B
Limitante de Cramér-Rao: modelo síncrono com uma portadora BPSK

O primeiro cenário a ser analisado para o cálculo do limitante de Cramér-Rao é o mais simples de todos, que apresenta apenas uma portadora BPSK no modelo síncrono, isto é, utiliza-se pulso raiz de Nyquist e não há interferência entre símbolos. O vetor de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\varphi}$ deste cenário é

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \omega & \Re(B) & \Im(B) \end{bmatrix}^T \tag{B-1}$$

onde ω é a defasagem provocada pela DOA e B é a amplitude complexa da portadora. O parâmetro ω se relaciona com a DOA ψ de acordo com a função

$$\omega = -\pi \operatorname{sen}(\psi) \tag{B-2}$$

Ao se utilizar um *array* setorizado que cobre uma região onde ψ pode variar no intervalo $[-60^0; 60^0)$, nota-se que a relação entre ω e ψ em (B-2) é biunívoca, de modo que o vetor de parâmetros pode ser explicitado em função de ψ,

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \psi & \Re(B) & \Im(B) \end{bmatrix}^T \tag{B-3}$$

e tendo em vista que (B-2) não é função do vetor de observações, a análise a seguir pode ser conduzida utilizando qualquer dos dois vetores de parâmetros.

A função de menos-log-verossimilhança deste cenário é

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi}) = \text{cte} + \frac{Nm}{2N_0}A^2 - \sum_{k=1}^{N} \ln\cosh(f_k) \tag{B-4}$$

onde

$$f_k = \frac{1}{N_0}\Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{S} B] \tag{B-5}$$

com o vetor $\mathbf{S}$ definido como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{j\omega} & \cdots & \mathrm{e}^{j(m-1)\omega} \end{bmatrix}^T \tag{B-6}$$

onde ^{T} é o operador de transposição. A derivada de $\mathbf{S}$ em relação a ω é imediata e, por esta razão, (B-1) será preferido no desenvolvimento a seguir. Embora o limitante de ψ seja mais importante na prática, as derivadas em ψ podem ser facilmente obtidas a partir das derivadas em ω calculadas a seguir. Esta discussão será mais aprofundada após o desenvolvimento do limitante para ω.

As derivadas de primeira ordem de (B-4) originam o estimador do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\varphi}$, dado por

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S} B] \tanh\{f_k\} \tag{B-7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)} = \frac{mN}{N_0} \Re(B) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Re[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \tanh\{f_k\} \tag{B-8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B)} = \frac{mN}{N_0} \Im(B) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \tanh\{f_k\} \tag{B-9}$$

As derivadas de segunda ordem (incluindo as derivadas mistas) são obtidas diretamente destas expressões. Assim,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega^2} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}^2 \mathbf{S} B] \tanh\{f_k\} - \frac{1}{N_0^2} \sum_{k=1}^{N} \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S} B]^2 \operatorname{sech}^2\{f_k\} \tag{B-10}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)^2} = \frac{mN}{N_0} - \frac{1}{N_0^2} \sum_{k=1}^{N} \Re[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k]^2 \operatorname{sech}^2\{f_k\} \tag{B-11}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B)^2} = \frac{mN}{N_0} - \frac{1}{N_0^2} \sum_{k=1}^{N} \Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k]^2 \operatorname{sech}^2\{f_k\} \tag{B-12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega \, \partial \Re(B)} = {} & \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S}] \tanh\{f_k\} + \\ & + \frac{1}{N_0^2} \sum_{k=1}^{N} \Re[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S} B] \operatorname{sech}^2\{f_k\}\end{aligned} \tag{B-13}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega\, \partial \Im(B)} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S}] \tanh\{f_k\} + \\ + \frac{1}{N_0^2} \sum_{k=1}^{N} \Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S} B] \operatorname{sech}^2\{f_k\} \quad \text{(B-14)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)\, \partial \Im(B)} = \frac{1}{N_0^2} \sum_{k=1}^{N} \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{S}] \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{S}] \operatorname{sech}^2\{f_k\} \quad \text{(B-15)}$$

Para valores altos de E_b/N_0, o valor de f_k será suficientemente alto para que

$$\begin{aligned} \tanh\{f_k\} &\approx \operatorname{sgn}\{f_k\} \\ \operatorname{sech}^2\{f_k\} &\approx 0 \end{aligned} \quad \text{(B-16)}$$

onde $\operatorname{sgn}(x)$ é igual a 1 quando x é positivo, -1 quando negativo e zero quando nulo. Verifica-se que estas aproximações apresentam erros suficientemente pequenos para $E_b/N_0 \geq -6\,\text{dB}$, de modo que elas serão utilizadas sem restrições por abranger toda a faixa de interesse das simulações ($-2\,\text{dB} \leq E_b/N_0 \leq 10\,\text{dB}$). As derivadas de segunda ordem aproximadas serão, então, dadas por

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega^2} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}^2 \mathbf{S} B] \operatorname{sgn}\{f_k\} \quad \text{(B-17)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B)^2} = \frac{mN}{N_0} \quad \text{(B-18)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega\, \partial \Re(B)} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S}] \operatorname{sgn}\{f_k\} \quad \text{(B-19)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega\, \partial \Im(B)} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S}] \operatorname{sgn}\{f_k\} \quad \text{(B-20)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)\, \partial \Im(B)} = 0 \quad \text{(B-21)}$$

O valor esperado com relação ao vetor de observações $\mathbf{z}_k$ é imediato em (B-18) e (B-21). Para as demais expressões, no entanto, o seu cálculo é mais trabalhoso e requer um pouco de cuidado. Nota-se que, tanto $\Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}^2 \mathbf{S} B]$, em (B-17), como $\Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S}]$ e $\Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S}]$, respectivamente em (B-19) e (B-20), podem ser representados como $g(\mathbf{Z}_k)$, onde g é uma função linear escalar ímpar do vetor de observações no instante k. Assim, calculando

$$E\Big[g(\mathbf{z}_k) \cdot \operatorname{sgn}\{f_k\} \Big| \boldsymbol{\varphi}\Big]$$

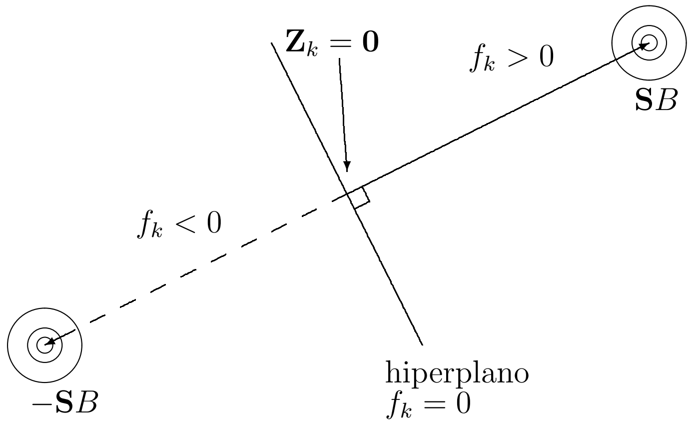

Figura B.1: Fdp condicional do vetor de observações em um instante k para o cenário com uma portadora BPSK com correção de relógio.

pode-se facilmente encontrar o valor esperado de (B-17), (B-19) e (B-20).

A fdp condicional do vetor de observações $\mathbf{z}_k$ é ilustrada na Fig. B.1. Ela é constituída pela média de duas gaussianas centradas em $\pm\mathbf{S}B$. Percebe-se que, na região definida à direita do hiperplano $f_k = 0$, o valor de f_k será positivo, logo $\text{sgn}\{f_k\} = 1$. Na região à esquerda deste hiperplano, f_k será negativo e $\text{sgn}\{f_k\} = -1$. Assim,

$$E\Big[g(\mathbf{z}_k) \cdot \text{sgn}\{f_k\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{1}{2}\Big(I_1 - I_2 + I_3 - I_4\Big) \tag{B-22}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{D_{\mathbf{Z}_k}|f_k>0} g(\mathbf{Z}_k)\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_k-\mathbf{S}B\|^2}\mathrm{d}\mathbf{Z}\\
I_2 &= \int_{D_{\mathbf{Z}_k}|f_k<0} g(\mathbf{Z}_k)\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_k-\mathbf{S}B\|^2}\mathrm{d}\mathbf{Z}\\
I_3 &= \int_{D_{\mathbf{Z}_k}|f_k>0} g(\mathbf{Z}_k)\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_k+\mathbf{S}B\|^2}\mathrm{d}\mathbf{Z}\\
I_4 &= \int_{D_{\mathbf{Z}_k}|f_k<0} g(\mathbf{Z}_k)\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_k+\mathbf{S}B\|^2}\mathrm{d}\mathbf{Z}
\end{aligned}$$

com $\mathrm{d}\mathbf{Z} = \mathrm{d}\Re(Z_1)\,\mathrm{d}\Im(Z_1)\,\mathrm{d}\Re(Z_2)\cdots\mathrm{d}\Im(Z_m)$ e $D_{\mathbf{Z}_k}$ representando o domínio complexo m-dimensional do vetor $\mathbf{Z}_k$. Estas integrais são tais que, ao se substituir $\mathbf{Z}_k$ por $-\mathbf{Z}_k$, e lembrando que a função g é ímpar, tem-se que $I_3 = -I_2$ e $I_4 = -I_1$. Logo,

$$E\Big[g(\mathbf{z}_k) \cdot \text{sgn}\{f_k\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = I_1 - I_2 = I_1 + I_2 - 2I_2 = g(\mathbf{S}B) - 2I_2 \tag{B-23}$$

pois $I_1 + I_2$ representa a integral em todo o domínio de $\mathbf{Z}_k$ da gaussiana de média $+\mathbf{S}B$ ponderada pela função linear g. Para resolver I_2, é necessário efetuar uma rotação no espaço $\mathbf{Z}_k$ de modo que o primeiro eixo do novo espaço aponte na direção perpendicular ao hiperplano $f_k = 0$. Os demais eixos do novo espaço devem permanecer situados neste hiperplano, para manter a ortogonalidade da base. A matriz ortonormal $\mathbf{P}$ que faz a rotação de $\mathbf{Z}_k$ no novo espaço $\mathbf{Y}_k$ é definida como

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}_k \qquad \rightleftharpoons \qquad \mathbf{Z}_k = \mathbf{P}^H \cdot \mathbf{Y}_k$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_r \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \mathbf{P}_1 = m^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-j\theta}\, \mathbf{S}^H \\ \mathbf{P}_r \text{ é tal que } \mathbf{P}_r \mathbf{S} B = \mathbf{0} \end{array} \tag{B-24}$$

onde ^{H} é o operador hermitiano, $\mathbf{P}_1$ representa a primeira linha de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}_r$ inclui as linhas restantes. O primeiro elemento do vetor $\mathbf{Y}_k$ pode ser realçado através de

$$\mathbf{Y}_k = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \mathbf{Y}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \mathbf{Z}_k \\ \mathbf{P}_r \mathbf{Z}_k \end{pmatrix} \tag{B-25}$$

enquanto que $\mathbf{Z}_k$ pode ser expresso por

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{P}^H \cdot \mathbf{Y}_k = \mathbf{P}_1^H \cdot Y_1 + \mathbf{P}_r^H \cdot \mathbf{Y}_r \tag{B-26}$$

Como a matriz $\mathbf{P}$ é ortonormal, o elemento diferencial $\mathrm{d}\mathbf{Y}$ é igual a $\mathrm{d}\mathbf{Z}$. Na exponencial de I_2, destaca-se que

$$\|\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}B\|^2 = \|\mathbf{P}^H(\mathbf{Y}_k - \mathbf{P}\mathbf{S}B)\|^2 = \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{P}\mathbf{S}B\|^2 \tag{B-27}$$

pois $\mathbf{P}^H\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}^H = \mathbf{I}$. Utilizando (B-26) e (B-27) e explorando a linearidade da função g, chega-se a

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{2m\text{–}1 \text{ integrais}} g(\mathbf{P}^H \mathbf{Y}_k) \frac{1}{(2\pi N_0)^m}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{P}^H\mathbf{Y}_k - \mathbf{S}B\|^2} \mathrm{d}\mathbf{Y} = \\ &= \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{2m\text{–}1 \text{ integrais}} g(\mathbf{P}_1^H Y_1) \frac{1}{(2\pi N_0)^m}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Y}_k - \mathbf{P}\mathbf{S}B\|^2} \mathrm{d}\mathbf{Y} + \\ &+ \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{2m\text{–}1 \text{ integrais}} g(\mathbf{P}_r^H \mathbf{Y}_r) \frac{1}{(2\pi N_0)^m}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Y}_k - \mathbf{P}\mathbf{S}B\|^2} \mathrm{d}\mathbf{Y} \end{aligned} \tag{B-28}$$

A última integral em (B-28) se transforma em

$$g(\mathbf{P}_r^H\mathbf{0})\left[\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi N_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}|Y_1-A\sqrt{m}|^2}\mathrm{d}\Im(Y_1)\Re(Y_1)\right] \tag{B-29}$$

que vale zero, pois g é uma função ímpar contínua. A primeira integral em (B-28) simplifica para

$$I_2=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}g(\mathbf{P}_1^HY_1)\frac{1}{2\pi N_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}|Y_1-A\sqrt{m}|^2}\mathrm{d}\Im(Y_1)\Re(Y_1) \tag{B-30}$$

o que elimina a dependência com a matriz desconhecida $\mathbf{P}_r$. Analogamente, considerando $Y_1=\Re(Y_1)+j\Im(Y_1)$, pode-se decompor (B-30) em duas integrais, conforme (B-28). A integral que contiver o termo $g(j\mathbf{P}_1^H\Im(Y_1))$ será nula, pelo mesmo motivo que faz o termo em (B-29) valer zero. Assim,

$$I_2=g(\mathbf{P}_1^H)\int_{-\infty}^{0}\Re(Y_1)\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}[\Re(Y_1)-A\sqrt{m}]^2}\mathrm{d}\Re(Y_1) \tag{B-31}$$

pois g é uma função linear e $\Re(Y_1)$ é um escalar real. Resolvendo por substituição, tem-se

$$\begin{aligned}I_2&=g(\mathbf{P}_1^H)\left(\int_{\infty}^{\frac{mA^2}{2N_0}}\sqrt{\frac{N_0}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u+A\sqrt{m}\int_{-\infty}^{-A\sqrt{\frac{m}{N_0}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\right)=\\&=g(\mathbf{P}_1^H)\left[-\sqrt{\frac{N_0}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}}+A\sqrt{m}\;\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{N_0}}\Big)\right]\end{aligned} \tag{B-32}$$

onde

$$\mathrm{Q}(x)=\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \tag{B-33}$$

Sendo $g(\mathbf{S}B)=g(\mathbf{P}_1^H)\cdot A\sqrt{m}$, tem-se de (B-23) que

$$\begin{aligned}&E\Big[g(\mathbf{z}_k)\cdot\mathrm{sgn}\{f_k\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=\\&=g(\mathbf{S}B)\Big\{1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}}-2\,\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{N_0}}\Big)\Big\}\approx g(\mathbf{S}B)\end{aligned} \tag{B-34}$$

e, assim, o valor esperado das derivadas de segunda ordem são dados por

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=\frac{NA^2}{N_0}\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} \tag{B-35}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Im(B)^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=\frac{mN}{N_0} \tag{B-36}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Re(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = -\frac{NA}{N_0}\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} \tag{B-37}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{NA}{N_0}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} \tag{B-38}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)\,\partial\Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = 0 \tag{B-39}$$

e a matriz de informação de Fisher será dada por

$$\frac{N}{N_0}\cdot\begin{bmatrix} A^2\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} & -A\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & A\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} \\ -A\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & m & 0 \\ A\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & 0 & m \end{bmatrix} \tag{B-40}$$

com determinante Δ igual a

$$\Delta = \frac{N^3}{N_0^3}A^2\Big[m^2\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - m\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2\Big] \tag{B-41}$$

e, assim, o limitante de Cramér-Rao para a variância do erro de estimação do parâmetro ω será igual a

$$\mathrm{LCR}_\omega = \frac{N^2}{N_0^2}\cdot\frac{m^2}{\Delta} = \frac{N_0}{NA^2}\cdot\frac{m}{m\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - \mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2} \tag{B-42}$$

Para determinar o limitante de Cramér-Rao da variância do erro de estimação da DOA ψ, deve-se repetir esta análise utilizando o vetor de parâmetros definido em (B-3). Felizmente, a maior parte dos cálculos pode ser reaproveitada. Considerando que

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\psi} = \frac{\partial\omega}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega} = -\pi\cos(\psi)\cdot\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega} \tag{B-43}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\psi^2} &= \frac{\partial^2\omega}{\partial\psi^2}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\right)^2\cdot\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega^2} = \\ &= \pi\,\mathrm{sen}(\psi)\cdot\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega} + \pi^2\cos^2(\psi)\cdot\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega^2}\end{aligned} \tag{B-44}$$

e que as derivadas de primeira e segunda ordem de ω em relação a ψ são constantes em $\mathbf{z}_k$, tem-se, segundo o resultado obtido em (B-34), que

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\psi^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \pi\,\mathrm{sen}(\psi)\cdot 0 + \pi^2\cos^2(\psi)\cdot E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] \tag{B-45}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\psi\,\partial\Re(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = -\pi\cos(\psi)\cdot E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Re(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] \qquad \text{(B-46)}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\psi\,\partial\Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = -\pi\cos(\psi)\cdot E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] \qquad \text{(B-47)}$$

e as outras derivadas não se alteram. Considerando agora que ψ é uma v.a. uniformemente distribuída em $[-60^0, 60^0)$, o valor esperado em ψ de (B-45)–(B-47) também precisará ser calculado para que a matriz de informação de Fisher seja obtida, pois

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}\ln p_{\mathbf{z},\psi|B}(\mathbf{Z},\Psi) &= \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}\ln p_{\mathbf{z}|\psi,B}(\mathbf{Z}) + \\ &+\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}\ln p_{\psi}(\Psi) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}\ln p_{\mathbf{z}|\psi,B}(\mathbf{Z}) \qquad \text{(B-48)}\end{aligned}$$

ou seja, como a fdp de uma v.a. uniforme tem derivada nula, a matriz de informação de Fisher obtida no caso MAP difere da obtida no caso ML pelo acréscimo do valor esperado em ψ. Logo,

$$E\Big[\cos(\psi)\Big] = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos(\psi)\frac{3}{2\pi}\,\mathrm{d}\psi = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \qquad \text{(B-49)}$$

$$E\Big[\cos^2(\psi)\Big] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos(2\psi)\frac{3}{2\pi}\,\mathrm{d}\psi = \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \qquad \text{(B-50)}$$

e o valor esperado em ψ de (B-45)–(B-47) é dado por

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\psi^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = A^2\Big(\frac{\pi^2}{2}+\frac{3\sqrt{3}\pi}{8}\Big)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} \qquad \text{(B-51)}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\psi\,\partial\Re(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = A\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} \qquad \text{(B-52)}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\psi\,\partial\Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = -A\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} \qquad \text{(B-53)}$$

e o determinante da matriz de informação de Fisher será

$$\Delta = \frac{N^3}{N_0^3}A^2\Big[\Big(\frac{\pi^2}{2}+\frac{3\sqrt{3}\pi}{8}\Big)m^2\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - \frac{27}{4}m\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2\Big] \qquad \text{(B-54)}$$

Logo, o limitante de Cramér-Rao para a variância do erro de estimação da

DOA ψ vale

$$\begin{aligned} \mathrm{LCR}_\psi = \frac{N^2}{N_0^2}\cdot\frac{m^2}{\Delta} = \frac{N_0}{NA^2}\cdot\frac{m}{(\frac{\pi^2}{2}+\frac{3\sqrt{3}\pi}{8})m\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - \frac{27}{4}\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2} = \\ = \frac{8N_0}{NA^2}\cdot\frac{m}{(4\pi^2+3\sqrt{3}\pi)m\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - 54\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2} \end{aligned} \quad \text{(B-55)}$$

onde ψ, de acordo com (B-49) e (B-50), é dado em radianos. Para determinar o limitante inferior da variância do erro de ψ em graus, deve-se realizar uma mudança de escala. Como

$$\mathrm{Var}(\psi) = E\left[(\hat{\psi}-\psi)^2\right] \geq LCR_\psi \quad \text{(B-56)}$$

percebe-se que a variância de ψ, em graus, será $180^2/\pi^2$ vezes a variância de ψ em radianos. Logo, o limitante de Cramér-Rao de ψ em graus, pode ser obtido simplesmente multiplicando a expressão obtida em (B-55) por $180^2/\pi^2$.