seções transversais, Ftool .



Abstract

The aim of the project is to develop an interactive graphical tool in MATLAB to generate curves that relate moment versus relative rotation of a semi-rigid connection to simulate plastification of cross sections of beams required to bend. The program has an active graphical interface in which a cross section can be selected from a family of parameterized cross sections. The user fills in the parameter values that define the selected cross section. The material is characterized by a perfect elastoplastic (normal) stress-strain relationship (yield strength is continuous). The user informs the elastic modulus of the elastic phase of the material and its yield strength. The program generates a classification curve for the selected cross section. This curve relates the resistant bending moment of the section with the beam curvature, which includes the phase of the linear-elastic behavior of the section, going through the phase of partial plasticization, until the final phase of plasticization of the section. The curve is defined based on the assumption of maintenance of a flat cross section, considering the balance between normal stresses and bending moment and the stress-strain relationship of the material. The user also defines a characteristic length of the semi-rigid connection to associate beam curvature with the relative rotation of the connection. The curve relating bending moment with relative rotation of the semi-rigid connection can be exported by the program into a file in plain text format. This curve can be imported by other programs, such as Ftool, to analyze structural models with semi-rigid connections.

Keywords: MATLAB, graphical tool, moment, relative rotation, semi-rigid connection, plasticization, cross section, Ftool.



SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
1.1	Motivação	7
2	Desenvolvimento	12
2.1	Definição do Problema	12
2.2	Revisão	13
2.3	Metodologia	17
2.4	Seção Retangular	18
2.5	Seção I	27
2.6	Seção T	37
2.7	Seção Circular	65
3	O Aplicativo, XSECPLASTIF	71
3.1	Classe Abstrata	77
3.2	Classes Utilizadas	80
4	Conclusão	86
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87



Simbologia

$\sigma_y \rightarrow$ Tensão de plastificação

$\sigma_s \rightarrow$ Tensão na fase elástica da fibra extrema superior

$\sigma_f \rightarrow$ Tensão na fase elástica da fibra na base da mesa

$\sigma_i \rightarrow$ Tensão na fase elástica da fibra extrema inferior

$NS \rightarrow$ Distância da Linha Neutra da fibra extrema inferior

$E \rightarrow$ Módulo de elasticidade

$\rho \rightarrow$ Raio de curvatura da elástica transversal

$kappa = \frac{1}{\rho} \rightarrow$ Curvatura da elástica transversal

$I \rightarrow$ Momento de inércia

$M_e \rightarrow$ Momento elástico

$M_p \rightarrow$ Momento plástico

$l_p \rightarrow$ Comprimento característico da rótula plástica

$\theta \rightarrow$ Rotação da seção transversal

$y_e \rightarrow$ Posição da fibra limite da fase elástica na seção transversal

$b \rightarrow$ Base

$h \rightarrow$ Altura

$t_f \rightarrow$ espessura da mesa

$t_w \rightarrow$ Espessura da alma

$r \rightarrow$ Raio



1 INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia e o aumento da velocidade de processamento de computadores pessoais. Hoje conseguimos desenvolver programas para análises estruturais, que fazem em segundos o que levavam horas de processamento anos atrás.

Uma área de pesquisa importante, que falaremos neste trabalho, é o Comportamento não linear de estruturas a partir da plastificação de seções transversais, isso possibilita simular a transição do comportamento de uma estrutura entre o regime elástico de serviço e o regime último de ruptura. (Dias, 2021)

Neste trabalho desenvolvemos uma metodologia para a obtenção de curvas momento-curvatura para plastificação de qualquer seção transversal, desde que sua geometria seja bem definida, considerando um comportamento elasto-plástico para o material.

Foi desenvolvida uma ferramenta em matlab para gerar curvas momento-curvatura de diversos tipos de seções transversais. Essa ferramenta tem uma interface gráfica interativa em que o usuário pode selecionar as seções transversais, entrar com os seus parâmetros geométricos e de material. O tratamento genérico para os diversos tipos de seção transversal é atingido através da utilização do paradigma de programação orientada a objetos. Para cada tipo de seção transversal, as curvas momento-curvatura foram obtidas análises utilizando o toolkit de matemática simbólica do matlab permitindo a solução de equações analíticas de alta complexidade em pequeno tempo.

1.1 Motivação

A motivação pela busca de uma metodologia que estabeleça o comportamento da seção transversal no regime elasto-plástico, é a possibilidade de utilizar as curvas momento-rotação para estabelecer o comportamento de rótulas plásticas pós o limite elástico de vigas.

Em programas como o Ftool (Martha, 2017), podemos utilizar as curvas momento-rotação obtidas neste trabalho para estabelecer rótulas plásticas com conexões modeladas através de ligações semirrígidas não lineares entre elementos estruturais.

O exemplo a seguir demonstra a diferença entre utilizar ligações do tipo rótula-plástica e ligação do tipo elasto-plástica:

Ex(1.1.1) (Dias, 2021) Para a viga de seção retangular engastada em um apoio e apoiada no outro com uma carga pontual a seguir, figuras (1.1), (1.2) e (1.3):

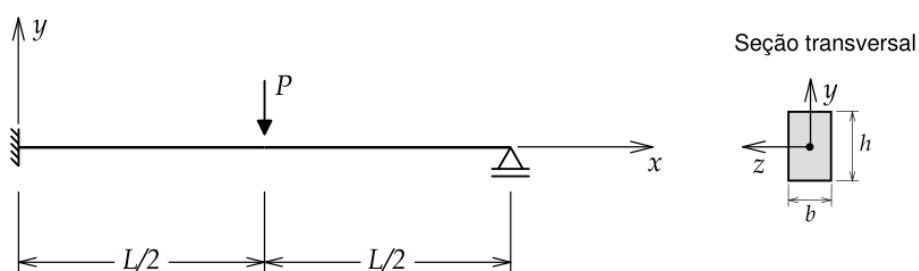


Figura 1.1 – Viga hiperestática de seção transversal retangular, (Dias, 2021)



$$\begin{aligned} L &= 3 \text{ m (300 cm)} \\ h &= 0.20 \text{ m (20 cm)} \\ b &= 0.06 \text{ m (6 cm)} \\ E &= 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \text{ (200000 MPa)} \\ \sigma_p &= 250000 \text{ kN/m}^2 \text{ (250 MPa)} \\ l_p &= 0.1 \text{ m (10 cm)} \end{aligned}$$

Figura 1.2 – Propriedades geométricas e de material Exemplo (1.1.1), (Dias, 2021)

$$\begin{aligned} M_e &= 100 \text{ kNm} \\ M_p &= 150 \text{ kNm} \\ P_{\text{lim}} &= 300 \text{ kN} \end{aligned}$$

Figura 1.3 – Propriedades de tensão Exemplo (1.1.1), (Dias, 2021)

Se consideramos uma ligação como elasto-plástica, onde o regime permanece linear até o momento de plastificação total seja atingido obtemos o seguinte gráfico momento curvatura, figura (1.4):

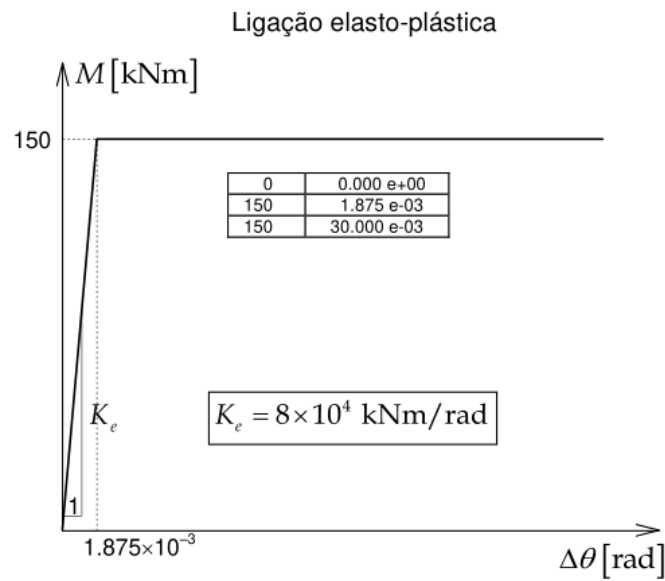


Figura 1.4 – Comportamento da ligação Elasto-Plástica, (Dias, 2021)

Obtemos também a seguinte distribuição para o momento na viga, utilizando a ligação elasto-plástica, figura (1.5):

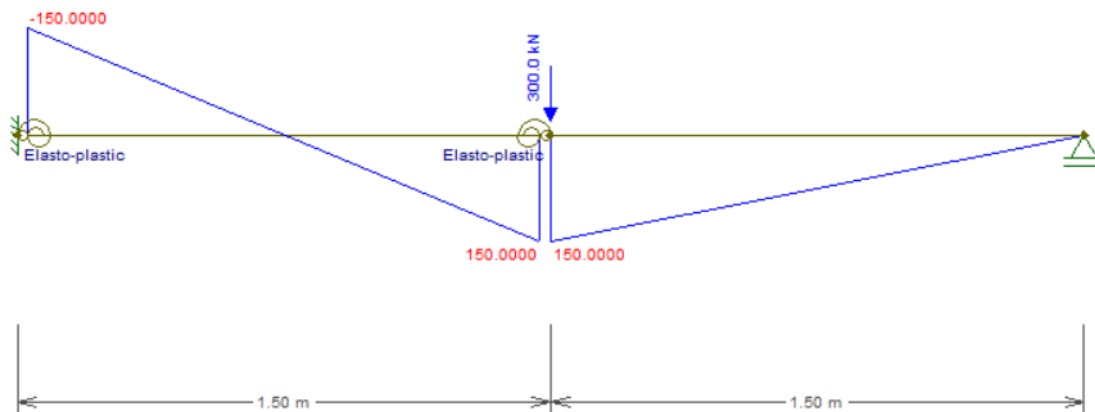


Figura 1.5 – Diagrama de momento da viga com uma ligação elasto-plástica, (Dias, 2021)

Quando consideramos a ligação como rótula plástica, onde após o regime elástico existe uma região de transição onde os elementos de regime elástico e plástico coexistem, temos o seguinte resultado para a curva momento curvatura, figura (1.6):

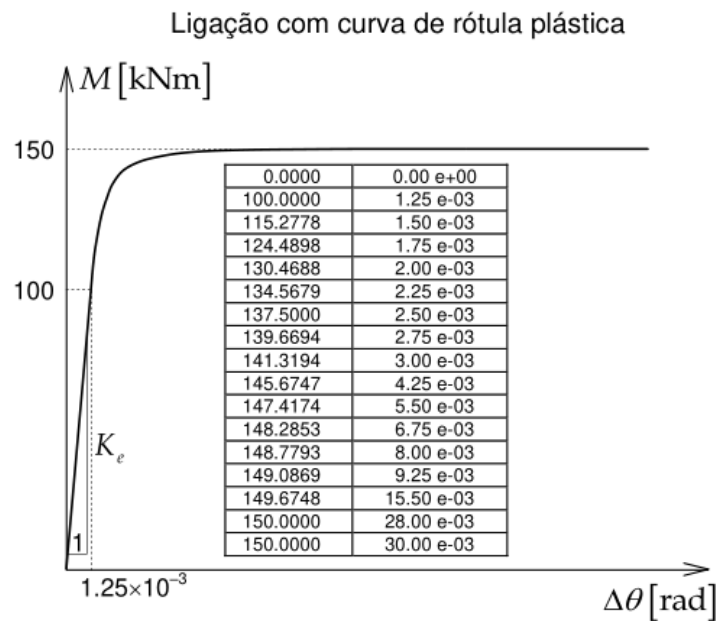


Figura 1.6 – Comportamento da ligação Rótula Plástica, (Dias, 2021)

Obtemos também a seguinte distribuição para o momento na viga, utilizando a ligação rótula plástica:

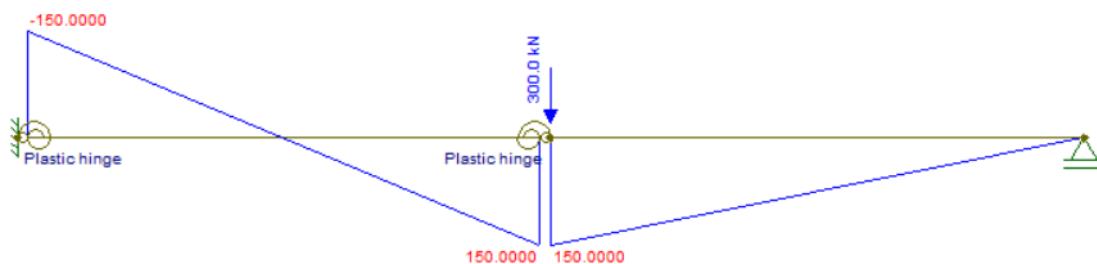


Figura 1.7 – Diagrama de momento da viga com uma rótula plástica, (Dias, 2021)

Como se pode observar, figura (1.7), a distribuição do momento no estado limite não é diferente nesse caso. Mas a curvatura do elemento ao atingir o estado limite é diferente em uma magnitude, $1,875 \cdot 10^{-3}$ para o elasto-plástico e $28,00 \cdot 10^{-3}$ para a rótula-plástica.

A diferença de comportamento fica evidente quando plotamos o gráfico deslocamento x fator de carga do nó central:

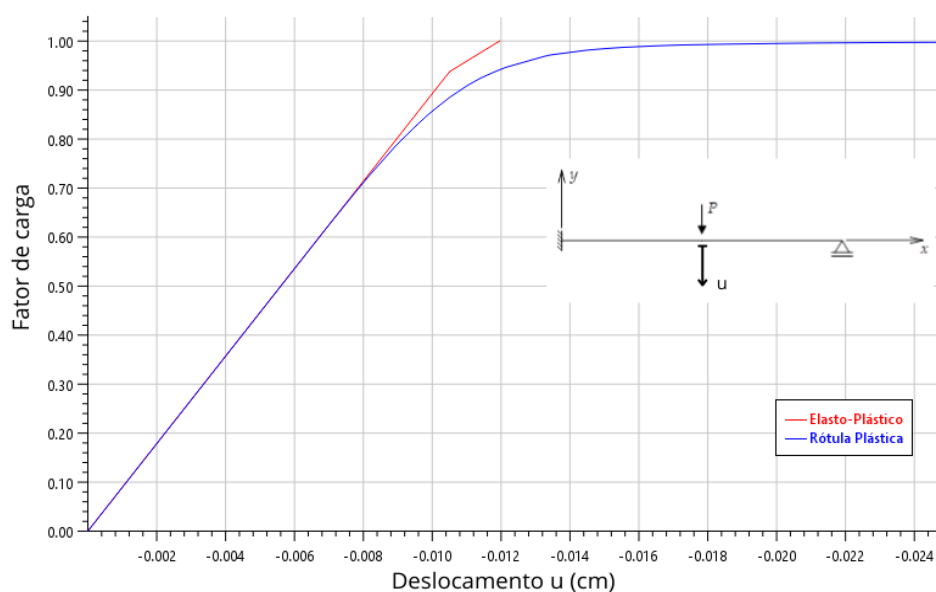


Figura 1.8 – Gráfico deslocamento x fator de carga do nó central, (Dias, 2021)

Podemos observar na figura (1.8), onde o fator de carga 1,00 é a carga de colapso, que o comportamento das duas ligações pós regime elástico são diferentes, e que o deslocamento no momento de plastificação total na ligação elasto-plástica é menor que o da rótula plástica.



A fim de resolver o problema descrito anteriormente o objetivo do trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia que viabilize o encontro de curvas momento-curvatura de forma analítica.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Definição do Problema

Para o desenvolvimento do trabalho, estabelecemos algumas premissas de material e carga que serão seguidas.

O material tem um comportamento elasto-plástico, obedece a lei de hooke no regime elástico, como é o caso do aço, figura (2.1.1).

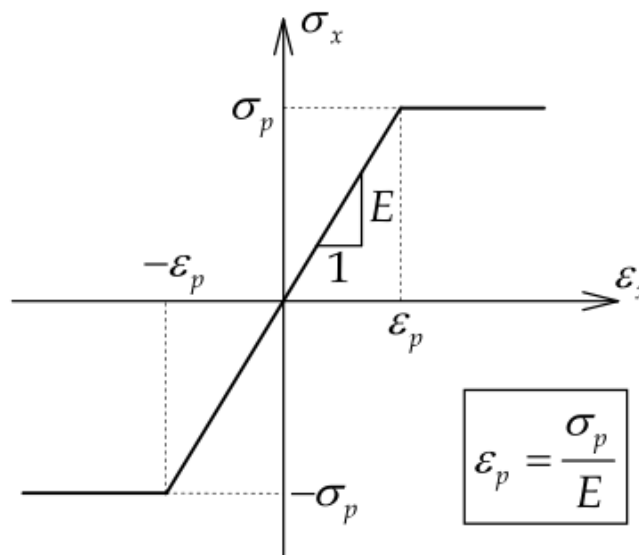


Figura 2.1.1 – Lei de hooke, (Dias, 2021)

A viga em questão sofre flexão sem carregamento axial, figura (2.1.2).

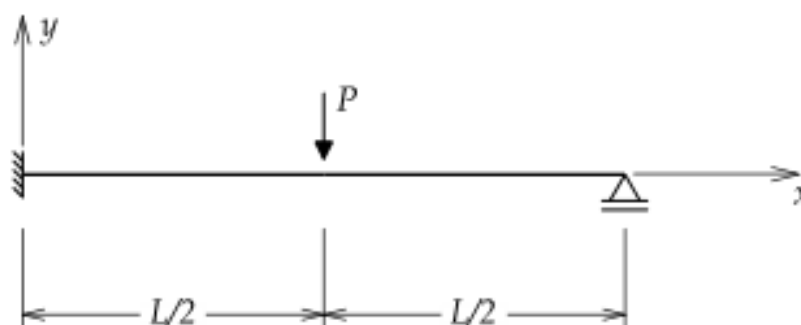


Figura 2.1.2 – Viga engastada apoiada, (Dias, 2021)

As seções transversais estudadas foram as seções T, I, Retangular, Circular e Anelar.

2.2 Revisão

A plastificação de uma seção transversal qualquer passa por três fases distintas: o regime elástico, o regime de transição e o regime plástico. Para uma seção simétrica como a retangular a evolução da plastificação se dá como a figura (2.2.1):

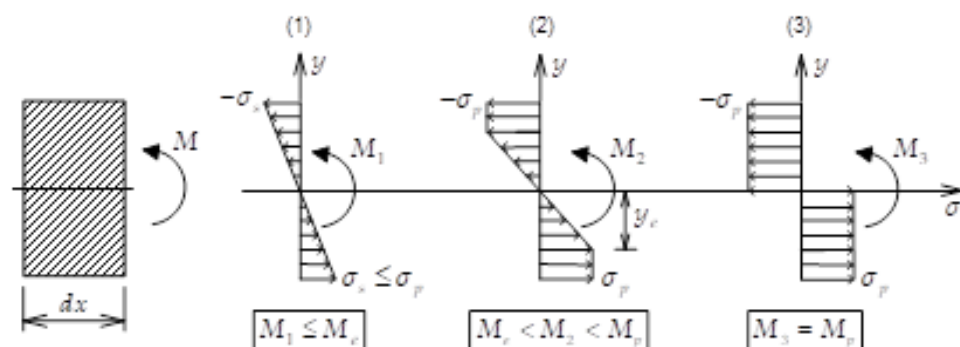


Figura 2.2.1 – Evolução da Tensão, (Dias, 2021)



A Fase 1 ocorre quando o momento fletor é menor ou igual a Me (momento elástico). A Fase 2 que representa o regime de transição ocorre enquanto o momento está entre Me e Mp (momento plástico) e durante essa fase a seção está parcialmente plastificada, como se pode observar na figura, onde só parte da seção está sofrendo a tensão de escoamento σ_p . A Fase 3 ocorre quando o momento fletor atinge o Mp e consequentemente a seção está completamente sobre a tensão de escoamento σ_p .

Para encontrar os momentos aplicados em cada uma das fases utilizamos as duas equações de equilíbrio estático:

$$\int \sigma dA = 0 \quad (2.1)$$

$$\int_A \sigma y dA = M \quad (2.2)$$

A equação (2.1) define o equilíbrio das forças internas nas seções, utilizamos essa característica do elemento para solucionarmos a posição da linha neutra em seções não bi-simétricas, como na seção T demonstrada neste trabalho.

A equação (2.2) nos define o equilíbrio de momentos internos e consequentemente o valor do Momento Fletor para dado estado de tensões.

Durante a Fase 1 e a Fase 2 o comportamento da tensão não é linear, por isso utilizamos a equação (2.2). Precisamos definir as equações para a tensão em função da curvatura da elástica transversal $\sigma(\kappa)$.

Para o final da Fase 1 temos a equação $Me = EI/\rho$, para a Fase 2 precisamos encontrar uma alternativa.

Para definir essa função $\sigma(\kappa)$, iniciamos com uma viga de qualquer seção transversal recebendo um momento fletor, estabelecendo a relação entre deformação linear dx com a curvatura $1/\rho$, figura 2.2.2 e 2.2.3.

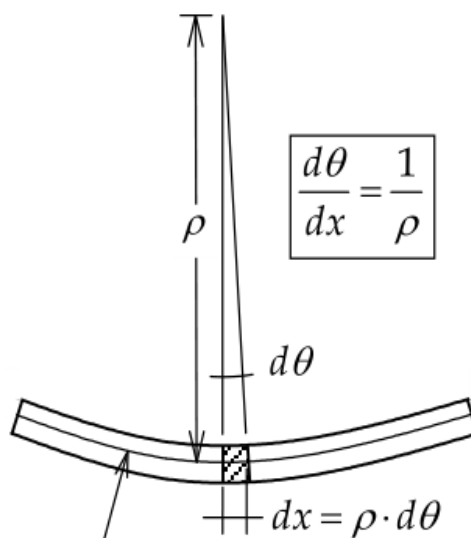


Figura 2.2.2 - Definição de Curvatura, (Dias, 2021)

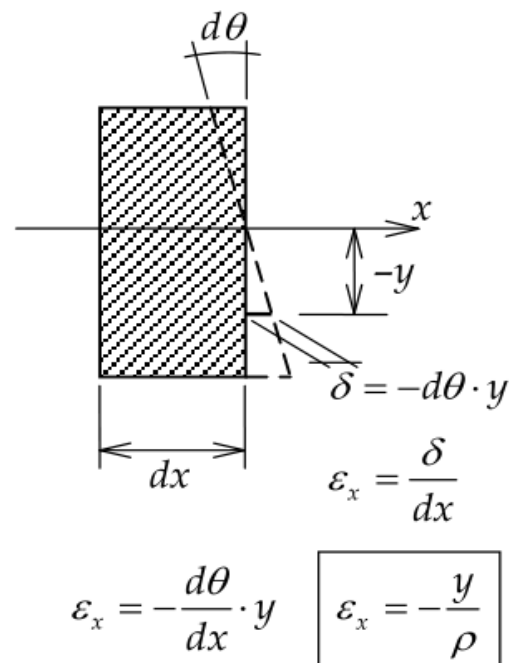


Figura 2.2.3 - Definição de Curvatura, (Dias, 2021)

Agora, podemos utilizar as relações encontrados para substituir na equação (2.3), lei de hooke:

$$\sigma = \varepsilon_x * E \quad (2.3)$$

$$\sigma = -y/\rho * E \quad (2.4)$$

Substituindo $1/\rho = \kappa$ e estabelecendo a linha neutra como eixo no centro geométrico.

$$\sigma(\kappa) = y * \kappa * E \quad (2.5)$$

$$\int_A \sigma(\kappa) y dA = M \quad (2.6)$$

A equação (2.6) é válida para qualquer y na região da seção sobre o regime elástico, podemos então encontrar o Momento fletor em função da curvatura desde que a seção tenha qualquer fibra ainda no regime elástico (Fase 2).

2.3 Metodologia

A metodologia desenvolvida para obter as curvas momento-rotação utilizou como base os conceitos demonstrados no item 2.2.

Já que as formas das seções transversais utilizadas na construção civil e as estudadas neste trabalho são simples, podemos evitar a utilização das integrais nas equações (2.1) e (2.6) dividindo a seção transversal em regiões geométricas simples com uma força aplicada no centro das regiões referente a resultante das tensões aplicadas nessa área, Figura (2.3.1).

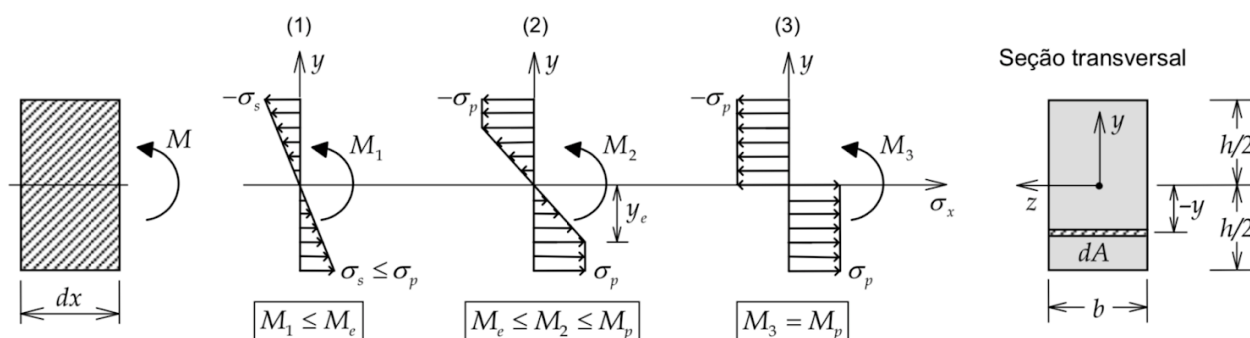


Figura 2.3.1 - Evolução da Tensão, (Dias, 2021)

2.4 Seção Retangular

A seção retangular é a seção mais simples que estudamos e foi a que testamos nossa metodologia. Utilizamos o exemplo (1.1.1) e conferimos o resultado.

Iniciamos a metodologia explicitando a da evolução da tensão que vai ser feita e a dividindo em trechos simples, com o objetivo de sempre de facilitar (2.4.1).

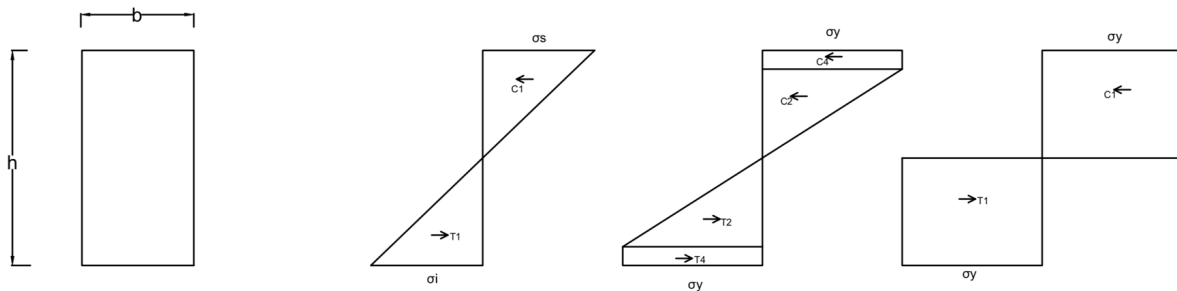


Figura 2.4.1 - Evolução da Tensão – Seção Retangular

2.4.1 Fase Elástica

Para a fase elástica verificamos a seguinte configuração para a tensão, figura (2.4.1.1)

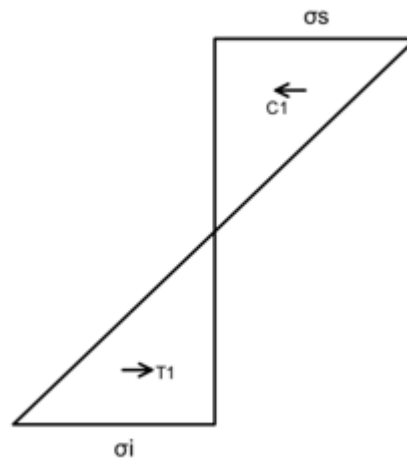


Figura 2.4.1.1 - Evolução da Tensão – Seção Retangular Elastica

Por ser uma seção simétrica temos a linha neutra (NS) como $h/2$.

$$C1 = \frac{bh\sigma_y}{4} \quad (2.4.1.1)$$

$$T1 = \frac{bh\sigma_y}{4} \quad (2.4.1.2)$$

$$C_{P1} = \frac{h}{6} \quad (2.4.1.3)$$

$$T_{P1} = \frac{h}{6} \quad (2.4.1.4)$$

C_{p1} e T_{p1} são referentes ao braço de alavanca das respectivas forças.

$$Me = C1 * C_{P1} + T1 * T_{P1} \quad (2.4.1.5)$$

$$Me = \frac{bh^2\sigma_y}{12} \quad (2.4.1.6)$$

2.4.2 Fase Plástica

Para a fase plástica verificamos a seguinte configuração para a tensão, figura

(2.4.2.1)

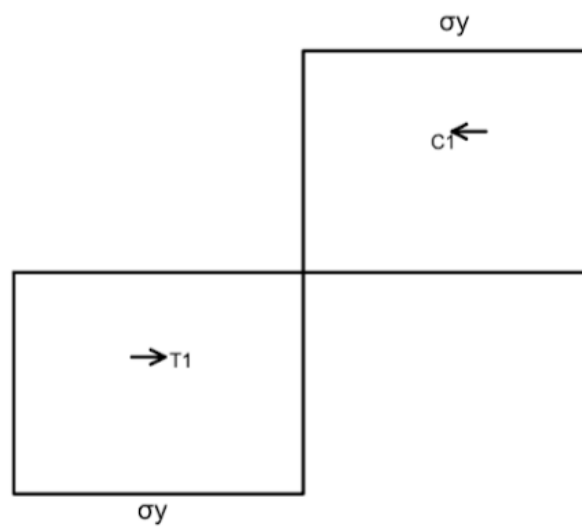


Figura 2.4.2.1 - Evolução da Tensão – Seção Retangular Plástica

$$C1 = \frac{b h \sigma_y}{2} \quad (2.4.2.1)$$

$$T1 = \frac{b h \sigma_y}{2} \quad (2.4.2.2)$$

$$C_{P1} = \frac{h}{4} \quad (2.4.2.3)$$

$$T_{P1} = \frac{h}{4} \quad (2.4.2.4)$$

Cp1 e Tp1 são referentes ao braço de alavanca das respectivas forças.

$$M_p = C1 * C_{P1} + T1 * T_{P1} \quad (2.4.2.5)$$

$$M_p = \frac{bh^2 \sigma_y}{4} \quad (2.4.2.6)$$

2.4.3 Fase Elasto-Plástica

Para a fase elasto-plástica verificamos a seguinte configuração para a tensão, figura (2.4.3.1)

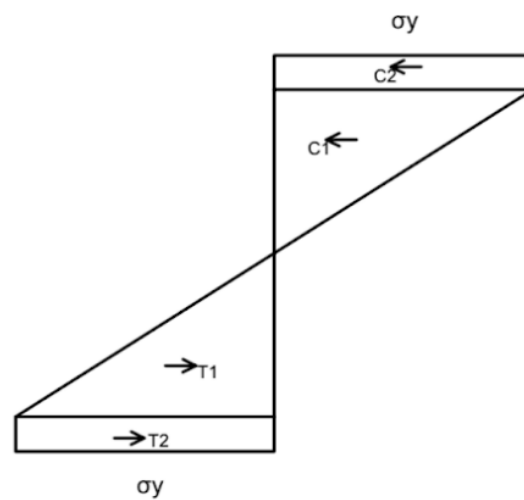


Figura 2.4.3.1 - Evolução da Tensão – Seção Retangular Elasto-Plástica



$$C1 = b \sigma_y \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \quad (2.4.3.1)$$

$$C2 = b \sigma_y \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \quad (2.4.3.2)$$

$$T1 = b \sigma_y \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \quad (2.4.3.3)$$

$$T2 = b \sigma_y \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \quad (2.4.3.4)$$

$$C_{P1} = \frac{h}{4} + \frac{y_e}{2} \quad (2.4.3.5)$$

$$C_{P2} = \frac{2y_e}{3} \quad (2.4.3.6)$$

$$T_{P1} = \frac{h}{4} + \frac{y_e}{2} \quad (2.4.3.7)$$

$$T_{P2} = \frac{2y_e}{3} \quad (2.4.3.8)$$

Cp1, Tp1, Cp2 e Tp2 são referentes ao braço de alavanca das respectivas forças.

Regime elasto-plastico de ($\kappa = Me/(E * I)$) até a plastificação completa da seção.

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} \quad (2.4.3.9)$$

$$M = \frac{b \sigma_y \left(3h^2 - \frac{4\sigma_y^2}{E^2 \kappa^2} \right)}{12} \quad (2.4.3.10)$$

Resultado gráfico para um retângulo de $b = 0.06\text{m}$ e $h=0.2\text{m}$, tensão de escoamento = 250 MPa e Módulo de elasticidade de $2,0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, figura 2.4.3.2.

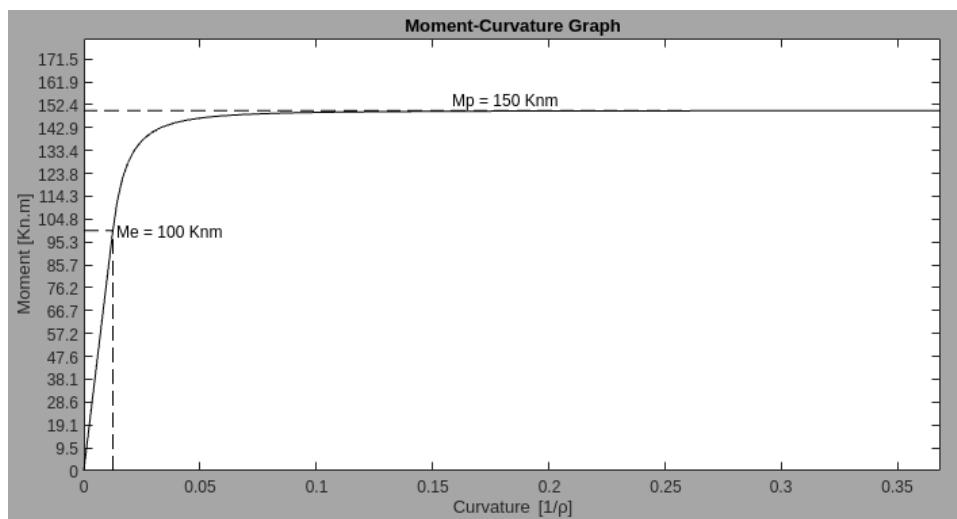


Figura 2.4.3.2 - Gráfico Momento x Rotação - Retângulo

2.4.4 Validação Metodologia

Com o resultado obtido na seção retangular, figura 2.4.3.2, comparamos com os obtidos por (Dias, 2021) e verificamos que nossa metodologia obteve o mesmo resultado

da utilizada por ele, figura 2.4.4.1 e 2.4.4.2.

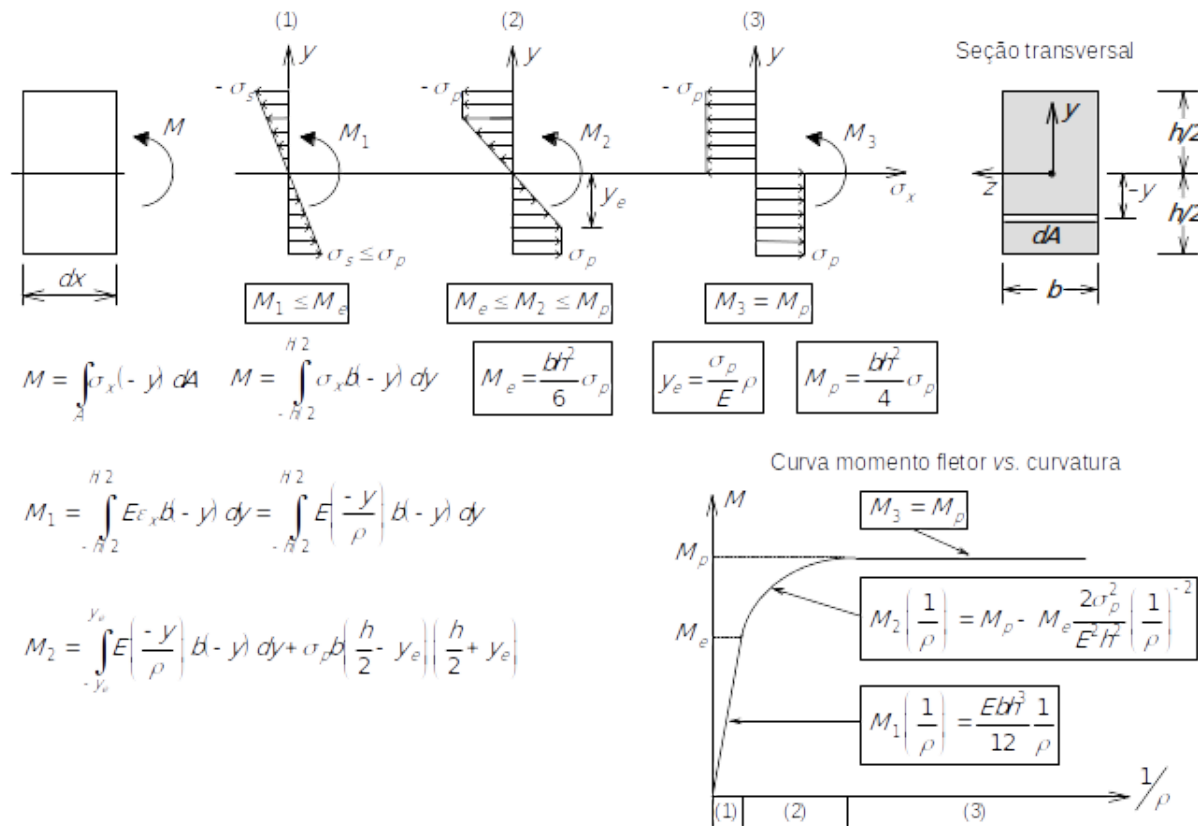


Figura 2.4.4.2: Curva momento x curvatura de uma seção ao longo da plastificação (Dias,2021)

Ligação com curva de rótula plástica

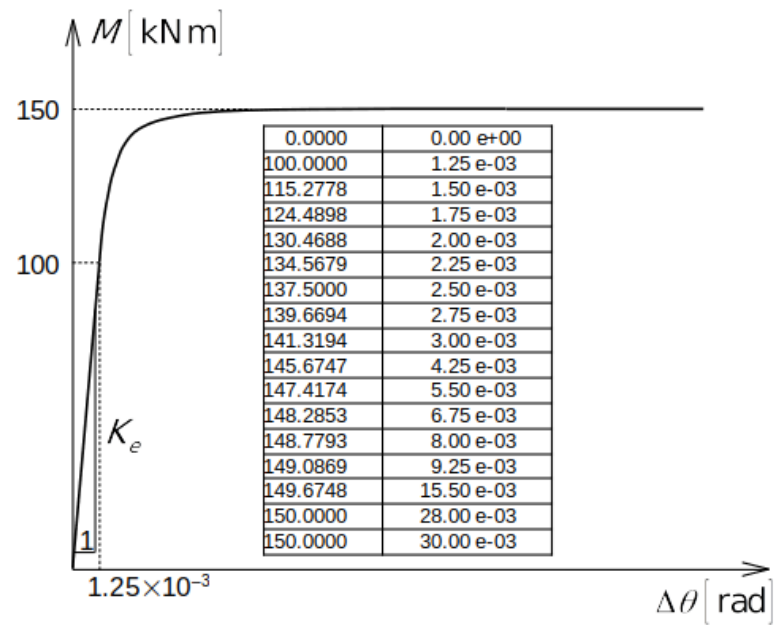


Figura 2.4.4.3: Resultado ligação com curva de rótula plástica (Dias,2021)

Resultado obtido por nossa metodologia, tabela 2.4.4.4



Curvatura(1/m)	Momento (kNm)	Curvatura(1/m)	Momento (kNm)
0.00E+00	0	36.84E-03	149.94
1.25E-03	100.00	42.42E-03	149.96
1.44E-03	112.28	48.84E-03	149.97
1.66E-03	121.55	56.23E-03	149.98
1.91E-03	128.54	64.74E-03	149.98
2.20E-03	133.81	74.55E-03	149.99
2.53E-03	137.79	85.83E-03	149.99
2.91E-03	140.79	98.83E-03	149.99
3.35E-03	143.05	113.79E-03	149.99
3.86E-03	144.76	131.01E-03	150.00
4.45E-03	146.05	150.85E-03	150.00
5.12E-03	147.02	173.69E-03	150.00
5.89E-03	147.75	199.98E-03	150.00
6.79E-03	148.30	230.26E-03	150.00
7.81E-03	148.72	265.12E-03	150.00
9.00E-03	149.03	305.26E-03	150.00
10.36E-03	149.27	351.47E-03	150.00
11.93E-03	149.45	404.68E-03	150.00
13.73E-03	149.59	465.95E-03	150.00
15.81E-03	149.69	536.49E-03	150.00
18.20E-03	149.76	617.71E-03	150.00
20.96E-03	149.82	711.23E-03	150.00
24.13E-03	149.87	818.91E-03	150.00
27.79E-03	149.90	942.89E-03	150.00
31.99E-03	149.92	1.09E+00	150.00

Tabela 2.4.4.1 - Tabela resultados - Retângulo

Analisando os resultados previstos por (Dias,2021), figura 2.4.4.3, verificamos que os obtidos pela metodologia deste trabalho, tabela 2.4.4.1, se assemelham muito aos encontrados por Dias. Acreditamos que as diferenças presentes estejam relacionadas aos arredondamentos feitos por Dias, que desconhecemos. Até o Momento de 149.69 kNm as duas metodologias têm resultados equivalentes.

2.5 Seção I

Na seção I podemos observar que a evolução da tensão já apresenta uma fase a mais que a figura retangular (2.5.1).

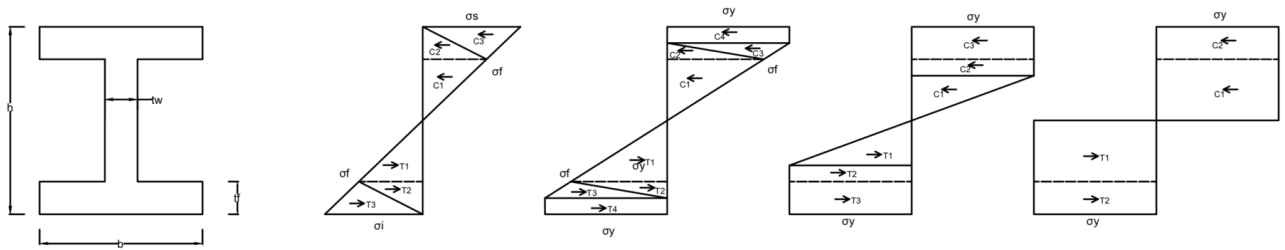


Figura 2.5.1 - Evolução da Tensão – Seção I

2.5.1 Fase Elástica

Para a fase elástica verificamos a seguinte configuração para a tensão, figura (2.5.1.1)

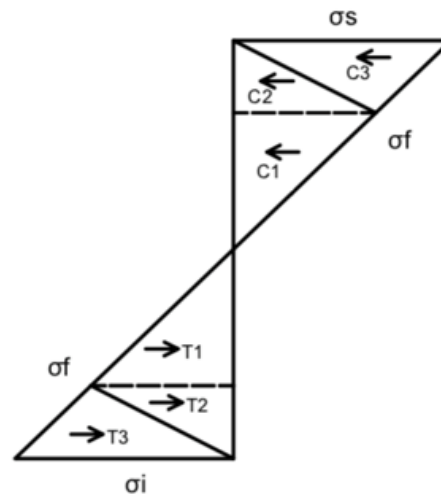


Figura 2.5.1.1 - Evolução da Tensão – Seção Retangular Elastica

Por ser uma seção simétrica temos a linha neutra (NS) como $h/2$.

$$C1 = \frac{\sigma_y t_w \left(\frac{h}{2} - t_f\right)^2}{h} \quad (2.5.1.1)$$

$$C2 = \frac{b \sigma_y t_f \left(\frac{h}{2} - t_f\right)}{h} \quad (2.5.1.2)$$

$$C3 = \frac{b \sigma_y t_f}{2} \quad (2.5.1.3)$$

$$T1 = \frac{\sigma_y t_w \left(\frac{h}{2} - t_f\right)^2}{h} \quad (2.5.1.4)$$

$$T2 = \frac{b \sigma_y t_f \left(\frac{h}{2} - t_f\right)}{h} \quad (2.5.1.5)$$



$$T3 = \frac{b\sigma_y t_f}{2} \quad (2.5.1.6)$$

$$C_{P1} = \frac{h}{3} - \frac{2t_f}{3} \quad (2.5.1.7)$$

$$C_{P2} = h - \frac{2t_f}{3} \quad (2.5.1.8)$$

$$C_{P3} = h - \frac{t_f}{3} \quad (2.5.1.9)$$

$$T_{P1} = \frac{h}{3} - \frac{2t_f}{3} \quad (2.5.1.10)$$

$$T_{P2} = h - \frac{2t_f}{3} \quad (2.5.1.11)$$

$$T_{P3} = h - \frac{t_f}{3} \quad (2.5.1.12)$$

Cp1, Cp2, Cp3, Tp1, Tp2 e Tp3 são referentes ao braço de alavanca das respectivas forças.

$$Me = C1 * Cp1 + C2 * Cp2 + C3 * Cp3 + T1 * Tp1 + T2 * Tp2 + T3 * Tp3 \quad (2.5.1.13)$$

$$Me = b\sigma_y t_f \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{3} \right) + \frac{2\sigma_y t_w \left(\frac{h}{2} - t_f \right)^2 \left(\frac{h}{3} - \frac{2t_f}{3} \right)}{h} + \frac{2b\sigma_y t_f \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{2t_f}{3} \right)}{h} \quad (2.5.1.14)$$

2.5.2 Fase Plástica

Para a fase plástica verificamos a seguinte configuração para a tensão, figura (2.5.2.1)

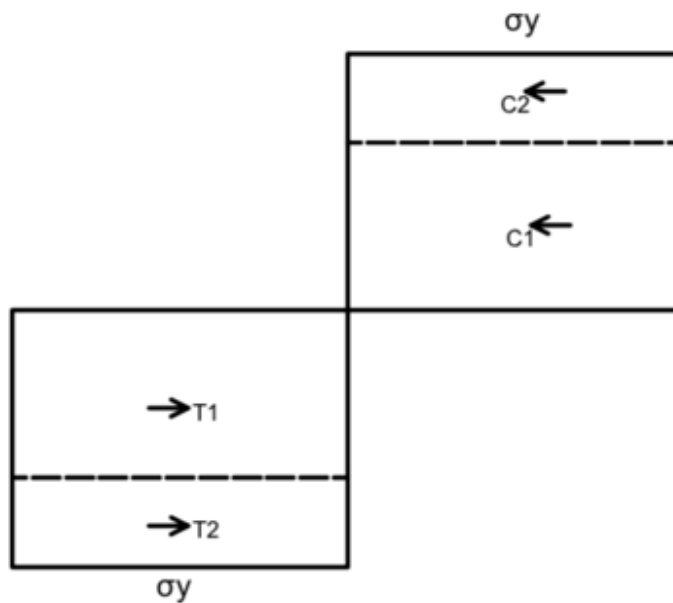


Figura 2.5.2.1 - Evolução da Tensão – Seção I Plástica

Por ser uma seção simétrica temos a linha neutra (NS) como $h/2$.

$$C1 = b \sigma_y t_f \quad (2.5.2.1)$$

$$C2 = \sigma_y t_w \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \quad (2.5.2.2)$$



$$T1 = b \sigma_y t_f \quad (2.5.2.3)$$

$$T2 = \sigma_y t_w \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \quad (2.5.2.4)$$

$$C_{P1} = \frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \quad (2.5.2.5)$$

$$C_{P2} = \frac{h}{4} - \frac{t_f}{2} \quad (2.5.2.6)$$

$$C_{P1} = \frac{h}{3} - \frac{2t_f}{3} \quad (2.5.2.7)$$

$$T_{P1} = \frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \quad (2.5.2.8)$$

$$T_{P2} = \frac{h}{4} - \frac{t_f}{2} \quad (2.5.2.9)$$

Cp1, Cp2, Tp2 e Tp3 são referentes ao braço de alavanca das respectivas forças.

$$Mp = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} \quad (2.5.2.10)$$

$$Mp = 2 \sigma_y t_w \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \left(\frac{h}{4} - \frac{t_f}{2} \right) + 2 b \sigma_y t_f \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right) \quad (2.5.2.11)$$

2.5.3 Fase Elasto-Plástica

Como é possível observar na figura 2.5.4.1 e 2.5.1, o regime elasto-plástico da seção I pode ser dividido em duas fases distintas, figura (2.5.4.1).

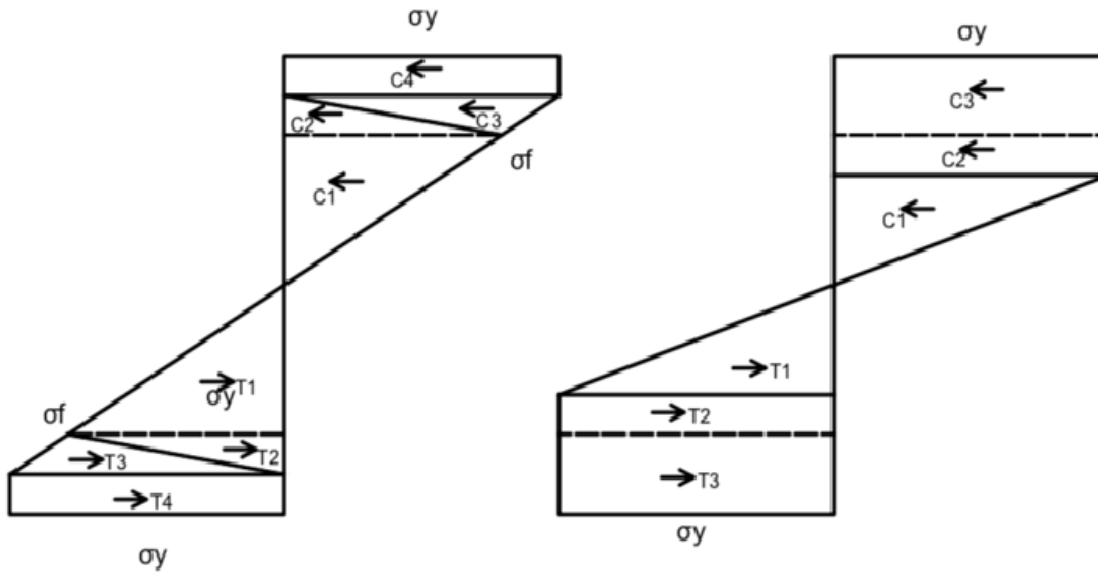


Figura 2.5.3.1 - Evolução da Tensão – Seção I Elasto-Plástica

Por ser uma seção simétrica a tem a linha neutra (NS) como $h/2$.

Para fase 1, obtemos a seguintes equações:

$$y_{ei} = \frac{\sigma_y}{E\kappa} \quad (2.5.3.1)$$

$$\sigma_f = E\kappa \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \quad (2.5.3.2)$$

$$C1 = b\sigma_y \left(\frac{h}{2} - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \quad (2.5.3.3)$$

$$C2 = \frac{b\sigma_y \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} \quad (2.5.3.4)$$

$$C3 = \frac{E b \kappa \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} \quad (2.5.3.5)$$

$$T2 = \frac{b\sigma_y \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} \quad (2.5.3.6)$$



$$T1 = b \sigma_y \left(\frac{h}{2} - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \quad (2.5.3.7)$$

$$T3 = \frac{E b \kappa \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} \quad (2.5.3.8)$$

$$T4 = \frac{E \kappa t_w \left(\frac{h}{2} - t_f \right)^2}{2} \quad (2.5.3.9)$$

$$C_{P1} = b \sigma_y \left(\frac{h}{2} - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \quad (2.5.3.10)$$

$$C_{P2} = \frac{b \sigma_y \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} \quad (2.5.3.11)$$

$$C_{P3} = \frac{E b \kappa \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} \quad (2.5.3.12)$$

$$C_{P4} = \frac{E \kappa t_w \left(\frac{h}{2} - t_f \right)^2}{2} \quad (2.5.3.13)$$

$$T_{P1} = b \sigma_y \left(\frac{h}{2} - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \quad (2.5.3.14)$$

$$T_{P2} = \frac{b \sigma_y \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} \quad (2.5.3.15)$$

$$T_{P3} = \frac{E b \kappa \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} \quad (2.5.3.16)$$

$$T_{P4} = \frac{E \kappa t_w \left(\frac{h}{2} - t_f \right)^2}{2} \quad (2.5.3.17)$$

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + C3 * C_{P3} + C4 * C_{P4} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} + T3 * T_{P3} + T4 * T_{P4} \quad (2.5.3.18)$$

$$M = 2 b \sigma_y \left(\frac{h}{2} - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \left(\frac{h}{4} + \frac{\sigma_y}{2 E \kappa} \right) + b \sigma_y \left(\frac{h}{6} - \frac{t_f}{3} + \frac{2 \sigma_y}{3 E \kappa} \right) \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + E \kappa t_w \left(\frac{h}{2} - t_f \right)^2 \left(\frac{h}{3} - \frac{2 t_f}{3} \right) + E b \kappa \left(\frac{h}{2} - t_f \right) \left(\frac{h}{3} - \frac{2 t_f}{3} + \frac{\sigma_y}{3 E \kappa} \right) \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.5.3.19)$$

Para a região de transição entre fase 1 e fase 2 temos, figura 2.5.4.2:

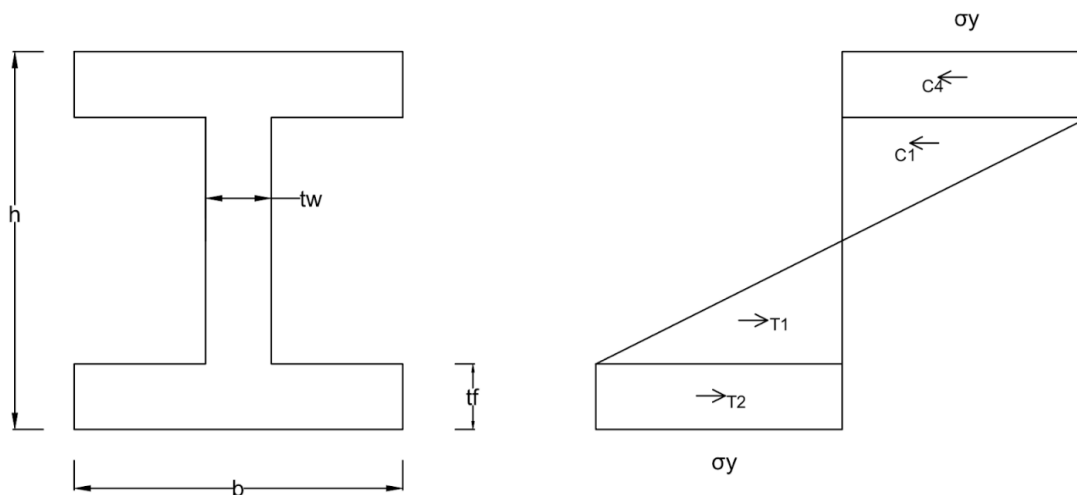


Figura 2.5.4.2 –Transição Fase 1 e Fase 2

A curvatura para a transição, equação (2.5.3.20).

$$\kappa = \frac{\sigma_y}{E \left(\frac{h}{2} - t_f \right)} \quad (2.5.3.20)$$

Regime elasto-plástico da Fase 1 entre kappa inicial do regime elástico: ($\kappa = Me/(E * I)$) e o de transição: equação (2.5.3.20).

Regime elasto-plástico da Fase 2 do kappa (2.5.3.20) até a plastificação completa.

Para a Fase 2, figura 2.5.4.3, temos as seguintes equações:

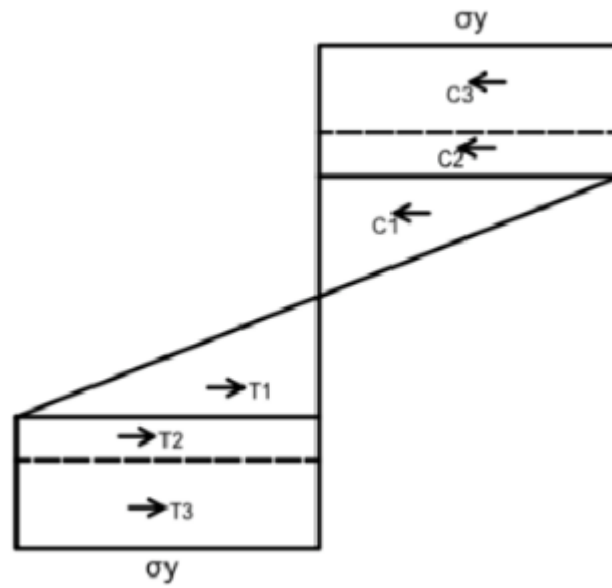


Figura 2.5.4.3 – Seção I – Regime Elasto-Plástico Fase2

$$y_{ei} = \frac{\sigma_y}{E\kappa} \quad (2.5.3.21)$$

$$C1 = b \sigma_y t_f \quad (2.5.3.22)$$

$$C2 = -\sigma_y t_w \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \quad (2.5.3.23)$$

$$C3 = \frac{\sigma_y^2 t_w}{2E\kappa} \quad (2.5.3.24)$$

$$T1 = b \sigma_y t_f \quad (2.5.3.25)$$

$$T2 = -\sigma_y t_w \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \quad (2.5.3.26)$$

$$T3 = \frac{\sigma_y^2 t_w}{2E\kappa} \quad (2.5.3.27)$$

$$C_{P1} = \frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \quad (2.5.3.28)$$



$$C_{P2} = \frac{h}{4} - \frac{t_f}{2} + \frac{\sigma_y}{2E\kappa} \quad (2.5.3.29)$$

$$C_{P3} = \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.5.3.30)$$

$$T_{P1} = \frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \quad (2.5.3.31)$$

$$T_{P2} = \frac{h}{4} - \frac{t_f}{2} + \frac{\sigma_y}{2E\kappa} \quad (2.5.3.32)$$

$$T_{P3} = \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.5.3.33)$$

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + C3 * C_{P3} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} + T3 * T_{P3} \quad (2.5.3.34)$$

$$M = \frac{2\sigma_y^3 t_w}{3E^2 \kappa^2} - 2\sigma_y t_w \left(\frac{h}{4} - \frac{t_f}{2} + \frac{\sigma_y}{2E\kappa} \right) \left(t_f - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) + 2b\sigma_y t_f \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right) \quad (2.5.3.35)$$

Resultado gráfico para uma seção I de b = 0.1m, h=0.2m tf = 0,03m e tw=0,03m, tensão de escoamento = 250 MPa e Módulo de elasticidade de 2,0 * 10⁵MPa, figura 2.5.4.4.

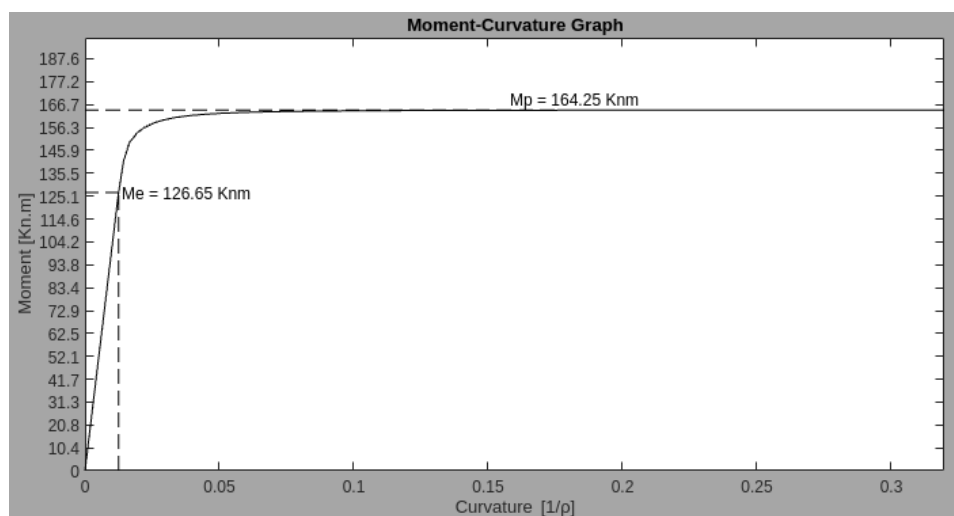


Figura 2.5.4.4 – Gráfico Momento x Curvatura, Seção I

2.6 Seção T

Para a seção T estudamos duas evoluções de tensões:

- Linha neutra se mantém na alma durante toda o processo de plastificação,

figura 2.6.1

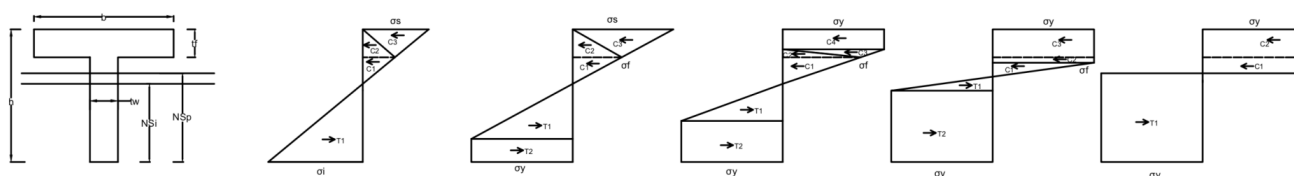
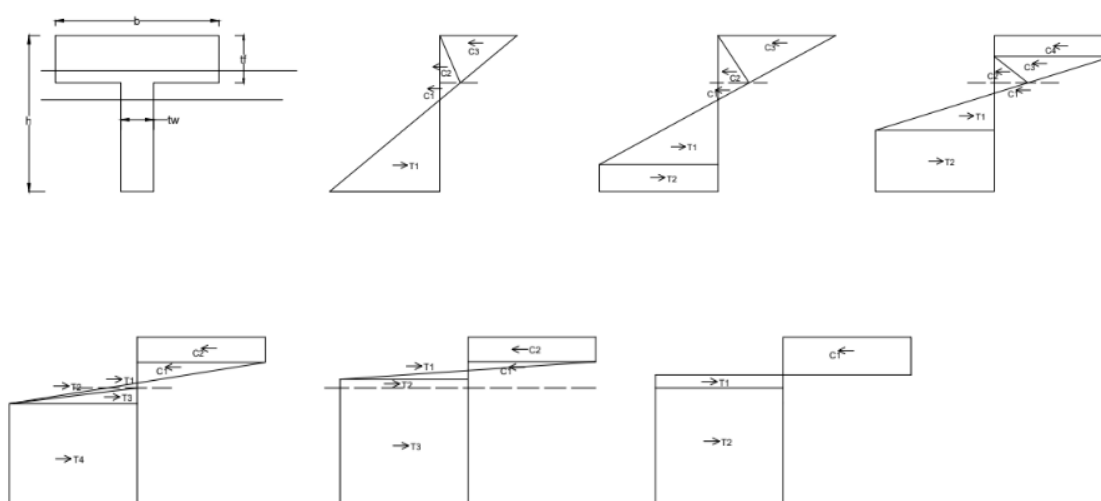


Figura 2.6.1 – Evolução da Tensão - Seção T - Linha neutra na Plastificação na Alma

- Linha neutra se inicia na alma e tem o final da plastificação na mesa da seção, figura 2.6.2.



Figura

2.6.2 – Evolução da Tensão - Seção T - Linha neutra na Plastificação na Mesa

2.6.1 Fase Elástica - Linha neutra na Plastificação na Alma

Para a fase elástica obtemos a seguinte configuração para tensão, figura 2.6.1.1.

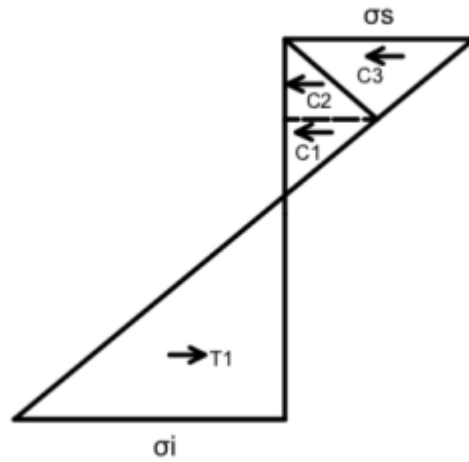


Figura 2.6.1.1 – Configuração de Tensão Seção T – Fase Elástica

Nessa configuração obtemos as seguintes equações:

$$\sigma_s = -\frac{\sigma_i (NS-h)}{NS} \quad (2.6.1.1)$$

$$\sigma_f = -\frac{\sigma_i (NS-h+t_f)}{NS} \quad (2.6.1.2)$$

$$C1 = -\frac{b \sigma_i t_f (NS-h)}{2 NS} \quad (2.6.1.3)$$

$$C2 = -\frac{b \sigma_i t_f (NS-h+t_f)}{2 NS} \quad (2.6.1.4)$$

$$C3 = \frac{\sigma_i t_w (NS-h+t_f)^2}{2 NS} \quad (2.6.1.5)$$

$$T1 = \frac{NS \sigma_i t_w}{2} \quad (2.6.1.6)$$

$$C1 + C2 + C3 - T1 = 0 \quad (2.6.1.7)$$



$$NS = \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w}{2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w} \quad (2.6.1.8)$$

$$C_{P1} = h - \frac{t_f}{3} - \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w}{2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w} \quad (2.6.1.9)$$

$$C_{P2} = h - \frac{2 t_f}{3} - \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w}{2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w} \quad (2.6.1.10)$$

$$C_{P3} = \frac{2 h}{3} - \frac{2 t_f}{3} - \frac{2 (h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w)}{3 (2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w)} \quad (2.6.1.11)$$

$$T_{P1} = \frac{2 (h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w)}{3 (2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w)} \quad (2.6.1.12)$$

$$Me = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + C3 * C_{P3} + T1 * T_{P1} \quad (2.6.1.13)$$

$$Me = \frac{NS \sigma_i t_w (h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w)}{3 (2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w)} - \frac{\sigma_i t_w (NS - h + t_f)^2 \left(t_f - h + \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w}{2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w} \right)}{3 NS} + \quad (2.6.1.14)$$

$$\frac{b \sigma_i t_f (NS - h) \left(\frac{t_f}{3} - h + \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w}{2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w} \right)}{2 NS} + \frac{b \sigma_i t_f \left(\frac{2 t_f}{3} - h + \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w}{2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w} \right) (NS - h + t)}{2 NS}$$

Observamos que a linha neutra durante o regime elástico se mantém sempre no centro geométrico da seção.

2.6.2 Fase Plástica - Linha neutra na Plastificação na Alma

Para a fase plástica obtemos a seguinte configuração de tensão, figura 2.6.2.1

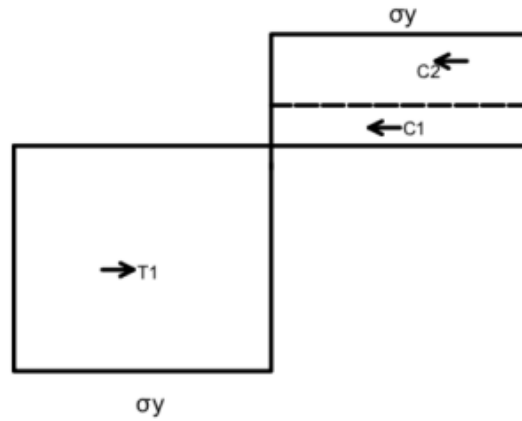


Figura 2.6.2.1 – Configuração de Tensão Seção T – Fase Plástica

Para essa configuração de Tensão obtemos as seguintes equações:

$$T1 = -b \sigma_y (NS - h) \quad (2.6.2.1)$$

$$C1 = b \sigma_y (NS - h + t_f) \quad (2.6.2.2)$$

$$C2 = \sigma_y t_w (h - t_f) \quad (2.6.2.3)$$

$$C1 + C2 - T1 = 0 \quad (2.6.2.4)$$

$$NS = \sigma_y t_w (h - t_f) \quad (2.6.2.5)$$

$$T_{P1} = \frac{h}{2} - \frac{2b h - b t_f - h t_w + t_f t_w}{4b} \quad (2.6.2.6)$$

$$C_{P2} = \frac{t_f}{2} - \frac{h}{2} + \frac{2b h - b t_f - h t_w + t_f t_w}{2b} \quad (2.6.2.7)$$

$$C_{P1} = \frac{t_f}{2} - \frac{h}{2} + \frac{2b h - b t_f - h t_w + t_f t_w}{4b} \quad (2.6.2.8)$$

$$Mp = C1 * C_P1 + T1 * T_P1 + T2 * T_P2 \quad (2.6.2.9)$$

$$Mp = -\frac{\sigma_y (-b^2 t_f^2 - 2 b h^2 t_w + 2 b h t_f t_w + h^2 t_w^2 - 2 h t_f t_w^2 + t_f^2 t_w^2)}{4 b} \quad (2.6.2.10)$$

2.6.3 Fase Elasto-Plástica - Linha neutra na Plastificação na Alma

Para a seção T onde a linha neutra sempre fica presente na alma obtemos as seguintes configurações para tensão durante o Regime Elasto-Plástico. Dividimos em Fase 1, Fase 2 e Fase 3, conforme figura 2.6.3.1.

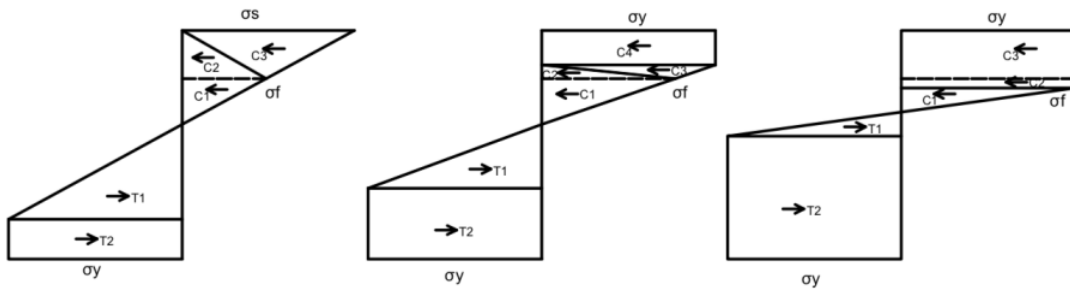


Figura 2.6.3.1 – Configuração de Tensão Seção T – Fase Elasto-Plástica

Para Fase 1 obtemos as seguintes equações:

$$y_e i = \frac{\sigma_y}{E \kappa} \quad (2.6.3.1)$$

$$\sigma_s = -E \kappa (NS - h) \quad (2.6.3.2)$$

$$\sigma_f = -E \kappa (NS - h + t_f) \quad (2.6.3.3)$$

$$C1 = -\frac{E b \kappa t_f (NS - h)}{2} \quad (2.6.3.4)$$

$$C2 = -\frac{E b \kappa t_f (NS - h)}{2} \quad (2.6.3.5)$$

$$C3 = \frac{E \kappa t_w (NS - h + t_f)^2}{2} \quad (2.6.3.6)$$



$$T1 = \frac{\sigma_y}{E\kappa} \quad (2.6.3.7)$$

$$T2 = \frac{\sigma_y^2 t_w}{2E\kappa} \quad (2.6.3.8)$$

$$-C1 - C2 - C3 + T1 + T2 = 0 \quad (2.6.3.9)$$

$$\sigma_y t_w \left(NS - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) + \frac{\sigma_y^2 t_w}{2E\kappa} - \frac{E\kappa t_w (NS-h+t_f)^2}{2} + \frac{Eb\kappa t_f (NS-h)}{2} + \frac{Eb\kappa t_f (NS-h+t_f)}{2} = 0 \quad (2.6.3.10)$$

$$NS = \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - E\kappa t_f t_w}}{E\kappa t_w} \quad (2.6.3.11)$$

$$C_{P1} = h - \frac{t_f}{3} - \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - E\kappa t_f t_w}}{E\kappa t_w} \quad (2.6.3.12)$$

$$C_{P2} = h - \frac{2t_f}{3} - \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - E\kappa t_f t_w}}{E\kappa t_w} \quad (2.6.3.13)$$

$$C_{P3} = h - \frac{2t_f}{3} - \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - E\kappa t_f t_w}}{E\kappa t_w} \quad (2.6.3.14)$$

$$T_{P1} = \frac{\sigma_y}{2E\kappa} + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - E\kappa t_f t_w}}{2E\kappa t_w} \quad (2.6.3.15)$$

$$T_{P2} = \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.6.3.16)$$

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + C3 * C_{P3} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} \quad (2.6.3.17)$$

M =

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_y^3 t_w}{3E^2\kappa^2} - \sigma_y t_w \left(\frac{\sigma_y}{E\kappa} - \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - E\kappa t_f t_w}}{E\kappa t_w} \right) \\ & \left(\frac{\sigma_y}{2E\kappa} + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - E\kappa t_f t_w}}{2E\kappa t_w} \right) - \\ & \frac{E\kappa t_w \left(t_f - h + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - E\kappa t_f t_w}}{E\kappa t_w} \right)^3}{3} \end{aligned} \quad (2.6.3.18)$$

$$\frac{Eb\kappa t_f \left(t_f - h + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{Ek \left(Ek b^2 t_f^2 - Ek b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2 \right) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - Ek t_f t_w}}{Ek t_w} \right) \left(\frac{2t_f}{3} - h + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{Ek \left(Ek b^2 t_f^2 - Ek b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2 \right) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - Ek t_f t_w}}{Ek t_w} \right)}{2}$$

$$- \frac{Eb\kappa t_f \left(h - \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{Ek \left(Ek b^2 t_f^2 - Ek b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2 \right) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - Ek t_f t_w}}{Ek t_w} \right) \left(\frac{t_f}{3} - h + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{Ek \left(Ek b^2 t_f^2 - Ek b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2 \right) + Eb\kappa t_f + Eh\kappa t_w - Ek t_f t_w}}{Ek t_w} \right)}{2}$$

Para a transição entre fase 1 e fase 2 temos, figura 2.6.3.2:

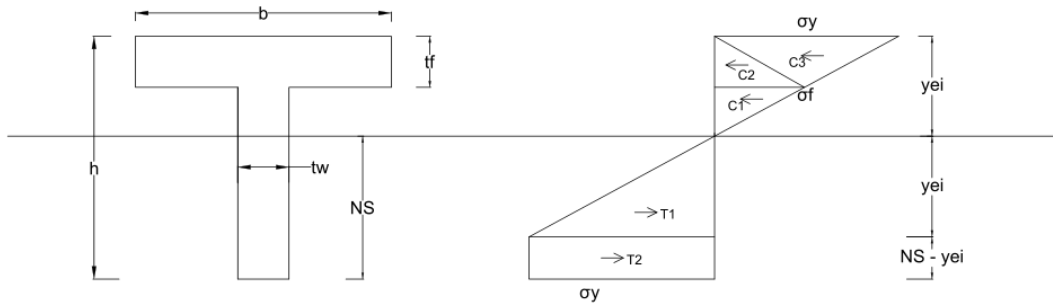


Figura 2.6.3.2 – Configuração de Tensão Seção T – Transição Fase 1 e Fase 2

$$\kappa_s = \frac{\sigma_y \sqrt{4b^2 t_f^2 - 8bh t_f t_w + 12b t_f^2 t_w + 4h^2 t_w^2 + 4h t_f t_w^2 + t_f^2 t_w^2} + 2b\sigma_y t_f - 2h\sigma_y t_w - \sigma_y t_f t_w}{2Eb t_f^2} \quad (2.6.3.19)$$

Os limites da fase 1 vão do final do regime elástico até o resultado da equação (2.6.3.19)

Para a fase 2, figura 2.6.3.3, temos as seguintes equações:

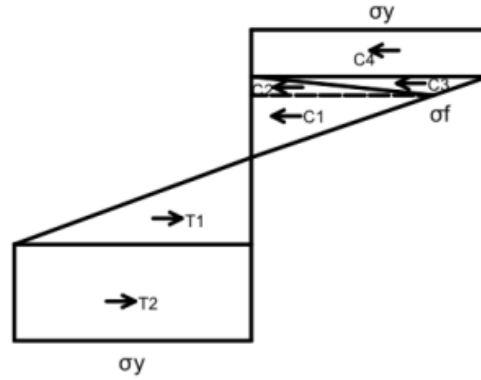


Figura 2.6.3.3 – Configuração de Tensão Seção T – Fase 2

$$y_{ei} = \frac{\sigma_y}{E \kappa} \quad (2.6.3.20)$$

$$\sigma_f = -E \kappa (NS - h + t_f) \quad (2.6.3.21)$$

$$C1 = \frac{E \kappa t_w (NS - h + t_f)^2}{2} \quad (2.6.3.22)$$

$$C2 = -\frac{E b \kappa (NS - h + t_f) \left(NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right)}{2} \quad (2.6.3.23)$$

$$C3 = \frac{b \sigma_y \left(NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right)}{2} \quad (2.6.3.24)$$

$$C4 = -b \sigma_y \left(NS - h + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.6.3.25)$$

$$T1 = \frac{\sigma_y^2 t_w}{2 E \kappa} \quad (2.6.3.26)$$

$$T2 = \sigma_y t_w \left(NS - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.6.3.27)$$

$$\sigma_y t_w \left(NS - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - \frac{b \sigma_y \left(NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right)}{2} + b \sigma_y \left(NS - h + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + \frac{\sigma_y^2 t_w}{2 E \kappa} - \frac{E \kappa t_w (NS - h + t_f)^2}{2} + \frac{E b \kappa (NS - h + t_f) \left(NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right)}{2} = 0 \quad (2.6.3.28)$$

$$-C4 - C3 - C2 - C1 + T1 + T2 = 0 \quad (2.6.3.29)$$



$$NS = -\frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} \quad (2.6.3.30)$$

$$C_{P1} = \frac{2h}{3} - \frac{t_f}{3} + \frac{2(b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w)}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} \quad (2.6.3.31)$$

$$C_{P2} = \frac{h}{3} - \frac{t_f}{3} + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.6.3.32)$$

$$C_{P3} = \frac{h}{3} - \frac{t_f}{3} + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.6.3.33)$$

$$C_{P4} = -\frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} \quad (2.6.3.34)$$

$$T_{P1} = \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.6.3.35)$$

$$T_{P2} = \frac{\sigma_y}{2E\kappa} - \frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{2(E b \kappa - E \kappa t_w)} \quad (2.6.3.36)$$

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + C3 * C_{P3} + C4 * C_{P4} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} + T3 * T_{P3} \quad (2.6.3.37)$$

M =

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_y^3 t_w}{3E^2 \kappa^2} + \sigma_y t_w \left(\frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \\ & \left(\frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{2(E b \kappa - E \kappa t_w)} - \frac{\sigma_y}{2E\kappa} \right) + \\ & b\sigma_y \left(\frac{h}{2} + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{2(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{\sigma_y}{2E\kappa} \right) \\ & \left(h + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \\ & - \frac{b\sigma_y \left(\frac{h}{3} - \frac{t_f}{3} + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \right)}{2} \\ & \frac{\left(h - t_f + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} \\ & \frac{E \kappa t_w \left(h - t_f + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)^2}{2} \end{aligned} \quad (2.6.3.38)$$

$$\frac{\left(\frac{2h}{3} - \frac{2t_f}{3} + \frac{2(b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w)}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} \right)}{2} -$$

$$\frac{E b \kappa \left(h - t_f + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} \right)}{E b \kappa - E \kappa t_w}$$

$$\frac{\left(\frac{2h}{3} - \frac{2t_f}{3} + \frac{2(b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w)}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{\sigma_y}{3 E \kappa} \right)}{2}$$

$$\left(h - t_f + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2}\sqrt{\sigma_y(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right)$$

Para a Transição entre a Fase 2 e a Fase 3 temos, figura 2.6.3.3:

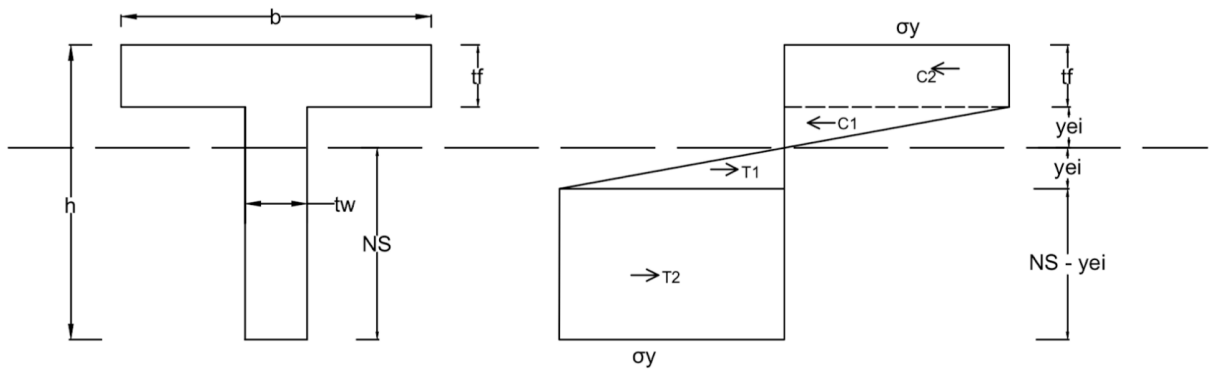


Figura 2.6.3.4 – Configuração de Tensão Seção T – Transição entre Fase 2 e Fase 3

$$\kappa_f = -\frac{2\sigma_y}{E\left(t_f - h + \frac{b t_f}{t_w}\right)} \quad (2.6.3.39)$$

Os limites da fase 2 vão do resultado da equação (2.6.3.19) até o resultado da equação (2.6.3.39)

Para a fase 3, figura 2.6.3.5, temos as seguintes equações:

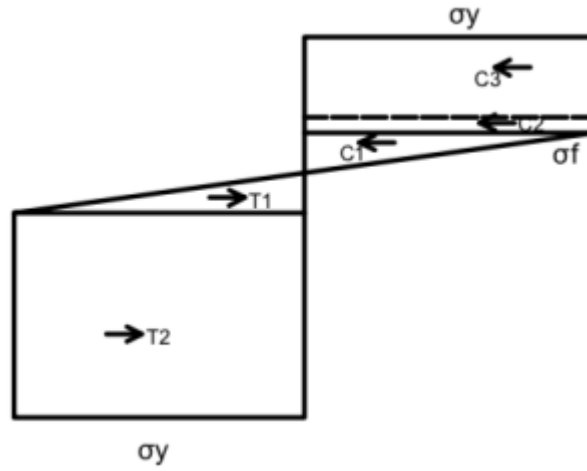


Figura 2.6.3.5 – Configuração de Tensão Seção T – Fase 3

$$C3 = b \sigma_y t_f \quad (2.6.3.40)$$

$$C2 = \sigma_y t_w \left(NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.6.3.41)$$

$$C1 = \sigma_y t_w \left(NS - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.6.3.42)$$

$$T1 = -\sigma_y t_w \left(NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.6.3.43)$$

$$T2 = -\sigma_y t_w \left(NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.6.3.44)$$

$$-C3 - C2 - C1 + T1 + T2 = 0 \quad (2.6.3.45)$$

$$\sigma_y t_w \left(NS - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + \sigma_y t_w \left(NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - b \sigma_y t_f = 0 \quad (2.6.3.46)$$

$$NS = \frac{b \sigma_y t_f - \sigma_y t_w \left(t_f - h + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + \frac{\sigma_y^2 t_w}{E \kappa}}{2 \sigma_y t_w} \quad (2.6.3.47)$$

$$C_{P3} = h - \frac{t_f}{2} - \frac{b \sigma_y t_f - \sigma_y t_w \left(t_f - h + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + \frac{\sigma_y^2 t_w}{E \kappa}}{2 \sigma_y t_w} \quad (2.6.3.48)$$



$$C_{P2} = \frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} + \frac{\sigma_y}{2E\kappa} - \frac{b\sigma_y t_f - \sigma_y t_w \left(t_f - h + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) + \frac{\sigma_y^2 t_w}{E\kappa}}{4\sigma_y t_w} \quad (2.6.3.49)$$

$$C_{P1} = \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.6.3.50)$$

$$T_{P1} = \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.6.3.51)$$

$$T_{P2} = \frac{\sigma_y}{2E\kappa} + \frac{b\sigma_y t_f - \sigma_y t_w \left(t_f - h + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) + \frac{\sigma_y^2 t_w}{E\kappa}}{4\sigma_y t_w} \quad (2.6.3.52)$$

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + C3 * C_{P3} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} \quad (2.6.3.53)$$

$$M = - \frac{\sigma_y (3E^2 b^2 \kappa^2 t_f^2 - 6E^2 b h \kappa^2 t_f t_w - 3E^2 h^2 \kappa^2 t_w^2 + 6E^2 h \kappa^2 t_f t_w - 3E^2 \kappa^2 t_f^2 t_w^2 + 4\sigma_y^2 t_w^2)}{12E^2 \kappa^2 t_w} \quad (2.6.3.54)$$

Os limites da fase 3 vão do resultado da equação (2.6.3.39) até a plastificação completa.

Resultado gráfico para uma seção T de $b = 0.06\text{m}$, $h=0.2\text{m}$ $t_f = 0.03\text{m}$ e $t_w=0.03\text{m}$, tensão de escoamento = 250 MPa e Modulo de elasticidade de $2,0 * 10^5$ MPa, figura 2.6.3.6.

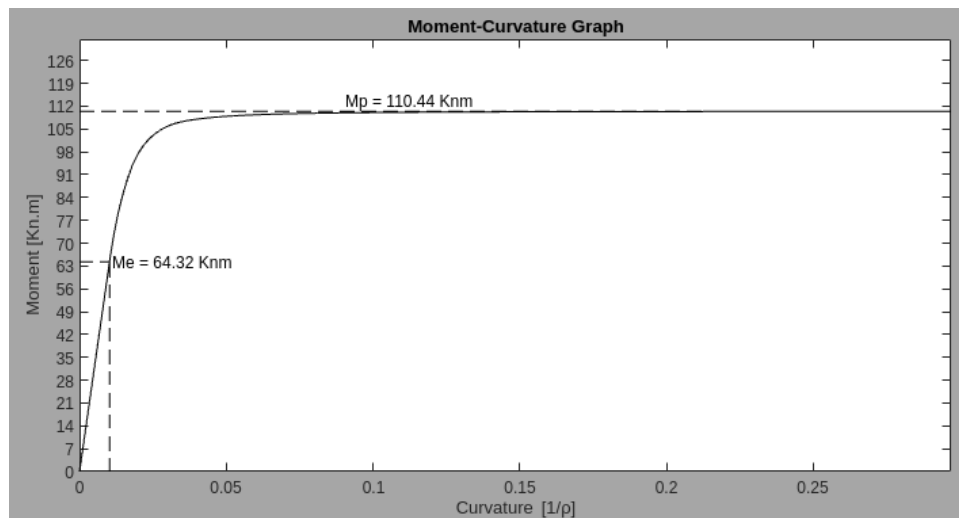


Figura 2.6.3.6 – Gráfico Momento x Curvatura Seção T – Linha neutra de
Plastificação sempre na alma

2.6.4 Fase Elástica - Linha neutra na Plastificação na Mesa

Para a fase elástica obtemos a seguinte configuração para tensão, figura 2.6.4.1.

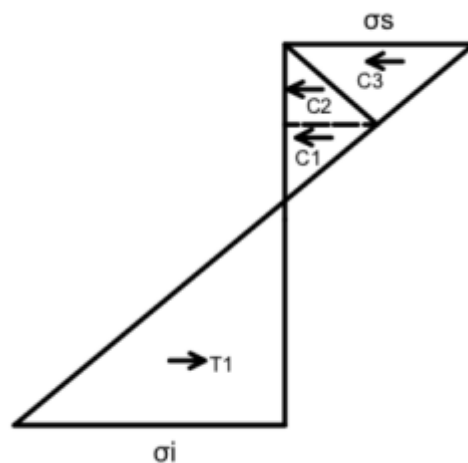


Figura 2.6.4.1 – Configuração de Tensão Seção T – Fase Elástica



Concluimos que essa fase é análoga para todas as seções T, independente do caminho da linha neutra regime pós elástico.

Nessa configurações obtemos as seguintes equações:

$$\sigma_s = -\frac{\sigma_i (NS-h)}{NS} \quad (2.6.4.1)$$

$$\sigma_f = -\frac{\sigma_i (NS-h+t_f)}{NS} \quad (2.6.4.2)$$

$$C1 = -\frac{b \sigma_i t_f (NS-h)}{2 NS} \quad (2.6.4.3)$$

$$C2 = -\frac{b \sigma_i t_f (NS-h+t_f)}{2 NS} \quad (2.6.4.4)$$

$$C3 = \frac{\sigma_i t_w (NS-h+t_f)^2}{2 NS} \quad (2.6.4.5)$$

$$T1 = \frac{NS \sigma_i t_w}{2} \quad (2.6.4.6)$$

$$C1 + C2 + C3 - T1 = 0 \quad (2.6.4.7)$$

$$NS = \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w}{2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w} \quad (2.6.4.8)$$

$$C_{P1} = h - \frac{t_f}{3} - \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w}{2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w} \quad (2.6.4.9)$$

$$C_{P2} = h - \frac{2 t_f}{3} - \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2 b h t_f - 2 h t_f t_w}{2 b t_f + 2 h t_w - 2 t_f t_w} \quad (2.6.4.10)$$



$$C_{P3} = \frac{2h}{3} - \frac{2t_f}{3} - \frac{2(h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2b h t_f - 2h t_f t_w)}{3(2b t_f + 2h t_w - 2t_f t_w)} \quad (2.6.4.11)$$

$$T_{P1} = \frac{2(h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2b h t_f - 2h t_f t_w)}{3(2b t_f + 2h t_w - 2t_f t_w)} \quad (2.6.4.12)$$

$$Me = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + C3 * C_{P3} + T1 * T_{P1} \quad (2.6.4.13)$$

$$Me = \frac{NS \sigma_i t_w (h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2b h t_f - 2h t_f t_w)}{3(2b t_f + 2h t_w - 2t_f t_w)} - \frac{\sigma_i t_w (NS - h + t_f)^2 \left(t_f - h + \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2b h t_f - 2h t_f t_w}{2b t_f + 2h t_w - 2t_f t_w} \right)}{3NS} +$$

$$\frac{b \sigma_i t_f (NS - h) \left(\frac{t_f}{3} - h + \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2b h t_f - 2h t_f t_w}{2b t_f + 2h t_w - 2t_f t_w} \right)}{2NS} + \frac{b \sigma_i t_f \left(\frac{2t_f}{3} - h + \frac{h^2 t_w - b t_f^2 + t_f^2 t_w + 2b h t_f - 2h t_f t_w}{2b t_f + 2h t_w - 2t_f t_w} \right) (NS - h + t_f)}{2NS} \quad (2.6.4.14)$$

Observamos que a linha neutra durante o regime elástico se mante sempre no centro geométrico da seção.

2.6.5 Fase Plástica - Linha neutra na Plastificação na Mesa

Para a fase plástica obtemos a seguinte configuração de tensão, figura 2.6.5.1

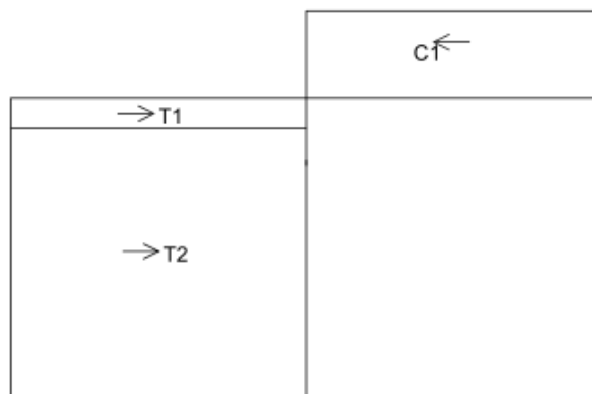


Figura 2.6.5.1 – Configuração de Tensão Seção T – Fase Plástica



$$C1 = b \sigma_y t_f \quad (2.6.5.1)$$

$$T1 = -\sigma_y t_w (NS - h + t_f) \quad (2.6.5.2)$$

$$T2 = NS \sigma_y t_w \quad (2.6.5.3)$$

$$T1 + T2 - C1 = 0 \quad (2.6.5.4)$$

$$NS = \frac{b t_f + h t_w - t_f t_w}{2 t_w} \quad (2.6.5.5)$$

$$C_{P1} = \frac{b t_f + h t_w - t_f t_w}{2 t_w} \quad (2.6.5.6)$$

$$T_{P1} = \frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} - \frac{b t_f + h t_w - t_f t_w}{4 t_w} \quad (2.6.5.7)$$

$$T_{P2} = \frac{b t_f + h t_w - t_f t_w}{4 t_w} \quad (2.6.5.8)$$

$$Mp = T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} + C1 * C_{P1} \quad (2.6.5.8)$$

$$Mp = \frac{\sigma_y (-b^2 t_f^2 + 2 b h t_f t_w + h^2 t_w^2 - 2 h t_f t_w^2 + t_f^2 t_w^2)}{4 t_w} \quad (2.6.5.9)$$

2.6.6 Fase Elasto-Plástica - Linha neutra na Plastificação na Mesa

Para a seção T onde a linha neutra entra mesa durante a plastificação obtemos as seguintes configurações para tensão durante o Regime Elasto-Plástico. Dividimos em Fase 1, Fase 2, Fase 3 e Fase 4, conforme figura 2.6.6.1.

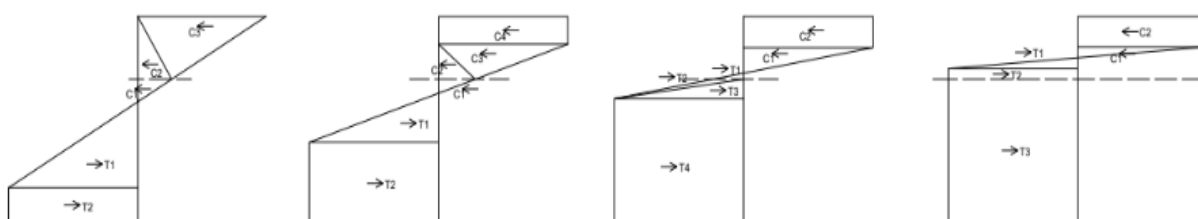


Figura 2.6.6.1 – Configuração de Tensão Seção T – Fase Elasto-Plástica

Para Fase 1, figura 2.6.6.2, obtemos as seguintes equações:

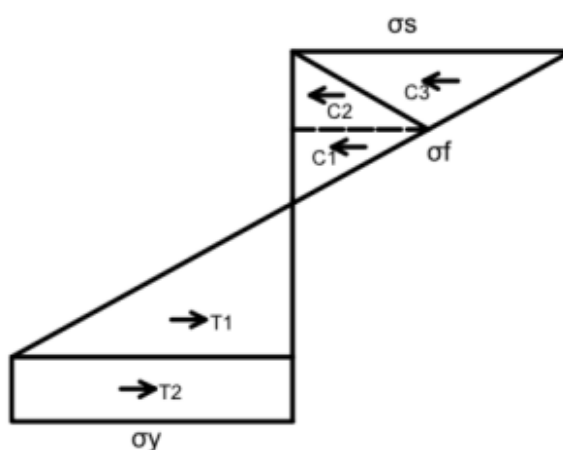


Figura 2.6.6.2 – Configuração de Tensão Seção T – Fase 1 Elasto-Plástica



Para Fase 1 obtemos as seguintes equações:

$$y_e \dot{i} = \frac{\sigma_y}{E \kappa} \quad (2.6.6.1)$$

$$\sigma_s = -E \kappa (NS - h) \quad (2.6.6.2)$$

$$\sigma_f = -E \kappa (NS - h + t_f) \quad (2.6.6.3)$$

$$C1 = -\frac{E b \kappa t_f (NS - h)}{2} \quad (2.6.6.4)$$

$$C2 = -\frac{E b \kappa t_f (NS - h)}{2} \quad (2.6.6.5)$$

$$C3 = \frac{E \kappa t_w (NS - h + t_f)^2}{2} \quad (2.6.6.6)$$

$$T1 = \frac{\sigma_y}{E \kappa} \quad (2.6.6.7)$$

$$T2 = \frac{\sigma_y^2 t_w}{2 E \kappa} \quad (2.6.6.8)$$

$$-C1 - C2 - C3 + T1 + T2 = 0 \quad (2.6.6.9)$$

$$\sigma_y t_w \left(NS - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + \frac{\sigma_y^2 t_w}{2 E \kappa} - \frac{E \kappa t_w (NS - h + t_f)^2}{2} + \frac{E b \kappa t_f (NS - h)}{2} + \frac{E b \kappa t_f (NS - h + t_f)}{2} = 0 \quad (2.6.6.10)$$

$$NS = \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E \kappa (E \kappa b^2 t_f^2 - E \kappa b t_f^2 t_w + 2 \sigma_y b t_f t_w - 2 \sigma_y t_f t_w^2 + 2 h \sigma_y t_w^2) + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{E \kappa t_w} \quad (2.6.6.11)$$

$$Cp1 = h - \frac{t_f}{3} - \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E \kappa (E \kappa b^2 t_f^2 - E \kappa b t_f^2 t_w + 2 \sigma_y b t_f t_w - 2 \sigma_y t_f t_w^2 + 2 h \sigma_y t_w^2) + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{E \kappa t_w} \quad (2.6.6.12)$$

$$Cp2 = h - \frac{2 t_f}{3} - \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E \kappa (E \kappa b^2 t_f^2 - E \kappa b t_f^2 t_w + 2 \sigma_y b t_f t_w - 2 \sigma_y t_f t_w^2 + 2 h \sigma_y t_w^2) + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{E \kappa t_w} \quad (2.6.6.13)$$

$$Cp3 = h - \frac{2 t_f}{3} - \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E \kappa (E \kappa b^2 t_f^2 - E \kappa b t_f^2 t_w + 2 \sigma_y b t_f t_w - 2 \sigma_y t_f t_w^2 + 2 h \sigma_y t_w^2) + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{E \kappa t_w} \quad (2.6.6.14)$$

$$Tp1 = \frac{\sigma_y}{2 E \kappa} + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E \kappa (E \kappa b^2 t_f^2 - E \kappa b t_f^2 t_w + 2 \sigma_y b t_f t_w - 2 \sigma_y t_f t_w^2 + 2 h \sigma_y t_w^2) + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{2 E \kappa t_w} \quad (2.6.6.15)$$

$$T_{P2} = \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.6.6.16)$$

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + C3 * C_{P3} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} \quad (2.6.6.17)$$

M =

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_y^3 t_w}{3E^2 \kappa^2} - \sigma_y t_w \left(\frac{\sigma_y}{E\kappa} - \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2)} + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E\kappa t_w} \right) \\ & \left(\frac{\sigma_y}{2E\kappa} + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2)} + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{2E\kappa t_w} \right) - \\ & \frac{E\kappa t_w \left(t_f - h + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2)} + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E\kappa t_w} \right)^3}{3} \quad (2.6.6.18) \\ & \frac{E b \kappa t_f \left(t_f - h + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2)} + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E\kappa t_w} \right) \left(\frac{2t_f}{3} - h + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2)} + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E\kappa t_w} \right)}{2} \\ & - \frac{E b \kappa t_f \left(h - \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2)} + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E\kappa t_w} \right) \left(\frac{t_f}{3} - h + \frac{\sigma_y t_w - \sqrt{E\kappa (E\kappa b^2 t_f^2 - E\kappa b t_f^2 t_w + 2\sigma_y b t_f t_w - 2\sigma_y t_f t_w^2 + 2h\sigma_y t_w^2)} + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E\kappa t_w} \right)}{2} \end{aligned}$$

Para a transição entre fase 1 e fase 2 temos, figura 2.6.3.2:

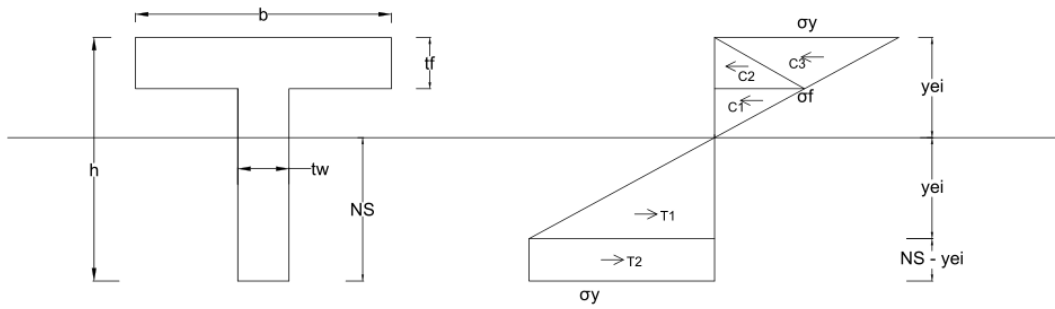


Figura 2.6.6.3 – Configuração de Tensão Seção T – Transição Fase 1 e Fase 2

$$\kappa_s = \frac{\sigma_y \sqrt{4b^2 t_f^2 - 8b h t_f t_w + 12b t_f^2 t_w + 4h^2 t_w^2 + 4h t_f t_w^2 + t_f^2 t_w^2} + 2b \sigma_y t_f - 2h \sigma_y t_w - \sigma_y t_f t_w}{2E b t_f^2} \quad (2.6.6.19)$$

Os limites da fase 1 vão do final do regime elástico até o resultado da equação

(2.6.6.19)

Para a fase 2, figura 2.6.3.3, temos as seguintes equações:

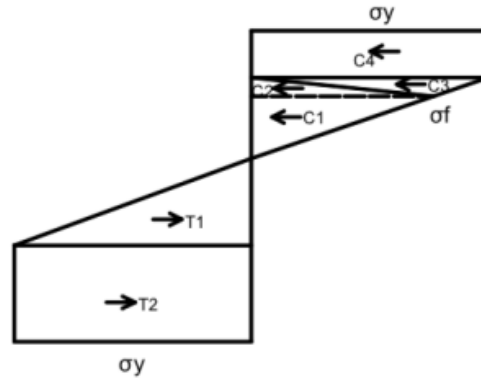


Figura 2.6.6.4 – Configuração de Tensão Seção T – Fase 2

$$y_e i = \frac{\sigma_y}{E \kappa} \quad (2.6.6.20)$$

$$\sigma_f = -E \kappa (NS - h + t_f) \quad (2.6.6.21)$$

$$C1 = \frac{E \kappa t_w (NS - h + t_f)^2}{2} \quad (2.6.6.22)$$

$$C2 = -\frac{E b \kappa (NS - h + t_f) (NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa})}{2} \quad (2.6.6.23)$$

$$C3 = \frac{b \sigma_y (NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa})}{2} \quad (2.6.6.24)$$

$$C4 = -b \sigma_y (NS - h + \frac{\sigma_y}{E \kappa}) \quad (2.6.6.25)$$

$$T1 = \frac{\sigma_y^2 t_w}{2 E \kappa} \quad (2.6.6.26)$$



$$T2 = \sigma_y t_w \left(NS - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \quad (2.6.6.27)$$

$$\sigma_y t_w \left(NS - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) - \frac{b\sigma_y \left(NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} + b\sigma_y \left(NS - h + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) + \frac{\sigma_y^2 t_w}{2E\kappa} - \frac{E\kappa t_w \left(NS - h + t_f \right)^2}{2} + \frac{E b \kappa \left(NS - h + t_f \right) \left(NS - h + t_f + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} = 0 \quad (2.6.6.28)$$

$$-C4 - C3 - C2 - C1 + T1 + T2 = 0 \quad (2.6.6.29)$$

$$NS = - \frac{b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{E b \kappa - E \kappa t_w} \quad (2.6.6.30)$$

$$C_{P1} = \frac{2h}{3} - \frac{2t_f}{3} + \frac{2 \left(b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w} \right)}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} \quad (2.6.6.31)$$

$$C_{P2} = \frac{h}{3} - \frac{t_f}{3} + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.6.6.32)$$

$$C_{P3} = \frac{h}{3} - \frac{t_f}{3} + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.6.6.33)$$

$$C_{P4} = - \frac{b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{E b \kappa - E \kappa t_w} \quad (2.6.6.34)$$

$$T_{P1} = \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \quad (2.6.6.35)$$

$$T_{P2} = \frac{\sigma_y}{2E\kappa} - \frac{b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{2(E b \kappa - E \kappa t_w)} \quad (2.6.6.36)$$

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + C3 * C_{P3} + C4 * C_{P4} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} + T3 * T_{P3} \quad (2.6.6.37)$$

M =

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_y^3 t_w}{3E^2 \kappa^2} + \sigma_y t_w \left(\frac{b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{E b \kappa - E \kappa t_w} + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \\ & \left(\frac{b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{2(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{\sigma_y}{2E\kappa} \right) + \\ & b\sigma_y \left(\frac{h}{2} + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{2(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{\sigma_y}{2E\kappa} \right) \\ & \left(h + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{E b \kappa - E \kappa t_w} - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \\ & - \frac{b\sigma_y \left(\frac{h}{3} - \frac{t_f}{3} + \frac{b\sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y \left(2b\sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w \right) + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{2\sigma_y}{3E\kappa} \right)}{2} \end{aligned} \quad (2.6.6.38)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(h - t_f + \frac{b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \\
 & + \frac{E \kappa t_w \left(h - t_f + \frac{b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} \right)^2}{2} \\
 & - \frac{\left(\frac{2h}{3} - \frac{2t_f}{3} + \frac{2 (b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w)}{3 (E b \kappa - E \kappa t_w)} \right)}{2} \\
 & + \frac{E b \kappa \left(h - t_f + \frac{b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} \right)}{2} \\
 & + \frac{\left(\frac{2h}{3} - \frac{2t_f}{3} + \frac{2 (b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w)}{3 (E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{\sigma_y}{3 E \kappa} \right)}{2} \\
 & + \left(h - t_f + \frac{b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right)
 \end{aligned}$$

Para transição entre a Fase 2 e Fase 3, figura 2.6.6.5, temos a seguinte equação para kappa.

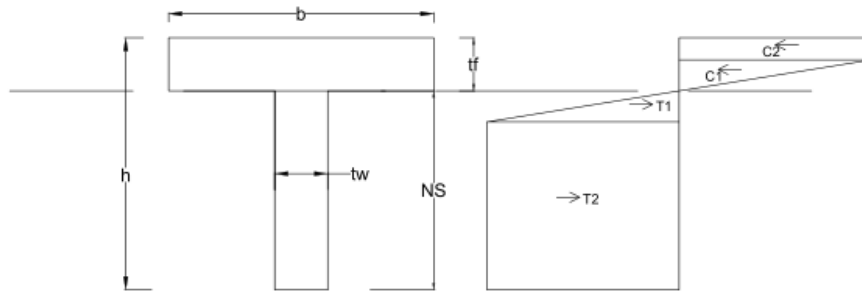


Figura 2.6.6.5 – Configuração de Tensão Seção T – Transição entre Fase 2 e Fase 3

$$\kappa_f = - \frac{2 \sigma_y}{E \left(t_f - h + \frac{b t_f}{t_w} \right)} \quad (2.6.6.39)$$

Os limites da Fase 2 vão do resultado da (2.6.6.19) até a equação (2.6.6.39).

Para a Fase 3, figura 2.6.6.5, temos as seguintes equações:

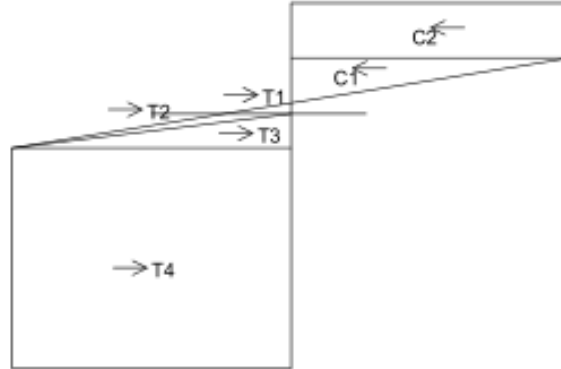


Figura 2.6.6.5 – Configuração de Tensão Seção T – Fase 3

$$y_e i = \frac{\sigma_y}{E \kappa} \quad (2.6.6.40)$$

$$\sigma_f = E \kappa (NS - h + t_f) \quad (2.6.6.41)$$

$$C2 = -b \sigma_y \left(NS - h + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.6.6.42)$$

$$C1 = \frac{b \sigma_y^2}{2 E \kappa} \quad (2.6.6.43)$$

$$T1 = \frac{E b \kappa (NS - h + t_f)^2}{2} \quad (2.6.6.44)$$

$$T2 = -\frac{E \kappa t_w (NS - h + t_f) \left(NS - h + t_f - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right)}{2} \quad (2.6.6.45)$$

$$T3 = -\frac{\sigma_y t_w \left(NS - h + t_f - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right)}{2} \quad (2.6.6.46)$$



$$T4 = \sigma_y t_w \left(NS - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) \quad (2.6.6.47)$$

$$-C_2 - C_1 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0 \quad (2.6.6.48)$$

$$\sigma_y t_w \left(NS - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) - \frac{\sigma_y t_w \left(NS - h + t_f - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} + b \sigma_y \left(NS - h + \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right) - \frac{b \sigma_y^2}{2E\kappa} + \frac{E b \kappa (NS - h + t_f)^2}{2} - \frac{E \kappa t_w (NS - h + t_f) \left(NS - h + t_f - \frac{\sigma_y}{E\kappa} \right)}{2} = 0 \quad (2.6.6.49)$$

$$NS = - \frac{b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{E b \kappa - E \kappa t_w} \quad (2.6.6.50)$$

$$C_{P2} = \frac{h}{3} - \frac{t_f}{3} + \frac{b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{2 \sigma_y}{3 E \kappa} \quad (2.6.6.51)$$

$$C_{P3} = \frac{h}{3} - \frac{t_f}{3} + \frac{b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{2 \sigma_y}{3 E \kappa} \quad (2.6.6.52)$$

$$C_{P1} = \frac{2 \sigma_y}{3 E \kappa} \quad (2.6.6.53)$$

$$T_{P1} = \frac{2 t_f}{3} - \frac{2 h}{3} - \frac{2 \left(b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w \right)}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} \quad (2.6.6.54)$$

$$T_{P2} = \frac{2 t_f}{3} - \frac{2 h}{3} - \frac{2 \left(b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w \right)}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{\sigma_y}{3 E \kappa} \quad (2.6.6.55)$$

$$T_{P3} = \frac{2 t_f}{3} - \frac{2 h}{3} - \frac{2 \left(b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w \right)}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{\sigma_y}{3 E \kappa} \quad (2.6.6.56)$$

$$T_{P4} = \frac{2 t_f}{3} - \frac{2 h}{3} - \frac{2 \left(b \sigma_y - \sqrt{2} \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)} + \sigma_y t_w - E b h \kappa + E b \kappa t_f + E h \kappa t_w - E \kappa t_f t_w \right)}{3(E b \kappa - E \kappa t_w)} + \frac{\sigma_y}{3 E \kappa} \quad (2.6.6.57)$$

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} + T3 * T_{P3} * T4 * T_{P4} \quad (2.6.6.58)$$

M =

$$\begin{aligned}
 & \frac{8 b \sigma_y^3 t_w^2 - 4 \sqrt{2} \left(\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w) \right)^{3/2} + 8 b^2 \sigma_y^3 t_w - 3 E^2 b^3 \kappa^2 \sigma_y t_f^2}{- 3 E^2 h^2 \kappa^2 \sigma_y t_w^3 - 3 E^2 \kappa^2 \sigma_y t_f^2 t_w^3 + 6 E^2 b h^2 \kappa^2 \sigma_y t_w^2 - 3 E^2 b^2 h^2 \kappa^2 \sigma_y t_w + 3 E^2 b \kappa^2 \sigma_y t_f^2 t_w^2 + 3 E^2 b^2 \kappa^2 \sigma_y t_f^2 t_w} \\
 & + 6 E^2 h \kappa^2 \sigma_y t_f t_w^3 - 12 E^2 b h \kappa^2 \sigma_y t_f t_w^2 + 6 E^2 b^2 h \kappa^2 \sigma_y t_f t_w \cdot \\
 & \frac{+ 6 \sqrt{2} E b^2 \kappa \sigma_y t_f \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)}}{6 E^2 \kappa^2 (b - t_w)^2} \\
 & \frac{+ 6 \sqrt{2} E h \kappa \sigma_y t_w^2 \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)}}{6 \sqrt{2} E \kappa \sigma_y t_f t_w^2 \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)}} \\
 & \frac{- 6 \sqrt{2} E b h \kappa \sigma_y t_w \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)}}{6 \sqrt{2} E b h \kappa \sigma_y t_w \sqrt{\sigma_y (2 b \sigma_y t_w + E b^2 \kappa t_f + E h \kappa t_w^2 - E \kappa t_f t_w^2 - E b h \kappa t_w)}}
 \end{aligned} \tag{2.6.6.59}$$

Para transição entre a Fase 3 e Fase 4, figura 2.6.6.6, temos a seguinte equação para kappa.

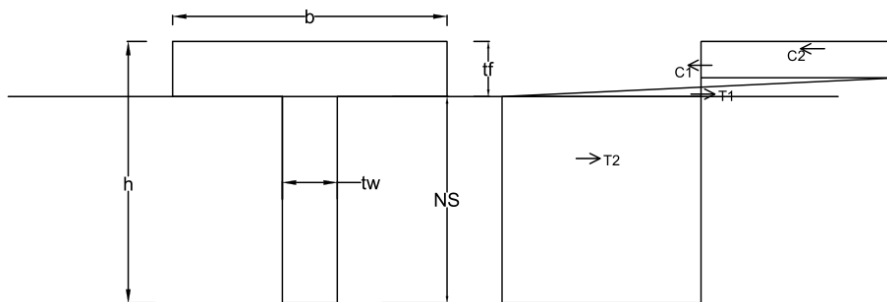


Figura 2.6.6.6 – Configuração de Tensão Seção T – Transição entre Fase 3 e Fase 4

$$\kappa_f 3 = \frac{2 \sigma_y}{E \left(t_f - \frac{t_w (h - t_f)}{b} \right)} \quad (2.6.6.60)$$

Os limites da Fase 3 vão do resultado da (2.6.6.39) até a equação (2.6.6.60).

Para a Fase 4, figura 2.6.6.7, obtemos as seguintes equações:

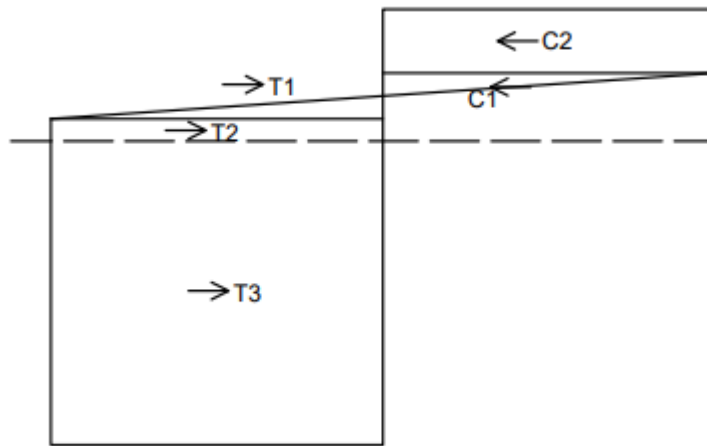


Figura 2.6.6.7 – Configuração de Tensão Seção T – Fase 4

$$C2 = -b \sigma_y \left(NS - h + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.6.6.61)$$

$$C1 = \frac{b \sigma_y^2}{2 E \kappa} \quad (2.6.6.62)$$

$$T1 = \frac{b \sigma_y^2}{2 E \kappa} \quad (2.6.6.63)$$

$$T2 = b \sigma_y \left(NS - h + t_f - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.6.6.64)$$

$$T3 = \sigma_y t_w (h - t_f) \quad (2.6.6.65)$$



$$-C_2 - C_1 + T_1 + T_2 + T_3 = 0 \quad (2.6.6.66)$$

$$b \sigma_y \left(NS - h + t_f - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + \sigma_y t_w (h - t_f) + b \sigma_y \left(NS - h + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) \quad (2.6.6.67)$$

$$NS = \frac{b \sigma_y \left(h - t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + b \sigma_y \left(h - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - \sigma_y t_w (h - t_f)}{2 b \sigma_y} \quad (2.6.6.68)$$

$$C_{P2} = \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{2 E \kappa} - \frac{b \sigma_y \left(h - t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + b \sigma_y \left(h - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - \sigma_y t_w (h - t_f)}{4 b \sigma_y} \quad (2.6.6.69)$$

$$C_{P1} = \frac{2 \sigma_y}{3 E \kappa} \quad (2.6.6.70)$$

$$T_{P1} = \frac{2 \sigma_y}{3 E \kappa} \quad (2.6.6.71)$$

$$T_{P2} = \frac{t_f}{2} - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{2 E \kappa} + \frac{b \sigma_y \left(h - t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + b \sigma_y \left(h - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - \sigma_y t_w (h - t_f)}{4 b \sigma_y} \quad (2.6.6.72)$$

$$T_{P3} = \frac{t_f}{2} - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{2 E \kappa} + \frac{b \sigma_y \left(h - t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + b \sigma_y \left(h - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - \sigma_y t_w (h - t_f)}{4 b \sigma_y} \quad (2.6.6.73)$$

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} + T3 * T_{P3} \quad (2.6.6.74)$$

$$\begin{aligned} M = & \frac{2 b \sigma_y^3}{3 E^2 \kappa^2} - b \sigma_y \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa} - h + \frac{b \sigma_y \left(h - t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + b \sigma_y \left(h - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - \sigma_y t_w (h - t_f)}{2 b \sigma_y} \right) \left(\frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{2 E \kappa} - \frac{b \sigma_y \left(h - t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + b \sigma_y \left(h - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - \sigma_y t_w (h - t_f)}{4 b \sigma_y} \right) - \\ & b \sigma_y \left(h - t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} - \frac{b \sigma_y \left(h - t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + b \sigma_y \left(h - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - \sigma_y t_w (h - t_f)}{2 b \sigma_y} \right) \left(\frac{t_f}{2} - \frac{h}{2} + \frac{\sigma_y}{2 E \kappa} + \frac{b \sigma_y \left(h - t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + b \sigma_y \left(h - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - \sigma_y t_w (h - t_f)}{4 b \sigma_y} \right) + \\ & \sigma_y t_w (h - t_f) \left(\frac{t_f}{2} - \frac{h}{2} + \frac{b \sigma_y \left(h - t_f + \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) + b \sigma_y \left(h - \frac{\sigma_y}{E \kappa} \right) - \sigma_y t_w (h - t_f)}{2 b \sigma_y} \right) \end{aligned} \quad (2.6.6.75)$$

Resultado gráfico para uma seção T de b = 0.12m, h=0.2m tf = 0,04m e tw=0,02m, tensão de escoamento = 250 MPa e Módulo de elasticidade de 2,0 * 10⁵ MPa, figura 2.6.3.6.

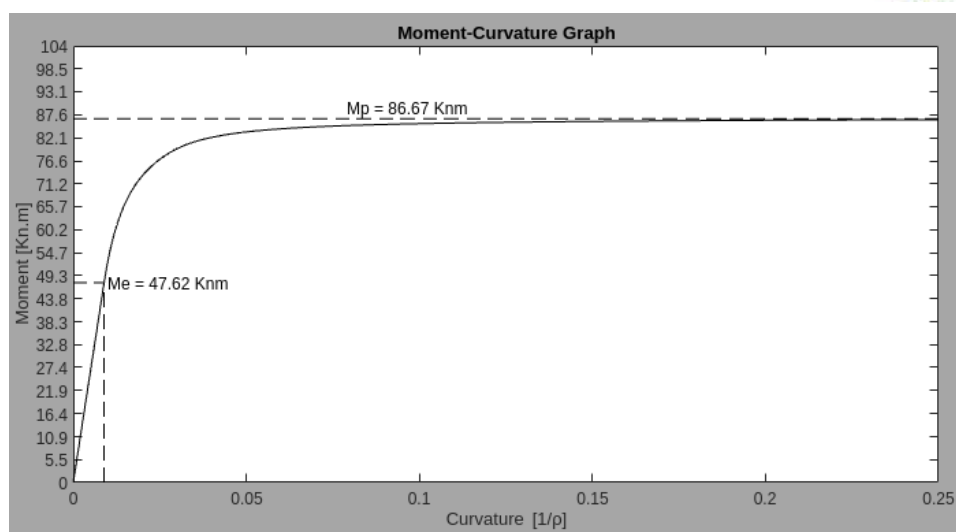


Figura 2.6.3.6 – Gráfico Momento x Curvatura Seção T – Linha neutra de
Plastificação final na Mesa

2.7 Seção Circular

Para a seção circular obtemos as seguintes configurações de tensão, figura 2.7.1. Como pode ser observado a seção passa por 3 fases distintas. Fase elástica, Fase elasto-plástica e fase plástica.

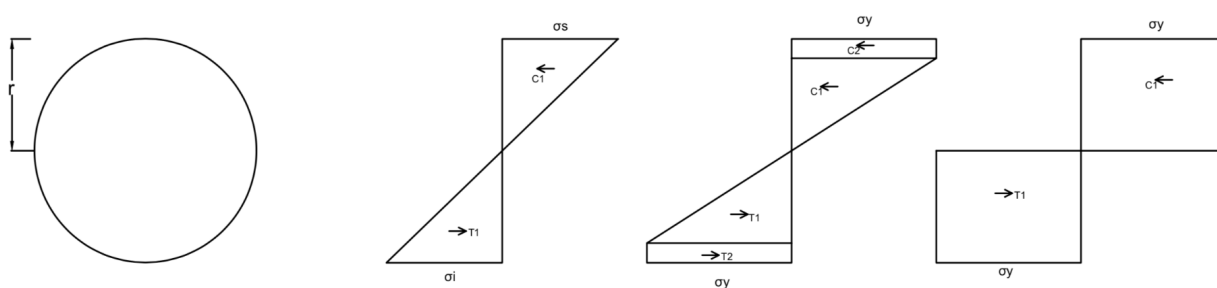


Figura 2.7.1 – Configurações de Tensão - Seção Circular

2.7.1 Fase Elástica

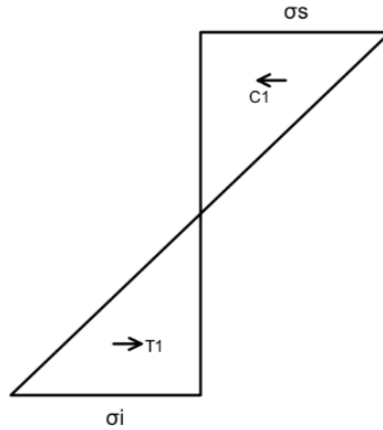


Figura 2.7.1.1 – Configurações de Tensão - Seção Circular Regime Elástico

Para o Regime elástico da seção circular, obtemos as seguintes equações:

$$C1 = \frac{\pi r^2 \sigma_y}{4} \quad (2.7.1.1)$$

$$T1 = \frac{\pi r^2 \sigma_y}{4} \quad (2.7.1.2)$$

$$C_{P1} = \frac{2r}{3} \quad (2.7.1.13)$$

$$T_{P1} = \frac{2r}{3} \quad (2.7.1.14)$$

$$Me = C1 * C_{P1} + T1 * T_{P1} \quad (2.7.1.15)$$

$$Me = \frac{\pi r^3 \sigma_y}{3} \quad (2.7.1.16)$$

Para a seção circular, com é bissimétrica, a linha neutra está sempre em r ($NS = r$).

2.7.2 Fase Plástica

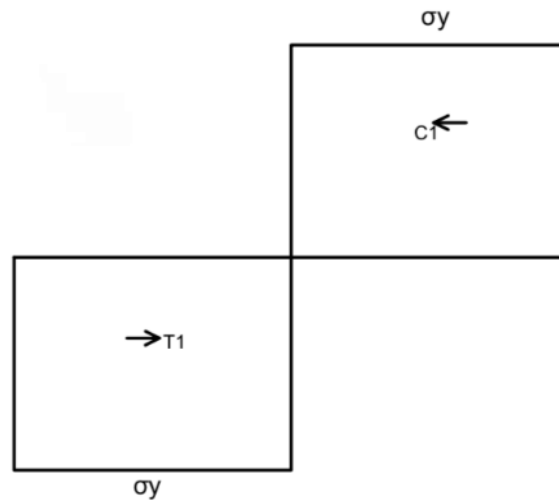


Figura 2.7.2.1 – Configurações de Tensão - Seção Circular Regime Plástico

Para o regime plástico da seção circular, figura 2.7.2.1, obtemos as seguintes equações:

$$C1 = \frac{\pi r^2 \sigma_y}{2} \quad (2.7.1.1)$$

$$T1 = \frac{\pi r^2 \sigma_y}{2} \quad (2.7.1.2)$$

$$C_{P1} = \frac{r}{2} \quad (2.7.1.13)$$

$$T_{P1} = \frac{r}{2} \quad (2.7.1.14)$$

$$M_p = C_1 * C_{P1} + T_1 * T_{P1} \quad (2.7.1.15)$$

$$M_p = \frac{\pi r^3 \sigma_y}{2} \quad (2.7.1.16)$$

2.7.3 Fase Elasto-Plástica

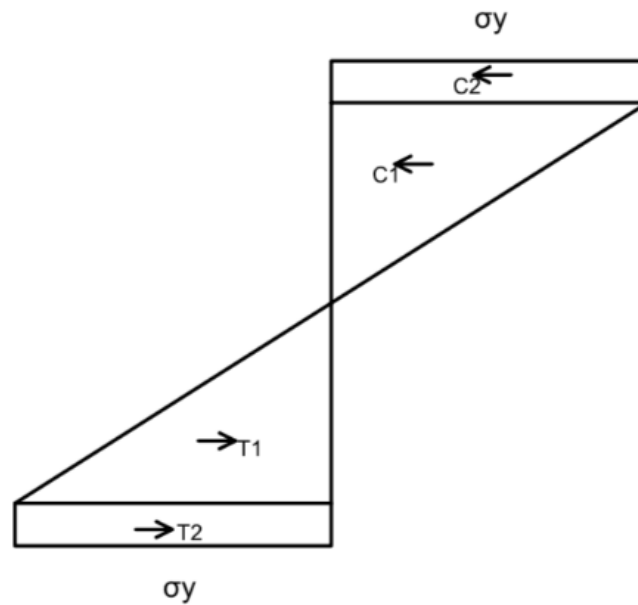


Figura 2.7.3.1 – Configurações de Tensão - Seção Circular Regime Elasto-Plástico

Para o regime elasto-plástico, figura 2.7.3.1, obtemos as seguintes equações:

$$y_{ei} = \frac{\sigma_y}{E \kappa} \quad (2.7.3.1)$$

$$C_1 = \frac{\sigma_y \left(\frac{\pi r^2}{2} + \frac{r^2 \left(\sin \left(2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right) - 2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right)}{2} \right)}{2} \quad (2.7.3.2)$$

$$C_2 = - \frac{r^2 \sigma_y \left(\sin \left(2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right) - 2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right)}{2} \quad (2.7.3.3)$$



$$T1 = \frac{\sigma_y \left(\frac{\pi r^2}{2} + \frac{r^2 \left(\sin \left(2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right) - 2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right)}{2} \right)}{2} \quad (2.7.3.4)$$

$$T2 = - \frac{r^2 \sigma_y \left(\sin \left(2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right) - 2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right)}{2} \quad (2.7.3.5)$$

$$C_{P1} = \frac{2 \sigma_y}{3 E \kappa} \quad (2.7.3.6)$$

$$C_{P2} = \frac{r}{2} + \frac{\sigma_y}{2 E \kappa} \quad (2.7.3.4)$$

$$T_{P1} = \frac{2 \sigma_y}{3 E \kappa} \quad (2.7.3.5)$$

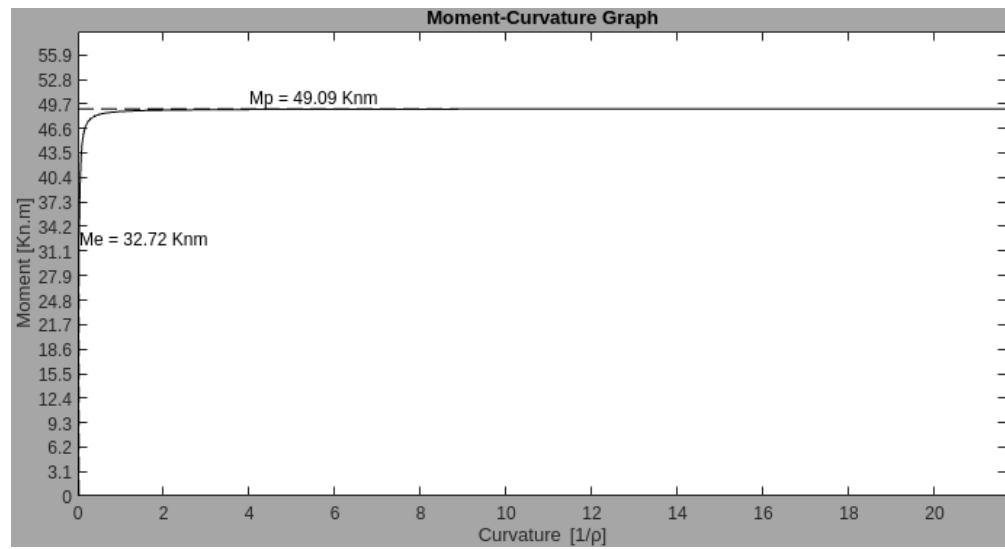
$$T_{P2} = \frac{r}{2} + \frac{\sigma_y}{2 E \kappa} \quad (2.7.3.6)$$

$$M = C1 * C_{P1} + C2 * C_{P2} + T1 * T_{P1} + T2 * T_{P2} \quad (2.7.3.7)$$

$$M = \frac{2 \sigma_y^2 \left(\frac{\pi r^2}{2} + \frac{r^2 \left(\sin \left(2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right) - 2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right)}{2} \right)}{3 E \kappa} - r^2 \sigma_y \left(\frac{r}{2} + \frac{\sigma_y}{2 E \kappa} \right) \left(\sin \left(2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right) - 2 \arccos \left(\frac{\sigma_y}{E \kappa r} \right) \right) \quad (2.7.3.8)$$

Os limites do regime elasto-plástico vão de ($\kappa = Me/(E * I)$) até a plastificação completa da seção.

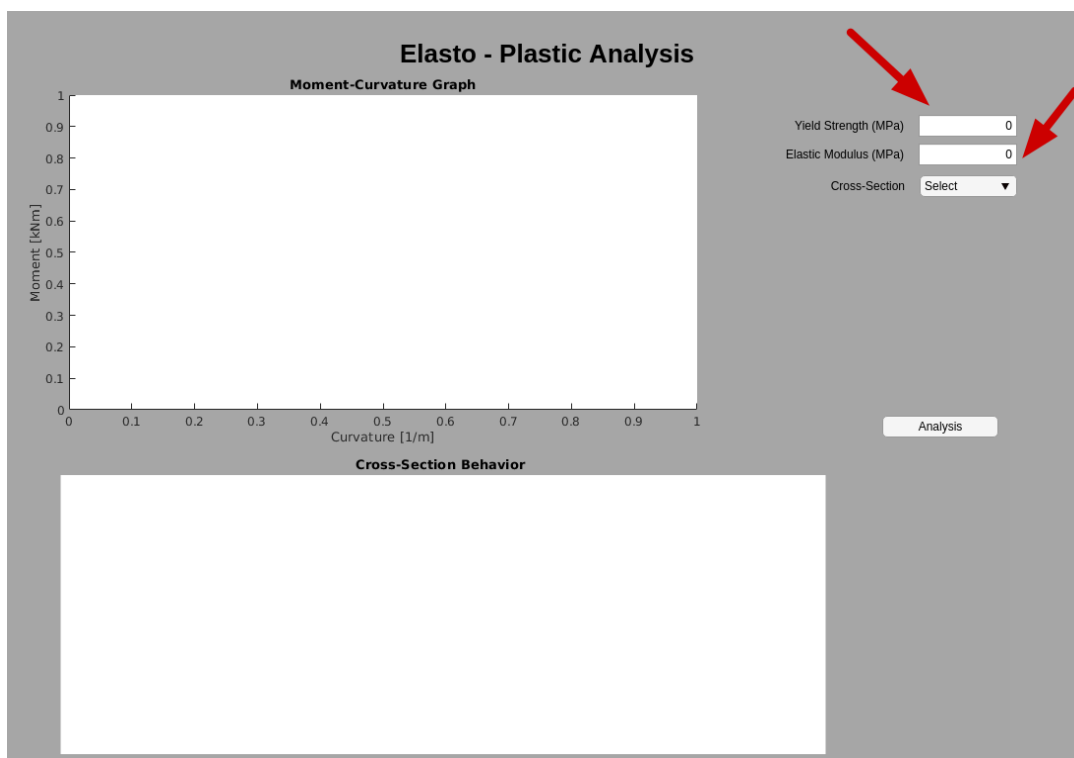
Para um círculo de $r = 0.05m$, tensão de escoamento 250 MPa e Módulo de Elasticidade de $2,0 * 10^5$ MPa, obtemos o seguinte gráfico, figura 2.7.3.2:



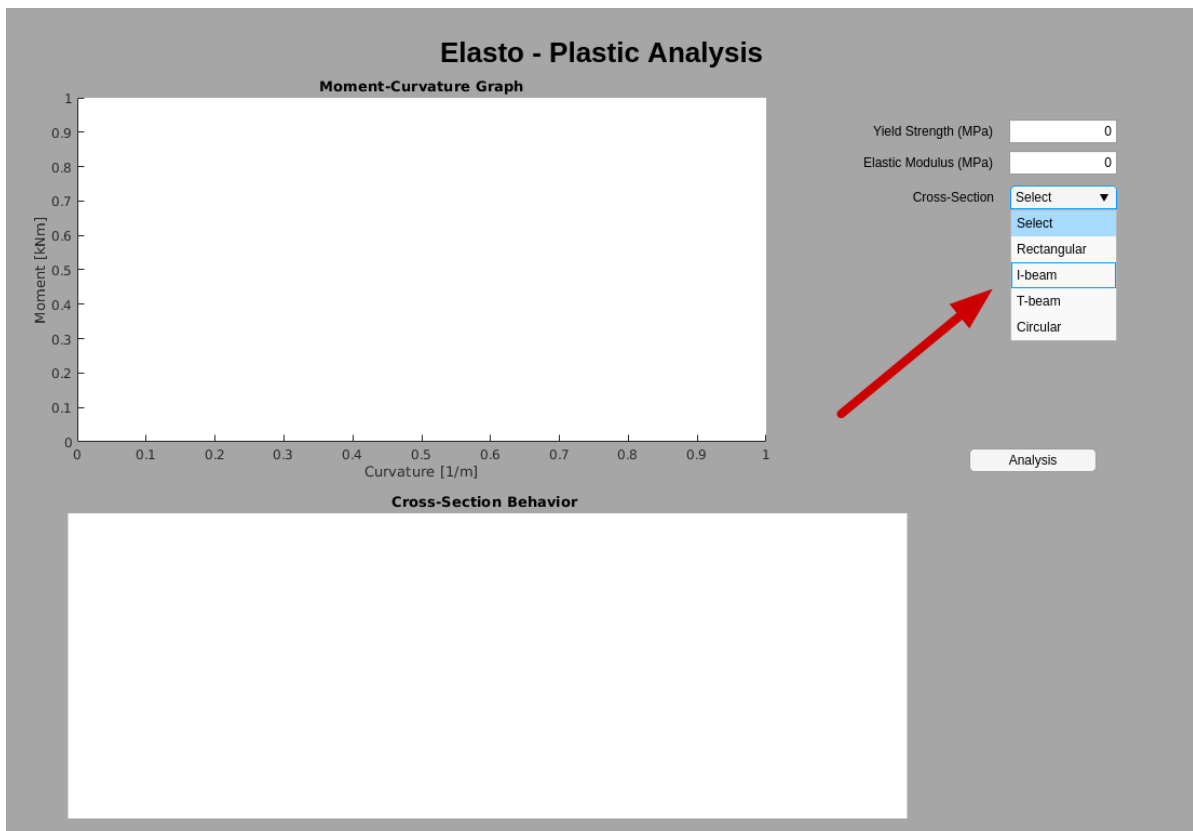
2.7.3.2 – Gráfico Momento-Curvatura - Seção Circular

3 O APLICATIVO, XSECPLASTIF

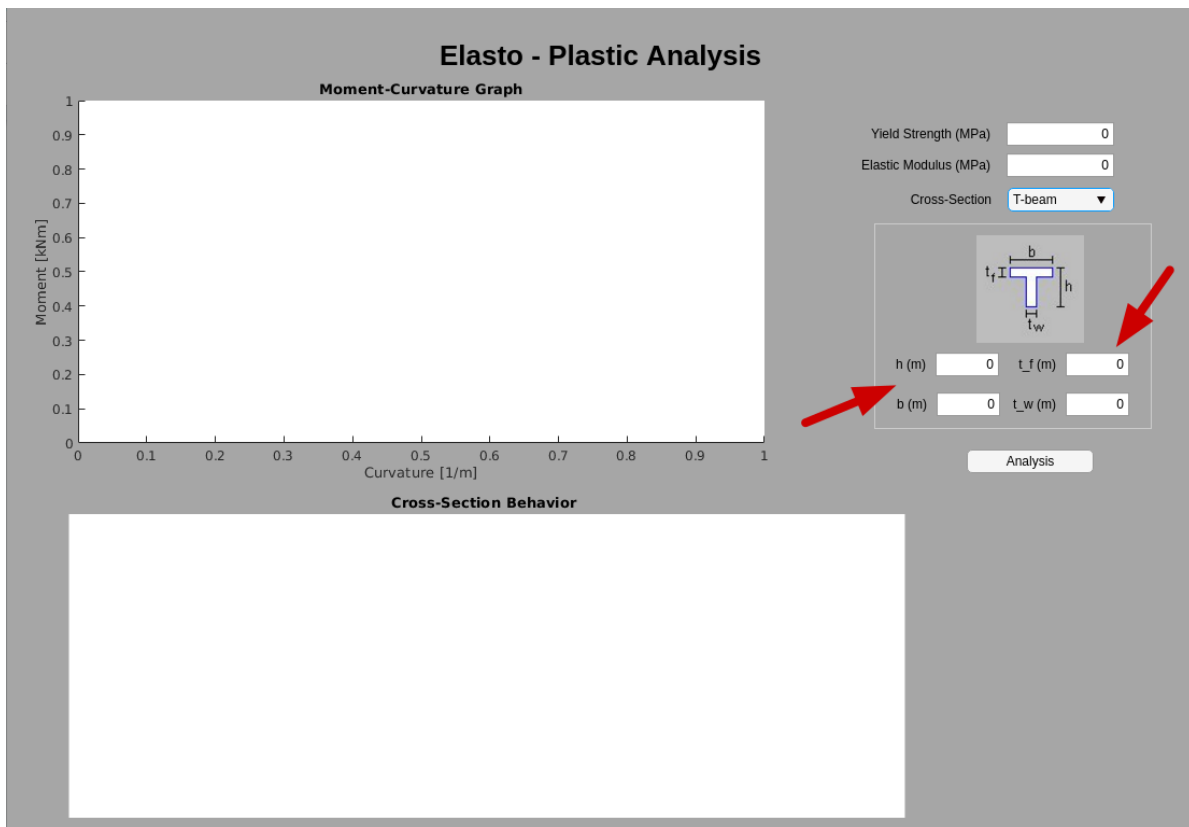
Para melhor experiência do usuário, o aplicativo desenvolvido tem uma interface gráfica (GUI). Decidimos além dos gráficos Momento-Curvatura também desenhar o comportamento da seção transversal, com desenho da seção, a região plastificada fica em vermelho e a região no regime elástico em azul, desenhamos também a configuração da tensão para o determinado momento, escolhido pelo usuário por meio de um slider. O usuário determina os parâmetros do material, figura 3.1, tensão de escoamento e módulo de elasticidade, e seleciona a seção, figura 3.2, posteriormente adiciona os parâmetros geométricos para a seção, figura 3.3.



3.1 – Seleção de parâmetros de Material



3.2 – Seleção da seção transversal



3.3 – Adicionar os parâmetros geométricos da seção

Com a seção selecionada e os parâmetros preenchidos, clique no botão Analysis, figura 3.4, que executa a metodologia desenvolvida no trabalho(seção 2) e plota o gráfico momento curvatura no canvas superior. em seguida é desenhada a seção com o Momento zero no canvas inferior e liberado para o usuário usar o slider para o momento, figura 3.5.



Elasto - Plastic Analysis

Moment-Curvature Graph

Cross-Section Behavior

Yield Strength (MPa)

Elastic Modulus (MPa)

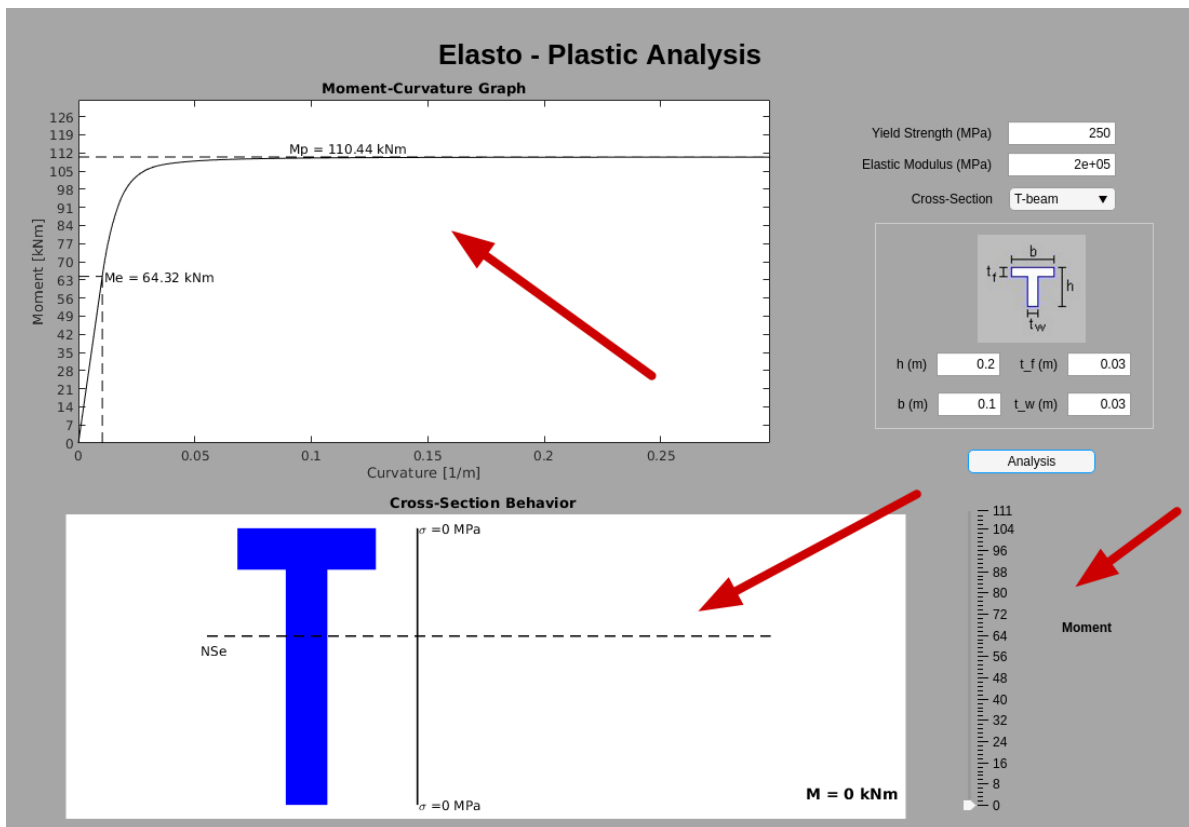
Cross-Section

h (m) t_f (m)

b (m) t_w (m)

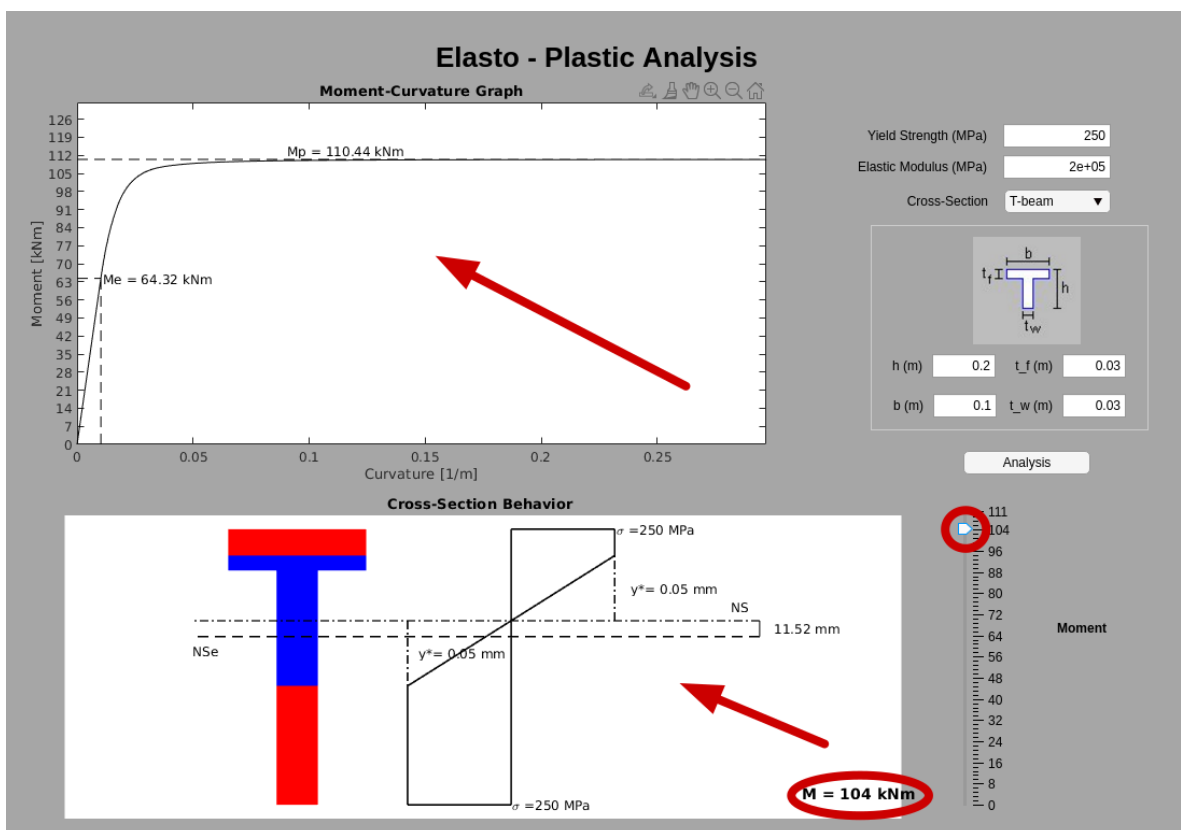
Analysis

3.4 – Adicionar os parâmetros geométricos da seção



3.5 – Gráfico, Seção e Slider

Ao movimentar o slider, figura 3.6 o usuário modifica o Momento aplicado na seção, desenhando em vermelho a região da seção plastificada, em azul a região da seção em regime elástico, também desenha ao lado direito da seção a configuração de Tensão para o momento aplicado.



3.6 – Seção parcialmente plastificada, e configuração da Tensão

O programa vai estar disponível temporariamente em um arquivo .zip no seguinte endereço: <https://web.tecgraf.puc-rio.br/etools/xsecplastif/xsecplastif.zip>



3.1 Classe Abstrata

Para a realização deste trabalho, foi utilizada a programação orientada a objetos. Esse tipo de programação permite um código mais organizado e limpo. A classe criada em si é um conceito abstrato, como um molde, que se torna concreto e palpável através da criação de um objeto por meio das subclasses.

Neste programa, foi criada uma classe abstrata denominada "Xsec" que é mostrada a seguir. Ela define uma template para a criação de subclasses, que serão as respectivas seções transversais. A sua ideia é criar uma classe abstrata para qualquer tipo de seção transversal, de maneira que, dependendo dos dados inseridos pelo usuário a respectiva subclasse é acionada. Dessa maneira, o programa torna-se mais eficiente e possibilita adicionar novas seções transversais de maneira mais fácil e padronizada.

```
CLASSDEF XSEC < HANDLE
```

```
%% PROTECTED ATTRIBUTES
```

```
PROPERTIES (ACCESS = PROTECTED)
```

```
E = 2E+8; % ELASTICITY MODULUS OF MATERIAL (LINEAR PHASE)
```

```
SIGMA_Y = 250000; % YIELDING STRESS OF MATERIAL IN kN/M^2
```

```
I = []; % SECTION MOMENT OF INERTIA
```

```
ME = []; % SECTION LIMIT ELASTIC MOMENT
```



```
KE = []; % SECTION LIMIT ELASTIC CURVATURE
```

```
MP = []; % SECTION PLASTIC MOMENT
```

```
KP_FAC = []; %  $KP\_FAC = KP / KE$ , IN WHICH KP IS THE LIMIT CURVATURE VALUE
```

```
END
```

```
%% CONSTRUCTOR METHOD
```

```
METHODS
```

```
%-----
```

```
% CONSTRUCTOR METHOD, INTENDED TO INITIALIZE AN OBJECT OF THIS
```

```
% CLASS.
```

```
FUNCTION THIS = XSEC(E,SIGMA_Y)
```

```
THIS.E = E;
```

```
THIS.SIGMA_Y = SIGMA_Y;
```

```
END
```

```
END
```

```
%% ABSTRACT METHODS
```

```
METHODS (ABSTRACT = TRUE)
```



%-----

% THIS METHOD MUST BE IMPLEMENTED BY A CLIENT SUBCLASS.

% IT RETURNS THE ELASTIC RIGIDITY OF CROSS-SECTION

% PRODUCT OF ELASTICITY MODULUS BY MOMENT OF INERTIA).

EI = ELASTICRIGIDITY(THIS)

%-----

% THIS METHOD MUST BE IMPLEMENTED BY A CLIENT SUBCLASS.

% IT RETURNS THE LIMIT ELASTIC MOMENT OF CROSS-SECTION.

ME = ELASTICMOMENT(THIS)

%-----

% THIS METHOD MUST BE IMPLEMENTED BY A CLIENT SUBCLASS.

% IT RETURNS THE PLASTIC MOMENT OF CROSS-SECTION.

MP = PLASTICMOMENT(THIS)

%-----

% THIS METHOD MUST BE IMPLEMENTED BY A CLIENT SUBCLASS.

% IT RETURNS MOMENT VS. CURVATURE CURVE OF CROSS-SECTION.



[KAPPA, M] = MOMENTCURVATURE(THIS)

%-----

% THIS METHOD MUST BE IMPLEMENTED BY A CLIENT SUBCLASS.

% IT RETURNS THE MOMENT VS. RELATIVE ROTATION CURVE OF CROSS-SECTION

% FOR A GIVEN PLASTIFICATION CHARACTERISTIC LENGTH (L_P).

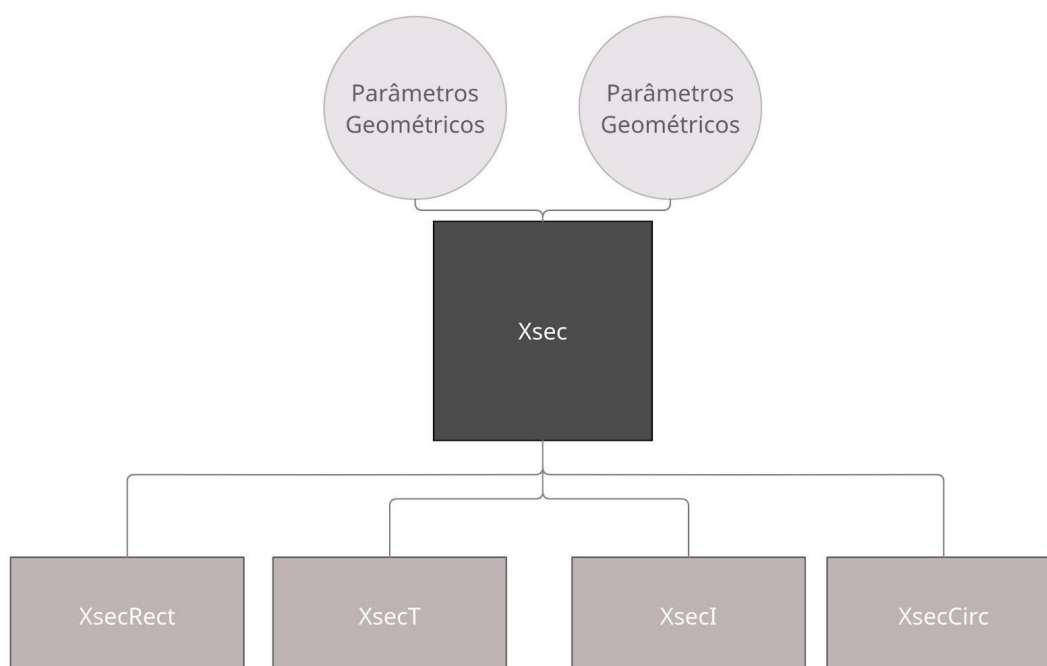
[ROT, M] = MOMENTROTATION(THIS,L_P)

END

END

3.2 CLASSES UTILIZADAS

Para uma boa compreensão do funcionamento do programa a figura 3.2.1 representa o diagrama de classes. os parâmetros geométricos e materiais são inseridos pelo usuário junto a escolha da seção transversal, com isso a classe Xsec manda os dados para a respectiva subclasse com a seção transversal correta. Após os métodos para os cálculos serem completos o programa retorna para o usuário de maneira simples o Gráfico momento x rotação relativa e o modelo de plastificação interativo.



3.2.1 – Diagrama de Herança da classe Xsec

Cada seção transversal possui sua própria classe, sendo a mesma uma subclasse da "Xsec" herdando suas propriedades. Essas subclasses possuem a mesma estrutura e métodos, variando apenas as suas variáveis e equações, dentro das mesmas é onde estão sendo calculados os pontos para o gráfico de momento-rotação. As fórmulas das funções foram obtidas previamente com o uso da matemática simbólica como mostrado no capítulo de metodologia. Para exemplificar segue abaixo a classe "XsecRect" que possui todos os métodos relativos à seção transversal retangular.



```

CLASSDEF XSECRECT < XSEC

%% PROTECTED ATTRIBUTES

PROPERTIES (ACCESS = PROTECTED)

    h = [];    % SECTION HEIGHT

    b = [];    % SECTION WIDTH

END

%% CLASS (CONSTANT) PROPERTIES

PROPERTIES (CONSTANT)

    NPTS = 50; % NUMBER OF POINTS OF INTERMEDIATE MOMENT-CURVATURA CURVE

END

%% CONSTRUCTOR METHOD

METHODS

FUNCTION THIS = XSECRECT(E,SIGMA_Y,h,b)

    THIS = THIS@XSEC(E,SIGMA_Y);

    THIS.h = h;

    THIS.b = b;

    THIS.I = THIS.b * THIS.h^3 / 12;

    THIS.Me = THIS.SIGMA_Y * THIS.b * THIS.h^2 / 6;

    THIS.Ke = THIS.Me / (THIS.E * THIS.I);
    
```



```

        THIS.Mp = THIS.SIGMA_Y * THIS.B * THIS.H^2 / 4;

    END

END

%% METHODS THAT IMPLEMENT ABSTRACT METHODS OF SUPER-CLASS

METHODS

%-----

% THIS FUNCTION RETURNS THE ELASTIC RIGIDITY OF CROSS-SECTION

% PRODUCT OF ELASTICITY MODULUS BY MOMENT OF INERTIA).

FUNCTION EI = ELASTICRIGIDITY(THIS)

    EI = THIS.E * THIS.I;

END

%-----

% THIS FUNCTION RETURNS THE LIMIT ELASTIC MOMENT OF CROSS-SECTION.

FUNCTION ME = ELASTICMOMENT(THIS)

    ME = THIS.Me;

END

%-----

% THIS FUNCTION RETURNS THE PLASTIC MOMENT OF CROSS-SECTION.

FUNCTION Mp = PLASTICMOMENT(THIS)

    Mp = THIS.Mp;

END

```



```
%-----

% IT RETURNS THE PARTIAL PLASTIC MOMENT VS. CURVATURE CURVE

% OF CROSS-SECTION.

FUNCTION [KAPPA, M] = MOMENTCURVATURE(THIS)

    KAPPA = [0 THIS.KE*LOGSPACE(0,3,THIS.NPTS)];

    B = THIS.B;

    H = THIS.H;

    E = THIS.E;

    SIGMA_Y = THIS.SIGMA_Y;

    M = (B*SIGMA_Y/12)*(3*H^2 - (4*SIGMA_Y^2*KAPPA.^-2) / E^2);

    M(1) = 0;

END

%-----

% THIS METHOD MUST BE IMPLEMENTED BY A CLIENT SUBCLASS.

% THIS FUNCTION RETURNS THE PARTIAL PLASTIC MOMENT VS. RELATIVE ROTATION

% CURVE OF CROSS-SECTION FOR A GIVEN PLASTIFICATION CHARACTERISTIC

% LENGTH (L_P).

FUNCTION [ROT, M] = MOMENTROTATION(THIS,L_P)

    ROT = [0 THIS.KE*L_P*LOGSPACE(0,3,THIS.NPTS)];

    B = THIS.B;

    H = THIS.H;

    E = THIS.E;
```



```
SIGMA_Y = THIS.SIGMA_Y;
```

```
M = (B*SIGMA_Y/12)*(3*H^2 - (4*SIGMA_Y^2*L_P^2*ROT.^-2) / E^2);
```

```
M(1) = 0;
```

```
END
```

```
END
```

```
END
```



4 CONCLUSÃO

A realização deste trabalho possibilitou o aprofundamento da matéria CIV2801 - Fundamentos de computação gráfica aplicada. Foi possível desenvolver um programa em MATLAB, capaz de gerar Curvas Momento x Curvatura com uma interface gráfica interativa. Além disso, foi feito um estudo no desenvolvimento da plastificação de seções transversais, com foco no comportamento de uma estrutura na transição entre o regime elástico de serviço e o regime último de ruptura.

Ao desenvolver o programa deste trabalho foi importante a utilização da matemática simbólica do MATLAB, que foi essencial na geração das equações de momento para as seções transversais. A programação orientada a objetos também permitiu um código mais organizado, limpo e com possibilidade de expansão para novas seções.

Para continuação do trabalho, além da adição do tratamento de outros tipos de seção transversal, sugere-se a consideração de esforço axial na determinação de curvas momento-curvatura.

Finalmente, este trabalho permitiu o re-aprendizado de assuntos abordados no curso de engenharia civil. Além disso, foi desenvolvido um programa completo para análise de curvas momento-rotação de ligações semirrígidas para simular plastificação de seções transversais.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Martha, L.F., "Análise de Estruturas - Conceitos e Métodos Básicos", 2a edição. Editora GEN LTC, 2017.

Dias, Christian Leite, 2021, Análise de estruturas metálicas com ligações semirrígidas utilizando a ferramenta educacional FTOOL. Tese de mestrado. PUC-RIO.